 https://doi.org/10.24844/EM3701.01

Descobrindo frações com o círculo fracionário – uma experiência no 2.º ano de escolaridade em Portugal

Discovering fractions with fraction circles – an experience in the 2nd year of schooling in Portugal

Paula Cardoso,[1] Ema Mamede[2]

Resumo: Este estudo procura perceber como os alunos do 2.º ano de escolaridade (7-8 anos de idade) compreendem frações quando utilizam o círculo fracionário. Procura-se resposta a: 1) Como compreendem os alunos a ordenação de frações quando as exploram com o círculo fracionário? 2) Como compreendem os alunos a equivalência de frações quando as exploram com o círculo fracionário? 3) Como entendem a unidade de referência? Participaram, neste estudo, alunos de duas turmas do 2.º ano de escolaridade de uma escola pública do distrito de Braga, em Portugal. Uma turma tinha 18 alunos e a outra tinha 20 alunos. Depois de realizada uma intervenção sobre frações, em sala de aula, os alunos, organizados em pares, responderam a 21 tarefas sobre representação, comparação de frações e sobre a unidade de referência. Recorreu-se a uma metodologia qualitativa, numa abordagem de estudo de caso. Os resultados evidenciam compreensão dos alunos na representação e na comparação de frações, sustentando o seu raciocínio no círculo fracionário; descobriram ainda a importância da unidade de referência na representação de frações.

Fecha de recepción: 13 de febrero de 2024. **Fecha de aceptación**: 10 de octubre de 2024.

[1] CIEC – Universidade do Minho, Braga, Portugal, paulacardoso@ie.uminho.pt, https://orcid.org/0000-0001-5798-7107.

[2] CIEC – Universidade do Minho, Braga, Portugal, emamede@ie.uminho.pt, https://orcid.org/0000-0002-1623-8406.

Palavras-chave: *Frações, Círculo fracionário, Significado parte-todo*

Abstract: This study seeks to understand how 2nd grader children (7-8 years old) understand fractions when using the fraction circles. We are looking for answers to: 1) How do students understand the ordering of fractions when they explore them with the fraction circles? 2) How do students understand the equivalence of fractions when they explore them with the fraction circles? 3) How do they understand the unit of reference? Students from two 2nd grader classes from a public school in the district of Braga, in Portugal, participated in this study. One class had 18 students and the other had 20 students. After a classroom intervention about fractions, the students, organized in pairs, answered 21 tasks about the representation, comparison of fractions and the unit of reference. A qualitative methodology was used, within a case study approach. The results show students' understanding in representing and comparing fractions, supporting their reasoning in the fractional circle; they also discovered the importance of the reference unit in the representation of fractions.

Keywords*:* *Fractions, Fraction circles, Part-whole interpretation*

INTRODUÇÃO

O conceito de número racional é considerado fundamental para um desenvolvimento adequado do pensamento matemático das crianças. Contudo, é também conhecido por ser um conceito difícil para os alunos (Behr *et al.*, 1983; Nunes *et al.*, 2004; Retana e Muñoz, 2018). O número racional assume várias representações – fração, numeral decimal, percentagem. Sendo a representação na forma de fração considerada basilar na aprendizagem de números e operações em matemática elementar, as dificuldades na sua compreensão podem condicionar a evolução do pensamento matemático da criança e a aquisição de conhecimentos matemáticos subsequentes (Booth e Newton, 2012). Apesar de essencial para o desenvolvimento do sentido de número dos alunos, diversos estudos retratam dificuldades destes com frações (Behr e Post, 1992; Cardoso e Mamede, 2011, 2021).

Em Portugal, as orientações curriculares em vigor – *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o 1.º ciclo do Ensino Básico* (DGE, 2021) –, no caso específico do ensino de frações, destacam como um dos objetivos de aprendizagem, a capacidade de representar-se uma fração de diversas formas, transitando-se fluentemente entre diferentes representações, iniciando-se o trabalho com frações, seguido de decimais e notação de percentagem. Este documento sublinha ainda a importância das representações múltiplas na aprendizagem da matemática como apoio ao raciocínio e à comunicação matemática. Aliás, esta ideia é também partilhada pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2008, 2017).

Tradicionalmente, o ensino das frações recorre frequentemente a representações icônicas, com recursos a modelos retangulares e circulares, e à representação simbólica. A literatura reforça a ideia de que o círculo fracionário constitui uma representação poderosa para a compreensão de frações (Cramer e Henry, 2002; Cramer *et al.*, 2009), contudo não é claro o consenso de que o modelo circular se sobreponha ao retangular (Moss, 2005; Tunç-Pekkan, 2015). Os modelos circular e retangular têm-se revelado pertinentes para a compreensão da relação parte-todo, essencial à compreensão de frações. Este estudo procura saber mais sobre a compreensão de frações em crianças de níveis iniciais de escolaridade, quando utilizam o círculo fracionário. Para tal, recorre a representações ativas, icônicas e simbólicas, valorizando representações múltiplas com o intuito de facilitar a aprendizagem de frações.

A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE NÚMERO RACIONAL

De acordo com Vergnaud (1997), para estudarmos e compreendermos como se desenvolve um conceito matemático na mente das crianças, através das suas experiências dentro e fora da escola, é necessário considerar um conceito C em função de três conjuntos, C = (S, I, R). S representa o *conjunto de situações* que tornam o conceito útil e significativo; I representa o *conjunto dos invariantes operacionais* que relacionam objetos, propriedades e evidenciam relações patentes nas situações; R representa o *conjunto de representações* simbólicas, linguísticas, gráficas ou gestuais que podem ser utilizadas para representar os invariantes, as situações e os procedimentos. Aplicando a teoria de Vergnaud (1997) à compreensão do conceito de número racional, teremos de considerar: a) um conjunto de situações, interpretações ou significados através das quais o conceito de número racional adquire sentido; b) um conjunto de invariantes operacionais; c) um conjunto de representações a ser utilizadas naquelas situações.

A literatura apresenta várias classificações de significados de número racional ou situações em que estes são utilizados. Estas classificações de significados apresentam algumas semelhanças, mas também fortes diferenças. Kieren (1976, 1993) apresenta os seguintes subconstructos de número racional medida, quociente, razão e operador. Behr *et al.* (1983), por sua vez, sugeriram os subconstructos parte-todo, decimal, razão, quociente, operador e medida. Posteriormente, Nunes *et al.* (2004) sugeriram uma classificação baseada no significado dos elementos envolvidos na representação de fração, distinguindo as situações quociente, parte-todo, operador e quantidades intensivas. Na interpretação quociente, o denominador e o numerador da fração representam, respetivamente, o número de recetores e o número de itens inteiros contínuos a dividir pelos recetores (ex.: $\frac{2}{3}$ representa 2 barras de chocolate repartidas por 3 crianças). Nesta situação, a fração representa ainda a parte de item que cabe a cada recetor (ex.: $\frac{2}{3}$ representa a quantidade de chocolate que cada criança recebe). Na interpretação parte-todo, o denominador da fração representa o número de partes em que o todo é dividido e o numerador indica o número dessas partes que são retiradas (ex.: $\frac{2}{3}$ de uma barra de chocolate significa que a barra foi dividida em 3 partes iguais e 2 dessas partes foram consideradas). Na interpretação operador, estão envolvidas quantidades discretas: o denominador representa o número de grupos iguais em que o conjunto de elementos foi dividido e o numerador representa o número dos grupos que lhe foram retirados (ex.: $\frac{2}{3}$ de 12 contas significa que foram formados 3 grupos iguais de contas e retirados 2 desses grupos) (Nunes *et al.*, 2004). Por último, na interpretação medida, a fração $\frac{a}{b}$ (a e b são números inteiros; $b \neq 0$) é utilizada repetidamente para determinar-se uma distância – frequentemente, a fração é acompanhada por uma reta numérica ou uma imagem de um instrumento de medida, de modo a que os alunos, expectavelmente, meçam a distância de um ponto a outro em termos de $\frac{1}{b}$ unidades (ex.: $\frac{2}{3}$ indicam que a medida $\frac{1}{3}$ foi usada 2 vezes).

