

## EXPECTATIVAS Y PRIMA POR RIESGO INFLACIONARIO CON UNA MEDIDA DE COMPENSACIÓN A LA INFLACIÓN

*Luis Fernando Melo Velandia  
y Joan Camilo Granados Castro\*\**

### RESUMEN

En este documento se estima una medida de compensación inflacionaria (*Break Even Inflation*) usando los rendimientos de los bonos de deuda del gobierno colombiano (TES) en pesos e indizados a unidades de valor real (UVR) para el periodo comprendido entre enero de 2003 y noviembre de 2009. Esta medida se descompone en expectativas de inflación y prima por riesgo inflacionario. Las expectativas de inflación se calculan con base en la representación de estado espacio de un modelo afín de estructura a término extendido. Con objeto de mejorar los pronósticos, este modelo incorpora las expectativas de inflación a 12 meses de la encuesta mensual del Banco de la República.

Los resultados muestran una tendencia a la baja tanto de las expectativas de inflación como de la prima por riesgo inflacionario. Esto puede deberse al aumento de la confianza en la política monetaria por parte de los agentes. Además, los resultados indican que a corto plazo, la compensación inflacionaria es un buen indicador de expectativas de inflación.

\* *Palabras clave:* compensación inflacionaria, prima por riesgo inflacionario, expectativas de inflación, modelos de estado espacio, modelos afines de estructura a término. *Clasificación JEL:* C13, C50, E31, E43. Artículo recibido el 26 de marzo y aceptado el 5 de octubre de 2011.

\*\* Banco de la República, Bogotá (correo electrónico: [lmelovel@banrep.gov.co](mailto:lmelovel@banrep.gov.co)).

## ABSTRACT

We estimate the Break Even Inflation using the nominal and real government Colombian bonds for the period January 2003 to November 2009. This measure is decomposed in inflation expectations and inflation risk premium. The inflation expectations are calculated using a state-space representation of an extended affine term structure model. In order to improve the forecasts, this model incorporates the inflation expectations 12 months ahead of the Colombian Central Bank survey.

The results show an inflation expectation downward trend, which may be related to an increasing confidence in monetary policy. This hypothesis is also supported by a decreasing trend in the inflation risk premium for medium and long term maturities (two and five years). Finally, the results indicate that the break even inflation is a good indicator of the inflation expectations for the short term forecast horizon (one year).

## INTRODUCCIÓN

La curva de rendimientos de las tasas de interés contiene información relevante de la economía, toda vez que sintetiza las percepciones de los agentes acerca de su estado futuro. Por ejemplo, en Arango y Arosenema (2003) se argumenta que el tramo corto de la curva cupón cero de los TES posee información de expectativas de inflación a mediano plazo, y con base en esta información se usa la ecuación de Fisher para examinar escenarios futuros de inflación con diferentes tipos de expectativas. En este contexto, una medida ampliamente utilizada es el diferencial entre los rendimientos de los bonos nominales y reales, conocido en la bibliografía como compensación inflacionaria (CI). Esta refleja la compensación requerida para que los rendimientos de los dos tipos de bonos sean equivalentes para un vencimiento dado.

Por tanto, la CI es una medida basada en la información del mercado que refleja la inflación esperada durante el periodo de maduración de los títulos y por ende constituye una opción a las encuestas de expectativas de inflación. Estas últimas, por lo general, abarcan una porción pequeña de la población, generan información menos oportuna y tienen disponibilidad para pocos horizontes de tiempo. Además, las respuestas dadas por los encuestados no forzosamente son representativas del mercado, toda vez que son subjetivas y pueden depender de noticias recientes.

A pesar de lo anterior, la CI está conformada por componentes adicionales a la expectativa de inflación, por lo que se debe ser cuidadoso al usarla como una medida de inflación esperada. Sin embargo, la amplia disponibilidad de información concerniente a la CI y la posibilidad de calcularla para cualquier periodo de maduración, hacen que esta medida sea de particular interés para los políticos y agentes financieros.

La bibliografía al respecto cuenta con diversos trabajos que separan las expectativas de inflación o la prima por riesgo inflacionario de la CI. Andersen (2009) descompone la CI en el rendimiento del bono real, las expectativas de inflación y la prima por riesgo para la zona Euro. Este artículo identifica dicha prima y también destaca que las estimaciones son mejoradas al incluir las expectativas de inflación de las encuestas. Grishchenko y Jing-zhi (2010) descomponen también la CI para estimar la prima por riesgo inflacionario inherente en el rendimiento de los TIPS para los Estados Unidos, la estrategia utilizada consiste en identificar las expectativas de inflación por medio de tres metodologías que tienen en cuenta la información pasada de la inflación, un modelo que relaciona otras variables macro con la inflación y encuestas. Por otra parte, Hordahl y Tristani (2010) utilizan un modelo de estado espacio que relaciona los rendimientos nominales y reales con variables macro, variables no observadas y la inflación para estimar una prima por riesgo inflacionario de la CI y las expectativas de inflación.

Para el caso colombiano, Arias *et al* (2006) calculan la CI y otro indicador, el cual busca eliminar algunos sesgos de la CI. Ellos encuentran que la mediana de las diferencias entre estas dos medidas es tan sólo de 8 puntos básicos. Sin embargo, estos autores no realizan estimaciones directas de los componentes de esta medida, expectativas promedio de inflación y prima por riesgo inflacionario.

En este documento se calcula la CI a partir de los rendimientos de TES en pesos y TES indizados a la UVR para el periodo comprendido entre enero de 2003 y noviembre de 2009. Posteriormente se descompone la CI en expectativas promedio de inflación y prima por riesgo inflacionario. Las expectativas de inflación se calculan con base en un modelo de estado espacio siguiendo metodologías desarrolladas por García y Werner (2008) y Adrian y Wu (2009). El modelo estimado en este trabajo es una versión extendida de un modelo afín de estructura a término en el que se incluyen las expectativas de inflación de la encuesta mensual realizada por el Banco de la República (Banco Central). La información de estas encuestas es incluida

con el objetivo de reducir la incertidumbre en la estimación de los componentes del BEI y de mejorar los pronósticos de la inflación obtenidos con el modelo de estado espacio.

El documento está presentado como sigue: en la sección I se abarca conceptualmente la CI y se definen conceptos asociados a los modelos de estructura a término que relacionan la inflación con los rendimientos de los bonos de deuda. En la sección II se expone el modelo de estado espacio a partir del cual se generan las expectativas de inflación. En la sección III se muestra los resultados de las estimaciones del modelo y de la CI respecto a cada uno de sus componentes. Por último, se presenta algunos comentarios finales.

## I. COMPENSACIÓN INFLACIONARIO

La definición de la CI se basa en la ecuación de Fisher (1930), según la cual la tasa de interés nominal debe ser igual a la real más la inflación esperada. En su versión más básica esta ecuación está dada por:

$$i_t^{nom} = i_t^{real} + E_t[\pi_{t+1}] \quad (1)$$

De manera análoga la CI se define como la diferencia entre los rendimientos de un bono nominal y uno real con el mismo plazo de maduración. Por ejemplo, para un vencimiento de un periodo:

$$CI_t^1 = y_t^{nom, 1} - y_t^{real, 1} \approx E_t[\pi_{t+1}] \quad (2)$$

Sin embargo, Sarte (1998) muestra que la ecuación (1), y por tanto la (2), no son adecuadas en ciertos contextos. Por ejemplo, cuando se asume que los agentes del mercado no son neutrales al riesgo, o cuando existe incertidumbre respecto a los precios futuros. En particular, se espera que la CI definida en (2) se aleje de las expectativas de inflación a medida que aumente el horizonte de maduración de los bonos. En este caso, la naturaleza estocástica de la inflación no permite que se mantengan las relaciones descritas en las ecuaciones anteriores.

Debido a estos problemas la diferencia entre el rendimiento de un bono nominal y uno real debe incluir un componente adicional al especificado en la ecuación (2): la prima por riesgo inflacionario. Esta es una contra-

prestación a los cambios no esperados de la inflación, los cuales afectan el rendimiento del bono nominal a lo largo de su periodo de maduración. La ecuación de la CI en forma extendida se define como sigue:

$$CI_t^n = y_t^{nom,n} - y_t^{real,n} = E_t(\pi_{t+1,t+n}) + \phi_t^n + \text{ajuste por convexidad} \quad (3)$$

En la ecuación (3),<sup>1</sup>  $y_t^{nom,n}$  y  $y_t^{real,n}$  corresponden a los rendimientos de un bono en términos nominales y reales en  $t$  con  $n$  meses de maduración, respectivamente.  $E_t(\pi_{t+1,t+n})$  es la expectativa de la inflación promedio para un horizonte temporal entre 1 y  $n$  meses a partir de  $t$ , y  $\phi_t^n$  denota la prima por riesgo inflacionario asociada a  $n$  periodos.<sup>2</sup> Al igual que la mayoría de la bibliografía relacionada con la CI, este trabajo supone que el ajuste por convexidad es 0.<sup>3</sup>

Debido a la facilidad para calcularlo e interpretarlo, la CI se ha convertido en una *proxy* estándar de las expectativas de la inflación (Ejsing *et al*, 2007). Como se ha dicho líneas arriba, esta medida proporciona información valiosa del estado de la economía desde el punto de vista del mercado.

