 https://doi.org/10.24844/EM3701.02

Conocimiento didáctico-matemático de profesores de educación primaria en formación sobre la media aritmética

Didactic-mathematical knowledge of prospective primary school teachers about the arithmetic mean

Silvia M. Valenzuela-Ruiz,[1] Carmen Batanero,[2]
Osmar D. Vera[3]

Resumen: El objetivo del trabajo fue evaluar el conocimiento didáctico-matemático sobre la media aritmética de 78 profesores españoles de educación primaria en formación. Se propuso a los participantes una tarea que constaba de dos partes, cada una con tres apartados. En el primero, los profesores en formación debían resolver la tarea, en el segundo se pedía identificar los objetos estadísticos requeridos para su resolución y en el tercero identificar y justificar las respuestas correctas e incorrectas de algunos estudiantes ficticios a las tareas. Los resultados muestran un buen conocimiento estadístico de los participantes, aunque algunos tuvieron dificultad en describir el significado de un valor dado de la media. La mayor parte identificó las respuestas correctas e incorrectas de los estudiantes ficticios, aunque pocos argumentaron adecuadamente su evaluación. Hubo también dificultad en citar los objetos matemáticos requeridos para

Fecha de recepción: 2 de septiembre de 2024. **Fecha de aceptación**: 26 de enero de 2024.

[1] Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada, svalenzuela@ugr.es, https://orcid.org/0000-0001-7467-8672.

[2] Grupo de Investigación FQM126, Teoría de la Educación Matemática y Educación Estadística, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada, España, batanero@ugr.es, https://orcid.org/0000-0003-2163-8516.

[3] Departamento de Didáctica, área Matemática. Facultad de Ciencias de la Educación, Campus Puerto Real, Universidad de Cádiz, España, osmar.dario@uca.es, https://orcid.org/0000-0003-2163-8516.

resolver las tareas. Estos resultados indican conocimientos en los que sería necesario complementar la formación del profesorado.

Palabras clave: Conocimiento didáctico-matemático, profesores de educación primaria en formación, media aritmética, evaluación.

Abstract: The aim of the study was to assess the didactic-mathematical knowledge about the arithmetic mean of 78 prospective primary school teachers. Participants were given two tasks, each of them with three sections. In the first section, the prospective teachers had to solve the task, in the second they were asked to identify the statistical objects required for its resolution, and in the third to identify and justify the correct and incorrect answers of some fictitious students to the tasks. The results show a good statistical knowledge of the participants, although some had difficulty in describing the meaning of a given value of the mean. Most identify the correct and incorrect answers of the fictitious students, although few argue the reasons for their assessment. There is also difficulty in identifying the mathematical objects required to solve the tasks. All this points to areas where teacher training needs to be complemented.

Keywords: *Didactic-mathematical knowledge; prospective primary school teachers, arithmetic mean, assessment.*

INTRODUCCIÓN

Las medidas de tendencia central, junto con las de dispersión, permiten caracterizar una distribución de datos y comparar varias distribuciones, por lo que es importante conocer e interpretar correctamente su definición, ser capaz de calcularlas y reconocer su utilidad (Batanero, 2000). Entre ellas, tiene un papel principal la media aritmética, que es uno de los primeros resúmenes estadísticos propuestos en el currículo escolar.

Así, en el currículo español de matemáticas para la educación primaria (MEFP, 2022a) se incluye, como parte del sentido estocástico, el estudio de la moda y su interpretación como dato más frecuente en el segundo ciclo (niños de 8 y 9 años) y en tercer ciclo (10-11 años) la media y moda, su interpretación, cálculo y aplicación. En la Educación Secundaria Obligatoria (MEFP, 2022b), también dentro del sentido estocástico, para los cursos 1º a 3º (12-14 años) se estudian tanto las medidas de tendencia central como las de dispersión, su interpretación y cálculo con apoyo tecnológico en situaciones reales. Para el 4º curso (15 años) se añade el estudio de la correlación y regresión, en el que la media cobra un papel relevante, puesto que la covarianza (a partir de la cual se calcula el coeficiente de correlación) se define como la media aritmética de la suma de los productos de las diferencias de los valores de las dos variables a su media, es decir:

$$\mathrm{S}_{\mathrm{xy}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Además, la recta de regresión viene dada en función de las medias de las dos variables, la covarianza y la varianza de la variable independiente x (que también se define como una media):

$$\mathrm{y}_i - \bar{y} = (x_i - \bar{x})\,\frac{\bar{S}_{\mathrm{xy}}}{S_{x^2}}$$

Este estudio continúa y se enriquece en bachillerato (16-18 años), con la introducción de las variables aleatorias, en cuyas distribuciones la media juega, con frecuencia, el papel de parámetro que determina la distribución (por ejemplo, los parámetros de la distribución normal son su media y su varianza) y culmina en la inferencia estadística, también en bachillerato y los cursos universitarios, donde, para comparar el comportamiento de poblaciones se cotejan sus medias. Además, el estudio y aplicación de la media aparecen transversalmente en diferentes campos de la matemática (Rondero y Font, 2015).

A pesar de su rol transversal en la enseñanza escolar, y de sus muchas aplicaciones, la simplicidad de la media aritmética es aparente y la investigación didáctica ha mostrado dificultades en su comprensión, incluso en su acepción dentro de la estadística descriptiva. Dicha investigación se ha realizado principalmente con estudiantes (Cobo, 2003; Mayén, 2009; Mevarech, 1983; Pollatsek *et al.* 1981; Watson y Moritz, 2000), y es escasa la centrada en el conocimiento del profesorado sobre la media aritmética que, además, generalmente solo engloba su conocimiento estadístico, sin analizar los componentes de su conocimiento didáctico (Groth y Bergner, 2006; Jacobbe y Carvalho, 2011; Leavy y O'Loughlin, 2006).

El objetivo de este trabajo fue analizar el conocimiento estadístico y dos facetas del conocimiento didáctico-matemático (epistémica y cognitiva) mostrado por 78 profesores de educación primaria en formación, en la resolución de una tarea utilizada anteriormente con estudiantes de diversos niveles educativos y en el análisis didáctico de la misma. En lo que sigue, se describen los antecedentes del trabajo, marco teórico, método y resultados del estudio, finalizando con las conclusiones.

ANTECEDENTES

Debido a sus múltiples aplicaciones en la vida cotidiana y a su importante papel en el currículo escolar, son numerosas las investigaciones centradas en la media aritmética. Los siguientes trabajos han analizado aspectos epistemológicos del concepto (Bakker, 2003; Bakker y Gravemeijer, 2006; Rondero y Font, 2015) y su presentación en los libros de texto (Cobo y Batanero, 2004; García-García *et al.* 2021).

