 https://doi.org/10.24844/EM3701.06

Place et rôle du contre-exemple dans la classe de mathématiques: pratiques déclarées des enseignants tunisiens

Place and role of the counterexample in the mathematics classroom: declared practices of Tunisian teachers

Imed Kilani[1]

Résumé: Dans cette recherche et à partir d'une enquête par questionnaire ouvert, nous avons étudié, auprès de vingt-neuf enseignants de mathématiques tunisiens en exercice deux questions liées à leurs pratiques enseignantes déclarées concernant la notion de contre-exemple: la place qu'ils accordent à cette notion dans leurs enseignements et les types de réfutation qu'ils mettent en place lorsqu'un élève affirme la vérité d'une proposition mathématique universelle fausse. Les résultats ont montré que beaucoup d'enseignants déclarent donner de l'importance à cette notion (ce résultat est toutefois à nuancer) et ont montré également que la quasi-totalité des enseignants restreint le rôle du contre-exemple dans l'activité mathématique à son rôle logique ; ce qui ne laisse pas de place aux «réfutations par contre-exemple général», lesquelles possèdent un pouvoir explicatif plus fort que celui des autres types de réfutation par contre-exemple.

Fecha de recepción: 15 de julio de 2024. **Fecha de aceptación**: 31 de enero de 2025

[1] ISEFC-Institut Supérieur de l'Education et de la Formation Continue, 43 rue de la Liberté 2019 Le Bardo Tunisie, Université Virtuelle de Tunis (Tunis, Tunisie), kilanis2006@yahoo.fr, https://orcid.org/0000-0001-9549-5250.

Mots-clés: *Réfutation par contre-exemple spécifique, réfutation par contre-exemple semi-général, réfutation par contre-exemple général, enseignants, proposition fausse*

Abstract: In this research, based on an open questionnaire survey, we asked twenty-nine practising Tunisian mathematics teachers two questions related to their declared teaching practices concerning the notion of counterexample : the place they give to this notion in their teaching and the types of refutation they put in place when a student asserts the truth of a false universal mathematical statement. The results showed that many teachers declare that they attach importance to this notion (although this result needs to be nuanced) and also showed that almost all teachers restrict the role of the counterexample in mathematical activity to its logical role; this leaves no place for «general counterexample refutations», which have a stronger explicative power than other types of counterexample refutation.

Keywords: *Refutation by specific counterexample, Refutation by semi-general counterexample, Refutation by general counterexample, teatchers, false proposition*

INTRODUCTION

Les contre-exemples jouent un rôle fondamental en mathématiques, servant à réfuter la vérité d'une conjecture universelle en montrant qu'elle ne tient pas dans au moins un cas. Pour un énoncé sous la forme d'une implication,[2] cela se traduit par la règle logique suivante : (non « $\forall x \in D, P(x) \Rightarrow Q(x)$ ») équivaut à (« $\exists x \in D, P(x)$ et non $Q(x)$ »). Cette règle souligne que réfuter une conjecture équivaut à trouver un exemple spécifique qui la contredit. Elle explicite également les notions de « domaine de validité », « d'hypothèse » et « de conclusion ». Un contre-exemple est une valeur a de x, appartenant à D, pour laquelle P(a) est vrai et Q(a) est faux, tandis qu'un exemple est une valeur où P(a) et Q(a) sont vrais. En mathématiques et dans l'enseignement, la recherche de contre-exemples et d'exemples est essentielle pour comprendre le domaine de validité et les

[2] Tous les exemples étudiés dans ce texte peuvent se ramener sous la forme d'implications utilisant des prédicats à une variable.

hypothèses d'une conjecture. Si au moins un contre-exemple est trouvé, la conjecture est invalidée. Cela permet de revisiter le domaine de validité et les hypothèses de la conjecture pour une meilleure compréhension du problème (Lakatos, 1984; Borasi, 1987; Hitt, 1998a; BenBachir et Zaki, 2001a; Klymchuk, 2012). Barrier (2016) souligne que les contre-exemples aident à élaborer des stratégies de preuve et à construire de nouvelles propositions mathématiques vraies. Ce processus permet de mieux comprendre les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une proposition universelle soit vraie (Lockwood et al, 2016). Il développe l'esprit critique et renforce la compréhension globale des notions mathématiques, conduisant à un niveau supérieur de conceptualisation (BenBachir et Zaki, 2001a; Klymchuk, 2012). L'intégration de ce travail en classe dépend des conceptions des enseignants sur le rôle de la preuve. Lorsqu'un élève formule une proposition universelle fausse, l'enseignant peut encourager la recherche de contre-exemples. Cela aide les élèves à reconnaître les contradictions et à comprendre pourquoi une proposition est fausse sous certaines conditions. Cependant, certains élèves peuvent résister à cette reconnaissance (Balacheff, 1988; BenBachir et Zaki, 2001b; Durand-Guerrier, 2005). Klymchuk (2012) note que même en présence d'un conflit, les élèves peuvent avoir du mal à le résoudre. Il a constaté que faire travailler des étudiants scientifiques sur des questions du type «Comment pouvez-vous modifier l'énoncé pour le rendre correct ?» ou «Quelles autres affirmations erronées votre contre-exemple peut-il réfuter ?» ou encore «Pouvez-vous construire la classe de contre-exemples la plus générale ?» permet de les aider à résoudre leurs propres conflits. Concernant la dernière question, il souligne que plus un étudiant maîtrise une large gamme de contre-exemples, plus il est capable de les utiliser et de les adapter dans divers contextes pour contredire des affirmations universelles incorrectes. Orienter les élèves à s'inscrire dans un processus de réfutation qui permet de produire des contre-exemples, de comprendre pourquoi ces contre-exemples contredisent la proposition «sous les conditions qu'elle impose» et surtout les amener, lorsque cela est possible, à générer des classes entières de contre-exemples et des classes entières d'exemples semble alors être extrêmement instructif.

Des recherches montrent que les connaissances mathématiques et didactiques de l'enseignant ont un impact direct sur la qualité de l'apprentissage des élèves (Mercier et Buty, 2004; Bloch, 2009; Coulange, 2012; Horoks, 2022). Ceci nous a incités à explorer, dans cette étude, la place et le rôle des contre-exemples dans les pratiques déclarées de vingt-neuf enseignants tunisiens expérimentés. Nous avons particulièrement cherché à comprendre comment ces enseignants exploitent une erreur détectée chez un élève affirmant la véracité d'une proposition universelle fausse, en nous basant sur la classification des contre-exemples de Peled et Zaslavsky (1997).[3]

Cet article est structuré en trois parties : un aperçu de l'importance didactique des contre-exemples, une présentation des différents types de réfutation par contre-exemple, et une expérimentation auprès de vingt-neuf enseignants tunisiens, suivie de l'analyse de leurs réponses et des résultats. Nous concluons par une discussion générale sur les résultats de cette étude.

1. LE CONTRE-EXEMPLE : UN LEVIER DIDACTIQUE POUR UNE MEILLEURE COMPRÉHENSION DES CONCEPTS MATHÉMATIQUES

Il est reconnu que la production des contre-exemples est une tâche, souvent, difficile qui peut représenter un défi pour l'élève, pour l'enseignant et voire même pour le mathématicien chercheur. Selden et Selden (1998) expliquent cette difficulté par l'absence d'algorithmes pré-appris pour guider leur construction. Zaslavsky et Peled (1996) ont montré que seuls 4 % des futurs enseignants du secondaire et 33 % des enseignants en exercice peuvent produire un contre-exemple bien justifié pour des propositions fausses, soulignant l'importance de l'expérience de la classe pour approfondir les connaissances mathématiques des enseignants. Huang (2014) a trouvé que de nombreux étudiants en ingénierie à Taïwan ont du mal à fournir des contre-exemples appropriés, en partie parce qu'ils ne reconnaissent pas le rôle des hypothèses dans les propositions mathématiques. Quant à Hitt (1998a), il impute les difficultés que trouvent les élèves à produire des contre-exemples à la rareté, dans la classe de mathématiques, des situations qui les amènent à construire des contre-exemples. Il souligne que dans les mathématiques scolaires c'est plutôt l'enseignement des algorithmes et de la démonstration déductive qui est favorisé. Bien sûr, les algorithmes et les démonstrations déductives jouent un rôle crucial dans l'activité mathématique, mais le travail du mathématicien ne peut pas se résumer à résoudre des équations, effectuer des calculs et enchaîner théorèmes et définitions de manière purement déductive. Les mathématiciens passent, aussi, beaucoup de temps à expérimenter, à explorer des concepts abstraits, à comprendre des phénomènes mathématiques, à formuler aussi des conjectures et chercher à les valider ou au

[3] Nous présentons, en détails, plus loin cette classification.

cas échéant à les invalider. Cette réalité montre à la fois la richesse et la complexité du travail du mathématicien.