A pesar del amplio uso y ventajas de la CI, esta medida presenta ciertos inconvenientes. En primer lugar, se supone que tanto los bonos nominales como los reales tienen el mismo grado de liquidez. Sin embargo, en la gran mayoría de mercados financieros se observa que los bonos nominales son establecidos en cantidades mayores que los reales con características similares (Sack, 2000). Por otra parte, a partir de los resultados de la ecuación (3) se tiene que la CI se puede interpretar como una *proxy* de las expectativas de inflación sólo si la prima por riesgo inflacionario es baja.<sup>4</sup>

## 1. Expectativas de inflación

Uno de los componentes de la CI definida en (3) es la expectativa promedio de la inflación. En el supuesto de que el ajuste por convexidad es 0 y que

<sup>1</sup> Esta ecuación es obtenida en Christensen *et al* (2008), Adrian y Wu (2009), y en García y Werner (2008), entre otros.

<sup>2</sup> Las expectativas de inflación y la prima por riesgo inflacionario se analizarán en mayor detalle en las subsecciones 1 y 2.

<sup>3</sup> Para una definición del concepto de ajuste por convexidad, ver Adrian y Wu [2009] y Fabozzi [1997].

<sup>4</sup> Arias *et al* (2006) describen algunos sesgos asociados a la CI relacionados con las diferencias de liquidez entre los bonos, entre los efectos de las tasas de interés, y entre los riesgos de tasa de interés real de los bonos, dadas sus distintas duraciones.

la prima por riesgo inflacionario es pequeña, la CI debe corresponder a una compensación al inversionista por la pérdida de valor del activo, sujeto a una tasa de interés, generada por los aumentos en los precios.

No obstante, es importante señalar que la expectativa de inflación derivada de la CI no es un indicador de inflación puntual, sino de la inflación esperada promedio. Por ejemplo, si se calcula el diferencial de tasas de interés con bonos de maduración a dos años, con el supuesto de una prima por riesgo inflacionario muy pequeña, y  $E_t(\pi_{t+1, t+2}) = 4.0\%$ , se tiene que la inflación esperada durante los próximos dos años a partir de  $t$  será en promedio 4.0% mas no que la inflación puntual en dicho periodo será 4.0 por ciento. De esta manera, la expectativa de inflación a partir de la CI está dada por:

$$E_t(\pi_{t+1, t+n}) = \frac{1}{n} E_t(\pi_{t+1} + \dots + \pi_{t+n}) \quad (4)$$

en la que  $n$  corresponde al periodo de maduración de los bonos asociados al cálculo de la CI en el periodo  $t$ .

## 2. La prima por riesgo inflacionario

Para definir la prima por riesgo inflacionario es necesario describir en primer lugar el factor de descuento estocástico, el cual determina el precio de los bonos al igual que su rentabilidad.

a) *Factor de descuento estocástico*. El factor de descuento estocástico es usado en la bibliografía para definir los precios y las rentabilidades de los bonos de deuda. Piazzesi (2009), Adrian y Wu (2009) y Christensen *et al* (2008), entre otros, utilizan este concepto para vincular las rentabilidades de los bonos a la inflación y para definir la prima por riesgo inflacionario. Como será explicado líneas abajo, este concepto también resulta de gran utilidad para relacionar los parámetros del modelo de estado espacio con los de un modelo afín de estructura a término.<sup>5</sup>

<sup>5</sup> La motivación afín de los modelos es el estudio de los determinantes de los rendimientos de los bonos. Según Piazzesi (2009), los bonos pueden ser estudiados inicialmente de acuerdo con sus determinantes estructurales por medio de modelos multivariados. El término afín hace referencia a un modelo libre de arbitraje en el cual los rendimientos se expresan como una función lineal de un vector de estado. En estos modelos el rendimiento  $y^\tau$  para un bono con vencimiento en  $\tau$  se escribe como:

$$y^\tau = A(\tau) + B(\tau)^T x$$

en el que la constante  $A(\tau)$  y el coeficiente  $B(\tau)$  dependen del periodo de maduración  $\tau$ . Esta expresión hace que las ecuaciones de rendimientos sean compatibles entre ellas para diferentes valores de  $\tau$  y con

Para definir el factor de descuento estocástico se parte de un modelo de maximización de utilidad intertemporal para un inversionista representativo.<sup>6</sup> En este modelo se puede establecer un activo en diferentes periodos de tiempo y se maximiza la expectativa de una función de utilidad separable de la siguiente manera:

$$\max E_t \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j U(C_{t+j}) \right] \quad (5)$$

en la que  $\delta$  es el factor de descuento temporal,  $C_{t+j}$  denota el consumo del inversionista en el periodo  $t+j$  y  $U(C_{t+j})$  es la utilidad del consumo en  $t+j$ .<sup>7</sup>

Una de las condiciones de primer orden de la ecuación (5) está dada por:

$$U'(C_t) = \delta E_t [(1 + R_{i,t+1}) U'(C_{t+1})] \quad (6)$$

en la que  $R_{i,t}$  es el rendimiento del activo  $i$  en el periodo  $t$ . La ecuación (6) iguala el costo marginal de utilidad de consumir un peso menos en  $t$ , a la ganancia de utilidad marginal esperada de invertir un peso en un activo  $i$  en  $t$ , venderlo en  $t+1$  a  $(1 + R_{i,t+1})$  pesos y consumir las ganancias.

Dividiendo (6) por :

$$1 = E_t [(1 + R_{i,t+1}) M_{t+1}^{real}] \quad (7)$$

en la que:

$$M_{t+1}^{real} = \frac{\delta U'(C_{t+1})}{U'(C_t)} \quad (8)$$

En la ecuación (8) se define el factor de descuento estocástico real o *pricing kernel*,  $M_{t+1}^{real}$ . En este caso, dicha expresión también equivale a la tasa marginal de sustitución intertemporal a la que se enfrenta el inversionista que compra el bono.

Además,  $M_t^{real}$  está relacionado positivamente con la utilidad marginal

el vector de estado  $x$ . Una explicación pormenorizada de estos modelos se encuentra en Piazzesi (2009), Vasicek (1977), Cox *et al* (1985), Duffie y Kan (1996), Bolder (2001), entre otros.

<sup>6</sup> Véase mayores detalles de este modelo en Campbell *et al* (1997).

<sup>7</sup> Las restricciones a las cuales está sujeto este problema de optimación son las tradicionales. Es decir, el flujo de ingresos debe ser igual al flujo de gastos destinado para consumo, durante los  $n-1$  periodos que trabaje el inversionista. Además, en el periodo  $n$  no hay trabajo, pero el consumo debe ser igual al ahorro del periodo anterior más el rendimiento correspondiente.

del consumo (Adrian y Wu, 2009). Por lo cual, en el supuesto de utilidad marginal decreciente, se espera que cuando el consumo agregado y la inflación sean altos,<sup>8</sup>  $M_t^{real}$  tienda a ser muy pequeño.

La CI también está relacionada con el factor de descuento, puesto que la rentabilidad puede verse como la derivada del precio del bono en un momento  $t$ . Los precios de un bono nominal ( $P_t^{nom,n}$ ) y ( $P_t^{real,n}$ ) real vienen dados por:

$$P_t^{nom,n} = E_t[M_{t+n}^{nom}], P_t^{real,n} = E_t[M_{t+n}^{real}] \quad (9)$$

en la que

$$M_t^{nom} = \frac{M_t^{real}}{\Pi_t}$$

corresponde al factor de descuento nominal.

b) *Prima por riesgo inflacionario*. Con base en los resultados de Piazzesi (2009), Adrian y Wu (2009) y García y Werner (2008) y en general, la bibliografía de modelos afines de estructura a término, se puede definir el factor de descuento estocástico para los bonos reales como:

$$m_{t+1}^{real} = -r_t^{real} - \frac{1}{2} \lambda_t' \lambda_t - \lambda_t' \epsilon_{t+1} \quad (10)$$

y para los bonos nominales:

$$m_{t+1}^{nom} = -r_t^{real} - \frac{1}{2} \lambda_t' \lambda_t - \lambda_t' \epsilon_{t+1} - e_n' X_{t+1} \quad (11)$$

en la que  $m_{t+1}^{real} = \log(M_{t+1}^{real})$ ,  $m_{t+1}^{nom} = \log(M_{t+1}^{nom}) = m_{t+1}^{real} - \pi_{t+1}$ ,  $e_n' = (0, 0, 1)$ ,  $\lambda_t$  representa el precio de mercado del riesgo,  $r_t^{real}$  es la tasa de interés del bono real y  $\epsilon_t$  sigue un proceso ruido blanco gaussiano multivariado. El vector  $X_t$  está conformado por dos factores latentes no observables y la inflación.