Los estudios sobre comprensión del concepto por parte de estudiantes se han enfocado en diferentes puntos. Por ejemplo, Watson y Moritz (2000), analizaron el significado intuitivo dado por los estudiantes de 11 a 15 años a la media aritmética, pidiéndoles, entre otras tareas, que indicasen qué significado tenía la media en diferentes situaciones prácticas. Concluyeron que, en general, los estudiantes de menor edad en su muestra no comprendían el significado del valor decimal de la media cuando los datos son valores enteros (como, por ejemplo, un número medio de hijos igual a 1,2). Es decir, no entendían que la media no tiene por qué ser una operación interna en el conjunto de datos, por lo que daban interpretaciones como que "el número medio de hijos 1,2 significa que las familias tienen un hijo y un bebé de 2 meses" o similares. Otros estudiantes interpretaron la media como el centro geométrico de la distribución, propiedad que solo es cierta en distribuciones simétricas. Por otro lado, Mevarech (1983) encontró estudiantes que aplicaban las propiedades de las operaciones aritméticas, por ejemplo, la asociatividad o el elemento neutro, en el cálculo de la media, donde no son válidas.

En relación con los algoritmos de cálculo, Pollatsek *et al.* (1981) encontraron estudiantes que no sabían cuándo se debe calcular una media ponderada y utilizaban, en su lugar, la media simple. Un ejemplo es el cálculo de la media a partir de datos presentados en tablas de frecuencia, donde algunos estudiantes no tienen en cuenta las frecuencias y calculan la media únicamente con los valores de la variable (Li y Shen, 1992).

Dos estudios sobre la media fueron los de Cobo (2003) con 168 estudiantes españoles de 1º curso de la ESO y 144 estudiantes de 4º curso y Mayén (2009) con 162 estudiantes mexicanos de educación secundaria y 356 de bachillerato. Esta última, utilizó el cuestionario diseñado por Cobo (2003), en el que se incluye la tarea utilizada en el presente trabajo. Las dos autoras identificaron otras dificultades, como no reconocer las situaciones en que se debe utilizar la media aritmética.

Las investigaciones sobre la media centradas en el conocimiento del profesor se han basado principalmente en profesores de educación primaria en formación (en adelante PEPFs) (Jacobbe y Carvalho, 2011). Así, Batanero *et al.* (1997) analizan las respuestas de 273 PEPFs a cuatro ítems de opción múltiple que evaluaban la comprensión de distintas propiedades de la media aritmética. Los autores informaron de la falta de comprensión del algoritmo en el 25% de participantes o de los efectos de los valores atípicos sobre la media (34%). Similares conclusiones las obtuvieron Estrada *et al.* (2004) en una replicación del estudio.

Groth y Bergner (2006) estudiaron la comprensión de 46 PEPFs sobre las diferencias y semejanzas entre la media, mediana y moda. Clasificaron esta comprensión en niveles, desde ser solo capaz de dar la definición de los conceptos, comprender que estos resúmenes indican lo que es típico en un conjunto de datos, hasta poder decidir cuando una medida es más adecuada que otra.

Leavy y O'Loughlin (2006) investigaron la comprensión de la media por parte de 264 PEPFs. Una primera tarea se centró en el reconocimiento de que la media es aceptable cuando se comparan dos conjuntos de datos. También propusieron tareas de cálculo de la media ponderada y de construcción de un conjunto de datos con una media dada. Finalmente, se pidió estimar la media, a partir del gráfico de una distribución. Los resultados indican que el 52% aplicaron el término media tanto a la media, como a la mediana o la moda, tan solo el 21% calculó correctamente la media ponderada y el 25% confundió la media con la moda. Jacobbe (2012) entrevistó a tres profesores de educación primaria en ejercicio, que tuvieron dificultad para justificar los algoritmos de cálculo con el valor obtenido de una media o identificar las situaciones en que se debe utilizar la media.

Estrella (2016) analizó las respuestas de 27 profesores de educación primaria en formación continua a una tarea utilizada en investigaciones anteriores, sobre la utilidad de la media en presencia de valores atípicos en los datos. Los resultados mostraron concepciones correctas e incorrectas y revelaron que la idea de representatividad de un conjunto de datos no era familiar para dichos profesores.

Landtblom y Sumpter (2021) distribuyeron por internet un cuestionario para explorar las concepciones de profesores de educación primaria en formación y ejercicio sobre las medidas de tendencia central, obteniendo 27 respuestas al cuestionario. Al preguntarles cuál de la media, mediana o moda es más sencilla de explicar, los profesores en ejercicio se basaron con mayor frecuencia en razones pedagógicas, mientras que los futuros profesores utilizaron sus experiencias personales, a menudo de tipo procedimental. No hubo diferencias en los dos grupos al preguntarles por la utilidad de media, mediana y moda, considerando la media como la más útil y la moda menos aplicable. Alrededor de 30% de los encuestados no reconoció las propiedades de la media, mediana y moda ni su utilidad para diferentes conjuntos de datos.

Los estudios anteriores se han centrado en el conocimiento matemático sobre la media, por parte de los profesores y futuros profesores y el último sobre su utilidad y su experiencia u opinión sobre la dificultad que implica su enseñanza. En el estudio presentado en este trabajo se aporta nueva información sobre componentes del conocimiento didáctico relacionado con la media aritmética.

MARCO TEÓRICO

El estudio se ha basado en algunos elementos teóricos del enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (EOS) (Godino, 2024; Godino *et al.*, 2007; 2019). En primer lugar, y de acuerdo con este enfoque, se consideran los siguientes objetos matemáticos primarios, como constituyentes del significado de la media (Batanero, 2000):

- *Situaciones problemas* internas o externas a la matemática, que inducen actividades matemáticas de donde surge la idea de media. Algunos ejemplos son realizar un reparto equitativo y obtener un representante de un conjunto de datos.
- *Lenguaje:* Representaciones materiales utilizadas en la actividad de resolución de las situaciones problemas (términos, como promedio o media; expresiones, como "la media no es una medida robusta"; símbolos, como $\overline{x}$, tablas y gráficos, por ejemplo, de barras, circulares, caja y bigote).
- *Conceptos:* Objetos abstractos que requieren definición; además de la media, se asocian a ella, otros como los de variable, datos, distribución, muestra y población.

- *Propiedades:* que relacionan entre sí los conceptos; por ejemplo, que la media no es una operación interna en el conjunto de datos, pero sí lo es la moda; que no tiene la propiedad asociativa, pero sí la conmutativa; que una distribución puede tener más de una moda.
- *Procedimientos:* Algoritmos, métodos de cálculo, estrategias que permiten resolver los problemas. Por ejemplo, sumar los datos y dividir entre el número de datos, o invertir este algoritmo para encontrar un dato faltante.
- *Argumentos* empleados para probar las propiedades de la media o justificar las soluciones a los problemas.

Además, se utilizará el modelo del Conocimiento Didáctico Matemático del profesor (CDM) (Godino, 2009; 2024; Godino *et al.*, 2017; Pino-Fan *et al.* 2015). En este trabajo entendemos el término *matemático* en sentido amplio, incluyendo los conocimientos estadísticos elementales, como es el caso de la media aritmética, por lo que consideramos justificado el uso de este marco teórico.

