

COBERTURA ÓPTIMA DE RIESGOS DE MERCADO EN PRESENCIA DE RIESGOS DE CANTIDAD Y DE COSTOS DE PRODUCCIÓN*

*Augusto Castillo y Rafael Águila***

RESUMEN

En este artículo se analiza cómo lograr la cobertura óptima de un flujo de caja en presencia de riesgo de tipo de cambio, riesgo de precio en el producto que se vende, e incertidumbre respecto a los costos y a la cantidad por vender. Se presenta una solución analítica para las estrategias de cobertura óptimas en estos casos, si se dispone de futuros del bien producido y de futuros de tipo de cambio para realizar dicha cobertura. También se propone un método simple, basado en la metodología de regresiones, para obtener las estrategias de cobertura óptimas. Se analiza de qué manera la cobertura óptima depende de los parámetros clave identificados, es decir de las volatilidades del tipo de cambio, del precio, de los costos y de la cantidad y de las correlaciones entre estas variables. La metodología desarrollada es aplicada al caso particular de las exportaciones chilenas de celulosa.

ABSTRACT

This paper discusses how to achieve optimal hedging of a cash flow when facing exchange rate risk, price risk of the product the company sells and costs and quantity uncertainty. We present an analytical solution of the optimal hedging strate-

* *Palabras clave:* cobertura, riesgo de cantidad. *Clasificación JEL:* C15, C61, D81. Artículo recibido el 16 de febrero y aceptado el 8 de agosto de 2007.

** A. Castillo, Escuela de Administración de la Pontificia Universidad Católica de Chile y Escuela de Negocios de la Universidad Adolfo Ibáñez (correo electrónico: augusto.castillo@uai.cl). R. Águila, Facultad de Economía y Escuela de Administración de la Pontificia Universidad Católica de Chile.

gies when futures on the good produced and on the exchange rate are available. An easy regression-based methodology to obtain the optimal hedging strategies is also proposed. We identify the key parameters affecting this strategy, which are the volatilities of the exchange rate, price, costs and quantity and the correlations among those variables. The methodology developed is applied to the particular case of cellulose Chilean exports.

INTRODUCCIÓN

Las empresas se enfrentan a incertidumbre proveniente de la interacción entre una serie de variables aleatorias. En algunos casos las fuentes de incertidumbre surgen por riesgos de precios en el o los productos que la empresa produce y vende o por riesgos de precios en el o los insumos que la empresa compra y utiliza en sus procesos productivos. La incertidumbre puede surgir también por la incapacidad de predecir exactamente el número de unidades de producto que la empresa elaborará y/o venderá. Si los ingresos o los costos o ambos están denominados en moneda extranjera esto agrega una complejidad adicional a la incertidumbre que estos negocios enfrentan.

En la actualidad existen mecanismos de cobertura con los cuales las empresas pueden reducir su exposición a los riesgos de precios. Esa protección normalmente no mejorará los flujos de caja netos esperados por la empresa, pero sí reducirá la incertidumbre respecto al flujo de caja por recibir. El efecto que la cobertura tenga en los flujos y rendimientos esperados dependerá de la relación que se observe entre los precios inmediatos (*spot*) esperados y los precios futuros.¹ La calidad de la cobertura, por su parte, dependerá críticamente de la disponibilidad de instrumentos apropiados para efectuar cobertura y de que la empresa seleccione apropiadamente las posiciones a tomar en dichos contratos.

Existe una serie de estudios previos que investigan las razones por las cuales las empresas realizan cobertura. Los estudios de Smith y Stultz (1985), Bessembinder (1991), Froot, Scharfstein y Stein (1993) y Mello y Parsons (1995) identifican el deseo de minimizar la varianza de los flujos de caja futuros, la reducción de la volatilidad del ingreso antes de impuestos, el deseo

¹ Si el precio inmediato (*spot*) esperado es superior al precio futuro, lo que se conoce como prima de desplazamiento (*backwardation*), el uso de contratos futuros reducirá los flujos esperados. En el caso contrario, que se denomina *contango*, los flujos esperados aumentarán. Estos conceptos fueron propuestos inicialmente en Keynes (1930) y en Hicks (1946). Véase un análisis más extenso de estos términos en Kawai (1983) o Castillo y Águila (2005).

de reducir la dispersión de las ganancias contables e, incluso, la esperanza de evitar la quiebra financiera como las principales razones para hacer cobertura. Neuberger (1999) supone que el deseo de hacer cobertura proviene de agentes que son adversos al riesgo y que desean maximizar su bienestar esperado.²

El uso de contratos futuros para hacer cobertura de riesgo de precios no proporciona muchas veces cobertura perfecta en el mundo real, por una serie de razones. Primero, porque puede que no existan contratos futuros en el bien de cuyas fluctuaciones de precio se quiere proteger. En este primer caso algún grado de cobertura es aún posible si es que existen contratos futuros de un producto que esté relacionado con el primero y en esa eventualidad la calidad de la cobertura dependerá del grado de correlación entre el precio del producto para el que se desea la cobertura y el precio del bien que el contrato futuro considere.

Una segunda razón para que la cobertura no sea forzosamente perfecta se relaciona con el grado de estandarización de los contratos de futuros, que en ocasiones no permite una coincidencia exacta con la fecha en que se recibirá el flujo de caja futuro que origina la incertidumbre. Esta variante del problema lo analizan entre otros Brennan y Crew (1995), Neuberger (1999), Schwartz (1997), Castillo (2003) y Castillo y Lefort (2003). En este último trabajo se muestra cómo obtener coberturas óptimas que no son perfectas contra un riesgo de largo plazo cuando se sabe que una cierta cantidad de moneda extranjera será recibida en el futuro y se dispone de contratos futuros de corto plazo para hacer la cobertura, si las tasas de interés se comportan como variables aleatorias que siguen un proceso de Cox, Ingersoll y Ross.³

Una tercera razón para que la cobertura pueda no ser perfecta surge del desconocimiento que pueda existir respecto a la cantidad del producto por elaborar y vender, es decir por la existencia de riesgo de cantidad además del riesgo de precio. Sin embargo, este tema no ha sido analizado con mayor profundidad en la bibliografía de cobertura. Aquí destacan los trabajos de Rolfo (1980), Newbery y Stiglitz (1981), Kerkvliet y Moffett (1991), Anderson y Danthine (1983), Moschini y Lapan (1995), Chowdhry (1995) y el estudio de Castillo y Águila (2005).

Rolfo (1980) obtiene una expresión para la estrategia de cobertura óptima

² Teniendo claro que la cobertura por lo común afectará no sólo la variabilidad de un flujo de caja futuro sino además su rendimiento esperado, en este estudio centramos la atención, tal como se ha hecho en muchos de los estudios anteriores en esta materia, en la capacidad de una empresa para reducir la varianza de los flujos de caja que generará con la cobertura con instrumentos futuros.

³ Este proceso fue propuesto originalmente en Cox, Ingersoll y Ross (1985).

en presencia de riesgo de precio y cantidad, ignorando costos de producción y suponiendo que las preferencias de las personas están representadas apropiadamente por una función de utilidad logarítmica. Este estudio no considera los efectos de incorporar riesgo en el tipo de cambio. Newbery y Stiglitz (1981) resuelven un problema similar al anterior en que tampoco existen costos de producción y en que los agentes encuentran una estrategia de cobertura óptima mediante la maximización de una función de bienestar que presenta un grado de aversión al riesgo constante. Kerkvliet y Moffett (1991) y también Chowdhry (1995) determinan una expresión para la estrategia de cobertura óptima de riesgo cambiario cuando hay incertidumbre en el monto de moneda extranjera por recibir, si el objetivo es minimizar la varianza del flujo de caja por recibir en moneda local. En estos trabajos no se considera la existencia de riesgo en el precio del producto ni tampoco la presencia de costos de producción. Anderson y Danthine (1983) analizan el caso de un productor que elabora un cierto producto a partir de un cierto insumo, y que utiliza futuros para cubrirse del riesgo que supone variaciones en el precio del producto final. En este artículo se supone que estos agentes maximizan el valor esperado de una función cóncava del tipo Von Neumann-Morgenstern. En el citado artículo se determina una estrategia de cobertura óptima en presencia y en ausencia de incertidumbre en la cantidad producida, y en presencia de costos de producción no aleatorios.