Un vrai travail scolaire autour des conjectures est aussi très enrichissant pour les élèves. Balacheff (1987) a montré que, pour des élèves de quatrième en France, la recherche de contre-exemples pour la conjecture « Le nombre de diagonales d'un polygone est égal au nombre de sommets du polygone divisé par deux » a amélioré leur compréhension des concepts mathématiques en jeu. Selon lui, ce travail mathématique a amené les élèves à se méfier de leurs premières impressions mathématiques relativement à l'énoncé et à développer une compréhension plus profonde des concepts mathématiques en jeu dans cette conjecture. Klymchuk (2012) a constaté que des étudiants en sciences inscrits dans dix universités mondiales[4] trouvent l'enseignement axé sur les contre-exemples très instructif, les rendant plus sensibles aux conditions des définitions et théorèmes. Cerclé (2019) a également démontré que dans une classe de seconde, la production de contre-exemples à la proposition « si deux droites [dans l'espace] sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles » a permis aux élèves de retravailler des connaissances notionnelles et logiques. Cela les a notamment amenés à revoir la définition du parallélisme entre deux droites et à explorer l'existence de droites non coplanaires. Les contre-exemples ont permis aussi aux élèves de prendre conscience de l'importance de la prise en compte du domaine de validité de la proposition. Selon Cerclé, le travail mené a même permis aux élèves de clarifier la notion de théorème.

Ces recherches montrent que le contre-exemple, au-delà de réfuter des propositions fausses, permet de mieux comprendre et conceptualiser les mathématiques. La mise en place de ce travail en classe dépend des convictions des enseignants sur le rôle de la preuve. Durand-Guerrier (2007) a montré, à travers une situation mathématique, comment la centration excessive d'un enseignant sur le rôle de falsifiabilité du contre-exemple a affaibli une situation d'étude et l'a conduit à éliminer, au lieu d'exploiter, de manière systématique des conjectures améliorées par les élèves. Or, pour améliorer ces conjectures, les élèves étaient, à chaque fois, obligés de tenir compte du contre-exemple qui avait émergé à la suite des échanges ; ce qui leur a demandé, à chaque fois, de réorganiser leurs connaissances mathématiques. En centrant son approche sur le rôle strictement logique du contre-exemple, cet enseignant traduit sa propre conception de

[4] Il s'agit d'une université en Allemagne, une en Nouvelle-Zélande, une en Pologne, une en Russie, une en Espagne, une aux Pays-Bas, deux en Ukraine et deux aux États-Unis.

l'activité mathématique. Cette focalisation l'a vraisemblablement conduit à fermer la situation, occultant ainsi la fonction explicative du contre-exemple. Cet enseignant ne semble pas être un cas isolé. Creager (2022) a, par exemple, constaté, chez beaucoup de futurs enseignants, que la production d'un contre-exemple marque l'annonce de la fin de leur processus de raisonnement ; ce qui montre bien leur conception réductrice du rôle de la réfutation par contre-exemple dans l'activité mathématique. Knuth (2002) souligne que ce type de réfutation est certes une preuve convaincante de la fausseté de la proposition, mais cette preuve explique peu et souvent ne favorise pas une bonne compréhension des mathématiques sous-jacentes. Pour illustrer la différence entre ce type de preuve et une preuve par contre-exemple qui a également un aspect explicatif, il prend comme exemple l'affirmation fausse suivante : *« Deux rectangles dont les diagonales sont égales sont superposables* ». Il explique que proposer deux rectangles non superposables en spécifiant les longueurs des diagonales et des côtés constitue une réfutation par un contre-exemple qui permet uniquement de prouver que l'affirmation est fausse (contre-exemple (a)). En opposition à cette réfutation, il présente une autre réfutation qu'il qualifie de générale, car elle engendre toute une classe de contre-exemples. Il s'agit d'un rectangle sur lequel on fait varier la mesure de l'angle formé par l'intersection des diagonales (contre-exemple (b)). Ainsi, ce contre-exemple possède une portée beaucoup plus étendue que celui du contre-exemple spécifique. Knuth (Idem) souligne que ce contre-exemple met en lumière une propriété mathématique qui n'est pas mise en évidence dans le cas du contre-exemple spécifique, grâce à son aspect plus général. Le contre-exemple (b) permet, ainsi, de comprendre comment produire le cas général et favorise, surtout, une meilleure compréhension des mathématiques sous-jacentes. Ainsi, Knuth souligne que les réfutations par contre-exemples, bien qu'elles permettent toutes de réfuter la proposition fausse, ne peuvent se valoir puisqu'elles diffèrent par la qualité et le niveau de l'explication qu'elles visent.

Dans la prochaine section, nous explorerons les différents types de réfutation par contre-exemple, en mettant particulièrement en lumière la « réfutation par contre-exemple général », qui se distingue par son potentiel explicatif élevé.

2. LES TYPES DE RÉFUTATION PAR CONTRE-EXEMPLE

Pour réfuter une proposition universelle, il suffit d'avancer un contre-exemple. Celui-ci établit la fausseté de la proposition tout en jouant un rôle explicatif important (Balacheff, 1987, 1988; Knuth, 2002; Bloch, 2009). Knuth, par exemple, souligne que :

> *... les mathématiciens reconnaissent que l'un des rôles principaux de la preuve en mathématiques est d'établir la véracité d'un résultat ; mais ce qui est peut-être plus important, en particulier d'un point de vue didactique, c'est qu'ils reconnaissent son rôle dans la compréhension des mathématiques sous-jacentes.* (Knuth, 2002, p. 487, traduction libre)[5]

Une réfutation par contre-exemple est avant tout une preuve démontrant que la proposition universelle est fausse. Si son rôle se limite à ce constat, elle offre peu d'explications et ne favorise pas une compréhension approfondie des mathématiques en jeu. Cependant, une réfutation par contre-exemple peut également initier un processus explicatif. Ce processus mathématique permet de produire non seulement des contre-exemples, mais aussi de comprendre les raisons pour lesquelles ces contre-exemples contredisent la proposition initiale. De plus, il peut mener à la génération de classes entières de contre-exemples, enrichissant ainsi la compréhension et l'exploration des concepts mathématiques concernés. Ce dernier point revêt une grande importance pour ceux qui cherchent une compréhension plus approfondie des mathématiques (Peled et Zaslavsky, 1997; Klymchuk, 2012; Durand-Guerrier, 2005; Selden et Selden, 1998). Cette observation a conduit Peled et Zaslavsky (1997) à classifier les réfutations par contre-exemples selon leur pouvoir explicatif en trois catégories :

1. **Réfutation par contre-exemple spécifique** : Cette approche de réfutation consiste à présenter un ou plusieurs contre-exemples dont le seul objectif est de démontrer la fausseté d'une proposition universelle. Cependant, cette approche ne fournit ni explications sur les raisons pour lesquelles la propo-

[5] La citation originale : « ... mathematicians recognize that a primary role of proof in mathematics is to establish the truth of a result; yet perhaps more important, particularly from an educational perspective, is their recognition of its role in fostering understanding of the underlying mathematics. »

sition est fausse, ni éléments permettant de construire d'autres contre-exemples. Son pouvoir explicatif est faible ;

2. **Réfutation par contre-exemple semi-général** : Cette approche de réfutation joue un double rôle. Elle utilise un ou plusieurs contre-exemples et fournit également quelques éléments explicatifs sur les raisons de la fausseté de la proposition. Toutefois, ces explications restent insuffisantes pour permettre la génération de contre-exemples similaires ou de classes entières de contre-exemples. Malgré tout, cette réfutation offre un pouvoir explicatif supérieur à celui de la réfutation par contre-exemple spécifique. Son pouvoir explicatif est moyen ;
3. **Réfutation par contre-exemple général** : Cette approche de réfutation non seulement réfute la proposition universelle, mais permet aussi de comprendre en profondeur pourquoi la proposition est fausse. Elle propose également une méthode pour générer, lorsque cela est mathématiquement possible, des classes entières de contre-exemples. Cette approche possède un pouvoir explicatif bien plus important que celui de la réfutation par contre-exemple semi-général, et à plus forte raison, que celui de la réfutation par contre-exemple spécifique. Son pouvoir explicatif est fort.