A ordenação e equivalência constituem os invariantes fundamentais para a compreensão dos números racionais (Nunes e Bryant, 2009). No caso particular da representação de fração, considera-se relevante perceber: como chegam as crianças a compreender que há classes de frações equivalentes − $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{9}$, etc. − e que estas classes podem ser ordenadas − $\frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5}$, etc.? (Nunes e Bryant, 2009). Por outro lado, o facto de, no âmbito das frações, existirem diferentes símbolos e palavras para designarem a mesma quantidade constitui-se como uma dificuldade à compreensão da lógica de classes. Por exemplo, um meio, dois quartos − e também por diferentes símbolos de escrita − $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ − apesar de se referirem à mesma quantidade (Nunes e Bryant, 2009). Uma análise das relações assimétricas envolvidas nas frações pode também evidenciar algumas dificuldades das crianças na ordenação de frações, já identificadas por diversos autores (Lesh *et al.*, 1987). Na ordenação de frações, as crianças têm de considerar três condições: (1) para o mesmo denominador, quanto maior o numerador, maior é a fração, (por exemplo, $\frac{3}{5}<\frac{4}{5}$); (2) para o mesmo numerador, quanto maior for o denominador, menor é a fração, (por exemplo, $\frac{4}{3}>\frac{4}{5}$); (3) se o numerador e denominador forem diferentes, deve ser considerado a relação proporcional entre as duas frações (Nunes *et al.*, 2009).

A importância das representações na aprendizagem em todos os domínios da matemática é unanimemente reconhecida. Diversos autores sublinham a sua importância para a compreensão de conceitos matemáticos (Arcavi, 2003; Benett *et al.*, 2019; NCTM, 2008, 2017; Strom, 2009). Bruner (1999) categoriza os diferentes tipos de representações como ativas, icónicas e simbólicas. As representações ativas descrevem relações estabelecidas entre experiência e ação, referindo-se a ações sobre objetos. Quando a expressão de uma ideia é realizada graficamente, falamos de representações icónicas. Nas representações simbólicas são manipulados símbolos abstratos que podem ser organizados em diferentes representações, como numeral decimal, percentagem ou fração, no caso dos números racionais. Ponte e Serrazina (2000) entendem a linguagem natural também como um tipo de representação. Os autores referem que nos primeiros anos de escolaridade, a linguagem natural, oral ou escrita, pode ser categorizada como representação simbólica, já que nestas idades é uma forma natural e intuitiva de representar uma ideia de um modo pouco formal.

No âmbito do projeto *Rational Number Project* (RNP), Lesh *et al.* (2003) apresentam um modelo de tradução entre diferentes tipos de representação de conceitos matemáticos elementares, desenvolvido por Lesh em 1979. Este modelo sugere que os conceitos matemáticos elementares podem ser representados de cinco formas distintas: materiais manipuláveis, figuras, contextos da vida real, símbolos verbais e símbolos escritos (figura 1). O modelo considera que a compreensão de um conceito matemático pressupõe, não só a capacidade de o representar de múltiplas formas, mas também a capacidade de estabelecer relações entre os diferentes tipos de representação.

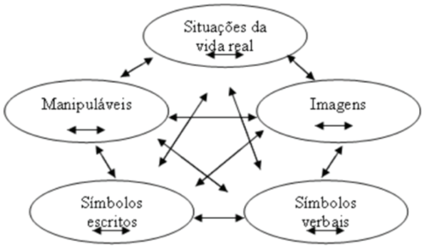

Figura 1. Modelo interativo de tradução entre diferentes tipos de representação (Lesh *et al.*, 2003).

Lesh e colegas referem ainda que as traduções dentro de um determinado contexto de representação (sugeridas por setas dentro de cada modo de representação) e entre os diferentes modos de representação (sugeridas por setas que ligam os modos de representação) faz com que os conceitos matemáticos adquiram significado para os alunos. Assim, de acordo com o modelo de Lesh e colegas, o desenvolvimento de uma profunda compreensão de um conceito matemático requer experiência de trabalho com esse conceito nos diferentes modos de representação, bem como experiência no estabelecimento de relações entre e dentro dos diferentes modos de representação. Considerando a complexidade de perceber o mesmo objeto matemático em diferentes representações que podem diferir muito entre si, tanto em termos de caraterísticas como de conteúdo (Duval, 2006), o uso de modelos geométricos, como representações icónicas, pode ser um auxílio à sua compreensão pelos alunos (Fosnot e Dolk, 2002; Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Redações várias de orientações curriculares sugerem que o ensino da matemática recorra a representações múltiplas. Por exemplo, o NCTM (2008) refere que as representações são elementos essenciais no apoio à aprendizagem de conceitos e relações matemáticas. A tradução entre diferentes modos de representação ganha especial relevância na compreensão de frações, podendo os materiais manipuláveis assumir um papel de destaque junto dos alunos mais novos.

MATERIAL MANIPULÁVEL NA APRENDIZAGEM DE FRAÇÕES

Os materiais manipuláveis são objetos que se podem sentir e movimentar, e que permitem a representação de uma ideia. Para Reys (1982) materiais manipuláveis são objetos ou coisas que o aluno seja capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais com aplicação nos afazeres do dia-a-dia ou podem ser objetos usados para representar uma ideia. Nem todos os materiais didáticos são manipuláveis. Para Serrazina (1991) materiais manipuláveis são objetos, instrumentos ou outros media que podem ajudar os alunos a descobrir, entender ou consolidar conceitos fundamentais nas diversas fases de aprendizagem. Vale (1999) define material manipulável como sendo todo o material concreto, de uso comum ou educacional, que permita, durante uma situação de aprendizagem, apelar para os vários sentidos dos alunos e que se caracterizam pelo envolvimento ativo dos alunos.

Dienes (1974) defende o uso de materiais concretos para a aprendizagem visual da matemática, sendo um dos pioneiros defensores da utilização de materiais manipulativos no ensino. O uso de materiais manipuláveis é uma estratégia didática que pode tornar a aula mais envolvente. Permite que os alunos possam representar num nível concreto o seu pensamento, proporcionando ao professor identificar eventuais equívocos dos alunos com os conceitos matemáticos (Cramer e Henry, 2002).

A utilização de materiais manipuláveis, no início da compreensão de frações, possibilita passar da representação concreta para a pictórica e depois para uma representação abstrata; através do tocar, ver e fazer, os alunos são capazes de obter uma compreensão mais profunda e duradoura dos conceitos matemáticos (Cramer e Henry, 2002). Não se pense, no entanto, que os alunos entenderão automaticamente o conceito de fração através da manipulação de materiais. O material manipulável tem de ser apropriado ao tópico matemático em questão, devendo ser cuidadosamente selecionado pelo professor para estimular o pensamento matemático dos alunos, facilitando a aprendizagem. Strom (2009) relata que os alunos que usam materiais manipuláveis nas aulas de matemática geralmente superam aqueles que não o fazem; um benefício que se aplica a todos os níveis de escolaridade e tópicos matemáticos.

A investigação tem mostrado que os materiais manipuláveis têm pontos fortes, mas também limitações. Os resultados da investigação do grupo do RNP sugerem que a utilização de material manipulável contínuo, numa fase inicial, promove a compreensão do modelo discreto a utilizar posteriormente (Behr *et al.*, 1988). As representações não simbólicas de frações são mais facilmente compreendidas pelas crianças quando é utilizado um modelo contínuo (e.g., pizas inteiras), e não tanto quando é utilizado um modelo discreto, como contas ou berlindes (Behr *et al.*, 1988; Singer-Freeman e Goswami, 2001). Deste modo, quando os alunos contactarem com o material manipulável discreto, poderão utilizar os seus conhecimentos sobre o primeiro modelo (contínuo) para compreender o segundo (discreto). Isto é conhecido como "pensamento de cima para baixo"; o aluno reconcetualiza o conceito para se adequar a um novo material manipulável, estabelecendo conexões entre a estrutura do modelo que lhe é mais familiar para dar sentido ao novo modelo.