Moschini y Lapan (1995) analizan el caso de un productor que fabrica y vende un cierto bien, enfrentando riesgo de cantidad, riesgo de precio en el producto que vende y riesgo de base al no existir correlación perfecta entre los precios del bien que vende y el precio del producto respecto al cual existen contratos futuros. Se plantea que el objetivo de los dueños de esta empresa es maximizar su bienestar esperado y se concluye que en este caso la cobertura que se logra con contratos futuros puede ser mejorada si se dispone además de un instrumento como las opciones.

En Castillo y Águila (2005) se estudia de qué manera la existencia de riesgo en los costos y en la cantidad puede afectar tanto la estrategia óptima de cobertura como la calidad o eficiencia de la misma. Se analiza en particular el caso en que el precio de venta, los costos y la cantidad son variables aleatorias que pueden o no presentar cierto grado de correlación entre sí. También se determina la manera en que los distintos parámetros pertinentes pueden afectar tanto la estrategia de cobertura óptima como el grado de eficiencia de la misma.

En el presente artículo se extiende el análisis de Castillo y Águila (2005) para considerar el caso en que una empresa produce y vende un cierto bien a un determinado precio en moneda extranjera y convierte luego los excedentes a moneda local.⁴ Además se considera la existencia de futuros de tipo de cambio que permiten hacer cobertura del riesgo cambiario. Se analiza un caso general con costos de producción que pueden ser aleatorios y se supone nuevamente incertidumbre en la cantidad producida o vendida. Una contribución importante de este artículo consiste en proponer un mecanismo muy simple de aplicar, basado en la metodología de regresiones múltiples, para determinar las estrategias de cobertura que una empresa debiera instrumentar.

Se analiza también el efecto que tiene la interacción de las variables aleatorias (cantidad, costo, precio y tipo de cambio) en las estrategias de cobertura óptimas. Cualquier productor que posea algún grado de poder monopólico en un cierto mercado se enfrenta a una situación en que sus ventas físicas y el precio de venta muestran algún grado de correlación. Piénsese en una empresa que produce trigo y que posee algún grado de poder monopólico en ese mercado. Una producción anormalmente alta provocará con seguridad una caída en el precio del trigo. Lo mismo ocurrirá si los factores que determinan que esta empresa produzca más de lo anticipado (como factores climáticos por ejemplo), determina a su vez que otros productores importantes (por la cercanía geográfica de éstos por ejemplo) tengan montos anormalmente altos de producción, y eso provoca una caída de los precios. En estos dos casos esperaríamos una correlación negativa entre la producción de esta empresa y el precio de venta del producto. En cambio si los grandes productores se encuentran en zonas geográficas distantes y la empresa de la que estamos hablando es un actor secundario del mercado, uno esperaría correlaciones muy bajas entre el precio de mercado y la cantidad que esa empresa produce y vende. La correlación entre precio del producto y tipo de cambio es también posible. Piénsese en un país cuyas exportaciones son mayoritariamente trigo. Un alza en el precio internacional del trigo aumentará las exportaciones de ese país y en la medida que en ese país exista tipo de cambio flexible esto provocará una caída en el tipo de cambio.⁵

⁴ A esta manera de contabilizar se le denomina usualmente en las finanzas internacionales como *foreign currency approach* o “enfoque de la moneda extranjera”. Véase mayores detalles de este enfoque en el artículo de Ross, Westerfield y Jordan (1998).

⁵ Esta relación inversa entre tipo de cambio y precio del bien exportado se observa también en el caso de Chile con el cobre que este país exporta.

Este artículo se organiza de la siguiente manera. En la sección I se presenta la solución general al problema de cobertura en presencia de riesgos de precio, de costos, de tipo de cambio y de cantidad, identificando a partir de aquí las situaciones particulares en que todas o algunas de estas variables aleatorias son independientes o no son variables aleatorias. La sección II muestra un ejemplo numérico representativo y contiene un análisis de sensibilidad para los parámetros clave. Al final se presenta las conclusiones.

I. COBERTURA ÓPTIMA SI HAY RIESGOS DE MERCADO, DE COSTOS Y DE CANTIDAD

1. *El caso general*

En primer lugar, se supone la existencia de aleatoriedad en los ingresos \tilde{I}_T de la empresa en el momento futuro T . Esta incertidumbre puede explicarse ya sea porque la empresa es incapaz de determinar con exactitud la cantidad del producto \tilde{Q}_T que podrá elaborar y vender, porque desconoce el precio \tilde{P}_T en moneda extranjera al que será capaz de vender dicha producción, o porque no puede predecir el tipo de cambio \tilde{S}_T con el cual deberá convertir la moneda extranjera en moneda local, pudiendo ocurrir que la empresa enfrente simultáneamente las tres fuentes de incertidumbre. El ingreso en el momento futuro T estará determinado por la expresión:

$$\tilde{I}_T = \tilde{P}_T * \tilde{Q}_T * \tilde{S}_T \quad (1)$$

Por otra parte la empresa enfrenta gastos aleatorios \tilde{Q}_T . La aleatoriedad en los gastos puede provenir nuevamente de la incertidumbre en la producción y ventas físicas \tilde{Q}_T , de la incapacidad para predecir con exactitud la magnitud de los costos unitarios de producción \tilde{C}_T denominados en moneda extranjera, o de la imposibilidad de anticipar el valor que en T tomará el tipo de cambio con que se deberá convertir los gastos a moneda local.

$$\tilde{G}_T = \tilde{C}_T * \tilde{Q}_T * \tilde{S}_T \quad (2)$$

En resumen, el flujo de caja de esta empresa que se genera en T cuando la empresa no realiza cobertura $\tilde{F}C_T^{SC}$ corresponde a la siguiente expresión:

$$\tilde{F}C_T^{SC} = \tilde{I}_T - \tilde{G}_T = \tilde{P}_T * \tilde{Q}_T * \tilde{S}_T - \tilde{C}_T * \tilde{Q}_T * \tilde{S}_T \quad (3)$$

Se supone entonces que esta empresa puede realizar cobertura mediante

el uso de contratos futuros. La empresa puede decidir tomar posiciones largas (comprometerse a comprar a un cierto precio en la fecha futura T) o posiciones cortas (comprometerse a vender a un cierto precio en la fecha futura T). Se supone que la empresa utiliza estos contratos con objeto de minimizar la varianza del flujo de caja residual presentado en (3).