Une réfutation par contre-exemple général se distingue par sa capacité à enrichir la compréhension, ne se limitant pas à invalider une proposition, mais explorant aussi les raisons de cette invalidation et générant des classes de contre-exemples.

Balacheff (1987) remarque que le contre-exemple, souvent perçu comme une «catastrophe» en classe, est en fait le point de départ pour un travail mathématique plus approfondi, visant à comprendre les limites des hypothèses et à explorer de nouveaux théorèmes. Lakatos (1984) illustre cette idée en citant l'exemple de Seidel, qui a utilisé la série produite par Fourier pour montrer que la conjecture selon laquelle « la limite d'une série convergente de fonctions continues est une fonction continue » est fausse dans le cas de la convergence ordinaire de Cauchy. La série de Fourier a joué le rôle d'un contre-exemple crucial pour le théorème de Cauchy, ouvrant la voie à un travail mathématique approfondi aboutissant à la formulation de la notion de convergence uniforme (Hitt, 1998b).

Durand-Guerrier (2005) précise que le travail suivant la découverte de contre-exemples est souvent très instructif. Trois situations peuvent se présenter :

Situation 1 : La proposition est invalidée par un seul contre-exemple, un nombre limité de contre-exemples, une classe de contre-exemples, ou un petit nombre de classes de contre-exemples. Dans cette situation, pour rétablir la validité de la proposition (la transformer en théorème), deux approches sont envisagées : ajuster le domaine de validité en excluant le ou les contre-exemples pour délimiter un sous-domaine où la proposition reste vraie, ou bien modifier les hypothèses de la proposition.

Situation 2 : La proposition est confirmée par de nombreux exemples et simultanément réfutée par de nombreux contre-exemples. Si les exemples et les contre-exemples peuvent être catégorisés distinctement, cela conduit à la formulation de deux théorèmes distincts. Par exemple, la proposition « Quel que soit le réel x, (-x) est un réel négatif » est vérifiée pour tous les réels positifs mais fausse pour tous les réels négatifs. En classant les exemples et les contre-exemples dans des catégories distinctes, deux théorèmes peuvent être formulés : « Si x est un réel positif, alors (-x) est un réel négatif » (T_1) et « Si x est un réel négatif, alors (-x) est un réel positif » (T_2).

Situation 3 : La proposition est soutenue par des exemples mais contredite par des contre-exemples qui ne peuvent être regroupés en catégories distinctes. Dans ce cas, il est simplement conclu que la proposition universelle est fausse.

Les situations 1 et 2 présentent un intérêt didactique particulier car elles permettent d'engager un travail mathématique constructif et enrichissant autour des contre-exemples. Elles offrent la possibilité de générer des classes entières de contre-exemples, ce qui nécessite un effort mathématique créatif pour approfondir les concepts mathématiques. Par exemple, le processus qui conduit à formaliser le théorème (T_2) mentionné ci-dessus illustre un tel travail, impliquant une approche de recherche et de formulation d'une réfutation par contre-exemple général.

En revanche, la situation 3 ne permet pas de développer une réfutation par contre-exemple général ; seule une réfutation par contre-exemple spécifique ou semi-général est possible dans ce contexte

Dans cette recherche, nous avons examiné les types de réfutation que les enseignants tunisiens déclarent utiliser en classe de mathématiques lorsqu'ils constatent qu'un élève soutient la véracité d'une proposition universelle fausse. Nous avons utilisé les différents types de réfutation par contre-exemple définis précédemment comme cadre d'analyse pour interpréter leurs réponses. Le paragraphe suivant décrira en détail la méthodologie de notre expérimentation ainsi que l'analyse approfondie des résultats obtenus.

3. L'EXPÉRIMENTATION

Afin d'étudier la place et le rôle que les enseignants de mathématiques tunisiens en exercice accordent à la notion de contre-exemple, et pour identifier spécifiquement les types de réfutation par contre-exemple qu'ils utilisent en classe, nous avons invité vingt-neuf enseignants à participer à une étude. Ces enseignants, ayant entre sept et trente ans d'expérience, ont répondu à un questionnaire sur cette notion lors d'une journée de formation dirigée par un inspecteur de la discipline. La majorité d'entre eux (22) ont enseigné au collège (12-15 ans) et au lycée (15-19 ans). Tous possèdent au moins une licence en mathématiques, témoignant de leur spécialisation et de leur expérience.

Après avoir distribué le questionnaire, nous avons attiré l'attention des enseignants sur une note en tête du document. Celle-ci soulignait l'importance de répondre de manière à refléter fidèlement leurs pratiques de classe habituelles, axées sur l'apprentissage et l'approfondissement des connaissances mathématiques. Notre objectif était de comprendre comment les enseignants perçoivent les potentialités didactiques offertes par un travail sur le contre-exemple.

Les questions qui composent ce questionnaire sont ouvertes. Elles visaient à recueillir un maximum d'informations tout en laissant la liberté de réponse. Il est cependant important de noter que les résultats reflètent les pratiques déclarées, qui peuvent ne pas correspondre exactement aux pratiques effectives[6] (Bressoux et al., 1999). Pour identifier ces dernières, il faut mettre en place un processus d'observation en classe long et complexe. En posant des questions ouvertes et bien ciblées, sans dévoiler nos objectifs spécifiques, nous espérons accéder à la manière dont les enseignants exploitent le contre-exemple en classe de mathématiques.

[6] Le phénomène de « désirabilité sociale » pourrait expliquer la cause de l'écart possible, entre les pratiques enseignantes déclarées dans un questionnaire et la pratique effective de l'enseignant dans sa classe.

3. 1 Présentation et analyse a priori du questionnaire

Le questionnaire[7] se compose de deux parties :

Première partie du questionnaire

Cette partie concerne la première question, composée de deux sous-questions ouvertes.

Sous-question 1 : Rôle du contre-exemple dans l'activité mathématique scolaire

Nous avons demandé aux enseignants de préciser les rôles que pourrait jouer le contre-exemple dans l'activité mathématique scolaire. Cette question vise à déterminer si les enseignants tunisiens considèrent le travail sur les contre-exemples comme une opportunité pour approfondir la compréhension des mathématiques, notamment en ce qui concerne l'importance du domaine de validité et des hypothèses.

Le programme officiel de l'enseignement des mathématiques au collège (2011) ne met pas spécifiquement en avant le raisonnement par contre-exemple. Bien que les concepteurs insistent sur l'importance de favoriser les conflits cognitifs, ils n'indiquent pas clairement que les contre-exemples sont essentiels pour évaluer les conjectures. En revanche, le programme officiel de mathématiques du secondaire (2008) est plus explicite. Il encourage les élèves à émettre des conjectures, produire des contre-exemples pour montrer la fausseté d'une assertion, vérifier des résultats, et distinguer entre une conjecture et un résultat démontré.