O modelo circular tem sido tradicionalmente usados para o ensino inicial de frações (Moss, 2005), mas existem opiniões divergentes na literatura sobre a sua eficácia para a aprendizagem. Experiências de ensino levadas a cabo no âmbito do RNP (Cramer e Henry 2002), nas quais os investigadores utilizaram diversos modelos de representação fracionária (círculo fracionário, fichas, dobragens de papel, barras Cuisenaire), constataram que o modelo do círculo fracionário é a representação mais eficaz para a construção de imagens mentais de frações. Estas imagens mentais promovem a capacidade de julgamento do tamanho relativo das frações, sendo essa capacidade uma habilidade essencial para a compreensão das frações. Cramer e Henry (2002) obtiveram resultados entre alunos 4.º e 5.º anos de idade que indicaram vantagens na utilização do círculo fracionário quando comparada com a utilização de fichas, dobragens de papel ou Barras Cuisenaire.

Contrariamente a esta ideia, Moss (2005) apontou limitações na utilização do círculo para representar frações, argumentando que esta opção apoia o raciocínio aditivo ao invés do raciocínio multiplicativo, este último fundamental para compreender frações. Num dos exemplos apresentados por Moss (2005), um aluno do 5.º ano considera que as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ têm o mesmo tamanho. Para sustentar o seu argumento, o aluno representa graficamente as frações, recorrendo ao modelo circular, apresenta um círculo dividido em três partes, das quais três estão pintas, e um outro círculo dividido em quatro partes das quais três estão pintadas, argumentando que, em ambos os casos, falta uma peça para completar o todo. De acordo com Moss (2005), o aluno utiliza o seu conhecimento sobre os números inteiros para comparar as frações, em vez de considerar a relação multiplicativa que subjaz a estes números.

Cramer *et al.* (2009) levaram mais além as investigações feitas no âmbito do RNP sobre o círculo fracionário, analisando a compreensão de frações, por parte de alunos do 6.º ano de escolaridade. As conclusões destes autores reforçam a ideia de que o círculo fracionário é a representação fracionária concreta mais poderosa: favorece a compreensão do significado parte-todo, do tamanho relativo para frações, e ainda a capacidade de adição e subtração de frações. Os mesmos autores revelaram ainda que o desenho de áreas retangulares em papel pontilhado e a utilização de conjuntos discretos de contas potenciam estratégias incorretas de adição de frações, tais como a adição de numeradores e denominadores, argumentando que, tanto no papel pontilhado como nos conjuntos de contas, não é óbvia a necessidade de se encontrarem denominadores comuns para a adição de frações. Cramer *et al.* (2009) consideram ainda que os blocos padrão (*pattern blocks*) são problemáticos devido à variedade excessiva de formas em causa, oferecendo aos alunos dificuldades várias na procura de formas equivalentes para adicionar frações.

Tunç-Pekkan (2015) investigou como três das representações gráficas de frações mais utilizadas na sala de aula (círculo, retângulo, reta numérica) se relacionam com o conhecimento sobre frações dos alunos. Para tal 656 alunos dos 4.º e 5.º anos de escolaridade responderam a um teste (com 18 problemas no total). Os resultados obtidos indicam que os alunos apresentam desempenho semelhante em itens circulares e retangulares que exigiam o raciocínio fracionário parte-todo (associar uma fração a partes sombreadas de um círculo ou de um retângulo; dividir uma unidade para representar uma fração). No entanto, em questões que solicitam a reconstrução da unidade a partir de uma secção retangular ou circular, os alunos têm maior taxa de sucesso com representações retangulares do que com representações circulares.

Assim, a investigação está longe de ser consensual no que respeita à adequabilidade dos modelos para representar frações, quando os alunos iniciam a aprendizagem de números racionais. Talvez, na educação matemática, continue ainda a subestimar-se a complexidade envolvida na compreensão do conceito de número racional, em particular na compreensão de frações. Talvez haja concentração excessiva nas abordagens simbólicas, acabando por investir-se menos na compreensão dos conceitos matemáticos a um nível concreto, resultando em demasiados alunos a operar com frações de forma mecânica. Apesar das opiniões divergentes sobre os modelos a apresentar a alunos em diferentes idades de escolaridade (Cramer e Henry, 2002; Cramer *et al.*, 2009; 2002; Moss, 2005; Tunç-Pekkan, 2015), há um consenso generalizado de que estes precisam de oportunidades para estabelecer conexões entre diferentes significados e representações do número racional (Behr, *et al.*, 1988; Lesh *et al.*, 1987). Os materiais manipuláveis são consensualmente entendidos como potenciadores, não só da compreensão de conhecimentos matemáticos, mas também de uma articulação entre diferentes representações matemáticas, visão esta, aliás, partilhada pelos documentos curriculares para o 1.º ciclo do Ensino Básico em Portugal (DGE, 2021). O currículo Português em vigor (DGE, 2021) aponta para a introdução formal ao conceito de número racional, em anos iniciais de escolaridade, iniciando-se com as frações (2.º ano) e continuando com numerais decimais e percentagens (4.º ano). A aprendizagem formal de frações no 2.º ano de escolaridade alicerça-se assim no conhecimento informal que os alunos possuem sobre frações, isto é, alicerça-se em noções e procedimentos adquiridos fora do contexto da escolaridade que refletem compreensão implícita (Ginsburg e Baroody, 1990).

Estudos recentes têm sublinhado que as crianças possuem conhecimento informal que dá sentido a noções essenciais à compreensão de frações, como é o caso da noção de ordenação e equivalência de frações (Mamede, 2007; Nunes *et al.*, 2004). Mamede (2007) estudou o efeito dos significados quociente, parte-todo e operador no conhecimento informal das crianças Portuguesas sobre quantidades representadas por frações. Entrevistou individualmente crianças de 6-7 anos aquando da resolução de problemas de ordenação e equivalência de quantidades representadas por frações, problemas esses apresentados nos significados quociente (N=40), parte-todo (N=40) e operador (N=40). Os resultados sugerem que as crianças resolvem, com mais sucesso, problemas de ordenação e equivalência no significado quociente quando comparado com o sucesso obtido nos problemas apresentados nos significados parte-todo e operador. Esta ideia está em concordância com as de Nunes *et al.* (2004) que conduziram um estudo com alunos Ingleses, com 8-9 anos de idade (N=130), a quem foi introduzido formalmente o conceito de fração no significado parte-todo. Os alunos entrevistados responderam corretamente a 35% dos problemas sobre equivalência de frações apresentados no significado parte-todo, e a 66% dos problemas apresentados no significado quociente que não lhes era familiar. Estes resultados sugerem que os níveis de sucesso obtidos na resolução de problemas de equivalência, no significado quociente, resultam do conhecimento informal sobre frações destes alunos.

A investigação mostra que os alunos nos anos iniciais de escolaridade parecem poder já compreender frações, em condições particulares como é o caso do significado quociente (Mamede, 2007; Mamede e Nunes, 2008). Sublinha também a importância das representações múltiplas na construção de conceitos matemáticos (Arcavi, 2003; Bruner, 1999 ; Lesh *et al.*, 2003; NCTM, 2008, 2017). Particularmente no caso de frações, é reconhecida a importância no estabelecimento de conexões ente as diferentes representações. A investigação mostra ainda que o modelo do círculo fracionário pode favorecer a compreensão de frações pelos alunos (Cramer e Henry, 2002; Cramer *et al.*, 2009; Tunç-Pekkan, 2015), ainda que este ponto possa não ser consensual. O trabalho aqui apresentado constitui-se inovador na medida em que se centra na introdução formal às frações, a alunos do 2.º ano de escolaridade, com recurso ao círculo fracionário, procurando promover representações múltiplas de frações – com material manipulável, simbólica, verbal e icônica. Este estudo procura perceber como os alunos do 2.º ano de escolaridade compreendem frações quando utilizam o círculo fracionário. Procura responder às questões: 1) Como compreendem os alunos a ordenação de frações quando as exploram com o círculo fracionário? 2) Como compreendem os alunos a equivalência de frações quando as exploram com o círculo fracionário? 3) Como entendem a unidade de referência?

METODOLOGIA

O presente estudo adota uma metodologia qualitativa, dado que se pretende uma descrição e interpretação de fenómenos educativos no seu ambiente natural (Bogdan e Biklen, 2010). Optou-se por um *design* de estudos de caso múltiplos (Yin, 2010), já que esta opção é particularmente adequada quando se pretende responder a questões do tipo "como?" e "porquê?" e se pretende uma profunda compreensão dos acontecimentos.