En este tipo de modelos  $\lambda_t$  y  $r_t^{real}$  son funciones afines del vector  $X_t$  como sigue:

$$r_t^{real} = \delta_0 + \delta_1' X_t \quad (12)$$

$$r_t^{real} = \delta_0 + \delta_1' X_t \quad (13)$$

<sup>8</sup> Esto se debe a que, en general, el consumo y los precios se mueven en la misma dirección.



Con,

$$\mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} l_t^1 \\ l_t^2 \\ \pi_t \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda}_0 = \begin{bmatrix} \lambda_{0,1} \\ \lambda_{0,2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_{1,11} & \lambda_{1,12} & 0 \\ \lambda_{1,21} & \lambda_{1,22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\lambda}_1 = \begin{bmatrix} \delta_{1,1} \\ \delta_{1,2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

La definición de la prima por riesgo inflacionario en términos del factor de descuento estocástico está relacionada con una ecuación de Fisher extendida. En este contexto, Arango y Flórez (2008) amplían la ecuación de Fisher incluyendo la prima por riesgo inflacionario para un periodo adelante. A partir de (1), y basándose en Sargent (1987), estos autores llegan a una expresión similar que incluye un término adicional correspondiente a la covarianza entre el factor de descuento estocástico y la inflación.

De acuerdo con lo anterior y con base en los trabajos de Adrian y Wu (2009), y Christensen *et al* (2008), la prima por riesgo inflacionario se puede expresar como la covarianza entre la inflación futura y el factor de descuento estocástico futuro de la siguiente forma:

$$\phi_{t,n} = \frac{1}{n} \text{Cov}_t \left( \sum_{j=1}^n \pi_{t+j}, \sum_{j=1}^n m_{t+j}^{\text{real}} \right) \quad (15)$$

en la que  $n$  es el horizonte de maduración de los bonos y  $\pi_t$  denota la inflación en el periodo  $t$ .

## II. METODOLOGÍA

Una vez obtenido la CI como la diferencia entre los rendimientos de bonos nominales y reales para cada periodo de maduración, se calcula la descomposición de esta medida. En primer lugar, se estiman las expectativas de inflación promedio con base en un modelo afín de estructura a término. Posteriormente, la prima de riesgo es calculada como la diferencia entre la CI y las expectativas de inflación promedio.

La representación de estado espacio del modelo afín de estructura a término es la siguiente:

$$\mathbf{W}_t = \mathbf{d} + \mathbf{Z}\mathbf{X}_t + \boldsymbol{\eta}_t \quad (16)$$

$$\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Phi}\mathbf{X}_{t-1} + \sum \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad (17)$$

en la que  $\eta_t \sim NID(0, H)$  y  $\varepsilon_t \sim NID(0, I)$  son dos errores no correlacionados.  $\mathbf{X}_t' = (l_t^1, l_t^2, \pi_t)$  denota el vector de estado conformado por dos factores latentes y la inflación. Además

$$\mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_3 \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & 0 & 0 \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & 0 \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\varepsilon 3} \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{W}_t = \begin{bmatrix} y_t^{nom, 3} \\ y_t^{nom, 12} \\ y_t^{nom, 24} \\ y_t^{nom, 36} \\ y_t^{nom, 60} \\ \pi_t \\ y_t^{real, 24} \\ y_t^{real, 36} \\ y_t^{real, 60} \\ E_t^{enc}[\pi_{t+12}] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} \frac{-A_3^{nom}}{3} \\ \frac{-A_{12}^{nom}}{12} \\ \frac{-A_{24}^{nom}}{24} \\ \frac{-A_{36}^{nom}}{36} \\ \frac{-A_{60}^{nom}}{60} \\ 0 \\ \frac{-A_{24}^{real}}{24} \\ \frac{-A_{36}^{real}}{36} \\ \frac{-A_{60}^{real}}{60} \\ \mathbf{e}_n'(I - \Phi^{12})(I - \Phi)^{-1}\mu \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \frac{-\mathbf{B}_3^{nom}}{3} \\ \frac{-\mathbf{B}_{12}^{nom}}{12} \\ \frac{-\mathbf{B}_{24}^{nom}}{24} \\ \frac{-\mathbf{B}_{36}^{nom}}{36} \\ \frac{-\mathbf{B}_{60}^{nom}}{60} \\ \mathbf{e}_n' \\ \frac{-\mathbf{B}_{24}^{real}}{24} \\ \frac{-\mathbf{B}_{36}^{real}}{36} \\ \frac{-\mathbf{B}_{60}^{real}}{60} \\ \mathbf{e}_n'\Phi^{12} \end{bmatrix} \quad (18)$$

en la que  $E_t^{enc}[\pi_{t+12}]$  son las expectativas de inflación meses adelante obtenidas mediante una encuesta,  $\mathbf{e}_n' = (0, 0, 1)$ . Los valores de los parámetros  $A_n^{nom}$ ,  $A_n^{real}$ ,  $B_n^{nom}$ , y  $B_n^{real}$ , con  $n = 3, 12, 24, 60$  meses, son generados a partir de una relación afín entre la inflación y las tasas de interés según un modelo de estructura a término de acuerdo con García y Werner (2008).<sup>9</sup>

<sup>9</sup> En el apéndice 1 se presenta una breve explicación de la generación de estos parámetros.

La estructura de la matriz de varianzas y covarianzas de es:

$$Var(\eta) = diag\{\tilde{\sigma}_{\eta}^2(1), \tilde{\sigma}_{\eta}^2(1), \tilde{\sigma}_{\eta}^2(1), \tilde{\sigma}_{\eta}^2(1), 0, \tilde{\sigma}_{\eta}^2(2), \tilde{\sigma}_{\eta}^2(2), \tilde{\sigma}_{\eta}^2(2), \tilde{\sigma}_{\eta}^2(3)\} \quad (19)$$

En la ecuación anterior  $diag\{\mathbf{A}\}$  es una matriz diagonal cuyos elementos corresponden al vector  $\mathbf{A}$ .

En la expresión (19) los primeros cinco términos están definidos como  $\tilde{\sigma}_{\eta}^2(1)$ ; esto implica que la varianza del error de la ecuación (16), asociada a los rendimientos de los bonos nominales, es la misma sin importar el periodo de maduración. De manera análoga, la varianza del error asociada a los rendimientos de los bonos reales toma el valor de  $\tilde{\sigma}_{\eta}^2(2)$  para los tres periodos de maduración. Es importante advertir que la inflación aparece tanto en el vector de observaciones  $\mathbf{w}_t$  como en el vector de estado  $\mathbf{X}_t$ ; por tanto, la varianza del error asociado a la inflación en la ecuación de medida deber ser 0.

La ecuación de medida descrita en (16) indica una relación lineal entre los rendimientos de los bonos nominales y reales con la inflación y dos factores latentes. Estos componentes no observables están asociados con la relación entre el factor de descuento estocástico y el precio de los bonos.

El componente final de la ecuación de medida está relacionado con la inclusión de las expectativas de inflación, obtenidas a partir de una encuesta y tiene como objetivo mejorar los pronósticos de este modelo. Esta ecuación indica que las expectativas de la encuesta corresponden a los pronósticos de la inflación obtenidos de la ecuación de medida más un error. La utilidad de las encuestas para generar pronósticos de las expectativas ha sido analizada en la bibliografía en trabajos como los de Ang *et al* (2007) y Ciccarelli y García (2009).

La ecuación de transición definida en (17) describe la dinámica del vector de estado del modelo y sirve para generar los pronósticos de la inflación con los cuales se calculan las expectativas promedio de la inflación según la ecuación (4). Dada la anterior representación de estado espacio, la estimación del modelo se realiza por medio de la metodología de máxima verosimilitud utilizando el filtro de Kalman. Como se señaló líneas arriba, los coeficientes  $\gamma$  y  $\delta$  de (18) para  $j = nom, real$  y  $n = 3, 12, 24, 36, 60$ <sup>10</sup> se ob-

<sup>10</sup> En el caso de los bonos reales sólo se utiliza  $n = 24, 36, 60$ .

tienen de acuerdo con la metodología sugerida por García y Werner (2008) tal como se explica en el apéndice 1.

Las expectativas promedio de la inflación hasta 12, 24 y 60 meses se pueden obtener a partir de los pronósticos del vector de estado del modelo. Dado el cálculo de la CI y de las expectativas promedio de la inflación se puede obtener una estimación de la prima por riesgo inflacionario a partir de la ecuación (3).