Se considera la posibilidad de que esta empresa realice cobertura mediante el uso de dos tipos de contratos futuros. Un primer contrato que le permita fijar el precio en moneda extranjera al que venderá su producción y un segundo contrato que le permita fijar el tipo de cambio al que transformará sus flujos de caja en moneda extranjera a moneda local. La ganancia neta que genera una posición larga en un contrato futuro del producto que elabora la empresa en el periodo T se denominará \tilde{f}_T y el monto de esa ganancia neta estará determinado por la siguiente expresión:

$$\tilde{f}_T - \tilde{P}_T - K \quad (4)$$

en que K representa el precio futuro pactado en moneda extranjera establecido en el contrato futuro, precio que se promete pagar a cambio de recibir una unidad de este activo en la fecha futura T . Para los efectos de este trabajo, suponemos que los contratos futuros disponibles en el mercado son contratos respecto a exactamente el mismo activo cuya volatilidad de precio queremos evitar. También suponemos que los plazos de vencimiento de esos contratos coinciden exactamente con la fecha en que esta empresa generará su flujo de caja, es decir la fecha futura T .⁶

Se considera además la posibilidad de que la empresa realice cobertura mediante contratos futuros que le permitan fijar el precio al que convertirá moneda extranjera en moneda local. La ganancia neta que genera una posición larga en un futuro de tipo de cambio en el periodo T se denominará \tilde{g}_T y su monto será determinado mediante la siguiente expresión:

$$\tilde{g}_T - \tilde{S}_T - L \quad (5)$$

en que L corresponde al precio futuro pactado en moneda local establecido en el contrato futuro, precio que se promete pagar en T para recibir a cam-

⁶ Estas características coinciden mejor con las de un contrato a término (*forward*) que con las de un contrato futuro. El hacer este supuesto permite que se evite los problemas de desfase de plazos y de no coincidencia entre el activo de cuya variación de precios se quiere proteger y el activo incluido en los contratos futuros. Estos problemas han sido analizados y discutidos en una vasta bibliografía. Véase por ejemplo Castillo (2003).

bio una unidad de moneda extranjera en esa misma fecha. En este caso la solución es tomar posiciones cortas o largas (según corresponda) en estos contratos futuros para hacer cobertura. Se pretende determinar en este artículo las estrategias de cobertura óptimas utilizando estos contratos para minimizar el riesgo del flujo de caja en T . La expresión que representa ese flujo de caja en T si la empresa realiza cobertura con ambos tipos de contratos $\tilde{F}C_T^{CC}$ será la siguiente:⁷

$$\tilde{F}C_T^{CC} = \tilde{F}C_T^{SC} + H * (\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T - G * (\tilde{S}_T - L) \quad (6)$$

en que H representa el número de posiciones por tomar en contratos futuros respecto al producto que la empresa vende y que vence en T y en que G representa el número de posiciones por tomar en futuros de tipo de cambio. El signo de H y de G será positivo si las posiciones por tomar en estos contratos futuros son largas y será negativo si las posiciones por tomar en los contratos futuros son cortas. A partir de esta expresión se obtiene la varianza del flujo de caja con cobertura, la que está representada por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \text{var}(\tilde{F}C_T^{CC}) = & \text{var}(\tilde{F}C_T^{SC}) + H^2 * \text{var}((\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T) + G^2 * \text{var}(\tilde{S}_T) \\ & + 2 * H * \text{cov}(\tilde{F}C_T^{SC}, (\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T) + 2 * G * \text{cov}(\tilde{F}C_T^{SC}, \tilde{S}_T) \\ & + 2 * H * G * \text{cov}((\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T, \tilde{S}_T) \end{aligned} \quad (7)$$

de esta expresión es posible concluir que $\text{var}(\tilde{F}C_T^{CC})$ es una superficie cuadrática en el espacio, dependiente de las variables H y G y cuyo coeficiente de posición corresponde a $\text{var}(\tilde{F}C_T^{SC})$.

2. Obtención de h óptimo y g óptimo

Es posible demostrar que la varianza del flujo de caja con cobertura es una función cuadrática convexa para todo valor de (H, G) . Luego, tal como se muestra en el apéndice 1, el mínimo global de la varianza del flujo de caja con cobertura representada por la ecuación (7) se produce cuando:

⁷ Podría ocurrir que la empresa no pueda usar ambos tipos de contratos por ejemplo porque alguno de ellos no esté disponible en el mercado. Esto ocurre en particular en el caso de ciertos productos no almacenables para los que suelen no existir contratos futuros.

$$H_{\text{ÓPTIMO}} = \frac{\text{Cov}((\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T, \tilde{S}_T) * \text{Cov}(\tilde{F}C_T^{SC}, \tilde{S}_T) - \text{Cov}(\tilde{F}C_T^{SC}, (\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T) * V(\tilde{S}_T)}{V(\tilde{S}_T * \tilde{P}_T) * V(\tilde{S}_T) * (1 - \text{Corr}^2(\tilde{S}_T * \tilde{P}_T, \tilde{S}_T))} \quad (8)$$

$$G_{\text{ÓPTIMO}} = \frac{\text{Cov}((\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T, \tilde{S}_T) * \text{Cov}(\tilde{F}C_T^{SC}, (\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T) - \text{Cov}(\tilde{F}C_T^{SC}, \tilde{S}_T) * V((\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T)}{V(\tilde{S}_T * \tilde{P}_T) * V(\tilde{S}_T) * (1 - \text{Corr}^2(\tilde{S}_T * \tilde{P}_T, \tilde{S}_T))} \quad (9)$$

Las ecuaciones (8) y (9) representan las estrategias de cobertura óptimas en el caso general en que todas las variables aleatorias consideradas pueden presentar algún grado de dependencia entre sí. Es interesante advertir cómo las estrategias de cobertura óptimas en este caso general están determinadas por el grado de dependencia entre las distintas variables aleatorias, dependencia que es captada en este caso por las distintas covarianzas que aparecen en estas ecuaciones.

Si se considera la regresión lineal múltiple en que la variable dependiente es $Y = \tilde{F}C_T^{SC}$ y en que las variables independientes son $X_1 = (\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T$ (que representa la ganancia neta que genera una posición larga en un futuro del producto que elabora la empresa) y $X_2 = \tilde{S}_T$ (que representa el tipo de cambio), tal como se indica en la siguiente ecuación:

$$E(Y/X_1, X_2) = E(\tilde{F}C_T^{SC} / ((\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T, \tilde{S}_T)) = \beta_0 + \beta_1 * ((\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T) + \beta_2 * \tilde{S}_T \quad (10)$$

entonces, tal como se muestra en el apéndice 2, los parámetros o coeficientes de las variables independientes en esta regresión serán los que se indican a continuación:

$$\beta_1 = \frac{V(\tilde{S}_T) * \text{Cov}((\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T, \tilde{F}C_T^{SC}) - \text{Cov}((\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T, \tilde{S}_T) * \text{Cov}(\tilde{S}_T, \tilde{F}C_T^{SC})}{V(\tilde{S}_T) * V(\tilde{S}_T * \tilde{P}_T) * (1 - \text{Corr}^2(\tilde{S}_T * \tilde{P}_T, \tilde{S}_T))} \quad (11)$$

$$\beta_2 = \frac{V((\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T) * \text{Cov}(\tilde{S}_T, \tilde{F}C_T^{SC}) - \text{Cov}((\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T, \tilde{S}_T) * \text{Cov}((\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T, \tilde{F}C_T^{SC})}{V(\tilde{S}_T) * V(\tilde{S}_T * \tilde{P}_T) * (1 - \text{Corr}^2(\tilde{S}_T * \tilde{P}_T, \tilde{S}_T))} \quad (12)$$

Al comparar (8) y (9) con (11) y (12) se observa que $H_{\text{ÓPTIMO}} = \beta_1$ y que $G_{\text{ÓPTIMO}} = \beta_2$. Es decir $H_{\text{ÓPTIMO}}$ y $G_{\text{ÓPTIMO}}$ corresponden exactamente al opuesto aditivo de las pendientes de dicha ecuación de regresión. Estas relaciones sugieren un método simple y práctico para obtener estimadores del $H_{\text{ÓPTIMO}}$ y del $G_{\text{ÓPTIMO}}$ aplicando mínimos cuadrados a los datos de una muestra.