El conocimiento matemático, en este modelo se divide en *conocimiento matemático común* y *conocimiento matemático avanzado*. El primero es compartido con los estudiantes del nivel educativo en que el profesor imparte su docencia; en nuestro caso, la educación primaria. El segundo es más amplio que el anterior y permite que el profesor relacione su enseñanza del tema con la correspondiente al mismo tema en los niveles educativos superiores. Dentro del conocimiento didáctico-matemático, se diferencian seis facetas:

- *La faceta epistémica*, es el conocimiento didáctico-matemático específico sobre el propio contenido, que permite al profesor proponer y resolver por varios métodos tareas matemáticas, conocer los diferentes significados de un objeto matemático e identificar el conocimiento necesario para resolver una tarea matemática.
- *La faceta cognitiva*, incluye el conocimiento sobre las formas de razonar y aprender de los estudiantes sobre el tema y permite al profesor predecir las posibles soluciones a las tareas matemáticas y anticiparse a los errores que el estudiante pudiese cometer, dificultades y concepciones erróneas de sus estudiantes.
- *La faceta afectiva*, incluye los conocimientos necesarios para comprender los sentimientos, actitudes y motivaciones de los estudiantes frente al tema y el proceso de estudio seguido, por ejemplo, su interés o desinterés por el tema o el sentirse incapaz de resolver un problema.

- *La faceta interaccional*, involucra los conocimientos necesarios para prever, implementar y evaluar interacciones, entre los propios estudiantes y entre estos y el profesor, con objeto de promover el aprendizaje.
- *La faceta mediacional*, aborda los conocimientos de los recursos didácticos y medios para la enseñanza de cada contenido, incluyendo los libros de texto y el software disponible.
- *La faceta ecológica*, incluye los conocimientos sobre el tema en el currículo de matemáticas, sus relaciones con otros contenidos y con aspectos sociales, políticos y económicos que condicionan el proceso de enseñanza y aprendizaje.

En este estudio se evalúan los siguientes componentes del modelo CDM: el conocimiento común sobre la media, se analiza mediante la resolución de la tarea propuesta por parte de los futuros profesores. La faceta epistémica se evalúa mediante los objetos que identifican los participantes que son requeridos para resolver la tarea. La faceta cognitiva, a través de la identificación y justificación de las respuestas correctas e incorrectas de estudiantes ficticios a la tarea.

METODOLOGÍA

Muestra y contexto

Participaron en la muestra 78 profesores en formación de segundo curso del grado de Educación Primaria, de una universidad española. Los participantes habían completado en un curso anterior una asignatura de 90 horas de duración, en la que estudiaron estadística descriptiva, incluyendo los tipos de datos, tablas de frecuencia, gráficos, medidas de posición central y dispersión. Además, habían cursado los contenidos curriculares sobre la media, propios de la educación primaria, secundaria y bachillerato, que son cursos obligatorios, previo a su ingreso en la universidad.

La recogida de datos se realizó en una asignatura sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, de contenido exclusivamente didáctico, en que habían realizado previamente análisis de respuestas de estudiantes y objetos matemáticos en otras tareas.

Cuestionario

Se propuso a los participantes el cuestionario que se muestra en la figura 1, en el que se deben completar tres apartados relacionados con una tarea que fue propuesta inicialmente por Watson y Moritz (2000) y utilizada posteriormente en las investigaciones de Cobo (2003) y Mayén (2009).

A continuación, presentamos una tarea junto con algunas de las soluciones obtenidas por estudiantes de secundaria. Para cada una se pide: 1. Resuelve la tarea. 2. Indica, para cada una de las tareas, los conceptos, propiedades y procedimientos que se utilizan para resolverlas. 3. Señala cuál o cuáles de las respuestas dadas por estudiantes de primaria son correctas. Para cada una de las respuestas incorrectas señala las posibles intuiciones o estrategias incorrectas que han llevado a los estudiantes a dar una respuesta errónea.
Tarea 1. a. El número medio de hijos por familia en España es *1,2 hijos por familia*. Explícanos qué significa para ti esa información. b. Se han elegido 10 familias españolas y el número medio de hijos entre las 10 familias es 1,2 hijos por familia. Los García tienen 4 hijos y los Pérez tienen 1 hijo, ¿cuántos hijos podrían tener las otras 8 familias para que la media de hijos en las diez familias sea 1,2? Justifica tu respuesta.
Respuestas dadas en el apartado a. E1. Que cada familia tiene un hijo y que puede tener otro, pero que no lo tienen todas las familias. E2. Que no llega a dos hijos de media. Lo máximo que pueden tener las familias son dos hijos. E3. Que se han sumado el número total de hijos en España y se han dividido entre el número de familias españolas. E4. Yo creo que está mal dicho ya que una familia no puede tener un hijo y un poquito, en todo caso podría tener 2.
Respuestas dadas en el apartado b. E5. Todos uno, menos una familia que tendrá 0, porque al sumarlos serán 12 y divididos entre $10, 1{,}2$. E6. Podrían tener 1 hijo cada una de las otras familias, ya que si cada una de ellas tiene 1 hijo, menos una que tiene 4, haces la media y te sale $1{,}3$ hijos. E7. La media de las 10 familias es $1{,}2$, por tanto, $1{,}2\times10=12$ hijos en total entre las 10 familias. Entre los García y los Pérez tienen 5 hijos, por tanto, $12\text{-}5=7$ hijos entre las 8 familias restantes. Si X="Número de hijos por familia", una posibilidad sería: $x_1=1, x_2=2, x_3=1, x_4=1, x_5=1, x_6=1, x_7=0$ y $x_8=0$.

Figura 1. Cuestionario completado por los participantes.

El primer apartado del cuestionario evalúa el conocimiento común sobre la media de los participantes y se pide resolver la tarea, que tiene dos partes. Para resolver la parte a) hay que considerar que la frase "El número medio de hijos por familia en España es 1,2 hijos por familia" significa que, si repartiésemos el número total de hijos de forma equitativa entre el número de familias existentes, se obtendría este valor decimal, que no tiene contrapartida real, pues es el resultado del algoritmo de cálculo. La variable "número de hijos por familia" es discreta, por tanto, el número de hijos es entero. Esto no quiere decir que el dato proporcionado sea erróneo, pues la media no es una operación interna en el conjunto de datos. El valor decimal de la media, 1,2, no carece de significado, sino que representa una medida de tendencia central que resume cómo se distribuyen los datos, aun cuando no necesariamente corresponda a un valor observado en el conjunto.

Para resolver la parte b), se conoce que el número medio de hijos entre las 10 familias es 1,2 hijos por familia. Si se denota por $\mathcal{X}$=*"Número de hijos por familia"*, tenemos una muestra de tamaño n=10, con valores $\mathcal{X}$={x_1, x_2, x_3,...,x_{10}}, en la cual conocemos dos de ellos; x_1=4 (los García) y x_2=1 (los Pérez). Teniendo en cuenta el algoritmo de cálculo de la media aritmética $x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{10}}{n}$ y sustituyendo los datos conocidos $1{,}2 = \frac{4 + 1 + x_3 + x_4 + \ldots + x_{10}}{10}$, obtenemos $(1{,}2 \times 10) - 5 = x_3 + x_4 + \ldots + x_{10}$. Es decir, que entre las 8 familias restantes, el número total de hijos tiene que ser 7. Por tanto, cualquier opción en la que obtengamos un total de 7 hijos entre las ocho familias restantes es válida. De esto deducimos que al menos una familia no tendrá ningún hijo.