Uno de los intereses de la estimación de la CI es conocer en qué condiciones el diferencial de tasas de interés permite generar una aproximación apropiada a la inflación esperada promedio. Un instrumento útil en este caso es la descomposición de varianza de este indicador para cada periodo de maduración:

$$1 = \frac{\text{cov}(CI_t^n, E_t(\pi_{t,t+n}))}{\text{Var}(CI_t^n)} + \frac{\text{cov}(CI_t^n, \varphi_t^n)}{\text{Var}(CI_t^n)} \quad (20)$$

El primer término del lado derecho de la ecuación (20) indica la proporción de la varianza de la CI explicada por la expectativa promedio de inflación, mientras que el segundo término corresponde a la proporción explicada por la prima por riesgo inflacionario.

### III. RESULTADOS

El cálculo de la CI se determina con base en las tasas asociadas a la curva cupón cero de los bonos TES en pesos y TES indizados a la UVR, utilizando la metodología de Nelson y Siegel (1987).<sup>11</sup> La muestra utilizada abarca el periodo comprendido entre enero de 2003 y noviembre de 2009 y es calculada a partir de los promedios mensuales de los datos diarios. La inflación se calcula como la variación anual del índice de precios al consumidor. Los datos observados de las expectativas de inflación se toman de la encuesta de expectativas de inflación, tasa de cambio y tasa de intervención realizada por el Banco de la República con frecuencia mensual.

Los resultados de la estimación del modelo descrito en (16) y (17) se encuentran en el cuadro 1. Estos valores indican que los parámetros del modelo son estadísticamente diferentes de 0 para los niveles usuales de significación. En el apéndice 2 se muestra diferentes pruebas de especificación

<sup>11</sup> Estos datos fueron proporcionados por el departamento de operaciones y desarrollo de mercado de la SG-MR del Banco de la República.

CUADRO 1. *Resultados de la estimación*

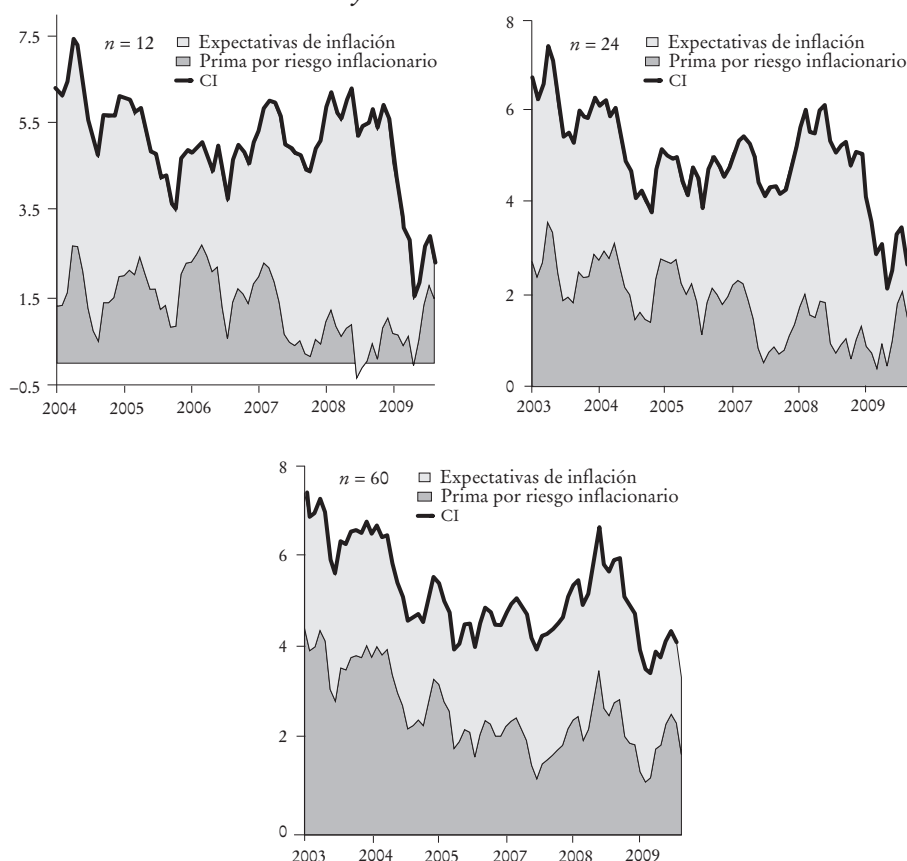
<i>Parámetro</i>	<i>Coefficientes</i>	<i>Desviaciones estándar</i>
$\Phi$	$\begin{bmatrix} 0.92 & 0 & 0 \\ 0.37 & -0.89 & 0 \\ -1.45 & -1.79 & -0.77 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.01 & - & - \\ 0.18 & 0.03 & - \\ 0.09 & 0.07 & 0.03 \end{bmatrix}$
$\delta_0$	[1.81]	[0.14]
$\delta_1$	$\begin{bmatrix} -0.88 \\ -0.42 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.06 \\ 0.04 \\ - \end{bmatrix}$
$\Sigma$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2.30 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & 0.24 \end{bmatrix}$
$\lambda_0$	$\begin{bmatrix} 1.64 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.12 \\ 0.09 \\ - \end{bmatrix}$
$\lambda_1$	$\begin{bmatrix} 1.03 & 0.18 & 0 \\ 0.65 & -0.68 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.12 & 0.04 & - \\ 0.19 & 0.10 & - \\ - & - & - \end{bmatrix}$
$\mu$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3.67 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - \\ - \\ 0.40 \end{bmatrix}$
$diag(Var(\eta))$	$\begin{bmatrix} 2.30 & 2.10 & 2.10 & 2.10 & 2.10 \\ 0 & 2.31 & 2.31 & 2.31 & 1.31 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ - & 0.30 & 0.30 & 0.30 & 1.14 \end{bmatrix}$

de los residuales de predicción en el modelo de estado espacio. Estos resultados indican que no existen indicios de mala especificación en el modelo.

### 1. *Estimación y descomposición de la CI*

En la gráfica 1 se muestra la estimación y descomposición de la CI para 12, 24 y 60 meses de maduración. En estas gráficas la línea gruesa representa el valor de la CI, mientras que las áreas grises y negras corresponden a los valores de las expectativas promedio de la inflación y la prima por riesgo

GRÁFICA 1. *Descomposición de la CI para estimaciones 12, 24 y 60 meses adelante*



inflacionario, respectivamente. Estas estimaciones son presentadas para diferentes muestras en la cuadro 2.

Estos resultados muestran que existe, en general, una tendencia decreciente de las expectativas promedio de la inflación. Sin embargo, se observa un crecimiento moderado en 2007 y 2008. También se observa una disminución considerable de las expectativas de la inflación al final de la muestra analizada. Esto podría obedecer a dos motivos; en primer lugar, las expectativas formadas por los agentes tienden a ser adaptativas, por lo que la inflación reciente observada tiene una mayor ponderación cuando se genera dicha expectativa. Por otra parte, es posible que los agentes hayan tenido en cuenta la baja actividad económica y consumo de 2009 para determinar la inflación esperada promedio.

CUADRO 2. *Descomposición de la CI para diferentes horizontes de pronóstico<sup>a</sup>*

Muestra	CI	CI	CI	$E_t(\pi_{t+1, t+12})$	$E_t(\pi_{t+1, t+24})$	$E_t(\pi_{t+1, t+60})$	$\phi^{12}$	$\phi^{24}$	$\phi^{60}$
2003	6.16	6.48	7.14	4.69	3.80	2.85	1.46	2.68	4.28
2004	5.99	6.12	6.53	4.29	3.54	2.74	1.70	2.58	3.79
2005	4.72	4.87	5.37	2.98	2.66	2.34	1.74	2.21	3.03
2006	4.69	4.65	4.56	2.87	2.59	2.31	1.81	2.06	2.25
2007	5.17	4.74	4.61	4.10	3.43	2.69	1.06	1.31	1.93
2008	5.66	5.48	5.63	5.17	4.14	3.01	0.49	1.34	2.62
2009	3.37	3.45	4.08	2.52	2.35	2.20	0.85	1.10	1.88
2003-2009	5.02	4.99	5.25	3.73	3.16	2.57	1.29	1.83	2.68

<sup>a</sup>  $CI^n$  y  $\phi^n$  indican la compensación inflacionaria y la prima por riesgo inflacionario para  $n$  meses adelante, respectivamente.  $E_t(\pi_{t+1, t+n})$  es la esperanza promedio de la inflación para los periodos  $t+1$  hasta  $t+n$  condicionada a la información disponible en  $t$ .

Los resultados de la prima por riesgo inflacionario son compatibles con los esperados teóricamente; a medida que aumenta el plazo de maduración, la prima por riesgo inflacionario toma valores más altos. Este aumento implica que la CI no sea una buena medida de las expectativas de inflación para mediano y largo plazo. Otro punto importante es que la prima por riesgo inflacionario tiene una tendencia decreciente a lo largo de la muestra para periodos de maduración medianos y largos ( $n = 24$  y  $60$  meses). Esto puede obedecer al aumento de credibilidad de las políticas de estabilización de la inflación a lo largo de la muestra analizada.