Esta equivalencia permite además interpretar el H_{OPTIMO} como el opuesto de la variación del valor esperado del flujo de caja sin cobertura $\tilde{F}C_T^{SC}$ cuando la ganancia neta de una posición larga en un futuro del producto que vende la empresa $(\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T$ cambia en una unidad monetaria, esto es:

$$\frac{E \tilde{F}C_T^{SC} / (\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T}{(\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T} = FC / (P - K)S \quad H_{OPTIMO} \quad (13)$$

Es posible a su vez interpretar el G_{OPTIMO} como el opuesto de la variación del valor esperado del flujo de caja sin cobertura $\tilde{F}C_T^{SC}$ cuando \tilde{S}_T cambia en una unidad monetaria, esto es:

$$\frac{E \tilde{F}C_T^{SC} / (\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T}{\tilde{S}_T} = FC / S \quad G_{OPTIMO} \quad (14)$$

Habiendo obtenido el número de posiciones por tomar en contratos futuros que permiten minimizar la varianza del flujo de caja residual en moneda local que genera esta empresa, se debe considerar que es posible tomar posiciones distintas de la óptima, que incluso podrían en algunos casos aumentar dicha varianza. A continuación se analiza en qué condiciones la cobertura reduce la varianza del flujo de caja y en qué condiciones podría llegar a aumentarla.

3. Eficiencia de la cobertura

Tal como se propone en Castillo y Águila (2005), la eficiencia de la cobertura se determina en este trabajo de la siguiente manera:

$$\text{Eficiencia cobertura} = \frac{\text{var}(\tilde{F}C_T^{SC}) - \text{var}(\tilde{F}C_T^{CC})}{\text{var}(\tilde{F}C_T^{SC})} \quad (15)$$

Esta expresión representa la diferencia proporcional entre las varianzas del flujo de caja sin cobertura y con cobertura. Si esta diferencia es positiva, la estrategia de cobertura será eficiente pues la varianza del flujo de caja con cobertura será menor que la varianza del flujo de caja sin cobertura. Esta diferencia podría sin embargo resultar 0 o incluso negativa. La cobertura

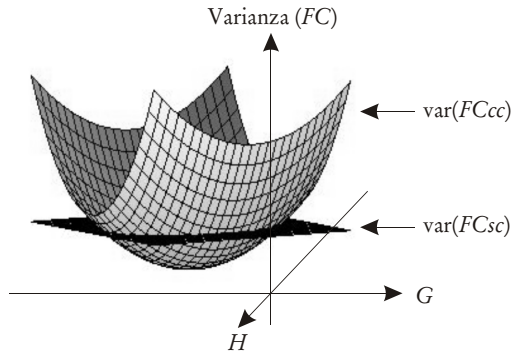
será recomendable o eficiente sólo si es que en el producto de la misma se obtiene un grado de eficiencia, medido por la ecuación (15), que sea positivo. En caso contrario diremos que la cobertura es no recomendable o ineficiente. A partir de la expresión (7) se aprecia claramente que la reducción de varianza que genera la cobertura es nula cuando se cumple la siguiente condición:

$$\begin{aligned}
 H^2 * V((\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T) - G^2 * V(\tilde{S}_T) - 2 * H * Cov(\tilde{F}C_T^{SC}, (\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T) \\
 - 2 * G * Cov(\tilde{F}C_T^{SC}, \tilde{S}_T) - 2 * H * G * Cov((\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T, \tilde{S}_T) = 0 \quad (16)
 \end{aligned}$$

Esta es una ecuación general de segundo grado que representa una elipse, la cual está totalmente contenida en el plano definido por la varianza del flujo de caja sin cobertura. La gráfica 1 muestra una representación en tres dimensiones de la varianza del flujo de caja con y sin cobertura, para distintos posibles valores de las estrategias de cobertura H y G .

En la gráfica 1, para todos los puntos (H, G) dentro de la elipse en que se cumple (16), la eficiencia es positiva, ya que en tal caso la varianza del flujo de caja con cobertura está por debajo del plano de la varianza del flujo de caja sin cobertura, como asimismo para todos los puntos (H, G) en la elipse la eficiencia es nula y para todos los puntos (H, G) fuera de la elipse la eficiencia es negativa.

GRÁFICA 1. Varianza de los FC con y sin cobertura en función de H y G



La estrategia de cobertura óptima se define como la combinación de posiciones H y G que permite minimizar la varianza del flujo de caja con cobertura. Esta estrategia de cobertura óptima se produce cuando H y G toman los valores $(H_{ÓPTIMO}, G_{ÓPTIMO})$ y en tal caso la eficiencia es máxima.

Utilizando nuevamente la analogía con la ecuación de regresión lineal que ya se consideró y usando las expresiones (8), (9) y (15) es posible comprobar que la máxima eficiencia alcanzable (EM) corresponde exactamente al coeficiente de determinación de la regresión representada en (10), esto es:

$$EM = \frac{H_{OPTIMO}^2 * V((P_T - K) * S_T) - G_{OPTIMO}^2 * V(S_T) - 2 * H_{OPTIMO} * G_{OPTIMO} * Cov((P_T - K) * S_T, S_T)}{\text{var}(\tilde{F}C_T^{SC})} \quad R^2 \quad (17)$$

Es interesante entonces destacar que el coeficiente de determinación R^2 de la ecuación de regresión (10) efectivamente mide la eficiencia máxima alcanzable con cobertura óptima. Un caso extremo posible ocurre cuando la cobertura es perfecta, es decir cuando el mínimo de la $\text{var}(\tilde{F}C_T^{CC})$ es igual a 0, entonces se cumple que $R^2 = 1$, lo que indica que se elimina totalmente la varianza del flujo de caja mediante la cobertura. Otro caso extremo ocurre cuando la cobertura es nula, es decir cuando el mínimo de la $\text{var}(\tilde{F}C_T^{CC})$ es igual a la $\text{var}(\tilde{F}C_T^{CC})$, entonces se cumple que $R^2 = 0$, lo que indica que la cobertura óptima no reduce la varianza del flujo de caja.

4. Algunos casos particulares

Un primer caso particular interesante es el que ocurre si todas las variables aleatorias consideradas (precio, costo, tipo de cambio y producción) son independientes entre sí. En este caso es posible comprobar que la estrategia de cobertura óptima resulta ser la siguiente:

$$H_{OPTIMO} = E(\tilde{Q}_T) \quad (18)$$

$$G_{OPTIMO} = E(\tilde{Q}_T) * K - E(\tilde{C}_T) \quad (19)$$

Estos resultados son muy intuitivos. Si la producción esperada es $E(\tilde{Q}_T)$ entonces tome exactamente ese número de posiciones cortas en futuros del bien que produce y de esa manera elimina incertidumbre en sus ingresos en moneda extranjera. Una vez realizado esto la cantidad de moneda extranjera que se espera recibir en términos netos será exactamente $E(\tilde{Q}_T) * K - E(\tilde{C}_T)$, y por tanto ese es el número de posiciones cortas que se debiera tomar en futuros de moneda extranjera. Si tanto la producción como los costos dejarán

de ser variables aleatorias y mantenemos la independencia entre \tilde{S}_T y \tilde{P}_T entonces estas estrategias óptimas serían tomar Q posiciones cortas en futuros del bien producido y tomar $Q * (K - C)$ posiciones cortas en futuros de moneda extranjera.

Un segundo caso interesante ocurre cuando el tipo de cambio \tilde{S}_T es independiente de \tilde{P}_T , \tilde{Q}_T y \tilde{C}_T pero existe algún grado de dependencia entre estas tres variables. Esto ocurre cuando estamos frente a un producto que no representa una fracción significativa de las exportaciones o importaciones de un país. En este caso las estrategias de cobertura óptimas serán las siguientes:

$$H_{\text{ÓPTIMO}} = \frac{\text{cov}((\tilde{P}_T - \tilde{C}_T) * \tilde{Q}_T, \tilde{P}_T)}{\text{var}(\tilde{P}_T)} = \frac{\text{cov}(\tilde{F}C_{ME}^{SC}, \tilde{P}_T)}{\text{var}(\tilde{P}_T)} \tag{20}$$

$$G_{\text{ÓPTIMO}} = E(\tilde{F}C_{ME}^{SC}) - H_{\text{ÓPTIMO}} * [E(\tilde{P}_T) - K] \tag{21}$$

El $H_{\text{ÓPTIMO}}$ en (20) está determinado por el signo y la magnitud de la covarianza entre el flujo de caja neto sin cobertura en moneda extranjera $\tilde{F}C_{ME}^{SC}$ $\tilde{P}_T * \tilde{Q}_T - \tilde{C}_T * \tilde{Q}_T$ y el precio del bien producido.⁸ Si la covarianza es positiva y el flujo de caja neto también lo es (esto ocurre por ejemplo si sólo hay ingresos) la estrategia de cobertura óptima es tomar posiciones cortas en contratos futuros del bien. Pero si el flujo de caja neto es negativo (esto ocurre por ejemplo si sólo hay egresos) o si la covarianza fuese negativa entonces la estrategia de cobertura óptima consistiría en tomar posiciones largas en estos contratos (lo que tiene mucho sentido pues en ese caso los aumentos en \tilde{P}_T provocan caídas en el flujo de caja sin cobertura $\tilde{F}C_T^{SC}$ y es ese tipo de situaciones las que se buscará evitar con las posiciones en futuros del bien).