En resumen, y como describe Mayén (2009), este ítem recoge dos situaciones problemas asociados con la media: SP1: Efectuar un reparto equitativo teórico del número total de niños entre las 10 familias y SP1: Elegir un valor para representar el conjunto de datos (las 10 familias con sus niños). También involucra las definiciones de media (D1, dada por el algoritmo) y moda (D2, como valor más frecuente), y las siguientes propiedades:

- Numéricas: N1, la media es un valor perteneciente al rango de la variable, N2: la media no tiene por qué ser uno de los valores de los datos;
- Algebraicas: A1, El cálculo de la media no es operación interna;
- Estadísticas: E1, La media o la moda son representantes del conjunto de datos.

Respecto a procedimientos se requiere buscar una distribución de datos que se ajuste a una media dada (P3), lo que implica conocer el algoritmo de cálculo de este parámetro (P1) y saber aplicarlo a la inversa (P2). El contenido evaluado en la tarea, desglosado en los objetos matemáticos requeridos en su resolución se presenta en la tabla 1.

Tabla 1. Objetos estadísticos requeridos en la solución de la tarea

Tipo de objeto	Objeto
Concepto (definición)	D1. Media, como algoritmo
	D2. Moda, como valor más frecuente
Propiedades	N1. El valor de la media se encuentra en el rango de la variable
	N2. La media puede no coincidir con ninguno de los datos
	A1. La media no es una operación interna en el conjunto de datos
	E1. Representantes de un colectivo
Situaciones- problemas	SP1. Hacer un reparto equitativo
	SP2. Encontrar un valor representativo
Procedimientos	P1. Cálculo de la media con datos aislados
	P2. Invertir el algoritmo de la media
	P3. Buscar una distribución con una media dada

Nota: Fuente propia de la investigación.

El segundo apartado del cuestionario evalúa la faceta epistémica del conocimiento sobre la media de los participantes y, para ello, se les pide identificar los objetos estadísticos (conceptos, propiedades y procedimientos) requeridos para completarla, que serían los expuestos en la tabla 1.

En el apartado 3, que evalúa la faceta cognitiva del conocimiento de los participantes, se propone identificar y justificar las soluciones correctas o incorrectas de estudiantes de primaria ficticios, que describen errores identificados en los antecedentes, a cada una de las dos partes de la tarea. Respecto a la parte a), la respuesta correcta es la del estudiante E3, que describe la definición de media dada por su algoritmo. La respuesta de E1 y E2 restringen el número de hijos a un máximo de dos y la de E4 es parcialmente correcta, porque es cierto que la variable número de hijos es entera, pero la media no es una operación interna en el conjunto de datos.

En relación a la parte b), la respuesta correcta es la de E7, quien invierte el algoritmo de la media para obtener el número de hijos de las otras 8 familias y proporciona una distribución adecuada del número de hijos en las mismas. E5 da, también, una respuesta correcta, pero poco argumentada, y E6 da una solución con media diferente a la dada.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

En lo que sigue se presentan y discuten los resultados, diferenciados por componentes del conocimiento del profesor en el modelo CDM. A lo largo de la sección se exponen ejemplos de respuestas literales de los participantes en el estudio, que han sido codificados como Px, siendo x su número de orden en el listado de participantes.

Conocimiento matemático común

El conocimiento matemático común de los participantes en el estudio se evalúa mediante su resolución de la tarea dada. En primer lugar, se analizan sus respuestas a la primera parte de la tarea en que se pregunta por el significado de la media, que se han clasificado en la forma siguiente:

1. Respuesta correcta, interpretando el número medio de hijos como el valor que se obtendría para cada familia al efectuar un reparto equitativo del total de hijos en la población. Por tanto se asocia la media con la situación problema SP1 (tabla 1).

   P48. El enunciado viene a decirnos que la media de hijos por familia en España es 1,2. Esto nos quiere decir que juntando los niños de todas las familias españolas, cabe un poco más de 1 niño por familia.

2. Respuesta correcta, describiendo con detalle el procedimiento de cálculo de la media para la obtención del valor dado, por lo que utiliza la definición D1 de la media, dada por su algoritmo de cálculo (tabla 1).

P1. 1,2 hijos por familia. Este dato se obtiene sumando los datos del número de hijos de cada familia de España y dividiendo entre el número de familias.

3. Respuesta correcta, en la que, además de describir el procedimiento de cálculo de la media (usa la definición D1), reconociendo que algunas familias podrían tener valores superiores a la media se proporciona una posible distribución de los datos para obtener dicha media (utiliza el procedimiento P3, tabla 1).

P6. Que, sumando la cantidad de hijos por cada familia en España y haciendo la media sale 1,2. Sin embargo, eso no significa que todas las familias tengan hijos, ya que una puede tener, por ejemplo, 3 y otra 0.

4. Parcialmente correcta. Asocia la media a la situación problema consistente en obtener un reparto equitativo SP1, pero restringe los valores que puede tomar la variable. Está claro, por los mismos datos del enunciado, que algunas familias podrían tener más de dos hijos, lo que no es considerado por el participante.

P57 Significa que si todas las familias tuvieran la misma cantidad de hijos, tendrían 1,2 hijos. Es decir, tendrían al menos 1 y algunas podrían tener 2.

5. Parcialmente correcta. Define el número medio de hijos haciendo alusión al valor más frecuente, es decir la moda. En su interpretación tiene en cuenta que la variable de interés es cuantitativa discreta, y entiende que una familia no puede tener 1,2 hijos (aplica correctamente la propiedad N2), pero no la asocia a la situación problema de "reparto equitativo" (SP1). Este error es también descrito por Cobo (2003).

P3. Significa que la mayoría de las familias españolas tienen un hijo y muy pocas más de uno o ninguno.

6. Respuesta incorrecta. Se limita a repetir o parafrasear la afirmación dada, dando (en algunos casos) una posible distribución de los datos pero sin justificación.

P12. De media cada familia tiene un hijo.

Las soluciones obtenidas en el primer apartado de la tarea se presentan en la tabla 2, en la que podemos observar que algo menos de la mitad de los participantes dio una respuesta correcta (49,4%).

Tabla 2. Frecuencia y porcentaje de soluciones al primer apartado de la tarea

	Soluciones	Frecuencia	%
Correcta	1. Define la media como reparto equitativo	8	10,1
	2. Define mediante el algoritmo de cálculo	24	30,4
	3. Define como algoritmo de cálculo, dando una distribución	8	10,1
Parcialmente correcta	4. Define la media como reparto equitativo, pero restringe los valores de la variable	1	1,3
	5. Interpretan como valor más frecuente	11	13,9
Incorrecta	6. Repite la afirmación dada, dando (en algunos casos) una posible distribución de los datos	14	17,7
	No responde	13	16,5
Total		79	100,0

Nota: Fuente propia de la investigación.