En el cuadro 3 se realiza la descomposición de varianza de la CI para la muestra analizada. Se encuentra que a corto plazo (12 meses) la variabilidad de la CI es explicada en 76% por la varianza de las expectativas de inflación promedio, el 24% restante es explicado por la prima por riesgo inflacionario. Estos resultados se revierten a medida que aumenta el periodo de maduración de los bonos. Para un horizonte de cinco años la variabilidad explicada por las expectativas de inflación es tan sólo de 19% y por consiguiente de 81% por parte de la prima por riesgo inflacionario.

 CUADRO 3. *Descomposición de varianza de la CI para diferentes horizontes de pronóstico*

Horizonte (meses)	Inflación esperada	Prima por riesgo inflacionario
12	0.76	0.24
24	0.49	0.51
60	0.19	0.81

## CONCLUSIONES

En este documento se estima la CI a partir de los rendimientos de los TES en pesos y los TES indizados a la UVR para una muestra entre enero de 2003 y noviembre de 2009. Por otra parte, la CI se descompone en dos factores: expectativas promedio de la inflación y prima por riesgo inflacionario. Estos cálculos son realizados para tres periodos de maduración, 1, 2 y 5 años. Las expectativas promedio de la inflación son estimadas por medio de un modelo afín de estructura a término que relaciona los rendimientos de los TES con dos factores latentes y la inflación. Con el objetivo de mejorar los pronósticos de la inflación, este modelo incluye las expectativas de inflación a 12 meses obtenidas de la encuesta del Banco de la República.

Las estimaciones de las expectativas de inflación presentan, en general, una tendencia decreciente durante el periodo estudiado. Esto se puede deber al aumento de la confianza en la política monetaria por parte de los agentes. Otro resultado que apoya esta hipótesis es que la prima por riesgo inflacionario presenta una tendencia decreciente a lo largo de la muestra para periodos de maduración de mediano y largo plazos (2 y 5 años).

Los resultados de las estimaciones de la CI muestran que a corto plazo (1 año) esta es una medida aproximada de las expectativas de inflación. Para periodos de maduración más largos (5 años), esta situación cambia, pues la prima por riesgo inflacionario toma valores altos y se convierte en un componente importante de la CI; esto se debe a que existe un mayor riesgo de cambios no esperados en la inflación futura a medida que el horizonte de tiempo es más largo. La afirmación anterior es corroborada por los resultados de la descomposición de varianza de la CI. A corto plazo (1 año) se encuentra que la variabilidad de las expectativas de inflación explican 76% de la varianza de la CI. Mientras que a largo plazo (5 años) éstas sólo explican el 19 por ciento.

## APÉNDICE

*1. Relación entre el modelo afín de estructura a término y el modelo de estado espacio*

Aquí muestra la relación entre los parámetros del modelo de estado espacio definido en (16) y (17) y un modelo afín de estructura a término.

La metodología usada para la generación de estos parámetros corresponde a la utilizada por García y Werner (2008). El procedimiento consiste en obtener los



parámetros de interés a partir de la definición de los precios de los bonos en términos del factor de descuento estocástico y posteriormente de la tasa de interés y del vector de estado. A continuación se describe este proceso aplicado a los bonos reales y nominales.

a) *Bonos reales*. El precio de un bono real en  $t$  con un periodo de maduración,  $n = 1$ , es el valor esperado del factor de descuento estocástico en  $t + 1$ . Es decir,

$$P_t^{real, 1} = E_t(M_{t+1}^{real}) \quad (21)$$

Sustituyendo el factor de descuento estocástico en la ecuación anterior por la ecuación (10), aplicando propiedades de la distribución normal y log-normal y reemplazando (13), se obtiene:

$$P_t^{real, 1} = \exp(-r_t^{real}) = \exp(-\delta_0 - \delta_1' X_t)$$

Si se compara la anterior ecuación con una función afín exponencial de forma  $P_t^{real, 1} = \exp(A_1^{real} + B_1^{real'} X_t)$ , se obtienen los valores de los parámetros para  $n = 1$ :

$$A_1^{real} = -\delta_0, \quad B_1^{real'} = -\delta_1 \quad (22)$$

En general, el precio en  $t$  de un bono con  $n + 1$  periodos de maduración está dado por:

$$P_t^{real, n+1} = E_t(M_{t+1}^{real} P_{t+1}^{real, n})$$

$$P_t^{real, n+1} = E_t \left[ \exp \left( -r_t^{real} - \frac{1}{2} \lambda_t' \lambda_t - \lambda_t' \varepsilon_{t+1} \right) \exp(A_{t+1}^{real} + B_{t+1}^{real'} X_{t+1}) \right]$$

Sustituyendo (17) en la ecuación anterior:

$$P_t^{real, n+1} = E_t \left[ \exp \left( -r_t^{real} - \frac{1}{2} \lambda_t' \lambda_t - \lambda_t' \varepsilon_{t+1} + A_{t+1}^{real} + B_{t+1}^{real'} (\mu + \Phi X_t + \sum \varepsilon_{t+1}) \right) \right]$$

$$P_t^{real, n+1} = \exp \left( -r_t^{real} - \frac{1}{2} \lambda_t' \lambda_t + A_n^{real} + B_n^{real'} (\mu + \Phi X_t) \right) E_t \left[ \exp \left( (B_n^{real'} \sum -\lambda_t') \varepsilon_{t+1} \right) \right]$$

Usando propiedades de la distribución normal se obtiene:

$$\begin{aligned} P_t^{real, n+1} = & \exp \left( -r_t^{real} - \frac{1}{2} \lambda_t' \lambda_t + A_n^{real} + B_n^{real'} (\mu + \Phi X_t) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (B_n^{real'} \sum -\lambda_t') (B_n^{real'} \sum -\lambda_t')' \right) \end{aligned}$$

Remplazando  $P_t^{real, n+1}$  por  $\exp(A_{n+1}^{real} + \mathbf{B}_{n+1}^{real'} \mathbf{X}_t)$  y sustituyendo  $\lambda_t$  y  $r_t^{real}$  según las expresiones (12) y (13):

$$\exp(A_{n+1}^{real} + \mathbf{B}_{n+1}^{real'} \mathbf{X}_t) = \exp\left(-\delta_0 A_n^{real} + \mathbf{B}_n^{real'} (\boldsymbol{\mu} - \sum \lambda_0) + \frac{1}{2} \mathbf{B}_n^{real'} \sum \sum \mathbf{B}_n^{real} + \left(\mathbf{B}_n^{real'} (\Phi - \sum \lambda_1) - \boldsymbol{\delta}_1'\right) \mathbf{X}_t\right)$$

Finalmente, al igualar los términos constantes y los términos que premultiplican a  $\mathbf{X}_t$  se tiene:

$$\begin{aligned} A_{n+1}^{real} &= -\delta_0 + \mathbf{B}_n^{real'} (\boldsymbol{\mu} - \sum \lambda_0) + \frac{1}{2} \mathbf{B}_n^{real'} \sum \sum \mathbf{B}_n^{real} \\ \mathbf{B}_{n+1}^{real'} &= -\boldsymbol{\delta}_1 + \mathbf{B}_n^{real'} (\Phi - \sum \lambda_1) \end{aligned} \quad (23)$$

Las expresiones presentadas en (23) representan unas ecuaciones recursivas para los parámetros de interés. Utilizando esta recursión y los valores iniciales dados en (22), se encuentra la siguiente solución:

$$\mathbf{B}_j^{real'} = -\sum_{i=1}^j \boldsymbol{\delta}_i' (\Phi - \sum \lambda_1)^{i-1} \quad (24)$$

$$A_j^{real} = -j\delta_0 + \sum_{i=1}^{j-1} \mathbf{B}_i^{real'} (\boldsymbol{\mu} - \sum \lambda_0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{j-1} \mathbf{B}_i^{real'} \sum \sum \mathbf{B}_i^{real} \quad (25)$$

para  $j = 2, \dots, n$ .

b) *Bonos nominales*. Para generar el precio de los bonos nominales se usa el factor de descuento nominal especificado en (11). El precio de este bono está definido como:

$$\begin{aligned} P_t^{nom, 1} &= \exp(A_1^{nom} + \mathbf{B}_1^{nom'} \mathbf{X}_t) \\ P_t^{nom, 1} &= E_t \left[ \exp \left( -r_t^{real} - \frac{1}{2} \lambda_t' \lambda_t - \lambda_t' \boldsymbol{\epsilon}_{t+1} - \boldsymbol{\epsilon}_n' X_{t+1} \right) \right] \end{aligned}$$