El $G_{\text{ÓPTIMO}}$ en (21) tiene dos componentes. El primero corresponde a un número de posiciones cortas igual al flujo de caja neto esperado en moneda extranjera si es que la empresa no hiciese cobertura en futuros del bien $E(\tilde{F}C_{ME}^{SC})$. El segundo término corresponde al flujo de caja esperado en moneda extranjera que generan las posiciones en futuros del bien que se tomen $E(H_{\text{ÓPTIMO}} * \tilde{f}_T)$. Esto significa que el número de posiciones cortas que se debe tomar en futuros de moneda extranjera corresponde al flujo de caja en

⁸ En este caso es fácil comprobar que el $H_{\text{ÓPTIMO}}$ corresponde al opuesto de la pendiente de una regresión en que $\tilde{F}C_{ME}^{SC}$ es la variable dependiente y en que \tilde{P}_T es la variable independiente.

moneda extranjera que se espera recibir, dado que la empresa realiza cobertura en el bien producido, es decir $G_{\text{ÓPTIMO}} = E(\tilde{F}C_{ME}^{CC})$.

Un subcaso que es posible analizar a partir de aquí es cómo se debe hacer la cobertura en moneda extranjera si es que la empresa produce un cierto bien en el que no existen contratos futuros y la empresa sólo puede hacer cobertura con futuros de tipo de cambio.⁹ La respuesta es que se deben tomar posiciones cortas en futuros de tipo de cambio por un monto igual a la cantidad de moneda extranjera que se espera recibir en el periodo T , es decir $G_{\text{ÓPTIMO}} = E(\tilde{F}C_{ME}^{SC})$. Esto porque el segundo término del lado derecho en (21) es igual a 0 en estas condiciones.

Un tercer caso interesante de analizar ocurre cuando sólo existe dependencia entre las variables aleatorias \tilde{P}_T y \tilde{S}_T . A pesar de que uno podría esperar que la dependencia entre estas dos variables se refleje de alguna manera en las estrategias de cobertura óptimas, estas estrategias resultan ser en este caso idénticas a las representadas en las ecuaciones (18) y (19) que describen el caso de total independencia. Este resultado posiblemente se explique por la existencia de instrumentos futuros que permiten enfrentar los riesgos tanto en \tilde{P}_T como en \tilde{S}_T .

Otro subcaso interesante que se analiza a continuación es el que ocurre cuando existiendo dependencia entre \tilde{P}_T y \tilde{S}_T , no existen contratos futuros del bien producido. La pregunta en este caso es de qué manera la estrategia de cobertura óptima con futuros de tipo de cambio dependerá del grado de dependencia entre \tilde{P}_T y \tilde{S}_T . Resolviendo este problema se obtiene lo siguiente:

$$G_{\text{ÓPTIMO}} = E(\tilde{Q}_T) + \frac{\text{cov}(\tilde{P}_T * \tilde{S}_T, \tilde{S}_T)}{\text{var}(\tilde{S}_T)} E(\tilde{C}_T) \quad (22)$$

Adviértase que si \tilde{P}_T y \tilde{S}_T fuesen independientes la estrategia de cobertura óptima se convertiría en $G_{\text{ÓPTIMO}} = E(\tilde{Q}_T) + E(\tilde{P}_T) E(\tilde{C}_T)$. La empresa estaría comprometiéndose a vender la moneda extranjera que espera recibir. Este resultado se altera sin embargo en la medida que exista algún grado de dependencia entre \tilde{P}_T y \tilde{S}_T . Es así como si $\text{cov}(\tilde{P}_T * \tilde{S}_T, \tilde{S}_T)$ es ne-

⁹ Existen muchos bienes en los que no existen contratos futuros disponibles. Esto ocurre por ejemplo en general en el caso de las frutas y de muchos otros bienes que no son almacenables por largos periodos. El análisis supone en todo caso que no se dispone de otros bienes con alta correlación con el que nos interesa y que sí posea contratos futuros que puedan utilizarse para mejorar la cobertura.

gativa (lo que ocurriría si aumentos en el tipo de cambio provocan caídas en \tilde{P}_T suficientemente significativas) la estrategia de cobertura óptima puede consistir en tomar posiciones largas en futuros de tipo de cambio pues el hecho que de verdad preocupa son aumentos y no caídas en el tipo de cambio. Si $\text{cov}(\tilde{P}_T * \tilde{S}_T, \tilde{S}_T)$ es en cambio positiva y suficientemente alta como para que el término en el paréntesis de la ecuación (22) sea positivo (lo que ocurrirá por ejemplo si aumentos en el tipo de cambio provocan pequeñas caídas o incluso incrementos en el precio del producto) entonces la estrategia de cobertura óptima consistirá en tomar posiciones cortas en futuros de tipo de cambio.

Un cuarto caso interesante ocurre cuando sólo existe dependencia entre las variables aleatorias \tilde{P}_T y \tilde{C}_T . En este panorama es posible verificar que las estrategias de cobertura óptimas se transforman en:

$$H_{\text{ÓPTIMO}} = E(\tilde{Q}_T) * 1 - \frac{\text{cov}(\tilde{C}_T, \tilde{P}_T)}{\text{var}(\tilde{S}_T)} \tag{23}$$

$$G_{\text{ÓPTIMO}} = E(\tilde{Q}_T) * (K - E(\tilde{C}_T)) - \frac{\text{cov}(\tilde{C}_T, \tilde{P}_T)}{\text{var}(\tilde{P}_T)} * E(\tilde{f}_T) \tag{24}$$

Es posible identificar a partir del panorama descrito por la ecuación (23) las siguientes posibilidades para el número de posiciones en futuros del producto ($H_{\text{ÓPTIMO}}$). Si \tilde{P}_T y \tilde{C}_T se mueven juntos de manera que el productor recibe un margen constante $M = \tilde{P}_T - \tilde{C}_T$ entonces no se está expuesto a riesgo de precio y por tanto el $H_{\text{ÓPTIMO}}$ es 0. Si la correlación entre \tilde{P}_T y \tilde{C}_T es 0 estamos en el caso de independencia entre estas dos variables y el $H_{\text{ÓPTIMO}}$ será igual a $E(\tilde{Q}_T)$. Con correlación positiva no perfecta o si el costo representa una fracción constante del precio, al $H_{\text{ÓPTIMO}}$ le corresponde a tomar un número de posiciones cortas inferior al que indica la producción esperada. Finalmente, en el poco probable caso de que la correlación entre \tilde{P}_T y \tilde{C}_T fuese negativa, el $H_{\text{ÓPTIMO}}$ consistirá en tomar un número de posiciones cortas mayor al que sugiere la producción esperada.