Lo más frecuente (30,4%) fue dar la definición de media, utilizando su procedimiento de cálculo, en la que se indica cómo se obtiene su valor, siendo mejores los resultados que en la investigación de Batanero *et al.* (1997) en que únicamente el 35% de los PEPFs mostraron una comprensión completa del algoritmo de cálculo de la media aritmética. La idea de reparto equitativo solo se intuye en la respuesta de 10,1%, a los que se añade una respuesta parcialmente correcta, puesto que se restringe los posibles valores de los datos. Otro grupo de respuestas parcialmente correctas, aunque admiten que la variable es discreta, confunden la definición de media y moda (13,9%), error que aparece en el 10,3% de los estudiantes de Cobo (2003) y en el 23% de PEPFs en el estudio de Leavy y O'Loughlin (2006). También es importante destacar que una parte importante de los profesores en formación (16,5%) o no responde o se limita a parafrasear el enunciado de la tarea. El porcentaje de respuestas correctas fue menor que el informado en el estudio de Cobo (2003), donde los estudiantes españoles de ESO obtuvieron un 56% de respuestas correctas y en el de Mayén (2009), en el que los estudiantes mexicanos de bachillerato proporcionaron un 69% de respuestas correctas. Por último, el 16,5% no supo dar una respuesta en esta tarea que es interpretativa.

Seguidamente se estudia la respuesta al segundo apartado de la tarea, en que se pide dar una posible distribución de datos de diez familias, para obtener la media dada, conocidos el número de hijos de dos familias. Las respuestas a este apartado se han clasificado como sigue:

1. Respuesta correcta, utilizando el algoritmo de cálculo de la media para datos aislados (procedimiento P1) y sustituyendo los datos proporcionados por el enunciado para invertir el proceso de cálculo (procedimiento P2), obteniendo así la suma del número de hijos de las 8 familias restantes. Se muestra buen conocimiento, tanto de la definición de media, como de los de los procedimientos de cálculo.

   P11. N.º familias =10; media =1,2; N.º hijos = 1,2x10=**12**. Entre los García y los Pérez tienen 5, las otras ocho deben tener 7 hijos repartidos de cualquier forma.

2. Respuesta correcta, donde, además de seguir todos los pasos anteriores, se describe una posible distribución de los datos utilizando, por tanto, el procedimiento P3.

   P4. Sabiendo que la media de 10 familias es 1,2, sabemos que el total de niños es 12; x=12–5=7. García=4, Pérez=1; 7 familias sin hijos y una familia con 7 hijos.

3. Respuesta parcialmente correcta, utilizando ensayo y error para obtener una posible distribución de los datos (procedimiento P3), y aplicando el algoritmo de la media para datos aislados (procedimiento P1). Fallo en la inversión del algoritmo (procedimiento P2).

   P8. Primero hemos comprobado que la media de la familia Pérez (1) y García (4) es 2,5 ($\frac{1+4}{2} = 2{,}5$). Al ver que la media era más alta que 1,2 hemos probado que el resto de las familias tuviera un hijo y el resultado es 1,3 ($\frac{4+1+1+1+1+1+1+1+1}{2} = 1{,}3$). Luego hemos quitado un hijo a una familia y ha dado 1,2.

4. Respuesta incorrecta, utilizando una regla tres para calcular el número de hijos que tendrían las 8 familias restantes, sin tener en cuenta que el valor de la media resultante no coincide con el valor dado en el enunciado de la tarea.

P64: 2 familias-------5 hijos
8 familias-------x; x=20
20/8(familias) = 2,5 hijos por familia. Pero como una familia no puede tener 2,5 hijos, 4 familias pueden tener 2 hijos y otras 4 pueden tener 3 hijos.

Los resultados de este apartado se presentan en la tabla 3. Dicha tabla muestra que, para los participantes en el estudio, la resolución de la segunda parte de la tarea resultó más sencilla que la primera, puesto que el porcentaje de respuestas correctas ha sido del 67,1%. En ella los participantes invierten el algoritmo de la media para obtener el número de hijos de las ocho familias restantes (procedimientos P1 y P2). De nuevo el porcentaje de participantes que muestra comprensión del algoritmo es bastante mayor que el obtenido por Batanero *et al.* (1997). En la investigación de Cobo (2003), el 24,1% de estudiantes resuelve el problema invirtiendo el algoritmo de la media y el 37,9% proporciona además una posible distribución. El 38%, además, da una distribución posible para la media dada (P3).

Tabla 3. Frecuencia y porcentaje de soluciones al segundo apartado de la tarea

	Soluciones	Frecuencia	%
Correcta	1. Invierten el algoritmo de cálculo de la media para obtener el número de hijos de las 8 familias restantes.	23	29,1
	2. Invierten el algoritmo de cálculo de la media y dan ejemplos de distribución de los datos	30	38
Parcialmente correcta	3. Obtiene una solución mediante ensayo y error	8	10,1
Incorrecta	4. Aplica una regla de tres	1	1,3
No responde		17	21,5
Total		79	100,0

Nota: Fuente propia de la investigación.

Un 10% de los sujetos no llegaron a invertir el algoritmo, pero obtuvieron la solución mediante ensayo y error, apoyándose en el algoritmo de la media (P1); por tanto, su solución es parcialmente correcta. Este resultado coincide con el obtenido en Batanero *et al.* (1997) en el 25% de los participantes de su estudio. Solo un estudiante ha respondido de forma incorrecta, pero aumenta el porcentaje de alumnos que no responden con respecto al apartado anterior (21.5%). En este apartado, el porcentaje de respuestas correctas es similar al obtenido por Mayén (2009) con estudiantes mexicanos de bachillerato (66%) y mayor que en estudiantes españoles de ESO en el estudio de Cobo (2003) (37%).

Conocimiento en la faceta epistémica

Para evaluar el conocimiento didáctico en esta faceta, en la tabla 4 se presenta el número de objetos matemáticos diferentes identificados por los participantes en la resolución de las tareas. Citaron un total de 206 objetos, lo que supone una media de 2,6 objetos por participante. Lo más frecuente fue identificar conceptos y procedimientos.

Tabla 4. Frecuencia de citas de diferentes objetos matemáticos

Tipo de objeto	Objeto	Frecuencia
Conceptos		*96*
	Media aritmética	53
	Operaciones aritméticas	10
	Números decimales	8
	Estadística	7
	Números naturales y enteros	6
	Otros conceptos	12
Propiedades		*15*
	La media puede ser no entera (no es operación interna,	4
	Es una medida de tendencia central	3
	Posibles valores del número de hijos	2
	Propiedades operaciones aritméticas	2
	Otras propiedades	4
Procedimientos		*94*
	Cálculo de la media	30
	Invertir el algoritmo de la media	17
	Operaciones elementales	14
	Aproximar o ensayo y error para encontrar una distribución	14
	Interpretar la media	7
	Otros procedimientos	12

Nota: Fuente propia de la investigación.