Cependant, ce programme présente le contre-exemple principalement comme un argument pour démontrer la fausseté d'une assertion universelle, ce qui correspond à une réfutation par contre-exemple spécifique ou semi-général. Son rôle pour comprendre les notions mathématiques et l'importance des hypothèses, ainsi que sa contribution à la production de connaissances mathématiques, n'est pas explicitement souligné. Ainsi, le contre-exemple est perçu principalement comme un outil de réfutation.

[7] Afin de minimiser les risques que les questions du questionnaire ne soient mal comprises par les enseignants, nous avons sollicité l'aide de deux enseignants de mathématiques, qui n'appartiennent pas à notre échantillon, pour nous aider dans l'élaboration et la formulation des questions.

Sous-question 2 : Importance des contre-exemples dans la classe de mathématiques

Nous avons demandé aux enseignants de préciser l'importance qu'ils accordent aux contre-exemples dans leurs cours. Dans les programmes officiels de mathématiques, le contre-exemple n'est explicitement mentionné qu'une seule fois, à l'introduction du programme du secondaire (2008). Cette brève mention reflète la place limitée que les concepteurs du programme accordent à cette notion. Cette situation semble être commune à d'autres pays. Hitt (1998a) et Klymchuk (2012) soulignent la rareté des situations didactiques intégrant des questions sur la production de contre-exemples dans les classes de mathématiques. Nos discussions informelles avec des enseignants tunisiens, qui n'ont pas participé à notre présente étude, confirment cette observation. Bien que ces enseignants reconnaissent l'importance du contre-exemple dans la pratique mathématique, son utilisation dans l'enseignement reste limitée.

Deuxième partie du questionnaire

Cette section du questionnaire comprend deux questions distinctes (n°2 et n°3). Chaque question présente une proposition mathématique universelle fausse, énoncée par un élève imaginaire. Les enseignants sont invités à expliquer comment ils exploitent et corrigent cette erreur en classe, en se situant dans une logique d'apprentissage et d'approfondissement des connaissances mathématiques. Nous avons délibérément évité de leur rappeler à nouveau que leurs réponses devaient s'inscrire dans cette logique afin de ne pas les influencer et de recueillir des réponses spontanées qui reflètent au mieux leurs pratiques de classe.

Présentation et analyse de la question n°2

Voici la question telle qu'elle a été proposée aux enseignants :

> Un de vos élèves affirme que « Le carré de tout nombre réel est supérieur ou égal à ce nombre ».
> Comment exploitez-vous cette erreur dans votre classe ?

Dans cette question, la proposition mathématique est exprimée en langue naturelle, niveau collège, où l'écriture symbolique algébrique est encore naissante. Nous avons formulé cette proposition en français pour des enseignants maîtrisant cette langue.[8] Elle peut être paraphrasée symboliquement ainsi : « $\forall x \in IR, x^2 \geq x$ ». Cette proposition est incorrecte car, par exemple, le nombre réel 0,5 constitue un contre-exemple. La fonction propositionnelle « $x^2 \geq x$ » devient vraie si l'on restreint le domaine à IN, les entiers naturels, ce qui explique l'origine de l'erreur de l'élève, pour qui les entiers naturels sont la référence (Hersant, 2013).

La proposition contient des exemples et des contre-exemples, faciles à identifier et à caractériser. On peut construire deux propositions vraies à partir de la proposition fausse : « $\forall x \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[, x^2 \geq x$ » (1) et « $\forall x \in]0,1[, x^2 < x$ » (2). Selon Durand-Guerrier (2005), cela correspond à la situation 2, où une proposition fausse permet de produire deux théorèmes si l'on peut catégoriser les exemples et les contre-exemples. Les propositions (1) et (2) restent des conjectures jusqu'à ce qu'elles soient prouvées.

Nous considérons que présenter des contre-exemples, expliquer pourquoi ils contredisent la proposition et montrer comment construire les théorèmes (1) et (2) à partir de l'affirmation fausse de l'élève inscrit le travail de l'enseignant dans une approche de réfutation par contre-exemple général. Se limiter à une réfutation par contre-exemple spécifique (indiquer un ou plusieurs contre-exemples dans l'intervalle]0,1[sans explication) ou semi-général (indiquer des contre-exemples dans]0,1[avec explications partielles) appauvrit la situation et ne permet pas à l'élève de réorganiser et d'enrichir ses connaissances mathématiques.

Présentation et analyse de la question n°3

Voici la question n°3 telle qu'elle a été présentée aux enseignants :

Dans une discussion en classe, l'un de vos élèves affirme que « puisque f est continue en a, alors f est dérivable en a ». Comment exploitez-vous cette erreur dans votre classe ?

Le contenu mathématique de cette question se situe dans le domaine de l'analyse réelle, reliant la continuité et la dérivabilité en un point. Elle concerne la

[8] En Tunisie, le français a le statut d'une langue étrangère privilégiée. Il est enseigné en tant que langue dès la 3ème année du 1er cycle de l'enseignement de base, environ vers l'âge de 8 ans. En revanche, les mathématiques ne sont enseignées en français qu'à partir de la 1ère année du lycée, environ vers l'âge de 16 ans.

réciproque du théorème « si f est dérivable en a, alors f est continue en a ». La confusion entre une proposition et sa réciproque est fréquente en classe de mathématiques (Durand-Guerrier, 2005; Grenier, 2015; Tanguay et Mathieu-Sousy, 2015). Pour montrer que la réciproque est fausse, on peut utiliser une représentation graphique comme celle-ci :

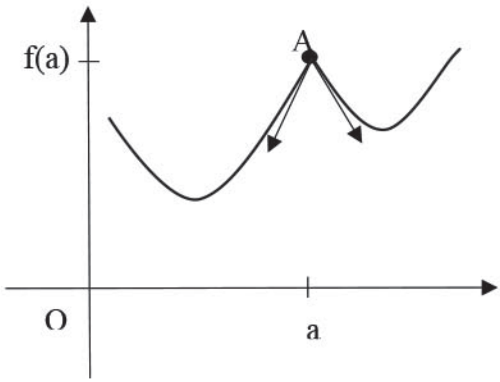


Figure 1. Graphique d'une fonction f continue avec un point anguleux indiquant une non dérivabilité en a.

La fonction f est bien continue en a, mais elle n'est pas dérivable en ce point car sa représentation graphique n'admet pas de tangente, mais plutôt deux demi-tangentes. Cela signifie que la dérivée à droite de f en a est différente de la dérivée à gauche en a $(f_d{}'(a)\neq f_g{}'(a))$. On dit alors que la courbe représentative de f admet en A un point anguleux. Les fonctions continues ayant des dérivées à droite et à gauche différentes en certains points constituent une classe de contre-exemples. Cependant, il existe aussi des fonctions continues sans points anguleux qui ne sont pas dérivables en certains points. Par exemple, la fonction f définie par $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en est bien un exemple. Elle n'est pas dérivable en 0 :

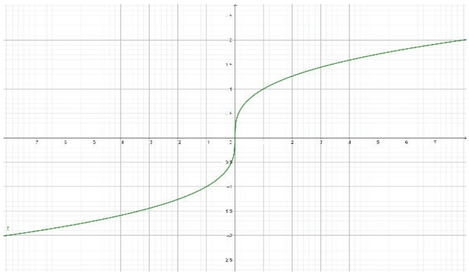


Figure 2. Représentation graphique de la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

En 0, la représentation graphique de cette fonction admet une tangente verticale. Le taux de variation de f entre 0 et h n'est pas un nombre fini lorsque h tend vers 0 : $\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \infty$. Ainsi, f est une fonction continue sur IR (et donc en 0), mais n'est pas dérivable en 0. Les fonctions continues qui admettent en certains points un nombre dérivé infini constituent une autre classe de contre-exemples.