Remplazando a  $r_t^{real}$  y  $\mathbf{X}_t$  por las expresiones (13) y (17) y reorganizando los términos se obtiene:

$$\begin{aligned} \exp(A_1^{nom} + \mathbf{B}_1^{nom'} \mathbf{X}_t) &= E_t \left[ \exp \left( -\delta_0 - (\boldsymbol{\delta}_1 + \boldsymbol{\epsilon}_n' \Phi) \mathbf{X}_t - \frac{1}{2} \lambda_t' \lambda_t - \boldsymbol{\epsilon}_n' \boldsymbol{\mu} - (\lambda_t' + \boldsymbol{\epsilon}_n' \sum) \boldsymbol{\epsilon}_{t-1} \right) \right] \\ \exp(A_1^{nom} + \mathbf{B}_1^{nom'} \mathbf{X}_t) &= \exp \left( -\delta_0 - (\boldsymbol{\delta}_1 + \boldsymbol{\epsilon}_n' \Phi) \mathbf{X}_t - \frac{1}{2} \lambda_t' \lambda_t - \boldsymbol{\epsilon}_n' \boldsymbol{\mu} \right) E_t \left[ \exp \left( -(\lambda_t' + \boldsymbol{\epsilon}_n' \sum) \boldsymbol{\epsilon}_{t-1} \right) \right] \end{aligned}$$

Resolviendo el operador de expectativas y sustituyendo  $\lambda_t$  por (12) se tiene:

$$\begin{aligned} \exp(A_1^{nom} + \mathbf{B}_1^{nom'} \mathbf{X}_t) = \exp \left( -\delta_0 - (\delta'_1 + \mathbf{e}'_n \Phi) \mathbf{X}_t - \mathbf{e}'_n \boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2} \mathbf{e}'_n \sum \sum \mathbf{e}_n + \right. \\ \left. + \mathbf{e}'_n \sum \lambda_0 + \mathbf{e}'_n \lambda \sum \lambda_1 \mathbf{X}_1 \right) \end{aligned} \quad (26)$$

Igualando los términos constantes y los términos pre-multiplicados por  $\mathbf{X}_t$ :

$$\begin{aligned} A_1^{nom} &= -\delta_0 - \mathbf{e}'_n \boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2} \mathbf{e}'_n \sum \sum \mathbf{e}_n + \mathbf{e}'_n \sum \lambda_0 \\ \mathbf{B}_1^{nom'} &= \mathbf{e}'_n \sum \lambda_1 - (\delta'_1 + \mathbf{e}'_n \Phi) \end{aligned} \quad (27)$$

En general, el precio de un bono con periodo de maduración  $n + 1$  se puede definir como:

$$\begin{aligned} P_t^{nom, n+1} &= \exp(A_{n+1}^{nom} + \mathbf{B}_{n+1}^{nom'} \mathbf{X}_t) \\ &= E_t \left[ M_{t+1}^{nom} P_{t+1}^{nom, n} \right] \\ &= E_t \left[ \exp \left( -\delta_0 - \delta'_1 \mathbf{X}_t - \frac{1}{2} \lambda'_t \lambda_t - \lambda'_t \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1} - \mathbf{e}'_n \mathbf{X}_{t+1} + A_n^{nom} + \mathbf{B}_n^{nom'} \mathbf{X}_{t+1} \right) \right] \end{aligned}$$

Sustituyendo a  $\mathbf{X}_{t+1}$  según (17) en la ecuación anterior,

$$\begin{aligned} \exp(A_{n+1} + \mathbf{B}_{n+1}^{nom'} \mathbf{X}_t) &= E_t \left[ \exp \left( -\delta_0 - \delta'_1 \mathbf{X}_t - \frac{1}{2} \lambda'_t \lambda_t + \left( (\mathbf{B}_n^{nom'} - \mathbf{e}'_n) \sum - \lambda'_t \right) \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + A_n^{nom} + (\mathbf{B}_n^{nom'} - \mathbf{e}'_n) \boldsymbol{\mu} + (\mathbf{B}_n^{nom'} - \mathbf{e}'_n) \Phi \mathbf{X}_t \right) \right] \end{aligned}$$

Resolviendo el operador de expectativas y substituyendo  $\lambda_t$  según (12):

$$\begin{aligned} \exp(A_{n+1} + \mathbf{B}_{n+1}^{nom'} \mathbf{X}_t) &= \exp \left[ -\delta_0 + A_n^{nom} + (\mathbf{B}_n^{nom'} - \mathbf{e}'_n) (\boldsymbol{\mu} - \sum \delta_0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\mathbf{B}_n^{nom'} - \mathbf{e}'_n) \sum \sum (\mathbf{B}_n^{nom} - \mathbf{e}_n) + (\mathbf{B}_n^{nom'} - \mathbf{e}'_n) \Phi - \delta' \right. \\ &\quad \left. - (\mathbf{B}_n^{nom'} - \mathbf{e}'_n) \sum \lambda_1 \mathbf{X}_t \right] \end{aligned}$$

Finalmente, igualando los términos constantes y los términos que pre-multiplican a  $\mathbf{X}_t$  en ambos lados de la ecuación, se obtiene,

$$A_{n+1}^{nom} = -\delta_0 + A_n^{nom} + (\mathbf{B}_n^{nom'} - \mathbf{e}_n')(\mu - \sum \lambda_0) - \frac{1}{2}(\mathbf{B}_n^{nom'} - \mathbf{e}_n') \sum \sum (\mathbf{B}_n^{nom'} - \mathbf{e}_n')^t \quad (28)$$

$$\mathbf{B}_{n+1}^{nom'} = (\mathbf{B}_n^{nom'} - \mathbf{e}_n')(\Phi - \sum \lambda_0) - \delta_1' \quad (29)$$

Al igual que en el caso real, es posible llegar una solución general a partir de las ecuaciones (27), (28) y (29):

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_j^{nom'} = & -\sum_{i=1}^j \delta_1' (\Phi - \sum \lambda_1)^{i-1} - \mathbf{1}_{(j>2)} \sum_{i=1}^{j-2} \mathbf{e}_n' (\Phi - \sum \lambda_1)^i \\ & + \mathbf{e}_n' [-\Phi - I_n - \sum \lambda_1] \left( \Phi - \sum \lambda_1 \right)^{j-1} \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} A_j^{nom} = & -j\delta_0 - j\mathbf{e}_n'(\mu - \sum \lambda_0) + \sum_{i=1}^{j-1} \mathbf{B}_i^{nom'}(\mu - \sum \lambda_0) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{j-1} (\mathbf{B}_i^{nom'} \sum \sum (\mathbf{B}_i^{nom} - \mathbf{e}_n)) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{j-1} \mathbf{e}_n' \sum \sum (\mathbf{B}_i^{nom} - \mathbf{e}_n) + \frac{1}{2} \mathbf{e}_n' \sum \sum \mathbf{B}_1^{nom} \end{aligned} \quad (31)$$

Para  $j = 2, \dots, n$ , en la que  $\mathbf{1}_A$  denota la función característica evaluada en el subconjunto 1.

c) *Relación entre en modelo afín de estructura a término y los parámetros del modelo de estado y espacio.* Suponiendo que los rendimientos se pueden expresar como una función afín del vector de estado  $\mathbf{X}_t$  de la siguiente forma:

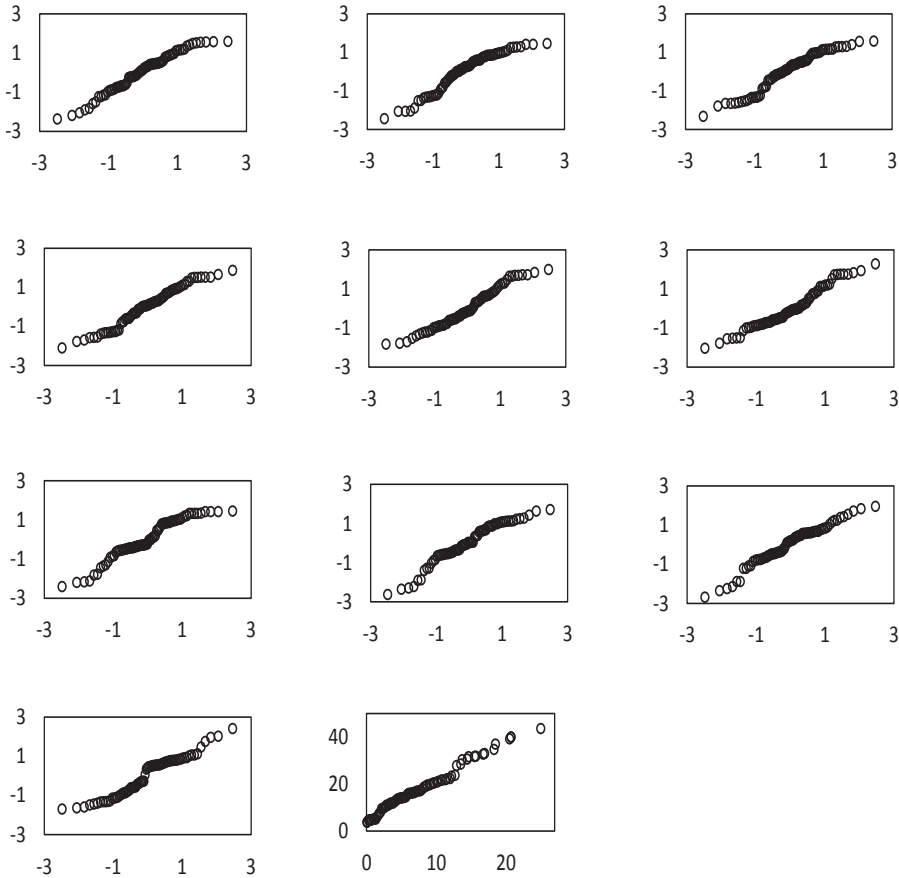
$$\begin{aligned} y_t^{k,n} &= -\frac{1}{n} \log(p_t^{k,n}) \\ y_t^{k,n} &= -\frac{1}{n} \log(A_n^k + \mathbf{B}_n^{k'} \mathbf{X}_t) \end{aligned}$$

para  $k = nom, real$ .