Participaram, neste estudo, duas turmas do 2.º ano de escolaridade, entre os 7 e os 8 anos de idade, de uma escola pública do distrito de Braga, em Portugal. Uma turma tinha 18 alunos (8 meninos e 10 meninas) e a outra tinha 20 alunos (7 meninos e 13 meninas). De acordo com a informação facultada pelas professoras destes alunos, nenhuma destas turmas tinha estado exposta a um ensino formal sobre frações.

O trabalho decorreu no quadro de uma intervenção centrada na introdução dos alunos ao conceito de fração, estando envolvido, concretamente, o significado parte-todo do conceito. Para cada turma, implementou-se uma intervenção ao longo de duas aulas, cada qual com 90 minutos de duração. A intervenção iniciou-se com a decomposição do círculo em partes iguais ajudando os alunos a construir o conceito de um meio, um terço, um quarto, ..., associado à respetiva representação verbal e simbólica. Seguiu-se a composição e decomposição de frações, e a comparação de frações. A intervenção terminou com a resolução de problemas variados.

Nesta intervenção, introduziram-se aos alunos o conceito de fração, no significado parte-todo, em que se considera que na fração $\frac{a}{b}$, sendo $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ números naturais, com $\boldsymbol{b \neq 0}$. Para tal consideraram-se tarefas para explorar as peças do círculo fracionário e encontrar relações entre elas. Os alunos foram desafiados a resolver tarefas sobre composição e decomposição do círculo fracionário (7 tarefas), representação de frações (5 tarefas), comparação de frações (4 tarefas) e unidade de referência (3 tarefas). Foram ainda desafiados a resolver problemas sobre frações (2 tarefas). Em todos os momentos, cada par de alunos tinha à disposição o conjunto de peças do círculo fracionário. Os conjuntos consistiam nas seguintes peças: a) um círculo azul; b) duas metades de cor verde; c) três terços de cor amarela; d) quatro quartos de cor vermelha; e) seis sextos de cor laranja; f) oito oitavos de cor roxa. A figura 2 ilustra as peças de um conjunto de círculo fracionário facultadas aos alunos.

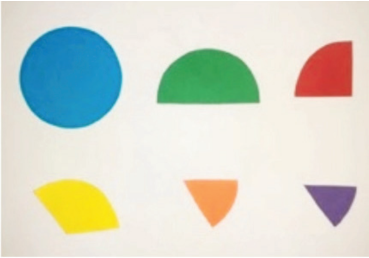

Figura 2. Peças do círculo fracionário.

A tabela 1 apresenta exemplos de tarefas, por tipo e objetivos. A ordem pela qual se apresentam os tipos de tarefas é a ordem segundo a qual os mesmos foram apresentados aos alunos no decorrer da investigação.

Tabela 1. Exemplos de tarefas, por tipo e objetivos

Tipo de tarefa	Objetivos	Exemplos
Composição/decomposição do círculo fracionário	Compor e decompor o círculo nas suas subpartes, utilizando o material manipulável círculo fracionário	Um  é igual a  mais □ 
Representação de frações com significado parte-todo	Reconhecer a fração como representação de uma relação parte-todo, sendo o todo uma unidade contínua	Uma  é $\frac{\square}{\square}$ do 
Comparação de frações	Comparar e ordenar frações com o mesmo numerador Reconhecer a equivalência entre diferentes frações que representam a metade, a quarta parte e a terça parte	Qual é maior: $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{4}$? Será que $\frac{1}{2}$ é o mesmo que $\frac{2}{4}$ ou será que umas destas frações é maior?
Unidade de referência	Reconhecer a unidade de referência; Reconstruir a unidade de referência a partir de uma das suas partes.	Uma  é $\frac{\square}{\square}$ da 
Problema	Resolver problemas aplicando conhecimento prévio	O jardim do João tem a seguinte forma:  A Maria disse: "O jardim do João tem metade do tamanho do meu jardim".

Inicialmente, os alunos dispuseram de cerca de 15 minutos para explorarem livre e autonomamente as peças do círculo fracionário, sendo que cada par de alunos dispunha de um conjunto destas peças. De seguida, a investigadora (uma das autoras do presente artigo) introduziu os alunos ao conceito de fração, com significado parte-todo, projetando exemplos de partes de um círculo e referindo a fração (menor do que a unidade) que representava cada uma dessas partes, sublinhando que ao numerador correspondia o número de partes escolhidas e ao denominador o número total dessas partes que compunham o círculo. Depois de realizada a intervenção, os alunos, organizados em pares, resolveram as tarefas sobre frações. O trabalho em pares, sugerido pela investigadora, tinha como objetivo, justamente, a criação de condições de trabalho que promovessem a conversa entre alunos, no sentido de encontrarem uma resposta consensual. Na resolução de cada tarefa, cada par de alunos dispunha de um caderno para registo da resolução. A distribuição de um caderno por cada par de alunos foi intencional para os levar a acordarem sobre 'o que' e 'como' registar na folha de resolução, esperando assim, promover a discussão de ideias. À medida que iam resolvendo e registando no caderno, cada par partilhava as suas resoluções com a turma e com a investigadora. No final de cada tarefa, a investigadora circulava e estabelecia diálogos com os alunos, incentivando-os a que estes explicassem, oralmente e por escrito, os seus raciocínios.

A recolha de dados foi realizada através de áudio-gravação dos argumentos dos alunos, fotografias das suas produções e notas de campo da investigadora. Optou-se assim pela utilização de diversos instrumentos de recolha de dados, captando-se desse modo diferentes perspetivas da mesma realidade, como forma de procurar assegurar-se a fidelidade e a veracidade dos dados recolhidos (Bogdan e Biklen, 2010).

RESULTADOS

Todos os nomes usados neste artigo são fictícios de modo a preservar o anonimato dos alunos. Adotou-se a designação "Inv." como abreviatura de "investigadora".

Num primeiro contacto com o círculo fracionário, que foi de exploração livre e autónoma do material. Todos os alunos reagiram muito positivamente, começando desde logo a manusear diferentes peças e a estabelecer diferentes relações entre elas.

O primeiro conjunto de tarefas (total de 7 tarefas) apresentado aos alunos solicitava-lhes justamente que, manuseando as peças do círculo fracionário, encontrassem relações entre as mesmas. Os alunos responderam corretamente a estas questões. Tome-se, como exemplo, uma tarefa na qual se solicitava aos alunos que identificassem a quantidade de peças amarelas que seria necessária para completar o círculo azul, sabendo-se que já teriam sido utilizadas 4 peças cor de laranja: "Um  (círculo azul) é igual a quatro  (peças cor de laranja) mais   (peças amarelas)".

A figura 3 ilustra exemplos de resposta de alunos a esta tarefa, em alguns casos a resolução é direta (à esquerda), noutros faz-se por sobreposição das peças sobre a unidade de referência, o círculo azul (à direita). A transcrição 1 apresenta o diálogo entre um aluno e a investigadora, exemplificando a facilidade com que os alunos manusearam as peças do círculo fracionário para a resolução da tarefa.

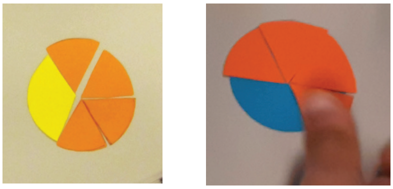

Figura 3. Exemplos de construção do círculo com uma peça de cor amarela e quatro de cor laranja.

Transcrição 1

Rui: O círculo azul é igual a quatro peças laranja mais uma amarela. [figura 3]
Inv.: E de quantas peças cor de laranja precisas para completar uma peça amarela?
Rui: Duas.
Inv.: E se utilizasses só peças amarelas, de quantas precisarias para completar o círculo azul?
Rui: Três. Só precisava de três porque as peças amarelas são maiores.

O manuseamento do círculo fracionário, numa fase inicial, tem já o potencial de começar a promover, entre os alunos, a compreensão de uma relação essencial na ordenação de frações – a relação inversa entre o valor do denominador e a magnitude da fração. Os argumentos apresentados, por exemplo, pelo Rui (transcrição 1), indicam que o aluno compreende a relação inversa entre o número de partes em que o todo é dividido e o tamanho de cada uma dessas partes.