Un autre type de contre-exemple concerne les fonctions continues en un point a, mais dont la limite lorsque h tend vers 0 de leur taux de variation entre a et a+h n'existe pas. Par exemple, la fonction $f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$ est continue en 0, mais n'est pas dérivable en 0. En effet, $\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h\sin(\frac{1}{h})}{h} = \lim_{h \to 0} \sin\left(\frac{1}{h}\right)$ n'existe pas du fait des oscillations de la fonction f autour de 0. Sa courbe représentative ne possède donc pas de tangente fixe en 0. Voici la représentation graphique de cette fonction :

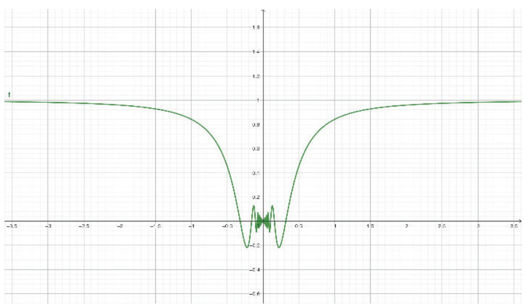


Figure 3. Représentation graphique de la fonction $f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$.

Hitt (2007), dans une expérimentation menée avec des étudiants mexicains de première année de maîtrise en didactique des mathématiques, a mis en évidence leurs difficultés à appréhender la notion de dérivabilité pour ce type de fonctions au point critique 0. Il souligne que ces difficultés révèlent la complexité liée à la construction du concept de dérivabilité et insiste sur l'importance de mettre en place des méthodes d'enseignement favorisant une réflexion approfondie et une articulation des différentes représentations mathématiques.

Les différentes classes de contre-exemples évoquées précédemment illustrent la situation 1 décrite plus haut.

Graphiquement, on peut reconnaître des classes entières de fonctions continues en un point et non dérivables en ce point. Les fonctions appartenant à ces classes représentent des contre-exemples caractérisables de la proposition fausse affirmée par l'élève. Caractériser ces classes de contre-exemples inscrit le travail didactico-mathématique dans une approche de réfutation par contre-exemple général.

Travailler en classe sur la proposition fausse affirmée par l'élève est très formateur. Cela permet aux élèves de reconsidérer et de mieux comprendre les interrelations et les différences entre la continuité et la dérivabilité d'une fonction en un point. Diversifier les types de contre-exemples offre aux élèves l'occasion de comprendre pourquoi une fonction continue en un point peut ne pas être dérivable en ce point. Se limiter à un seul type de contre-exemple, comme une fonction avec des points anguleux, risque de restreindre leur compréhension. Cela pourrait les empêcher de réaliser qu'une fonction continue et dont le graphique est lisse peut aussi ne pas être dérivable en un point, ou qu'une fonction continue avec des oscillations autour d'un point n'est pas dérivable en ce point.

Proposer uniquement une réfutation par contre-exemple spécifique sans discussions approfondies et sans diversifier et classer les types de contre-exemples prive l'élève d'une bonne occasion de mieux conceptualiser les notions de continuité, de dérivabilité et de leur lien. Il est essentiel de souligner que le travail mathématique et les discussions engendrées en classe par les affirmations fausses des élèves devrait sensibiliser ces derniers à la distinction entre une implication et sa réciproque. Cette démarche devrait les inciter à accorder une plus grande attention aux implications en mathématiques et à reconnaître que la validité d'une implication ne garantit pas automatiquement celle de sa réciproque. Le travail sur les contre-exemples sensibilise l'élève à l'importance de vérifier que les hypothèses et le domaine de validité d'un théorème sont respectés afin d'assurer la validité de la conclusion.

Dans le paragraphe suivant, nous exposons les analyses et les résultats découlant des réponses des enseignants ayant pris part à notre expérimentation.

3. 2 Analyses et résultats des réponses des enseignants

Comme mentionné précédemment, le questionnaire se compose de deux parties. Nous présentons ci-dessous les analyses et résultats des réponses fournies par les vingt-neuf enseignants interrogés concernant la première partie du questionnaire. Un deuxième paragraphe est ensuite consacré à la deuxième partie du questionnaire.

Première partie du questionnaire
Première sous-question

Concernant le rôle du contre-exemple dans l'activité mathématique, vingt enseignants ont affirmé qu'il sert à réfuter une assertion fausse[9]. Trois autres enseignants ont ajouté que le contre-exemple permet aussi de préciser les « conditions nécessaires »[10] pour qu'une proposition soit vraie, suggérant ainsi un rôle plus étendu. Bien que leur réponse manque de détails, il semble qu'ils se réfèrent au champ de validité et aux hypothèses de la proposition.

Certaines réponses étaient difficiles à interpréter de manière univoque. Par exemple, des expressions telles que « joue un rôle d'assimilation des notions délicates », « joue le rôle d'éclaircissement d'une notion mathématique », « joue le rôle de démonstration », « permet de convaincre qu'un résultat n'a pas de démonstration », ou « permet d'être vigilant » (réponses fournies par cinq enseignants) ne fournissent pas suffisamment d'informations claires et précises.

Il convient également de noter qu'un des enseignants interrogés n'a pas répondu à cette question.

En résumé, parmi les vingt-neuf enseignants interrogés, vingt restreignent le rôle du contre-exemple à la simple réfutation d'une proposition universelle fausse. Trois enseignants semblent souligner que le contre-exemple aide à comprendre la nécessité des hypothèses et le champ de validité des propositions.

---

[9] Ils ont proposé des formulations du type : « réfuter une assertion fausse », « infirmer une réponse fausse », « prouver qu'une proposition est fausse ».

[10] Cette expression a été utilisée par les trois enseignants.

Cela montre que la majorité des enseignants réduisent le rôle du contre-exemple à la réfutation, tandis que trois enseignants abordent son rôle didactique et conceptuel. Cette perspective majoritaire semble alignée avec les recommandations des concepteurs du programme officiel de 2008.

Deuxième sous-question

Concernant l'importance des contre-exemples dans leurs pratiques, dix-neuf enseignants soulignent qu'ils occupent soit « suffisamment de place » (10), soit « une place importante » (9). Un seul enseignant parmi eux a précisé que l'importance est donnée parce que « avant de faire une démonstration, on commence par chercher des exemples et des contre-exemples ». Cette approche est en accord avec Barrier (2016), qui souligne l'importance du travail sur les exemples et contre-exemples pour comprendre les concepts mathématiques.

Dix enseignants indiquent que les contre-exemples occupent « peu de place » dans leurs enseignements. Les raisons avancées sont :

- Le manuel scolaire contient peu de situations de contre-exemples (7) ;
- faute de temps (2) ;
- « le contre-exemple n'est pas très utile puisque nous cherchons à montrer que quelque chose est vraie » (1).

Ce dernier argument souligne la prédominance de la démonstration déductive dans l'enseignement des mathématiques, où axiomes, définitions et théorèmes sont utilisés pour prouver la validité d'une proposition par des raisonnements logiques (Hitt, 1998a).

Les résultats révèlent que la majorité des enseignants (les deux tiers) considèrent le contre-exemple comme important dans leurs enseignements, contrastant avec les conclusions de Hitt (1998a) sur les enseignants mexicains qui ont participé à son étude. Le phénomène de « désirabilité sociale », étudié par Fisher (1993), pourrait expliquer ce contraste. Les enseignants peuvent déclarer accorder une place importante aux contre-exemples pour éviter un jugement négatif et gagner en appréciation, bien que cela ne soit pas nécessairement vrai (Bressoux et al., 1999). Il est donc nécessaire d'adopter une attitude prudente face à ce résultat.

Dans le paragraphe suivant, nous présentons les analyses et résultats relatifs à la deuxième partie du questionnaire. Cette section explore comment certains enseignants de mathématiques tunisiens déclarent exploiter et corriger, en classe, une assertion mathématique universelle fausse formulée par un élève imaginaire.