En el caso del número de posiciones en futuros de tipo de cambio ($G_{\text{ÓPTIMO}}$), la ecuación (24) muestra que el número de posiciones cortas por tomar coincide exactamente con el monto de moneda extranjera que se espera recibir. El número de posiciones cortas por tomar en futuros de tipo de

cambio será superior al que se obtiene con independencia entre \tilde{P}_T y \tilde{C}_T , en la medida que el último término que aparece en esta ecuación sea positivo. Esto ocurrirá por ejemplo si hay covarianza positiva entre \tilde{P}_T y \tilde{C}_T y si a la vez se cumple que el precio esperado del bien producido es mayor que el precio de ejercicio fijado en el contrato futuro, es decir si estamos ante un caso de prima de aplazamiento (*backwardation*). Si en cambio la covarianza entre \tilde{P}_T y \tilde{C}_T es positiva y estamos frente a un caso de *contango* (por lo que $E(f_T) > 0$) el número de posiciones cortas a tomar en el óptimo será menor al observado con independencia entre estas dos variables aleatorias.

II. INSTRUMENTACIÓN DE LA METODOLOGÍA A UN EJEMPLO REPRESENTATIVO

En esta sección se mira el caso de Chile como productor de celulosa y luego se analiza a partir de esta situación de qué manera variaciones en los parámetros provocarían un cambio en las estrategias de cobertura óptimas y en la calidad de la cobertura alcanzable. El cuadro 1 presenta estimadores por el método de mínimos cuadrados de los parámetros del modelo de regresión sugerido en este artículo, los que se obtuvieron a partir de datos mensuales de exportaciones de celulosa para Chile entre los años 2000 y 2004.

CUADRO 1. Estrategia de cobertura óptima para la celulosa^a

Parámetros correlaciones	S	P	C	Q
S	1.0	0.6	0.2	0.1
P		1.0	0.4	0.3
C			1.0	0.1
Q				1.0
Promedio	500.0	400.0	300.0	100 000.0
Desviación estándar	100.0	200.0	20.0	30 000.0
Resultados	Estimación óptima	ESO1	ESO2	ESO3
H	87 194.9	100 000.0	100 000.0	0.0
G	4 822 780.5	10 000 000.0	0.0	10 000 000.0
Var(FC_{SC})	65.8	65.8	65.8	65.8
Var(FC_{CC})	6.5	7.4	8.8	75.3
Eficiencia (porcentaje)	90.1	88.7	86.7	14.4

^a Estimación óptima es la estrategia de cobertura propuesta en este artículo. ESO1, ESO2 y ESO3 son estrategias de cobertura subóptimas que se utilizan en la práctica. ESO1 resulta de ignorar las correlaciones entre variables aleatorias. ESO2 ignora correlaciones y además sólo hace cobertura con futuros sobre el producto. ESO3 ignora correlaciones y además sólo hace cobertura con futuros de tipo de cambio.

CUADRO 2. Sensibilidad de las estrategias de cobertura óptimas a variaciones en las desviaciones estándar^a

<i>Desviación estándar (Q)</i>	15 000.0	30 000.0	60 000.0
$H_{\text{ÓPTIMO}}$	90 005.9	87 194.9	80 946.9
$G_{\text{ÓPTIMO}}$	6 853 428.7	4 822 780.5	2 653 551.7
$\text{var}(FC_{SC})$	63.5	65.8	70.2
$\text{var}(FC_{CC})$	2.3	6.5	20.6
Eficiencia (porcentaje)	96.5	90.1	70.7
<i>Desviación estándar (P)</i>	100.0	200.0	300.0
$H_{\text{ÓPTIMO}}$	78 492.1	87 194.9	78 138.4
$G_{\text{ÓPTIMO}}$	6 137 565.3	4 822 780.5	5 123 856.1
$\text{var}(FC_{SC})$	15.5	65.8	131.4
$\text{var}(FC_{CC})$	3.2	6.5	12.2
Eficiencia (porcentaje)	79.1	90.1	90.7
<i>Desviación estándar (S)</i>	50.0	100.0	200.0
$H_{\text{ÓPTIMO}}$	85 702.5	87 194.9	85 388.6
$G_{\text{ÓPTIMO}}$	2 643 137.9	4 822 780.5	5 578 410.6
$\text{var}(FC_{SC})$	80.6	65.8	63.6
$\text{var}(FC_{CC})$	8.7	6.5	5.6
Eficiencia (porcentaje)	89.2	90.1	91.2

FUENTE: Elaboración propia.

^a $\text{var}(FC_{SC})$ y $\text{var}(FC_{CC})$ en billones de pesos. H en toneladas y G en unidades de moneda extranjera (dólares).

También se presenta en el cuadro 1 la estrategia de cobertura óptima en futuros del producto ($H_{\text{ÓPTIMO}}$) y en futuros de tipo de cambio ($G_{\text{ÓPTIMO}}$), así como el grado de eficiencia alcanzable mediante esta estrategia, que en este caso resulta ser de 90.1%. El cuadro 1 además compara los resultados anteriores con los que resultan de aplicar tres estrategias de cobertura subóptimas. La primera de estas estrategias supone ignorar las correlaciones entre las variables aleatorias implicadas, lo que resultaría en una eficiencia de 88.7%. La segunda estrategia de cobertura subóptima considerada soslaya las correlaciones y supone además hacer cobertura sólo con futuros de celulosa, en cuyo caso la eficiencia de la cobertura alcanzable se reduce a 86.7%. La tercera estrategia de cobertura subóptima analizada es posiblemente la más interesante, pues muestra que si ignoramos las correlaciones y utilizamos sólo futuros de tipo de cambio es incluso posible provocar un aumento (en este caso de 14.4%) en la varianza del flujo de caja con respecto a la situación sin cobertura.

El cuadro 2 explora de qué manera las estrategias de cobertura, las varianzas con y sin cobertura y la eficiencia óptima alcanzable dependen de las desvia-

ciones estándar de las variables aleatorias \tilde{Q}_T , \tilde{P}_T y \tilde{C}_T . Tal como se observa en este cuadro las estrategias de cobertura óptimas son afectadas por variaciones en las desviaciones estándar de cada una de estas variables.

Los resultados indican además que cuanto mayor desviación estándar es \tilde{Q}_T mayor es la varianza del flujo de caja sin cobertura y menor es la eficiencia alcanzable, pues los futuros sobre \tilde{P}_T y \tilde{S}_T no son capaces de eliminar totalmente esa mayor varianza. Una mayor desviación estándar de \tilde{P}_T provoca mayor volatilidad en el flujo de caja sin cobertura, pero el grado de eficiencia alcanzable en este caso aumenta con la mayor desviación estándar de \tilde{P}_T , seguramente porque los futuros del bien permiten eliminar esta volatilidad. Una mayor desviación estándar de \tilde{S}_T provoca menor volatilidad en el flujo de caja (posiblemente esto se explica por la alta correlación negativa que presentan \tilde{S}_T y \tilde{P}_T). Esta mayor volatilidad en \tilde{S}_T genera, tal como era de esperar, un aumento en el grado de eficiencia alcanzable mediante la cobertura.

El cuadro 3 muestra de qué manera las estrategias de cobertura, la varianza del flujo de caja con y sin cobertura y la eficiencia óptima alcanzable dependen de los grados de correlación entre algunas de las variables aleatorias consideradas. En todos los casos tomados en cuenta se aprecia que las estrategias de cobertura óptimas son afectadas por los grados de correlación considerados. Es interesante notar que en este caso una correlación muy negativa entre \tilde{P}_T y \tilde{S}_T puede provocar que la estrategia de cobertura óptima en futuros de tipo de cambio consista en tomar posiciones largas en este tipo de contratos.