Respecto a los conceptos, una amplia parte de la muestra, citaron la media aritmética, reconociendo que se trata de una tarea de aplicación de este concepto. Los números naturales, enteros y decimales y la estadística fueron citados por un número pequeño de participantes. Otros conceptos citados con poca frecuencia fueron la variable estadística (2 citas), moda (1) y distribución (1). Hacemos notar que la combinatoria o la proporcionalidad, sugeridas por algunos participantes no son necesarias para resolver la tarea.

Fueron muy escasas las propiedades identificadas por los participantes, entre ellas: que la media del número de hijos puede ser un valor no entero, es decir, no tiene que coincidir con ninguno de los datos (N2), puesto que la media no es una operación interna (A1); que se trata de una medida de tendencia central, representante de un colectivo (E1). Se hizo también referencias a los posibles valores del número de hijos y a las propiedades operaciones aritméticas. Otras propiedades citadas, cada una por un solo participante, fueron: la aditividad de la media (la media de la suma de dos variables es la suma de sus medias), falta de elemento neutro (hay que tener en cuenta los ceros en el cálculo de la media), que la suma de desviaciones de los datos a la media es igual a cero y que el valor de la media debe estar incluido en el rango de la variable (N1). Es decir, se citaron todas las propiedades previstas en el análisis a priori (tabla 1), pero con poca frecuencia.

Respecto a los procedimientos, se identificaron todos los previstos en el análisis a priori de la tarea: cálculo de la media (P1), invertir el algoritmo de la media (P2) y encontrar una distribución de media dada (P3), bien por ensayo y error o por aproximación. También se hizo referencia a las operaciones aritméticas elementales e interpretación de la media. Otros procedimientos citados fueron lectura e interpretación del enunciado (2 participantes), cálculo mental (1), construir una tabla (1), obtener resultados (1) y repartir el número de hijos entre las familias (2). Hacemos notar que el cálculo de probabilidades y la recogida de datos que sugirieron algunos participantes, no se requieren en la resolución de la tarea.

En definitiva, los profesores en formación que participaron en el estudio mostraron un conocimiento incipiente en la faceta epistémica, que les permitió identificar algunos de los objetos matemáticos requeridos en la solución de la tarea, pero por parte de un bajo porcentaje y, por lo tanto, debiera reforzarse esta competencia. La dificultad de identificar los objetos matemáticos en las tareas escolares también se encontró en la investigación de Valenzuela-Ruiz *et al.* (2023) con profesores de educación secundaria en formación cuando analizaron otras tareas estadísticas.

Conocimiento en la faceta cognitiva

Para evaluar el conocimiento de los participantes en esta faceta, en la tabla 5 se presentan los datos de la evaluación correcta o incorrecta de los estudiantes ficticios en las dos partes de la tarea.

Tabla 5. Frecuencia y porcentaje de evaluaciones de las respuestas de estudiantes

	Evaluación correcta		Evaluación incorrecta		No evalúan	
Respuestas de estudiantes	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
E1. Restringe el número de hijos	57	72,2	21	26,6	1	1,3
E2. Restringe el número de hijos	76	96,2	1	1,3	2	2,5
E3. Correcta	68	86,1	9	11,4	2	2,5
E4. Considera que la media es una operación interna	73	92,4	4	5,1	2	2,5
E5. Correcta, poco argumentada	43	54,4	24	30,4	12	15,2
E6. Obtiene una media diferente a la dada	63	79,7	4	5,1	12	15,2
E7. Correcta	62	78,5	4	5,1	13	16,5

Nota: Fuente propia de la investigación.

Prácticamente todos los participantes identifican como incorrectas las respuestas de los estudiantes ficticios E2 y E4. Asimismo, la mayoría reconoce la respuesta correcta de E3 y E7 y las incorrectas de E1 y E6. Solo la mitad de la muestra participante considera correcta la respuesta de E5, ya que no explicita los pasos que ha dado, para averiguar el resultado. Algunos profesores en formación no evaluaron algunas de las respuestas, aumentando la proporción en la segunda parte de la tarea.

Justificaciones de las evaluaciones de las respuestas a la primera parte de la tarea

Se analizaron los argumentos utilizados por los profesores en formación para justificar su evaluación de las respuestas de los estudiantes ficticios. En la primera parte de la tarea (explicar el significado de una media igual a 1,2) hemos encontrado las siguientes categorías:

1. Se justifica la corrección o incorrección de la respuesta del estudiante mediante el algoritmo de cálculo de la media aritmética (P1), indicando que se ha sumado el número de hijos de todas las familias dividiendo por el

número de familias. Esta justificación también implica el conocimiento de la definición D1 de media como reparto equitativo:

> P8. La respuesta de E1 es incorrecta, porque una familia podría tener 6 y otra familia 0 y el resto de familias otros números de hijos y al calcular la media siga siendo 1,2.

2. El argumento se apoya en que la media no es una operación interna en el conjunto de datos (A1), por lo que su valor no es necesariamente un número entero y, en consecuencia, puede no coincidir con ningún dato (N2), es decir, puede tomar un valor decimal.

> P28. Incorrecto. Es cierto lo que nos contesta, pero su razonamiento no es correcto, ya que no tiene en cuenta que estamos hablando de la media y esta puede ser un número decimal.

3. Se razona que el estudiante ficticio ha acotado indebidamente el posible conjunto de valores de los datos a uno o dos hijos, cuando el mismo enunciado de la tarea indica que una familia tiene 4 hijos. Este argumento se suele utilizar para evaluar como incorrectos los argumentos de los estudiantes ficticios E1 y E2, como ocurre con el participante P1.

> P1. El primer estudiante afirma que cada familia tiene un hijo, cuando puede haber familias que no tengan hijos. El segundo afirma que el máximo posible de hijos es dos, lo cual no es cierto.

4. Se sugiere que el estudiante ficticio confunde la media con la moda, esto es, con el valor más frecuente. Este error es típico en los estudiantes y fue descrito en las investigaciones de Cobo (2003), Mayen (2009) y Leavy y O'Loughlin (2006).

> P7. Es incorrecto porque las familias pueden tener más de 2 hijos; lo que pasa es que la media no es lo más frecuente.

También se encontraron argumentos erróneos, no pertinentes o incompletos, generalmente asociados a evaluaciones incorrectas; por ejemplo, indicar que el estudiante no entiende el concepto de media, sin especificar el tipo de error, o repetir el argumento del estudiante ficticio.

En la tabla 6 se presentan la frecuencia y porcentaje de profesores en formación que utiliza los anteriores argumentos en sus evaluaciones correctas o incorrectas, de los cuatro alumnos ficticios que responden la primera parte de la tarea (en total 316 evaluaciones realizadas). Hacemos notar que el 68.7% de las evaluaciones correctas se apoyan en un argumento correcto (argumentos del 1 al 4). El más utilizado es, generalmente, el que se basa en la definición D1 de media como reparto equitativo y, ocasionalmente, se usan el resto de argumentos, como son que la media no es una operación interna, que el estudiante ficticio acota el posible conjunto de valores o que se confunden media y moda. Un 14,6% de las evaluaciones correctas están apoyadas en argumentos incorrectos (argumento 5) y un 16,8% no se argumentan. Respecto a las evaluaciones incorrectas, prácticamente todas están apoyadas por argumentos incorrectos (argumento 5).