Analyses et résultats des réponses relatives à la deuxième partie du questionnaire

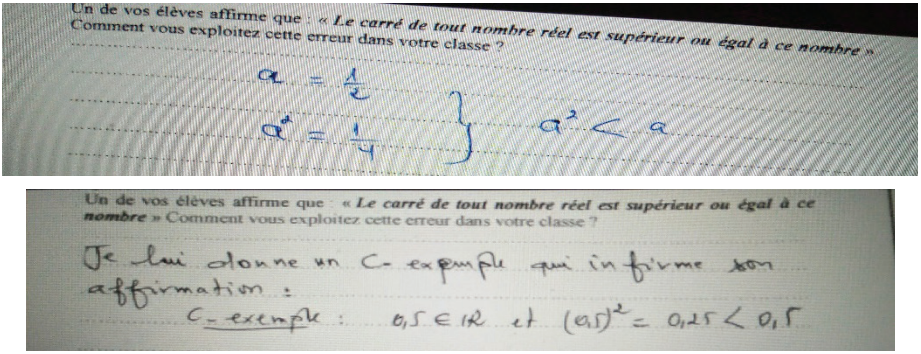
Cette section du questionnaire, composée des questions n°2 et n°3, vise à identifier les types de réfutation par contre-exemple que les enseignants tunisiens interrogés déclarent employer en classe pour aider leurs élèves à surmonter leurs erreurs. Les enseignants ont été invités à inscrire leurs réponses dans le cadre de leurs pratiques pédagogiques habituelles, axées sur l'apprentissage et l'approfondissement des connaissances mathématiques.

Analyses des réponses relatives à la question n°2

Dans la question n°2, nous avons demandé aux enseignants de proposer une explication pédagogique pour exploiter en classe de mathématiques une erreur commise par un élève affirmant que « Le carré de tout nombre réel est supérieur ou égal à ce nombre ».

Bien que le questionnaire porte sur la notion de contre-exemple, seulement dix-sept enseignants sur vingt-neuf ont explicitement mentionné le terme « contre-exemple » dans leurs réponses. Parmi eux, quinze n'ont pas expliqué ce qu'est un contre-exemple. Ils semblent considérer cette notion comme évidente pour les apprenants, ce qui n'est souvent pas le cas (Durand-Guerrier, 2005 ; Klymchuk, 2012). Cette omission peut rendre leurs explications moins accessibles, privant ainsi les élèves d'une compréhension approfondie de la manière dont les contre-exemples servent à réfuter des propositions mathématiques.

Vingt-trois enseignants ont proposé un unique nombre réel appartenant à l'intervalle]0,1[pour réfuter l'affirmation générale sans spécifier clairement le rôle de ce nombre. Leurs justifications, brèves et peu explicatives, ne fournissaient pas suffisamment d'informations pour convaincre un élève en difficulté et ne clarifiaient pas la conclusion, la laissant à la charge de l'élève. En raison de ces insuffisances, nous avons classé les réfutations proposées par ces vingt-trois enseignants parmi les réfutations par contre-exemple spécifique. Voici deux exemples de réponses qui illustrent fidèlement la majorité des réponses fournies par ces enseignants :



Un de vos élèves affirme que : « *Le carré de tout nombre réel est supérieur ou égal à ce nombre* » Comment vous exploitez cette erreur dans votre classe ?

$a = \frac{1}{2}$

$a^2 = \frac{1}{4}$ $\Big\}$ $a^2 < a$

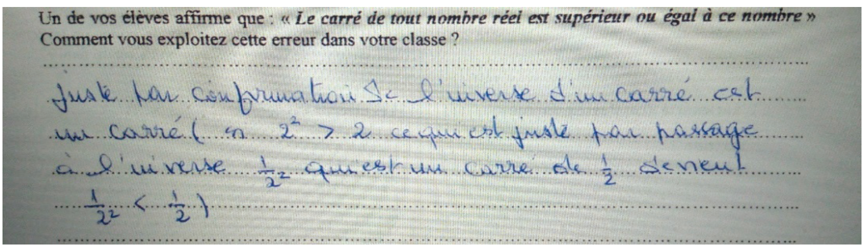
Un de vos élèves affirme que : « *Le carré de tout nombre réel est supérieur ou égal à ce nombre* » Comment vous exploitez cette erreur dans votre classe ?

Je lui donne un C-exemple qui infirme son affirmation :

C-exemple : $0{,}5 \in \mathbb{R}$ et $(0{,}5)^2 = 0{,}25 < 0{,}5$

Figure 4. Deux exemples de réfutation par contre-exemple spécifique.

Quatre enseignants ont proposé un contre-exemple unique avec une stratégie. L'un d'eux l'a bien exposée : « Prendre un réel- effectuer son carré- les comparer- puis comparer les inverses ». Ces enseignants semblent utiliser de manière implicite la propriété (P) suivante : Pour tout couple de réels (a, b) positifs[11] non nuls, si $a < b$ alors $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ [12]. Trois enseignants parmi les quatre ont choisi le même nombre à savoir $a = 2^2$ et par conséquent le $b = 2$. Ainsi, comme $2^2 > 2$ alors $\frac{1}{2^2} < \frac{1}{2}$, ce qui conduit à dire que $(\frac{1}{2})^2 < \frac{1}{2}$. Nous pensons que cette stratégie n'est pas didactiquement pertinente par rapport à l'objectif recherché. Comparer $(\frac{1}{2})^2$ et $\frac{1}{2}$ pourrait se faire aisément de manière directe. Cette stratégie, bien que correcte, est complexe et peu didactiquement pertinente. Voici un exemple de réponse :



Un de vos élèves affirme que : « *Le carré de tout nombre réel est supérieur ou égal à ce nombre* »
Comment vous exploitez cette erreur dans votre classe ?

Juste par confirmation si l'inverse d'un carré est un carré (ex $2^2 > 2$ ce qui est juste par passage à l'inverse $\frac{1}{2^2}$ qui est un carré de $\frac{1}{2}$ devient $\frac{1}{2^2} < \frac{1}{2}$)

Figure 5. Un exemple de réfutation par contre-exemple semi-général que nous qualifions de non pertinente.

[11] Les réels sont strictement positifs car le réel choisi par les enseignants est positif.

[12] Cette propriété est en fait une équivalence.

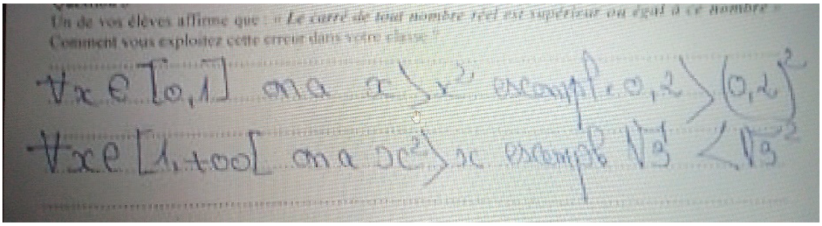
Sans nous attarder sur la réfutation mentionnée ci-dessus, voici trois observations essentielles pour en comprendre pleinement le sens :

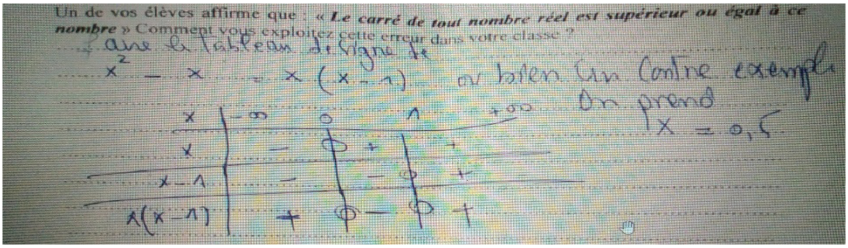
- À travers la phrase incomplète « Juste par confirmation de l'inverse d'un carré est un carré », l'enseignant semble vouloir dire qu'il se base uniquement sur la propriété mathématique selon laquelle l'inverse d'un carré est également un carré : $\frac{1}{a^2} = (\frac{1}{a})^2$.
- Pour conclure son raisonnement, l'enseignant aurait dû explicitement utiliser la propriété (P) mentionnée ci-dessus, qui est cruciale pour sa démarche argumentative. Cependant, il omet de la mentionner, ce qui affaiblit sa justification.
- Dans la phrase entre parenthèses, l'enseignant a utilisé implicitement les valeurs $a=2^2$ et $b=2$ comme instances des variables dans la prémisse de l'implication universellement quantifiée (P). Sans faire explicitement référence à cette implication et en appliquant implicitement la règle du modus ponens (« Si A et si (A ⇒ B), alors B »), il a conclu que $\frac{1}{2^2} < \frac{1}{2}$. Bien que cette instance soit correcte et conduise à une implication vraie, l'enseignant aurait pu formuler son argument de manière plus claire en évitant de dire « si $2^2 > 2$, ce qui est juste », préférant plutôt « comme $2^2 > 2$ ».