A medida que la correlación entre \tilde{P}_T y \tilde{S}_T se hace menos negativa aumenta la varianza del flujo de caja sin cobertura (porque se hace menos posible que los precios altos vayan acompañados de menores tipos de cambio) y el efecto que esto tiene en eficiencia no es claro. Al hacerse menos negativa la correlación entre \tilde{P}_T y \tilde{Q}_T la varianza del flujo de caja sin cobertura aumenta (en este caso porque se hace menos posible que altos precios vayan acompañados de menores cantidades), pero el grado de eficiencia alcanzable claramente disminuye, lo que seguramente se explica porque los futuros del bien pierden capacidad para hacerse cargo de la volatilidad en \tilde{Q}_T . Por último, al aumentar la correlación entre \tilde{P}_T y \tilde{C}_T , la volatilidad del flujo de caja sin cobertura disminuye (pues es más probable que precios altos sean acompañados de costos altos y precios bajos sean acompañados por costos bajos) y la eficiencia también aumenta (seguramente porque los futuros del bien son capaces de hacerse cargo de mejor manera de la volatilidad del costo).

CUADRO 3. Sensibilidad de estrategias de cobertura óptimas a variaciones en correlaciones^a

<i>Correlación (P, S)</i>	0.8	0.6	0.4
$H_{\text{ÓPTIMO}}$	75 458.7	87 194.9	84 841.7
$G_{\text{ÓPTIMO}}$	2.187 279.4	4 822 780.5	6 531 492.0
$\text{var}(FC_{SC})$	54.4	65.8	74.2
$\text{var}(FC_{CC})$	6.3	6.5	8.2
Eficiencia (porcentaje)	88.4	90.1	89.0
<i>Correlación (P, Q)</i>	0.6	0.3	0.0
$H_{\text{ÓPTIMO}}$	76 526.4	87 194.9	93 662.4
$G_{\text{ÓPTIMO}}$	547 811.7	4 822 780.5	10 135 014.4
$\text{var}(FC_{SC})$	56.9	65.8	68.9
$\text{var}(FC_{CC})$	5.1	6.5	7.9
Eficiencia (porcentaje)	91.0	90.1	88.5
<i>Correlación (P, C)</i>	0.2	0.4	0.6
$H_{\text{ÓPTIMO}}$	87 248.3	87 194.9	81 341.7
$G_{\text{ÓPTIMO}}$	6 178 914.7	4 822 780.5	2 781 730.8
$\text{var}(FC_{SC})$	68.2	65.8	59.4
$\text{var}(FC_{CC})$	7.5	6.5	5.7
Eficiencia (porcentaje)	89.1	90.1	90.4

FUENTE: Elaboración propia.

^a $\text{var}(FC_{SC})$ y $\text{var}(FC_{CC})$ en billones de pesos. H en toneladas y G en unidades de moneda extranjera (dólares).

CONCLUSIONES

Este artículo realiza dos contribuciones significativas en el ámbito de la determinación de estrategias de cobertura óptimas. La primera contribución consiste en abordar y resolver analíticamente el problema de cómo se debe realizar la cobertura cuando se dispone de instrumentos futuros de un determinado bien y del tipo de cambio y se enfrenta además un entorno caracterizado por la existencia de incertidumbre no sólo en el precio del producto y en el tipo de cambio sino que además en la cantidad y en los costos de producción. Las estrategias de cobertura óptimas identificadas en este caso dependen del grado de correlación que exista entre las variables aleatorias ya mencionadas. En el artículo se analizan ciertos casos particulares de interés en que todas o algunas de las variables aleatorias consideradas son independientes entre sí.

La segunda contribución que se realiza en este artículo consiste en la proposición de una metodología de determinación de los estimadores para las estrategias de cobertura óptimas muy simple, y que supone correr una re-

gresión múltiple en que la variable dependiente es el flujo de caja sin cobertura que genera la empresa y en que las variables independientes resultan ser el tipo de cambio y la ganancia neta que genera una posición larga en un futuro del producto que elabora la empresa. Los parámetros que acompañan a estas variables independientes resultan ser (con signo contrario) los estimadores $H_{ÓPTIMO}$ y $G_{ÓPTIMO}$, que representan respectivamente el número de posiciones óptimas en contratos futuros del producto y de tipo de cambio que la empresa debería tomar.

Se demuestra además que el coeficiente de determinación R^2 de la citada regresión resulta ser el máximo grado de eficiencia o reducción de varianza alcanzable mediante las estrategias de cobertura óptimas ya identificadas. En los casos particulares analizados es posible identificar además modificaciones respecto a las regresiones que en cada caso se deben realizar para obtener estimaciones de las estrategias de cobertura óptimas cuando existan antecedentes de independencia entre algunas de las variables aleatorias consideradas.

Este artículo también presenta una aplicación de la metodología desarrollada al caso puntual de las exportaciones de celulosa que realiza Chile. Además de identificar en este caso las estrategias de cobertura óptimas y el grado de eficiencia alcanzable, se explora de qué manera esas estrategias y la eficiencia alcanzable dependen de los principales parámetros que considera el modelo.

Se compara en este ejemplo la eficiencia que ofrecen las estrategias de cobertura óptimas aquí propuestas con la eficiencia que ofrecen opciones de estrategias de cobertura menos refinadas que son usualmente utilizadas en la práctica. Al ignorar correlaciones y al instrumentar estrategias de cobertura utilizando sólo futuros de tipo de cambio o sólo futuros del producto se muestra que las estrategias de cobertura resultantes son en general menos eficientes y que de hecho es incluso posible que dichas estrategias provoquen un aumento en la varianza del flujo de caja de la empresa, con respecto al caso sin cobertura.

APÉNDICE

1. Derivación de las ecuaciones (8) y (9)

La ecuación (7) del artículo representa la varianza del flujo de caja con cobertura. Para obtener a partir de esta expresión las ecuaciones (8) y (9) se debe seguir el pro-

cedimiento que se detalla a continuación. Primero debemos construir la matriz hessiana de la varianza del flujo de caja con cobertura, esto es:

$$\begin{matrix} \frac{2V(\tilde{F}\tilde{C}_T^{CC})}{H^2} & \frac{2V(\tilde{F}\tilde{C}_T^{CC})}{H G} & 2 * V((\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T) & 2 * Cov((\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T, \tilde{S}_T) \\ \frac{2V(\tilde{F}\tilde{C}_T^{CC})}{H G} & \frac{2V(\tilde{F}\tilde{C}_T^{CC})}{H^2} & 2 * Cov((\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T, \tilde{S}_T) & 2 * V(\tilde{S}_T) \end{matrix}$$

A continuación podemos verificar que los menores principales de esta matriz son ambos positivos, tal como se aprecia a continuación:

$$\begin{aligned} |H_1| &= 2 * V((\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T) > 0 \\ |H_2| &= 4 * [V((\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T) * V(\tilde{S}_T) - [Cov((\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T, \tilde{S}_T)]^2) \\ &= 4 * [V(\tilde{S}_T * \tilde{P}_T) * V(\tilde{S}_T) - Cov^2(\tilde{S}_T * \tilde{P}_T, \tilde{S}_T)] \\ &= 4 * [V(\tilde{S}_T * \tilde{P}_T) * V(\tilde{S}_T) (1 - Corr^2(\tilde{S}_T * \tilde{P}_T, \tilde{S}_T))] > 0 \end{aligned}$$

Esto nos permite concluir que la varianza del flujo de caja con cobertura es una función cuadrática convexa para todo valor de (H, G) , lo que nos asegura la obtención de un “mínimo global” de esta expresión al resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} H * V((\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T) - Cov(\tilde{F}\tilde{C}_T^{SC}, (\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T) - G * Cov((\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T, \tilde{S}_T) &= 0 \\ G * V(\tilde{S}_T) - Cov(\tilde{F}\tilde{C}_T^{SC}, \tilde{S}_T) - H * Cov((\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T, \tilde{S}_T) &= 0 \end{aligned}$$