Los parámetros de  $\mathbf{d}$  y  $\mathbf{Z}$  en la ecuación de medida del modelo de estado espacio, asociados con los rendimientos, pueden remplazarse por los resultados obtenidos en (24), (25), (30) y (31), tal como se indica en la ecuación (18).

## 2. Pruebas de especificación del modelo

En la gráfica A1 se muestran los gráficos cuantil-cuantil de los residuos asociados a  $\boldsymbol{\eta}$  de la ecuación (16). En el eje horizontal se encuentran los cuantiles teóricos de la

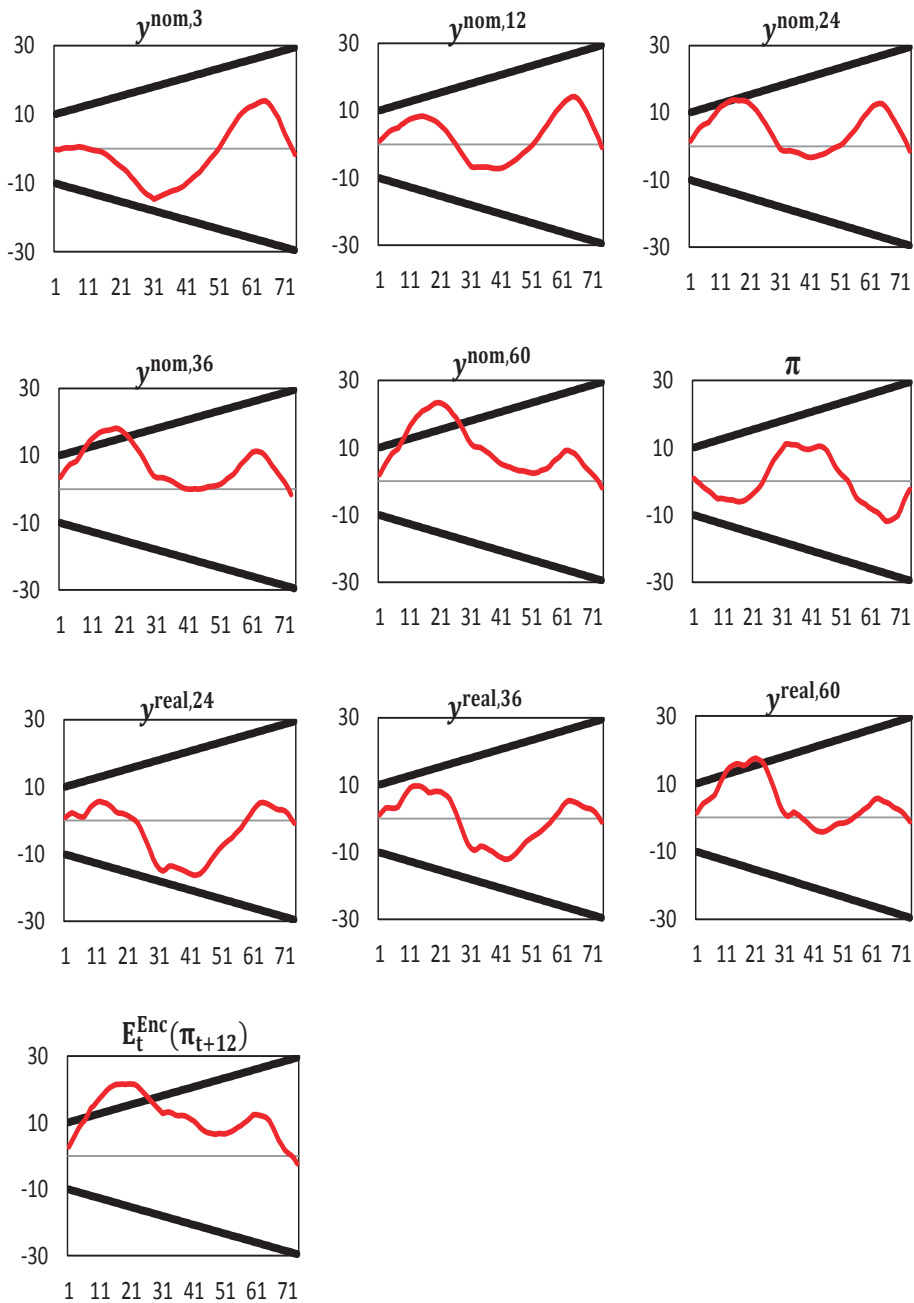
GRÁFICA A1. *Gráficas cuantil-cuantil univariadas y multivariadas<sup>a</sup>*


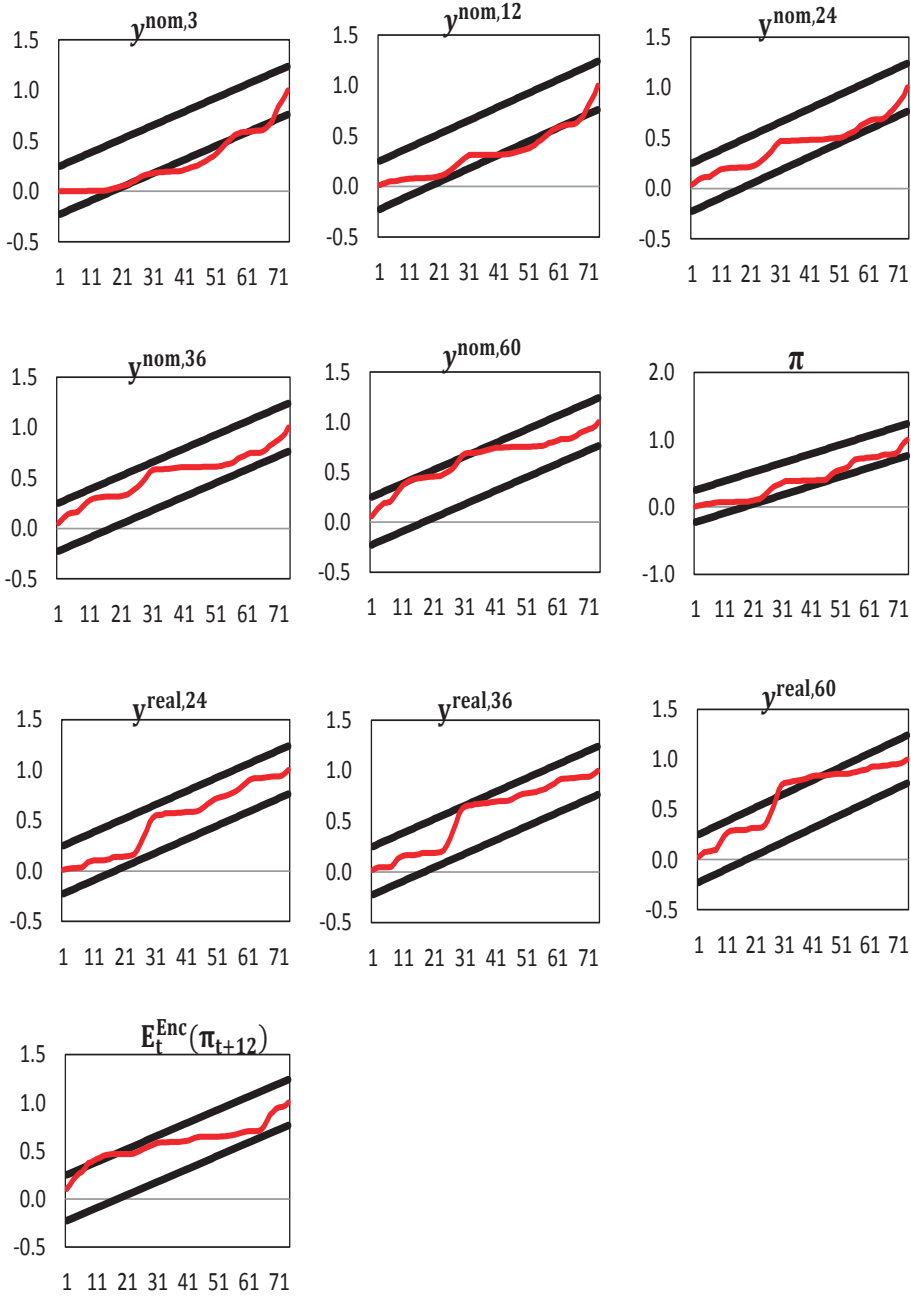
<sup>a</sup> Las primeras diez figuras corresponden a las gráficas QQ de cada uno de los residuales de la ecuación de medida, mientras que la figura final corresponde a la gráfica QQ multivariada asociada a estos residuos.

distribución normal, y en el vertical los cuantiles empíricos de la variable considerada. Si esta variable tiene una distribución normal se espera que la gráfica corresponda a una recta de 45°. Las gráficas univariadas muestran que los componentes de  $\hat{\eta}$  no presentan desviaciones grandes respecto a una distribución normal, lo mismo sucede con respecto a una distribución normal multivariada, como se puede observar en la última gráfica.