Tabla 6. Argumentos empleados para justificar las evaluaciones de alumnos ficticios en la primera parte de la tarea.

	Evaluación Correcta		Evaluación Incorrecta		No contestan	
Argumento	N	%[1]	N	%[2]	N	%[3]
1. Se usa la definición de media como reparto equitativo	143	52,2	1	2,9		
2. Se indica que la media no es una operación interna	29	10,6	0	0,0		
3. Se acota el posible conjunto de valores	12	4,4	3	8,6		
4 . Se confunde media y moda	4	1,5	1	2,9		
5. Argumentos incorrectos o incompletos	40	14,6	9	25,7		
No argumenta.	46	16,8	21	60,0	7	100,0
Total	274	100,0	35	100,0	7	100,0

Porcentajes calculados respecto al: [1]total de evaluaciones correctas, [2]total de evaluaciones no correctas,[3] total de participantes que no responde.

Nota: Fuente propia de la investigación.

Justificaciones de las respuestas de estudiantes ficticios en la segunda parte de la tarea

Las justificaciones dadas a las respuestas de los estudiantes ficticios en la segunda parte de la tarea (dar una posible distribución de 10 familias con media igual a 1,2) fueron las siguientes:

1. *Se argumenta que el estudiante ficticio encuentra una posible distribución correcta del número de hijos*, es decir, que el estudiante aplica el procedimiento P3. Generalmente, el participante que da este argumento también explica los pasos que ha dado el estudiante para obtener la distribución.

   P21. Las respuestas correctas son E1 y E3, ya que al sumar 7 hijos más a los que ya habían (4 y 1), suman 12 en total. Si divides este total entre las 10 familias de sale de media 1,2. E3 también está bien, puesto que en una familia hay 2 hijos y en dos familias no hay. Sumarían un total de 12 hijos que al dividirlo por 10 da 1,2.

2. *Indica que el estudiante invierte el algoritmo de la media (P2) para determinar una posible distribución (P3)*. Es un razonamiento similar al anterior, pero ahora se hace énfasis en que se invierte el algoritmo de cálculo, multiplicando la media por el número de familias.

   P1. El procedimiento seguido ha sido multiplicar las 10 familias por 1,2 hijos de media, obteniendo un total de 12 hijos. Si una familia tiene 5 hijos y otra uno, para las otras 8 familias quedan 7 hijos, por lo que podría ser la solución dada.

3. *Indica que la distribución dada por el estudiante ficticio no proporciona la media correcta*. Además, como en el siguiente ejemplo, se indican los errores del estudiante ficticio, cuya distribución no da la media pedida.

   P25. No es correcto, porque si las demás familias tienen un hijo, saldrían 13 (8+5) hijos y el total deben ser 12.

4. *Además de dar una posible distribución, indica que la distribución de hijos por familia que soluciona el problema no es única*.

P1. Todos 1, menos una familia que tendrá 0, porque al sumarlos serían 12 y al dividirlo entre 10 da 1,2. Hay otras distribuciones.

5. *Indica que el estudiante ficticio excluye valores posibles del número de hijos* acotando innecesariamente la variable.

P12. E2 es incorrecto, ya que no ha contemplado la posibilidad de que una familia tenga 0 hijos, descartando el 0 como número.

Otros argumentos incluyen que no se ha entendido el enunciado, que no es necesario que el número de hijos sea igual en todas las familias o que no se entiende el concepto de media. En la tabla 7 se presentan los resultados de los argumentos para evaluar a los estudiantes ficticios en la segunda parte de la tarea.

Tabla 7. Argumentos empleados para justificar las evaluaciones de alumnos ficticios en la primera parte de la tarea

	Evaluación Correcta		Evaluación incorrecta		No responde	
Argumentaciones	N	%[1]	N	%[2]	N	%[3]
1. Comprueba que el estudiante proporciona una posible distribución del número de hijos	10	6,0				
2. Razona que se usa la inversión del algoritmo de la media para determinar una posible distribución	7	4,2				
3. Indica que la distribución dada no proporciona la media correcta.	46	27,4	1	3,1		
4. La distribución de hijos por familia dada no es única	15	8,9	10	31,3		
5. Excluye valores posibles del número de hijos.	3	1,8	1	3,1		
6. Otros argumentos	3	1,8	7	21,9	1	2,7
No argumenta.	84	50,0	13	40,6	36	97,3
Total	168	100,0	32	100,0	37	100,0

Porcentajes calculados respecto al: [1]total de evaluaciones correctas, [2]total de evaluaciones incorrectas,[3] total de participantes que no responde.

Nota: Fuente propia de la investigación.

Fueron muchos los participantes que en esta parte de la evaluación tuvieron dificultad para razonar el motivo por el que califican de correcta o incorrecta una respuesta y, algo más de la cuarta parte, indicó que la solución no proporciona la media dada. También bastantes señalaron que hay más de una posible distribución que de la solución al problema o que el estudiante proporciona una distribución adecuada.

En resumen, aunque los participantes en el estudio llegan a identificar en su mayoría las respuestas correctas e incorrectas de los estudiantes ficticios, no siempre fueron capaces de razonar su evaluación, sobre todo, en la segunda parte de la tarea, por lo que requieren un refuerzo de la faceta cognitiva de su conocimiento didáctico. Similares dificultades se obtuvieron en los estudios de López-Martín *et al.* (2019) y Valenzuela-Ruiz *et al.* (2023) con profesores de educación secundaria en formación al pedirles evaluar las respuestas de estudiantes en otras tareas de estadística.

CONCLUSIONES

El objetivo que se planteó en este trabajo fue analizar el conocimiento estadístico y dos facetas (epistémica y cognitiva) del conocimiento didáctico matemático (Godino, 2009, 2024), mostrado por 78 profesores de educación primaria en formación en la resolución de una tarea, utilizada anteriormente con estudiantes de diversos niveles educativos, y en el análisis didáctico de la misma. De este modo, se complementan los estudios previos sobre esta temática, pues los realizados con futuros profesores se reducen a la evaluación de su conocimiento estadístico del tema y los relacionados con profesorado en activo no abordan las facetas epistémica y cognitiva, que son consideradas en el presente estudio.

Para evaluar su conocimiento estadístico, se pidió a los participantes resolver las tareas. Los resultados mostraron un conocimiento estadístico escaso en los participantes, pues solo la mitad dio una definición correcta de media en términos intuitivos, mientras otros confundieron media y moda o no llegaron a definirlas. Esta dificultad también se ha encontrado en el estudio de Leavy y O'Loughlin (2006) con futuros profesores y en el de Cobo (2003) y Mayén (2009) con estudiantes de secundaria.