Num outro exemplo, que ilustra a facilidade dos alunos na manipulação das peças do círculo fracionário e no estabelecimento de relações entre elas, solicitava-se que encontrassem formas diferentes de representação do círculo azul, desenhando posteriormente as soluções encontradas. Nesta tarefa, deixou-se ao critério dos alunos a escolha das peças do círculo fracionário a utilizar.

Os alunos começaram por manusear livremente as peças disponibilizadas, de modo a encontrarem combinações de peças com as quais pudessem completar um círculo. De forma geral, na construção do círculo fracionário, observou-se alguma diversidade de respostas, inclusive utilizando peças do material manipulável disponibilizado que não haviam sido até então utilizadas. Por exemplo, os alunos Tiago e Rodrigo utilizaram 3 peças de cor de laranja e 4 de cor roxa para construir uma representação do círculo fracionário. O Tiago apresentou a seguinte explicação:

> Com 3 peças laranja fizemos metade do círculo e depois continuámos com peças roxas [...] Começámos a pôr peças laranja até metade, depois tentámos fazer o resto com as peças amarelas e não dava e depois pegámos numas mais pequenas [as roxas] até fazer o círculo todo.

De seguida, os alunos registaram nos seus cadernos de atividades as soluções encontradas. Registaram-se outras resoluções associadas a justificações que sugeriam o domínio na (de)composição do círculo fracionário. Por exemplo, o aluno Henrique explica como ele e colega raciocinaram:

> Fizemos com 2 amarelas e 2 cor de laranja [...] Sim, dá para fazer o círculo com 3 peças amarelas... em vez da amarela pusemos aqui 2 laranja [...] Tentámos com uma vermelha, mas não dá... fica de fora [do círculo] (figura 4).

A figura 4 evidencia a diversidade de respostas apresentadas nas quais se combina 1 peça verde e 4 peças roxas (à esquerda), 2 peças amarelas e 2 peças cor de laranja (ao centro), 2 peças vermelhas e 3 peças cor de laranja (à direita).

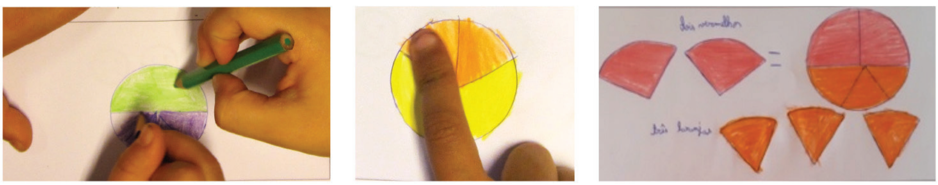

Figura 4. Registo das soluções encontradas pelos alunos na constru*ção* do círculo fracionário.

Na figura 4 (à esquerda) é possível observar-se dois alunos a pintar o círculo (de cores verde e roxa), o que ilustra bem o trabalho realizado em pares. Os alunos contornaram as peças do círculo fracionário para representarem as suas respostas no caderno de atividades. A Clara comentou: "Com o lápis à volta fiz o desenho... depois pintei com lápis de cor... de vermelho e de cor de laranja" (figura 4, à direita). Um par de alunos apresentou mais do que uma possibilidade de resolução ao problema apresentado. O Ricardo e o Joaquim apresentam três possibilidades de construção do círculo fracionário (figura 5), tendo explicado que: "Primeiro fizemos este [apontando para o círculo dividido em duas partes iguais] e depois tirámos 1 verde e dava com 2 vermelhas".

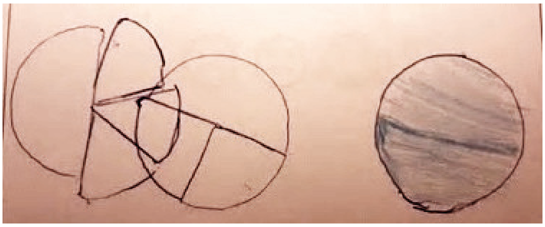

Figura 5. Registo das soluções encontradas para construir o círculo fracionário.

Os alunos compuseram e decompuseram autonomamente o círculo fracionário, utilizando adequadamente peças de diferentes tamanhos, a partir da explicação introdutória de apresentação do material. A facilidade com que os alunos realizaram estas composições sugere compreenderem o todo como uma combinação de todas as suas partes, já que nem todas as combinações de peças possibilitam a composição do círculo. Nesta exploração, os alunos parecem também ter descoberto que o número de partes que compõem o todo varia em função do tamanho das peças escolhidas para completar o círculo fracionário. Esta é uma relação fundamental no trabalho com frações, que conduz à compreensão de que quanto maior as peças, menor será o número de peças necessário para completar o círculo. No processo de reconstrução do círculo, à custa de peças de diferentes tamanhos, os alunos comparam o tamanho das partes utilizadas, podendo estabelecer relações entre as partes. Este momento de exploração revelou-se essencial para a descoberta e apropriação de relações relevantes à construção do conceito de fração, possibilitando a aquisição de conhecimento com compreensão.

Em seguida, a investigadora introduziu os alunos às frações e à sua representação simbólica. Projetou um círculo e exemplos de partes do círculo, explicando que a fração representava as partes do círculo. Explicou ainda que ao denominador correspondia o número total de partes iguais em que o círculo foi dividido e ao numerador correspondia o número dessas partes iguais consideradas. Posteriormente, através de um conjunto de 5 tarefas, os alunos foram desafiados a representar frações na forma verbal e simbólica a partir da representação icónica, fomentando assim representações múltiplas da fração em causa. Todos os alunos responderam corretamente. Os resultados evidenciam facilidade dos alunos em indicar a fração que representa cada uma das peças em relação ao círculo azul, identificando os valores do numerador e do denominador no modelo parte-todo (o número total de partes é representado pelo denominador e o número de partes destacadas é representado pelo numerador). Por exemplo, quando questionados sobre a que fração do círculo corresponde uma peça vermelha ("Uma  (peça vermelha) é  do  (círculo azul)"). Os argumentos para justificarem as suas respostas basearam-se corretamente no significado dos valores do numerador e do denominador, num contexto de modelo parte-todo. Por exemplo, o Luís referiu que uma peça vermelha é um quarto do círculo azul "porque é uma peça [vermelha] de quatro peças. Eu posso pôr aqui 4 [peças] vermelhas e esta é uma. Por isso é um quarto". A figura 6 apresenta a construção do círculo, com 4 peças vermelhas, feita pelo Luís, enquanto este explicava a sua resposta, articulando a representação com material manipulável, a icónica e a simbólica. Alunos houve (10.5%) que verbalizaram a fração um quarto como "um quatro", falhando a linguagem oral, mas resolvendo corretamente a tarefa com recurso às representações com material, icónica e simbólica.

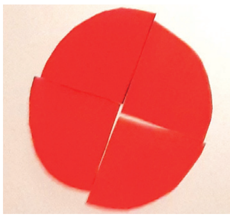

Figura 6. Construção do círculo com quatro peças vermelhas.

Os alunos foram também desafiados a comparar frações (4 tarefas), respondendo corretamente a estas tarefas. Por exemplo, quando questionados sobre qual das frações $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{4}$ seria maior, os alunos estabeleceram, desde logo, uma correspondência com as peças do círculo fracionário. Na transcrição 2 apresentam-se os argumentos do Pedro e do Duarte, que são exemplos de como os conhecimentos do círculo fracionário podem fundamentar o raciocínio para a ordenação de frações.

Transcrição 2

Pedro: Metade é uma [peça] verde e $\frac{1}{4}$ é uma [peça] vermelha.
Inv.: Então o que achas disso? As frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ são iguais ou uma fração é maior do que a outra?
Duarte: Metade é maior do que esta [apontando para a peça vermelha].
Inv.: Pedro, o que achas do que o Duarte disse?
Pedro: A verde é maior do que a vermelha. Metade é maior… e a vermelha é um quarto. Metade é mais… só tem 2 partes… e aqui tem 4… tem 4 partes [apontando para as peças vermelhas]…uma [peça] vermelha é menos.
Duarte: Um quarto é mais pequeno… são quatro…

Na transcrição 2, exemplo do raciocínio efetuado pelos alunos na ordenação de frações, encontram-se indícios de que os alunos começam a construir conhecimento sobre a relação inversa entre o número de partes em que o todo é dividido e o tamanho de cada uma dessas partes. Este tipo de raciocínio está na base do raciocínio efetuado para ordenar frações com numeradores iguais.