Las soluciones que resultan de resolver este sistema de ecuaciones para las estrategias de cobertura óptimas H y G corresponden, como se indicó líneas arriba, a las ecuaciones (8) y (9) del artículo, es decir:

$$H_{ÓPTIMO} = \frac{Cov((\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T, \tilde{S}_T) * Cov(\tilde{F}\tilde{C}_T^{SC}, \tilde{S}_T) - Cov(\tilde{F}\tilde{C}_T^{SC}, (\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T) * V(\tilde{S}_T)}{V(\tilde{S}_T * \tilde{P}_T) * V(\tilde{S}_T) (1 - Corr^2(\tilde{S}_T * \tilde{P}_T, \tilde{S}_T))} \tag{8}$$

$$G_{ÓPTIMO} = \frac{Cov((\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T, \tilde{S}_T) * Cov(\tilde{F}\tilde{C}_T^{SC}, (\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T) - Cov(\tilde{F}\tilde{C}_T^{SC}, \tilde{S}_T) * V((\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T)}{V(\tilde{S}_T * \tilde{P}_T) * V(\tilde{S}_T) (1 - Corr^2(\tilde{S}_T * \tilde{P}_T, \tilde{S}_T))} \tag{9}$$

2. Derivación de las ecuaciones (11) y (12)

Si tenemos una ecuación de regresión lineal múltiple de Y sobre X_1 y X_2 del tipo:

$$E(Y/X_1, X_2) = \alpha_0 + \alpha_1 * X_1 + \alpha_2 * X_2$$

Entonces los parámetros de $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ de esta regresión corresponden a las siguientes expresiones:

$$\alpha_0 = E(Y) - \alpha_1 * E(X_1) - \alpha_2 * E(X_2)$$

$$\alpha_1 = \frac{V(X_2) * (Cov(X_1, Y) - Cov(X_1, X_2) * Cov(X_2, Y))}{V(X_1) * V(X_2) * (1 - Corr^2(X_1, X_2))}$$

$$\alpha_2 = \frac{var(X_1) * Cov(X_2, Y) - Cov(X_1, X_2) * Cov(X_1, Y)}{var(X_1) * var(X_2) * (1 - corr^2(X_1, X_2))}$$

Luego si consideramos la regresión lineal múltiple de $Y = \tilde{F}C_T^{SC}$ en las variables que representan la ganancia neta $X_1 = (\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T$ y el tipo de cambio $X_2 = \tilde{S}_T$ es decir:

$$E(Y/X_1, X_2) = E(\tilde{F}C_T^{SC} / ((\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T, \tilde{S}_T)) = \alpha_0 + \alpha_1 * ((\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T) + \alpha_2 * \tilde{S}_T$$

entonces los parámetros respectivos serán en este caso los siguientes:

$$\alpha_0 = E(\tilde{F}C_T^{SC}) - \alpha_1 * E((\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T) - \alpha_2 * E(\tilde{S}_T)$$

$$\alpha_1 = \frac{V(\tilde{S}_T) * Cov((\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T, \tilde{F}C_T^{SC}) - Cov((\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T, \tilde{S}_T) * Cov(\tilde{S}_T, \tilde{F}C_T^{SC})}{V(\tilde{S}_T) * V(\tilde{S}_T * \tilde{P}_T) * (1 - Corr^2(\tilde{S}_T * \tilde{P}_T, \tilde{S}_T))} \tag{11}$$

$$\alpha_2 = \frac{V((\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T) * Cov(\tilde{S}_T, \tilde{F}C_T^{SC}) - Cov((\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T, \tilde{S}_T) * Cov((\tilde{P}_T - K) * \tilde{S}_T, \tilde{F}C_T^{SC})}{V(\tilde{S}_T) * V(\tilde{S}_T * \tilde{P}_T) * (1 - Corr^2(\tilde{S}_T * \tilde{P}_T, \tilde{S}_T))} \tag{12}$$

Al comparar estas últimas dos ecuaciones con las ecuaciones (8) y (9), respectivamente, podemos comprobar que $H_{OPTIMO} = \alpha_1$ y que $G_{OPTIMO} = \alpha_2$. El coeficiente de posición α_0 corresponde a la expresión aquí indicada; sin embargo este parámetro no tiene a juicio nuestro una interpretación interesante en este caso en particular, razón por la cual no lo hemos destacado explícitamente en nuestro estudio.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Anderson, R., y J. Danthine (1983), "Hedger Diversity in Futures Markets", *The Economic Journal*, vol. 93, núm. 370, 370-389.

- Bessembinder, H. (1991), "Forward Contracts and Firm Value", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 17, pp. 519-572.
- Brennan, M. J., y N. Crew (1995), "Hedging Long Maturity Commodity Commitments With Short Dated Futures Contracts", Finance Working Paper núm. 13-95, AGSM, UCLA.
- Castillo, A. (2003), "Exchange Rate Exposure and Optimal Hedging Strategies when Interest Rates are Stochastic: A Simulation-Based Approach", *Estudios de Administración*, vol. 10, núm. 1, pp. 1-23.
- _____, y F. Lefort (2003), "Protección contra la exposición del tipo de cambio a largo plazo con contratos de futuros a corto plazo: El caso de los contratos *forward* en UFchilenas/dólares", *EL TRIMESTRE ECONÓMICO*, vol. 70, núm. 279, pp. 423-456.
- _____, y R. Águila (2005), "Estrategias óptimas de cobertura en presencia de incertidumbre en costos y cantidad", *Abante*, vol. 8, núm. 2, pp. 87-108.
- Chowdhry, B. (1995), "Corporate Hedging of Exchange Risk when Foreign Currency Cash Flow is Uncertain", *Management Science*, vol. 41, núm. 6, páginas 1083-1090.
- Cox, J. C., J. E. Ingersoll y S. A. Ross (1985), "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometría*, 53, pp. 385-407.
- Froot, K., D. Scharfstein y J. C. Stein (1993), "Risk Management: Coordinating Corporate Investment and Risk Management Policies", *Journal of Finance*, 48, pp. 1629-1658.
- Hicks, J. R., 1946, *Value and capital*, Londres, Oxford University Press, segunda edición [existe versión al castellano del FCE].
- Kawai, M. (1983), "Spot and Futures Prices of Nonstorable Commodities Under Rational Expectations", *The Quarterly Journal of Economics*, vol. 98, núm. 2, pp. 235-254.
- Kerkvliet, J., y M. H. Moffett (1991), "The Hedging of an Uncertain Future Foreign Currency Cash Flow", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 26, núm. 4, pp. 565-578.
- Keynes, J. M. (1930), *Treatise in Money*, vol. II, Londres, Macmillan.
- Mello, A., y J. Parsons (1995), "Maturity Structure of a Hedge Matters: Lessons from the Metallgesellschaft Debacle", *Journal of applied Corporate Finance*, 8, pp. 106-120.
- Moschini, G., y H. Lapan (1995), "The Hedging Role of Options and Futures Under Joint Price, Basis and Production Risk", *International Economic Review*, vol. 36, núm. 4, pp. 1025-1049.
- Neuberger, A. (1999), "Hedging Long Term Exposures With Multiple Short-Term Futures Contracts", *The Review of Financial Studies*, núm. 3, pp. 429-459.
- Newbery, D., y J. Stiglitz (1981), *The Theory of Commodity Price Stabilization: A Study in the Economics of Risk*, Clarendon, Oxford Press.

- Rolfo, J. (1980), "Optimal Hedging Under Price and Quantity Uncertainty: The Case of a Cocoa Producer", *Journal of Political Economy*, vol. 88, núm. 1, páginas 100-116.
- Ross, S., R. W. Westerfield y B. D. Jordan (1998), *Fundamentals of Corporate Finance*, Boston, McGraw-Hill/Irwin, cuarta edición.
- Schwartz, E. S. (1997), "Presidential Address: The Stochastic Behavior of Commodity Prices: Implications for Valuation and Hedging", *Journal of Finance* 52, pp. 923-973.
- Smith, C. W., y R. M. Stulz (1985), "The Determinants of Firm's Hedging Policies", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 20, pp. 391-405.