Dans l'ensemble, cette réponse met en lumière des lacunes tant sur le plan linguistique que logique dans l'argumentation de l'enseignant. Elle illustre également comment une situation didactique peut être rendue plus complexe que nécessaire. Il est important de noter que lors de la préparation de cette question nous n'avons pas anticipé la stratégie adoptée par ces quatre enseignants.

Malgré la complexité didactique et mathématique de ces quatre réponses, elles peuvent être catégorisées comme relevant d'une réfutation par contre-exemple semi-général. En effet, bien qu'elles contiennent des éléments de justification, celles-ci sont complexes, peu pertinentes et peu explicites par rapport à la situation proposée.

Deux enseignants ont tenté une réfutation plus générale. Voici leur réponse :





x	−∞		0		1		+∞
x		−	0	+		+	
x − 1		−		−	0	+	
x(x − 1)		+	0	−	0	+	

Figure 6. Les deux réfutations par contre-exemple général.

Concernant la première, l'enseignant écrit que tout nombre réel, compris entre 0 et 1, est strictement plus grand que son carré − ce qui est faux d'ailleurs − et ajoute l'exemple de 0,2. Nous estimons que cette réponse soulève un questionnement par rapport au rôle de cet exemple. Un élève pourrait penser que 0,2 est un nombre qui vérifie la proposition qui le précède, sans réaliser qu'il constitue en fait un contre-exemple à la proposition énoncée. Un élève qui lirait ces explications risquerait de ne pas comprendre clairement que l'énoncé est faux. Ensuite, l'enseignant utilise une stratégie similaire en affirmant que tout nombre réel supérieur ou égal à 1 est strictement plus petit que son carré, et ajoute l'exemple de $\sqrt{3}$. Bien que cette affirmation soit également incorrecte, l'enseignant propose ici une classe entière d'exemples, illustrant la proposition pour les réels supérieurs ou égaux à 1. Dans ce cas, $\sqrt{3}$ est un réel qui réconforte aussi bien la proposition qui le précède que l'énoncé faux en jeu dans la question. Il faut noter que dans sa réponse l'enseignant a considéré l'affirmation fausse de l'élève uniquement sous le domaine de validité des nombres réels positifs.

Dans la deuxième réponse, l'enseignant utilise un tableau de signes pour identifier, implicitement, des classes d'exemples et de contre-exemples. Cependant, les résultats à retenir ne sont pas clairement établis. Bien que cette réponse puisse être considérée comme une réfutation par contre-exemple général, elle nécessite davantage d'explications pour être véritablement explicative et enrichissante en termes de connaissances mathématiques. Les élèves en difficulté pourraient ne pas saisir clairement que la proposition en question est fausse. Cependant, avec les explications de l'enseignant, cette réponse pourrait les inciter à réévaluer la proposition et à formuler deux théorèmes utiles sur le plan mathématique et didactique.

L'accompagnement oral des réponses écrites de ces deux enseignants pourrait compenser les lacunes observées, en aidant les élèves à comprendre pourquoi l'affirmation de l'élève est fausse et comment, en explorant le domaine de validité, cette affirmation pourrait conduire à la formulation de nouveaux théorèmes. Ainsi, ces deux réponses peuvent être classées parmi les réfutations par contre-exemple général, malgré les manquements observés.

Le tableau suivant récapitule les résultats des analyses des réponses des vingt-neuf enseignants à la question n°2 :

Tableau 1. Nombre de réponses proposées, pour la question n°2, selon le type de réfutation

La proposition fausse	Type de réfutations	Nombre de réponses
« Le carré de tout nombre réel est supérieur ou égal à ce nombre »	Réfutation par contre-exemple spécifique	23
	Réfutation par contre-exemple semi-général	4
	Réfutation par contre-exemple général	2

Ce tableau montre que la majorité des enseignants ont choisi une réfutation par contre-exemple spécifique. Bien que cela démontre la fausseté de la proposition, cette approche ne suffit pas à approfondir la compréhension des concepts mathématiques ni à enrichir les connaissances des élèves. Une réfutation par contre-exemple général permettrait non seulement de démontrer la fausseté de la proposition, mais aussi de formuler de nouveaux théorèmes utiles, enrichissant ainsi les connaissances mathématiques des élèves.

Analyses des réponses relatives à la question n°3

Dans la question n°3, nous avons demandé aux enseignants de proposer une explication pédagogique pour exploiter en classe de mathématiques une erreur commise par un élève affirmant que « puisque f est continue en a, alors f est dérivable en a ». Bien que le questionnaire porte sur la notion de contre-exemple, seulement huit des vingt-neuf enseignants ont employé le terme « contre-exemple » dans leurs réponses. Parmi les vingt-et-un autres, dix ont utilisé le terme « exemple » à la place de « contre-exemple », révélant une confusion ou une simplification inappropriée de la terminologie. Cette observation met en lumière une lacune dans la précision du vocabulaire utilisé par certains enseignants, ce qui pourrait nuire à la clarté des explications données aux élèves et à leur compréhension de la notion de contre-exemple dans l'apprentissage des mathématiques.

Les analyses des réponses des enseignants ont révélé, également, que dix-huit des vingt-neuf enseignants ont proposé une unique fonction continue en 0 sans être dérivable en 0. Bien que cette fonction représente un contre-exemple à l'affirmation de l'élève, les enseignants n'ont pas enrichi leur réponse par des explications explicites montrant pourquoi la fonction choisie est continue en 0, non dérivable en ce point, et pourquoi elle représente un contre-exemple.

Ces réponses, accompagnées d'un discours oral explicatif probable, peuvent convaincre les élèves de la fausseté de l'affirmation. Cependant, elles ne contribuent pas suffisamment à la compréhension des phénomènes mathématiques en jeu et à la conceptualisation de la dérivabilité en un point. La manière dont les enseignants ont exploité le contre-exemple ne permet pas aux élèves d'enrichir leurs connaissances au point de générer des classes entières de contre-exemples, ce qui aurait pu mener à une meilleure compréhension des notions de continuité et de dérivabilité.

Les analyses de ces dix-huit réponses montrent qu'elles peuvent être classées dans le cadre d'une réfutation par contre-exemple spécifique. Voici les types de réponses proposées[13] :

- Dix enseignants ont proposé la fonction $f(x)=|x|$ comme contre-exemple :
    - Six ont proposé uniquement l'expression algébrique ;
    - Deux ont proposé uniquement le graphique ;
    - Deux ont proposé à la fois l'expression algébrique et le graphique.

[13] Nous ne présentons pas, ici, des échantillons de réponses d'enseignants, d'une part pour ne pas alourdir le texte de l'article et d'autre part parce que la présentation de leur réponse n'est pas plus informative.

- Quatre enseignants ont proposé la fonction $f(x)=\sqrt{x}$:
  - Deux ont proposé uniquement l'expression algébrique ;
  - Deux ont proposé uniquement le graphique.