Las gráficas A2 y A3 muestran los valores de los estadísticos *Cusum* y *Cusum* cuadráticos con bandas de significancia a 1%. Estas gráficas presentan las sumas

GRÁFICA A2. Gráficas Cusum de los errores de predicción



GRÁFICA A3. *Gráficas cuadráticas de los errores de predicción*


acumuladas y sumas cuadráticas acumuladas de los residuos del modelo para diferentes periodos de maduración. Estos resultados indican que no existen mayores problemas de especificación del modelo ya que los valores de los estadísticos se encuentran, por lo general, dentro de las bandas de significación.

### 3. Descomposición de la compensación inflacionaria

En este apéndice se deduce la ecuación (3), con la que se descompone la CI en tres componentes; expectativas promedio de inflación, prima por riesgo inflacionario y ajuste por convexidad.

A partir de los conceptos utilizados en secciones anteriores, se tiene que el precio de un bono real está dado por:

$$P_t^{real, n} = E_t \left[ \prod_{j=1}^n M_{t+j}^{real} \right] \quad (32)$$

en el que  $M_t^{real}$  es el factor de descuento estocástico. Teniendo en cuenta que

$$y_t^{real, n} = -\frac{1}{n} \log(P_t^{real, n})$$

la ecuación anterior se puede representar de la siguiente forma:

$$y_t^{real, n} = -\frac{1}{n} \log \left[ E_t \left( \prod_{j=1}^n M_{t+j}^{real} \right) \right] \quad (33)$$

Dado que  $m_t^{real} = \log(M_t^{real})$ , suponiendo que  $m_t^{real} \sim NID$  y utilizando propiedades de la distribución normal y log-normal,<sup>12</sup> se obtiene:

$$y_t^{real, n} = -\frac{1}{n} \left[ E_t \left( \sum_{j=1}^n m_{t+j}^{real} \right) + \frac{1}{2} Var_t \left( \sum_{j=1}^n m_{t+j}^{real} \right) \right] \quad (34)$$

Análogamente para los bonos nominales:

$$P_t^{mon, n} = E_t \left[ \prod_{j=1}^n M_{t+j}^{mom} \right] \quad (35)$$

además,

<sup>12</sup> Si  $x \sim N(\mu, \sigma^2)$  entonces  $e^x \sim LogN$  con  $E(e^x) = e^{\mu + 0.5\sigma^2}$  y  $V(e^x) = e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$ .



$$y_t^{nom,n} = -\frac{1}{n} \left[ E_t \left( \sum_{j=1}^n (m_{t+j}^{real} - \pi_{t+j}) \right) + \frac{1}{2} Var_t \left( \sum_{j=1}^n (m_{t+j}^{real} - \pi_{t+j}) \right) \right] \quad (36)$$

Calculando la CI como la diferencia entre los rendimientos y desarrollando el operador de varianza:

$$\begin{aligned} y_t^{nom,n} - y_t^{real,n} &= \frac{1}{n} E_t \left[ \sum_{j=1}^n \pi_{t+j} \right] - \frac{1}{2n} \left[ Var_t \left( \sum_{j=1}^n m_{t+j}^{real} \right) + Var_t \left( \sum_{j=1}^n \pi_{t+j} \right) \right. \\ &\quad \left. - 2 Cov_t \left( \sum_{j=1}^n m_{t+j}^{real}, \sum_{j=1}^n \pi_{t+j} \right) - Var \left( \sum_{j=1}^n m_{t+j}^{real} \right) \right] \end{aligned} \quad (37)$$

Eliminando términos semejantes, se tiene:

$$y_t^{nom,n} - y_t^{real,n} = \underbrace{\frac{1}{n} E_t \left[ \sum_{j=1}^n \pi_{t+j} \right]}_{\text{Inflación esperada promedio}} + \underbrace{\frac{1}{n} Cov_t \left( \sum_{j=1}^n m_{t+j}^{real}, \sum_{j=1}^n \pi_{t+j} \right)}_{\text{Prima por riesgo inflacionario}} - \underbrace{\frac{1}{2n} Var_t \left( \sum_{j=1}^n \pi_{t+j} \right)}_{\text{Ajuste por convexidad}} \quad (38)$$

La ecuación (38) indica la descomposición de la CI en los factores especificados en las ecuaciones (3) y (4).

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Adrian, T., y H. Wu (2009), "The Term Structure of Inflation Expectations", Staff Reports 362, Federal Reserve Bank of New York.
- Andersen, A. (2009), "Inflation Risk Premia in the Term Structure of Interest Rates: Evidence from Euro Area Inflation Swaps", Working paper, Copenhagen Business School.
- Ang, A., G. Bekaert y M. Wei (2007), "Do Macro Variables, Asset Markets, or Surveys Forecast Inflation Better?", *Journal of Monetary Economics*, 54 (4), pp. 1163-1212.
- Arango, L. E., y L. A. Flórez (2008), "Tramo corto de la curva de rendimientos, cambio de régimen inflacionario y expectativas de inflación en Colombia", *EL TRIMESTRE ECONÓMICO*, vol. LXXV, núm. 297, pp. 183-210.
- \_\_\_\_\_, y M. A. Arosemena (2003), "El tramo corto de la estructura a plazo como predictor de expectativas de inflación en Colombia", Borradores de Economía 264, Banco de la República.
- Arias, M., C. Hernández y C. Zea (2006), "Expectativas de inflación en el mercado de deuda pública colombiano", Borradores de Economía 390, Banco de la República.

- Bolder, D. J. (2001), "Affine Term-Structure Models: Theory and Implementation", Working Papers 01-15, Bank of Canada.
- Campbell, J., A. W. Lo y A. C. Mackinlay (1997), *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press.
- Christensen, J. H. E., J. A. López y G. D. Rudebusch (2008), "Inflation Expectations and Risk Premiums in an Arbitrage-Free Model of Nominal and Real Bond Yields", Working Paper Series 2008-34, Federal Reserve Bank of San Francisco.
- Ciccarelli, M. y J. A. García (2009), "What Drives Euro Area Break-Even Inflation Rates?", Working Paper Series 996, Banco Central Europeo.
- Cox, J., J. Ingersoll y S. Ross (1985), "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica*, 53, pp. 385-407.
- Duffie, D. y R. Kan (1996), "A Yield Factor Model of Interest Rates", *Mathematical Finance*, 64, pp. 379-406.
- Ejsing, J., J. A. García y T. Werner (2007), "The Term Structure of Euro Area Break-even Inflation Rates: The Impact of Seasonality", Working Paper Series 830, Banco Central Europeo.
- Fabozzi, F. J. (1997), *Bonds Markets Analysis and Strategies*, Prentice Hall, tercera edición.
- Fisher, I. (1930), *The Theory of Interest*, Macmillan.
- García, J. A. y T. Werner (2008), "Inflation Risks and Inflation Risk Premia", Ecb Working Paper, Banco Central Europeo.
- Grishchenko, O. y H. Jing-zhi (2010), "Inflation Risk Premium: Evidence from the TIPS Market", Working Paper, Pennsylvania State University.
- Hordahl, P. y O. Tristani (2010), "Inflation Risk Premia in the US and the Euro Area", BIS Working Papers 325, Bank for International Settlements.
- Nelson, C. R., y A. F. Siegel (1987), "Parsimonious Modelling of Yield Curves", *Journal of Business*, 60(4), pp. 473-489.
- Piazzesi, M. (2009), "Affine Term Structure Models", L. Hansen, y Y. Ait-Sahalia (comps.), *Handbook of Financial Econometrics*, North Holland.
- Sack, B. (2000), "Deriving Inflation Expectations from Nominal and Inflation-Indexed Treasury Yields", Finance and Economics Discussion Series 2000-33, Board of Governors of the Federal Reserve System (U.S.).
- Sargent, T. J. (1987), *Dynamic Macroeconomic Theory*, The MIT Press.
- Sarte, P. D. G. (1998), "Fisher's Equation and the Inflation Risk Premium in a Simple Endowment Economy", *Economic Quarterly*, otoño, pp. 53-72.
- Vasicek, O. (1977), "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", *Journal of Financial Economics*, 5, pp. 177-188.