Os alunos responderam também a questões sobre a equivalência de frações. Por exemplo, quando desafiados a comparar as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$, referindo se seriam iguais ou se uma seria maior do que a outra, os alunos recorreram aos seus conhecimentos sobre o círculo fracionário para darem as suas respostas, como evidencia a transcrição 3.

Transcrição 3

Inv.: Na vossa opinião, as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ são iguais ou uma delas é maior do que a outra?
Alice: A verde é maior do que a vermelha. A verde é metade e a vermelha um quarto.
Inv.: Muito bem. Mas e se quisessem saber se um meio ou metade é igual ou não a dois quartos? Não um quarto, mas sim dois quartos…
[Alice e Mariana ficam pensativas]
Alice: São dois bocados destes? [apontando para as peças vermelhas]
[…]
Inv.: Então o que acham: $\frac{2}{4}$ e $\frac{1}{2}$ são frações iguais ou uma delas é maior do que a outra?
Alice: Acho que são iguais.
Inv.: Mariana, concordas com a Alice?
Mariana: Sim.
Inv.: Porque é que acham que são iguais?

Alice:	Tem de estar tudo junto. Com estes dois bocados juntos… [apontando para duas peças de cor vermelha]
Inv.:	[…]
Mariana:	As duas que são vermelhas juntas dá $\frac{2}{4}$.
Alice:	Fazemos assim: juntamos duas vermelhas… que são iguais a uma verde. A verde é um meio. Estes dois bocados juntos são iguais à verde.

As resoluções e explicações dos alunos na resolução de tarefas de comparação de frações têm assim evidenciado compreensão de relações essenciais à construção de conhecimento sobre números racionais, em particular sobre frações. O trabalho com o círculo fracionário parece poder constituir um veículo para a compreensão do conceito de fração e suas representações verbal, icónica e simbólica, alicerçando o raciocínio dos alunos na comparação de frações. Contudo, importa ainda explorar o papel do círculo fracionário na compreensão da unidade de referência.

Com o intuito de explorar a unidade de referência, desafiou-se os alunos a encontrar relações parte-todo com unidades diferentes do círculo azul. Para tal, solicitou-se-lhes a resposta a 2 tarefas. Cerca de 15.8% das respostas dos alunos a estas tarefas foram incorretas, pois tomavam como unidade o círculo azul, quando, na verdade, estavam em causa outras unidades de referência. Por exemplo, assumindo-se como unidade de referência a peça verde, os alunos discutiram que parte dela seria a peça vermelha ("Uma  (peça vermelha) é $\boxed{\frac{\ }{\ }}$ da  (peça verde)"). Apesar dos resultados positivos, registou-se a dificuldade de 15.8% dos alunos (seis alunos) em considerar outras unidades de referência que não o círculo azul. Os alunos que tiveram dificuldades na identificação da peça vermelha como sendo um meio da peça verde, argumentavam que a peça vermelha correspondia a um quarto, ignorando a unidade de referência em causa. Por exemplo, um aluno disse que: "Uma peça vermelha é um quarto! Antes também era assim. A peça verde é um meio e a vermelha um quarto", não considerando que agora a unidade de referência era o semicírculo verde e não o círculo azul. As transcrições 4 e 5 evidenciam, a título de exemplo, a compreensão de Ana e Dinis na resolução da tarefa proposta:

Transcrição 4

Inv.: Porque achas que uma peça vermelha é metade da peça verde?

Ana: Porque preciso de duas peças destas [vermelhas] para fazer uma [peça] verde.

Inv.: Mas na questão anterior tinhas indicado que uma peça vermelha representava um quarto… E agora representa metade… consegues explicar porquê?

Ana: Há bocado estava lá a peça azul… aqui está a verde… Para fazer uma [peça] verde só preciso de duas [peças] vermelhas.

Transcrição 5

Inv.: Porque achas que uma peça vermelha é metade da peça verde?

Dinis: Se puser aqui a vermelha [coloca a peça vermelha em cima da peça verde], dá mesmo metade… posso pôr aqui duas [peças vermelhas] e dá a [peça] verde.

Inv.: Mas há pouco a peça verde era metade?

Dinis: Mas antes fazia com o círculo azul. Aqui diz que é com a [peça] verde, não é?

Inv.: É.

Dinis: Então com duas [peças] vermelhas tenho a [peça] verde. A vermelha é metade.

Ainda na resolução desta tarefa, a mudança de unidade de referência não foi evidente para cerca de 21.1% dos alunos (8 alunos). Contudo, quando desafiados a pensar melhor sobre a situação, descobriram e parecem ter compreendido a mudança de unidade de referência. O Artur é disso exemplo, como evidencia a transcrição 6.

Transcrição 6

Artur: A peça vermelha é um quarto. […] Porque cabem quatro destas peças [vermelhas] no círculo.

Inv.: Muito bem. Mas olha bem…. Aqui na pergunta não está um círculo, pois não?

Artur: Não.

Inv.: De quantas peças vermelhas precisas, neste caso, para construir uma peça destas verdes?

Artur: Com duas vermelhas faço uma verde. Uma vermelha é metade da verde.

Não obstante as dificuldades de alguns alunos com o conceito de unidade de referência, o círculo fracionário revelou-se um recurso pedagógico que potencia a aprendizagem do conceito. A facilidade na diversificação da unidade de referência, criou oportunidades de uma visualização imediata da fração em relação à unidade de referência considerada, possibilitando a alguns alunos o reconhecimento da importância de pensar a fração em relação ao todo a que se refere.

Procurando perceber constrangimentos na transição do modelo circular para o retangular, na identificação de frações, os alunos foram desafiados a identificar fração $\frac{1}{2}$ no modelo retangular. Verificou-se alguma facilidade dos alunos na transição da forma circular para a forma retangular. Intuitivamente, os alunos fizeram uma correspondência entre estes dois modelos de representação. Apresentado um bolo retangular, dividido em duas partes iguais, solicitou-se aos alunos que indicassem a fração que representava cada uma dessas partes, desafiando os alunos a articular diferentes representações, a icónica e simbólica. As explicações apresentadas pelos alunos André e Nuno são ilustrativas do tipo de argumentos apresentados pela turma em geral, o André afirmou: "Eu pensei assim: se é metade do bolo é como a peça verde, por isso é um meio" e o Nuno afirmou: "Cada fatia do bolo é metade. O bolo tem duas fatias. Com a piza era a mesma coisa".

Os alunos foram ainda desafiados a responder a dois problemas envolvendo frações. Um dos problemas propostos aos alunos foi o seguinte: "Desenha uma piza. Divide a piza em duas partes iguais. Cada uma das partes é $\boxed{\frac{}{}}$ da piza toda." Neste problema, os alunos dispunham das peças do círculo fracionário para resolverem o problema, caso necessitassem. Todos os alunos conseguiram apresentar uma solução correta. Cerca de 21.1% (8 alunos) dos alunos contornou o círculo azul para representar a piza e, posteriormente, dividiu-o em duas partes iguais; e cerca de 57.9% (22 alunos) dos alunos utilizou as peças do círculo fracionário para representar duas partes iguais da piza. Em todos os casos verificou-se uma preocupação com o rigor do desenho. A transcrição 7 exemplifica o tipo de argumento frequentemente apresentado pelos alunos.

Transcrição 7

Rita: Como tenho de dividir a piza em dois, posso utilizar estas peças verdes.
Inv.: Porque é que utilizaram as peças verdes? Será que podiam utilizar as peças vermelhas?
Rita: Não. Porque só as verdes é que são metade.
Andreia: As vermelhas são... se fosse em quatro.
Rita: A piza está dividida ao meio.
Inv.: Como é que fizeram este desenho?
Rita: Com as peças verdes fizemos uma fatia e depois virámos ao contrário e fizemos a outra fatia. São duas fatias iguais. Se juntarmos estas duas fatias, faz uma piza.