Fue más sencillo invertir el algoritmo de la media para encontrar una distribución de media dada, tarea resuelta por dos tercios de la muestra. Sin embargo, una parte de la muestra no pudo invertir el algoritmo de la media para obtener una distribución de datos, dificultad también observada por Batanero *et* *al.* (1997) y Estrada *et al.* (2004) en una parte de los participantes en sus estudios con profesores en formación.

Para evaluar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático (Godino, 2009, 2024) de los participantes, se les pidió evaluar el número de objetos estadísticos requeridos para realizar las tareas propuestas. Los participantes mostraron un conocimiento incipiente que les permitió identificar algunos de estos conocimientos. Aunque no hemos encontrado trabajos previos sobre esta temática relacionados con la media aritmética, los resultados coinciden con los de investigaciones sobre el análisis de objetos matemáticos en otras tareas de estadística (Valenzuela-Ruiz *et al.*, 2023).

Respecto a la evaluación de la faceta cognitiva de su conocimiento didáctico, aunque la mayoría de la muestra logra discriminar las respuestas correctas e incorrectas de estudiantes ficticios, no todos supieron dar la razón de la corrección o falta de corrección de dichas respuestas, al igual que se señaló en investigaciones previas sobre la competencia de análisis de respuestas de estudiantes a tareas de estadística (López-Martín *et al.*, 2019; Valenzuela-Ruiz *et al.*, 2023). Ello indica que se debe reforzar la competencia de análisis didáctico de los profesores en formación, no solo en tareas relacionadas con la media aritmética, sino con otros contenidos estadísticos.

Reconocemos las limitaciones del trabajo, por la restricción del número de participantes y tareas. Como consecuencia, se abre una línea de investigación sobre los conocimientos didáctico-matemáticos del profesorado en formación sobre la media aritmética. Además de ampliar la evaluación realizada con otras tareas diferentes, sería importante diseñar y evaluar acciones formativas dirigidas a los profesore en formación. En dichas acciones formativas se debiera proponer a los participantes que, en primer lugar, resuelvan problemas sobre la media aritmética y seguidamente analicen el conocimiento estadístico requerido en su resolución y las posibles dificultades de sus estudiantes al resolver los problemas.

AGRADECIMIENTO

Proyecto PID2022-139748NB-100 financiado por MCIN/
AEI/10.13039/501100011033/ y FEDER

REFERENCIAS

Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de posición central. *Uno. 25,* 41-58.

Batanero, C., Godino, J. D., y Navas, F. (1997). Concepciones de maestros de primaria en formación sobre los promedios. En H. Salmerón (Ed.), *VII Jornadas LOGSE: Evaluación Educativa* (pp. 310-304). Universidad de Granada.

Bakker, A. (2003). The early history of average values and implications for education. *Journal of Statistics Education, 11*(1). https://doi.org/10.1080/10691898.2003.11910694

Bakker, A. y Gravemeijer, K.P.E. (2006). An historical phenomenology of mean and median. *Educational Studies in Mathematics, 62,* 149–168. https://doi.org/10.1007/s10649-006-7099-8

Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria.* Tesis doctoral. Universidad de Granada

Cobo, B. y Batanero C. (2004). Significados de la media en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias, 22*(1), 5-18. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3899

Estrada, A., Batanero, C. y Fortuny, J. M. (2004). Un estudio sobre conocimientos de estadística elemental de profesores en formación. *Educación Matemática, 16(*1), 89-111.

Estrella, S. (2016). Comprensión de la media por profesores de educación primaria en formación continua. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, *18*(1), 13-22.

García-García, J. I., Leiva, I. B. U., Chicao, S. H. V. y Arredondo, E. H. (2021). Significado de la media, mediana y moda en textos escolares de séptimo básico. *Revista Chilena de Educación Matemática, 13*(4), 186-199. https://doi.org/10.46219/rechiem.v13i4.84

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN*, *20,* 13-31.

Godino, J. D, (2024). *Entoque ontosemiótico en educación matemática. Fundamentos, herramientas y* aplicaciones. Aula Magna.

Godino, J. Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 38-43.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

Groth, R. E. y Bergner, J. A. (2006). Preservice elementary teachers' conceptual and procedural knowledge of mean, median, and mode. *Mathematical Thinking and Learning, 8*(1), 37–63. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0801_3

Jacobbe, T. (2012). Elementary school teachers' understanding of the mean and median. *International Journal of Science and Mathematics Education, 10(*5), 1143–1161. https://doi.org/10.1007/s10763-011-9321-0

Jacobbe, T. y Carvalho, C. (2011). Teachers' understanding of averages. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education* (pp. 199-209). New York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_21

Landtblom, K. y Sumpter, L. (2021). Teachers and prospective teachers' conceptions about averages. *Journal of Adult Learning, Knowledge and Innovation, 4*(1), 1-8. https://doi.org/10.1556/2059.03.2019.02

Leavy, A. y O'Loughlin, N. (2006). Preservice teachers understanding of the mean: moving beyond the arithmetic average. *Journal of Mathematics Teacher Education 9*, 53–90. https://doi.org/10.1007/s10857-006-9003-y

Li, K.Y. y Shen, S.M. (1992). Students'weaknesses in statistical projects. *Teaching Statistics, 14* (1), 2-8. https://doi.org/10.1111/j.1467-9639.1992.tb00195.x

López-Martín, M. M., Batanero, C., & Gea, M. M. (2019). ¿Conocen los futuros profesores los errores de sus estudiantes en la inferencia estadística? *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 33*, 672-693. https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n64a11

Mayén, S. (2009). *Comprensión de las medidas de tendencia central por estudiantes mexicanos de educación secundaria y bachillerato.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Mevarech, R. (1983). A deep structure model of students' statistical misconceptions. *Educational Studies in Mathematics, 14*, 415-429. https://doi.org/10.1007/BF00368237

Ministerio de Educación y Formación Profesional, MEFP (2022a). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. MEFP.

Ministerio de Educación y Formación Profesional, MEFP (2022b). Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. MEFP.

Pino-Fan, L. R., Assis, A., y Castro, W. F. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 11*(6), 1429-1456. https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1403a

Pollatsek, S. Lima, y A. D. Well (1981). Concept or computation: Students' understanding of the mean. *Educational Studies in Mathematics, 12,* 191-204. https://doi.org/10.1007/BF00305621

Rondero, C., y Font, V. (2015). Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(2), 29-49.

Valenzuela-Ruiz, S. M., Batanero, C., Begué, N. y Garzón-Guerrero, J. A. (2023). Conocimiento didáctico-matemático sobre la distribución de la media muestral de profesorado de bachillerato en formación. *Uniciencia, 37*(1), 44-64, http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.3

Watson J. M. y Moritz J. B. (2000). The longitudinal development of understanding of average. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(2/3), 11-50. https://doi.org/10.1207/S15327833MTL0202_2

Autor de correspondencia

Silvia M. Valenzuela-Ruiz

Dirección: Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada. Profesor Vicente Callao, 18011 Granada, España. svalenzuela@ugr.es

Teléfono: +34958241503