Oito alunos resolveram o problema da divisão das pizas com o seu próprio desenho (representação icónica), sem recurso ao material manipulável, traduzindo já algum nível de abstração.

Num outro problema, os alunos tinham de descobrir a unidade, dada uma das suas partes. Foram desafiados a resolver o seguinte problema: "O jardim do João tem a seguinte forma: . A Maria disse: "'O jardim do João tem metade do tamanho do meu jardim' Qual poderá ser a forma do jardim da Maria? Faz um desenho." Registou-se que 73.3% dos alunos utilizou o círculo fracionário para construir a unidade de referência a partir de uma das suas partes. Os alunos que responderam corretamente apoiaram os seus raciocínios no conhecimento sobre o círculo fracionário e, identificando o jardim do João como a forma de uma peça vermelha (1 quarto de círculo), reproduziram o jardim da Maria, argumentando que teria a forma de uma peça verde (metade do círculo). Exemplo disso é o argumento do Miguel que diz: "É como uma peça verde. Uma vermelha mais uma vermelha dá uma verde" e do Afonso que diz: "Fiz uma vermelha mais uma vermelha. Uma vermelha é metade; é como esta aqui [aponta para ]. Com duas vermelhas faço o jardim todo". No entanto, registaram-se dificuldades de dez alunos (26.3%) na construção da unidade dada uma parte. Nestes casos, tratou-se de uma confusão entre a metade e o todo. Estes alunos desenharam o jardim da Maria como sendo metade do jardim do João, quando deveriam ter desenhado o dobro deste. Ou seja, os alunos pensaram em subdividir a figura dada e não em reconstruir a unidade a partir desta. Esta dificuldade de alguns alunos reforça a importância de resolver tarefas que envolvam a identificação da parte relativamente ao todo, mas também a construção do todo a partir de uma parte.

Os resultados do estudo aqui apresentado evidenciam que os alunos podem dar sentido ao conceito de fração, com recurso ao círculo fracionário. Assim, parece ser possível explorar tarefas que envolvam a identificação de frações, a comparação de frações, e a construção da unidade de referência, aquando da introdução do conceito de fração, estando envolvido o círculo fracionário.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A investigação sublinha a importância das representações múltiplas na construção de conceitos matemáticos (Arcavi, 2003; Bruner, 1999; Lesh *et al.*, 2003; NCTM, 2008, 2017). Particularmente no caso das frações, alguma investigação mostra que o modelo do círculo fracionário pode favorecer a compreensão daquelas por parte dos alunos (Cramer e Henry, 2002; Cramer *et al.*, 2009; Tunç-Pekkan, 2015), ainda que esta ideia possa não ser consensual. O trabalho aqui apresentado procurou perceber como é que os alunos do 2.º ano de escolaridade compreendem frações, quando utilizam o círculo fracionário, abordando a fração no significado parte-todo.

Ao longo da intervenção em sala de aula, realizada no decurso da investigação aqui apresentada, os alunos envolvidos manifestaram-se muito motivados e mantiveram uma atitude interessada, respondendo às tarefas propostas e debatendo em pares as suas resoluções. Tais motivação e interesse ter-se-ão devido, em parte, ao desafio e à novidade que constituiu o trabalho com o círculo fracionário, já que, para os alunos deste estudo, a intervenção realizada proporcionou-lhes o seu primeiro contacto com o conceito de fração envolvendo aquele recurso.

Relativamente à compreensão da ordenação de frações quando esta envolvido o círculo fracionário, este recurso pareceu auxiliar os alunos na compreensão da relação inversa entre o valor do denominador e a magnitude da fração, quando o numerador se mantém. Tal relação, essencial na compreensão do conceito de fração (Mamede *et al.*, 2005; Nunes e Bryant, 2009), tende a ser facilmente entendida pelos alunos quando está envolvido o significado quociente (Mamede, 2018; Mamede *et al.*, 2005; Streefland, 1997), mas parece não ser assim tão óbvia no significado parte-todo.

Este estudo possibilitou aos alunos poder representar frações no círculo fracionário, aprender a sua designação, escrevê-las simbolicamente, além de explorar a sua representação icónica, no âmbito de um conjunto de atividades que ao longo da intervenção em sala de aula, parece ter contribuído para a construção do conceito de fração, com compreensão. No processo, valorizou-se a articulação entre os diferentes modos de representação de frações, em convergência com o modelo de Lesh *et al.* (2003), alinhado com a ideia de que a compreensão de um conceito matemático pressupõe, não só a capacidade de representá-lo de múltiplas formas (Arcavi, 2003; NCTM, 2008), mas também a capacidade de estabelecer relações entre os diferentes tipos de representação (Lesh *et al.*, 2003).

O círculo fracionário pareceu auxiliar os alunos na compreensão da relação inversa entre o valor do denominador e a magnitude da fração, quando o numerador se mantém. Tal relação, essencial na compreensão de frações (Mamede *et al.*, 2005; Nunes e Bryant, 2009), é mais facilmente entendida pelos alunos quando está envolvido o significado quociente (Mamede, 2018; Mamede *et al.*, 2005; Streefland, 1997), facilitando o sucesso na resolução de problemas de equivalência e ordenação de frações. Esta compreensão parecia não ser tão óbvia no significado parte-todo (Mamede, 2018; Nunes e Bryant, 2009). O estudo aqui apresentado evidencia que o círculo fracionário pode ajudar na compreensão de relações essenciais às frações, no significado parte-todo.

A respeito da compreensão da equivalência de frações pelos alunos quando utilizam o círculo fracionário, os resultados do presente estudo evidenciam que este possibilita comparações intuitivas, muitas vezes por sobreposição de peças, facilitando a comparação de frações, dando sentido à equivalência de frações. Por exemplo, a associação direta da fração a uma peça concreta do círculo fracionário permitiu que os alunos, intuitivamente, comparassem as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$. Também investigação prévia, com alunos dos 5.º e 6.º anos, no âmbito do RNP (Cramer e Henry, 2002; Cramer *et al.*, 2009), em que se utilizaram diversos modelos de representação fracionária, sugerem que o círculo fracionário favorece particularmente a compreensão da comparação de frações, promovendo a capacidade de julgamento do tamanho relativo das mesmas.

No nosso estudo, o círculo fracionário possibilitou ainda aos alunos a exploração do conceito de unidade, através da relação entre as partes e o todo. A diversificação da unidade de referência, promovida pela facilidade com que pode manipular-se o círculo fracionário, criou oportunidades de uma visualização imediata da fração em relação às unidades de referência consideradas, ajudando no reconhecimento da importância de pensar-se a fração em relação ao todo a que se refere. No entanto, registaram-se dificuldades dos alunos com a reconstrução da unidade a partir de uma das suas partes. Também Tunç-Pekkan (2015), a respeito de alunos mais velhos (4.º–5.º anos de escolaridade), menciona um desempenho semelhante dos alunos com modelos circulares. No entanto, relativamente a questões que solicitavam a reconstrução da unidade a partir de uma secção retangular ou circular, o mesmo estudo revelou maior taxa de sucesso dos alunos com as representações retangulares. À luz do estudo de Tunç-Pekkan (2015), poderá considerar-se o modelo retangular como um bom ponto de partida quando se aborda a reconstrução da unidade de referência a partir de uma das suas partes. Contudo, esta é uma discussão que ultrapassa o propósito deste artigo, na medida em que não se pretende aqui comparar o desempenho dos alunos nos modelos circular e retangular. Reconhece-se, no entanto, ser uma discussão pertinente, que se remete para trabalhos futuros, sobre o conceito de número racional.

À luz dos resultados obtidos, pode afirmar-se que o trabalho com o círculo fracionário nos anos iniciais do ensino parece proporcionar aos alunos oportunidades de construção do conceito de fração, com compreensão.

A respeito da aprendizagem de frações pelos alunos, a Organização Europeia de Cooperação Económica (OECD, 2014) sublinha que o ensino tem-se revelado insuficiente na construção de um conhecimento robusto, deixando os alunos com dificuldades na compreensão e na operação de números fracionários. Uma fraca compreensão de frações condiciona o domínio do número racional, comprometendo as aprendizagens matemáticas subsequentes do aluno (Booth e Newton, 2012; Cardoso e Mamede, 2011, 2021).

Mais investigação é necessária neste âmbito, com intervenções mais prolongadas e com modelos de representação diversos (circular, retangular, reta numérica), envolvendo mais participantes que iniciam um contato formal com frações, para melhor perceber como facilitar a construção do conceito de número racional dos alunos.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi financiado por Fundos Nacionais, através da Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT), no âmbito dos projetos, do Centro de Investigação em Estudos da Criança da Universidade do Minho (CIEC), com as referências UIDB/00317/2020 e UIDP/00317/2020.

REFERÊNCIAS

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 215–241. https://doi.org/10.1023/a:1024312321077

Behr, M., Lesh, R., Post, T., e Silver, E. (1983). Rational-Number Concepts. Em R. Lesh e M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 92-127). Academic Press.

Behr, M., e Post, T. (1992). Teaching rational number and decimal concepts. Em T. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8: Research-based methods* (2a ed., pp. 201-248). Allyn and Bacon.

Behr, M., Wachsmuth, I., e Post, T. (1988). Rational number learning aids: transfer from continuous models to discrete models. *Focus on learning problems in Mathematics, 10*(4), 1-17.

Bennett, A., Inglis, M., e Gilmore, C. (2019). The cost of multiple representations: Learning number symbols with abstract and concrete representations. *Journal of Educational Psychology, 111*(5), 847-860. https://doi.org/10.1037/edu0000318

Bogdan, R. e Biklen, S. (2010). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto Editora.

Booth, J., e Newton, K. (2012). Fractions: Could they really be the gatekeeper's doorman? *Contemporary Educational Psychology, 37*(4), 247-253. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2012.07.001

Bruner, J. (1999). Para uma teoria da educação. Relógio d'Água.

Cardoso, P., e Mamede, E. (2011). O conhecimento dos significados de fracção de professores do 1.º ciclo do ensino básico. Em C. Nunes, A. Henriques, A. Silvestre, H. Pinto, e J. P. da Ponte (Eds.), *Actas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática*. APM.

Cardoso, P., e Mamede, E. (2021). Ensinar frações nos primeiros anos de escolaridade. Em E. Mamede, H. Pinto, e C. Monteiro (Eds.), *Contributos para o desenvolvimento do sentido de número racional* (pp. 247-268). APM.

Cramer, K., e Henry, A. (2002) Using Manipulative Models to Build Number Sense for Addition of Fractions. Em *National Council of Teachers of Mathematics 2002 Yearbook: Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions* (pp. 41-48). NCTM.

Cramer, K., Wyberg, T., e Leavitt, S. (2009). *Rational Number Project: Fraction Operations and Initial Decimal Ideas*. https://uploadsssl.webflow.com/615709be08d79c21939a341d/62fe5e448b94468319fc5ff7_RNP2_TeacherGuide.pdf

DGE (Direção Geral de Educação) (2021). *Aprendizagens essenciais de matemática no ensino básico*. https://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-basico

Dienes, Z. (1974). *Las seis etapas del aprendizaje en matemática*. Editorial Teide.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1), 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Fosnot, C., e Dolk, M. (2002). *Young mathematician at work: Constructing fractions, decimals and percents*. Heinemann.

Ginsburg, H. P., e Baroody, A. J. (1990). *Test of Early Mathematics Ability* (2º ed.). Austin, TX: Pro-Ed.

Kieren, T. (1976). On the Mathematical, Cognitive and Instructional Foundations of Rational Numbers. Em R. Lesh (Ed.), *Number and Measurement: Paper from a Research workshop*, (pp. 101-144). ERIC/SMEAC.

Kieren, T. (1993). Fractional numbers: from quotient fields to recursive understanding. Em T. P. Carpenter, E. Fennema, e T. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (pp. 49-84). Erlbaum.

Lesh, R., Cramer, K., Doerr, H., Post, T., e Zawojewski, J. (2003). Model development sequences. Em R. Lesh, e H. Doerr, (Eds.) *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*. Lawrence Erlbaum.

Lesh, R., Post, T., e Behr, M. (1987). Representations and Translations among Representations. Em C. Janiver (Ed.), *Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 33-40). Lawrence Erlbaum.

Mamede, E. (2007). *The effects of situations on children's understanding of fractions* [Unpublished doctoral dissertation]. School of Social Sciences and Law. Oxford Brookes University.

Mamede, E. (2018). Young children can learn to reason and to name fractions. Em B. Maj-Tatsis, K. Tatsis e E. Swoboda (Eds.), *Mathematics In Real World* (pp. 195-205). WUR.

Mamede, E. e Nunes, T. (2008), Building on Children's Informal knowledge in the Teaching of Fractions. Em O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano e A. Sepúlveda (Eds.) *Proceedings of the Joint Meeting of 32th Psychology of Mathematics Education and PME-North America XXX* (Vol. 3, pp. 345-352). IGPME.

Mamede, E., Nunes, T., e Bryant, P. (2005). The equivalence and ordering of fractions in part-whole and quotient situations. Em H. Chick, e J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 281-288). University of Melbourne.

Moss, J. (2005). Pipes, tubes, and beakers: New approaches to teaching the rational-number system. Em S. Donovan e J. Bransford (Eds.), *How students learn: History, mathematics, and science in the class- room* (pp. 121–162). National Academies Press.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (2008). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. APM.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (2017). *Princípio para a ação: assegurar a todos o sucesso em matemática*. APM

Nunes, T. e Bryant, P. (2009). Paper 3: Understanding rational numbers and intensive quantities. *Key understandings in mathematics learning* (pp. 1-31). Nuffield Foundation.

Nunes, T., Bryant, P., Pretzlik, U., Evans, D., Wade. J., e Bell, D. (2004, January 28-30). *Vergnaud's definition of concepts as a framework for research and teaching* [Paper presentation]. Annual Meeting for the Association pour la Recherche sur le Développement des Compétences, Paris, France.

OECD (Organisation for Economic Co-operation and Development) (2014). A Profile of Student Performance in Mathematics. Em *PISA 2012 Results: What Students Know and Can Do (Volume I, Revised edition, February 2014): Student Performance in Mathematics, Reading and Science*. OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/9789264208780-6-en

Ponte, J. P., e Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática, 1.º ciclo*. Universidade Aberta.

Retana, J., e Muñoz, D. (2018). Conocimiento común del contenido del estudiante para profesor sobre fracciones y decimales. *Educación matemática*, *30*(2), 106-139. Epub 07 de febrero de 2022. https://doi.org/10.24844/em3002.05

Reys, R. (1982). Considerations for teaching using manipulative materials. Em *Teaching made aids for elementary school mathematics*. NCTM.

Serrazina, L. (1991). Aprendizagem da Matemática: a importância da utilização dos materiais, *NOESIS*, 21, 37-39.

Singer-Freeman, K., e Goswami, U. (2001). Does half a pizza equal half a box of chocolates? Proportional matching in an analogy task. *Cognitive Development*, 16, 811–829. https://doi.org/10.1016/S0885-2014(01)00066-1

Streefland, L. (1997). Charming fractions or fractions being charmed? Em T. Nunes, e P. Bryant (Eds.), *Learning and Teaching Mathematics – An International Perspective* (pp. 347-372). Psychology Press.

Strom, J. (2009). *Manipulatives in mathematics instruction*. Bemidji State University.

Tunç-Pekkan, Z. (2015). An analysis of elementary school children's fractional knowledge depicted with circle, rectangle, and number line representations. *Educational Studies in Mathematics*, *89*(3), 419–441. http://www.jstor.org/stable/43590002

Vale, I. (1999). Materiais manipuláveis na sala de aula: O que se diz, o que se faz. Em *APM (Eds.), Actas do ProfMat99* (pp. 111-120). APM.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage.

Educational Studies in Mathematics, 54(1), 9–35. https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000005212.03219.dc

Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. Em T. Nunes, e P. Bryant (Eds.), *Learning and Teaching Mathematics – An International Perspective* (pp. 5-28). Psychology Press.

Yin, R. (2010). *Estudo de caso. Planejamento e métodos* (4a ed.). Bookman.

Autor de correspondencia

Paula Cardoso

Dirección: CIEC - Universidade do Minho
Campus de Gualtar
4710-057 Braga, Portugal
paulacardoso@ie.uminho.pt