- Quatre enseignants n'ont pas explicitement précisé la fonction sur laquelle ils s'appuieront, restant à un niveau général. Voici un exemple de réponse :

  « Juste par une lecture graphique (d'une fonction continue en 0 mais qui présente un point anguleux) peut-être convaincante pour que l'élève ne commettra plus cette erreur. »

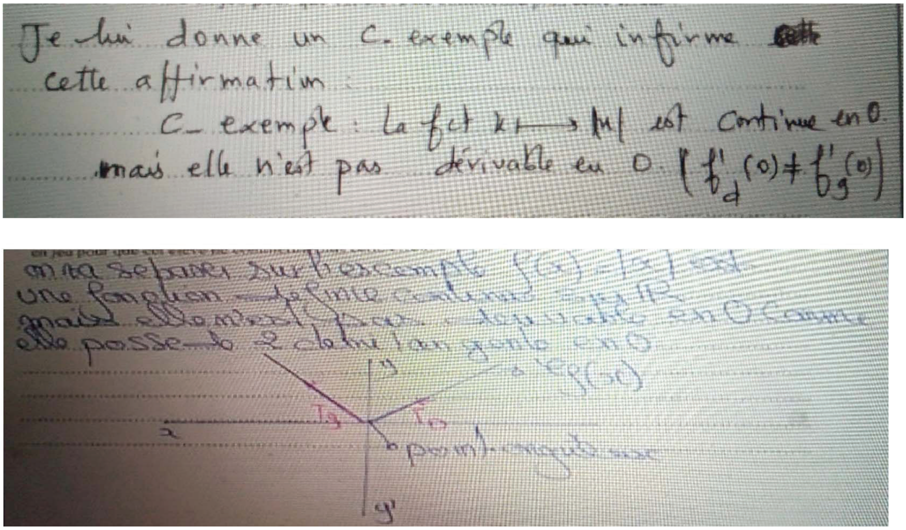
Ces réponses révèlent une approche limitée de l'utilisation des contre-exemples dans l'enseignement des mathématiques, souvent sans fournir les explications nécessaires pour une compréhension approfondie des notions de continuité et de dérivabilité.

Parmi les onze autres réponses, dix enseignants ont proposé une fonction unique, continue mais non dérivable en 0, avec quelques explications. Ces explications permettent de comprendre, dans une certaine mesure, pourquoi la fonction choisie constitue un contre-exemple. Toutefois, elles peuvent ne pas être suffisantes pour expliquer en détail aux élèves pourquoi la fonction est un contre-exemple. Nous supposons que l'enseignant pourra combler ces lacunes par un discours oral.

Cependant, dans ces dix réponses, les enseignants n'ont pas essayé de couvrir plusieurs classes de contre-exemples ni d'expliquer les conditions générales pour qu'une fonction continue en un point ne soit pas dérivable en ce point. Ces réponses peuvent être classées comme des réfutations par contre-exemple semi-général. En effet, les enseignants n'ont pas seulement fourni un seul contre-exemple, mais ont aussi justifié, bien que parfois de manière insuffisamment explicite, pourquoi ce contre-exemple contredit l'affirmation.

Voici les types de réponses proposées par ces dix enseignants, avec quelques exemples :

- Six enseignants ont utilisé la fonction $f(x)=|x|$ comme contre-exemple, accompagnée de quelques explications. Parmi eux, deux ont aussi fourni le graphique de la fonction. Voici deux exemples :

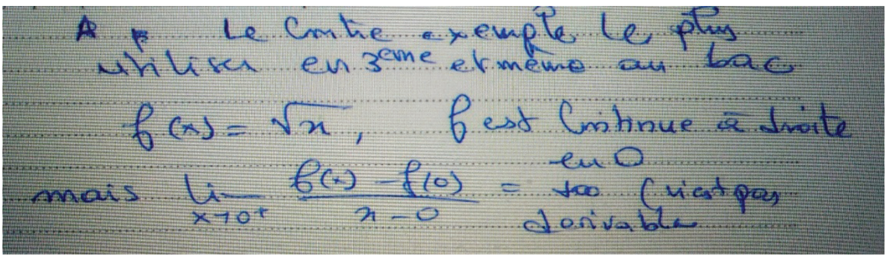


Je lui donne un C. exemple qui infirme cette affirmation :
C_ exemple : La fct $x \longmapsto |x|$ est continue en 0 mais elle n'est pas dérivable en 0. ($f'_d(0) \neq f'_g(0)$)

on va se baser sur l'exemple $f(x) = |x|$ est une fonction définie continue sur $\mathbb{R}$ mais elle n'est pas dérivable en 0 comme elle possède 2 demi tangentes en 0

Figure 7. Exemples de réfutation par contre-exemple semi-général s'appuyant sur la fonction f définie par $f(x)=|x|$.

- Deux enseignants ont utilisé la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$ comme contre-exemple, accompagnée de quelques explications, sans le graphique de la fonction :



A Le contre exemple le plus utilisé en 3ème et même au bac
$f(x) = \sqrt{x}$, f est continue à droite en 0
mais $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$ (n'est pas dérivable

Figure 8. Exemple de réfutation par contre-exemple semi-général s'appuyant sur la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x}$.

- Deux enseignants n'ont pas précisé la fonction utilisée, mais ont donné des explications générales accompagnée par des éléments explicatifs qui ne sont pas assez explicites. Voici un exemple :

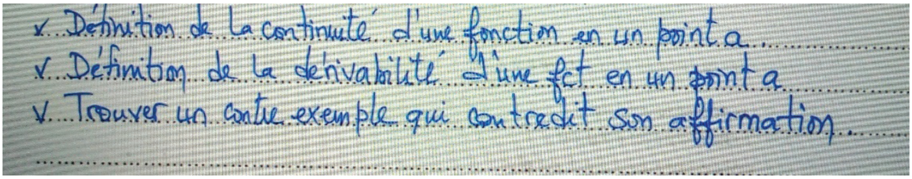


Figure 9. Exemple de réfutation par contre-exemple semi-général sans fonction spécifique.

Dans cette réponse, l'enseignant n'a pas explicité comment il appliquerait les concepts de la continuité et de la dérivabilité spécifiquement en relation avec le contre-exemple utilisé pour invalider l'affirmation de l'élève. Bien qu'il semble viser à aider les élèves à comprendre l'erreur et qu'il esquisse un plan pour sa classe, sa réponse demeure trop générale. Il aurait été préférable qu'il détaille davantage son approche en expliquant concrètement comment il utiliserait ce contre-exemple spécifique pour clarifier aux élèves pourquoi l'affirmation est fausse.

Il convient de noter qu'un autre enseignant a fourni la réponse suivante : « ~~contre-exemple~~[14] Définition de la dérivabilité, Dérivabilité à droite et dérivabilité à gauche ». À notre avis, cette réponse est si vague et imprécise qu'il nous a été difficile de la considérer comme une réfutation.

Dans le tableau ci-dessous, nous récapitulons les résultats des analyses des réponses des 28 enseignants[15] qui ont répondu à la question n°3 :

Tableau 2. Nombre de réponses proposées, pour la question n°3, selon le type de réfutation

La proposition fausse	Type de réfutations	Nombre de réponses
« puisque f est continue en a, alors f est dérivable en a »	Réfutation par contre-exemple spécifique	18
	Réfutation par contre-exemple semi-général	10
	Réfutation par contre-exemple général	0

[14] L'enseignant a rayé le terme "contre-exemple" après l'avoir écrit lui-même.

[15] Nous avons retenu les réponses de 28 enseignants et non pas de 29 car nous avons éliminé une réponse que nous n'avons pas pu la classer selon la catégorisation adoptée.

L'analyse des réponses des enseignants à la question n°3 montre qu'ils ont mobilisé des réfutations par contre-exemple spécifique et des réfutations par contre-exemple semi-général, qui ont un pouvoir explicatif limité à modéré. Aucun enseignant n'a proposé de contre-exemple général, qui aurait permis une explication plus approfondie.

L'affirmation erronée de l'élève, « puisque f est continue en a, alors f est dérivable en a », aurait pu être exploitée pour mettre en place une réfutation par contre-exemple général. Cette approche ne vise pas seulement à traiter la question du vrai et du faux, mais aussi à créer des classes entières de contre-exemples de fonctions continues en un point mais non dérivables en ce point, conduisant à une compréhension avancée des notions de continuité et de dérivabilité.

Les réponses des enseignants interrogés montrent une tendance à se concentrer sur la simple véracité de l'affirmation, bien que certains aient fourni quelques explications avec les contre-exemples choisis. Cette préoccupation excessive pour la véracité de l'affirmation a probablement limité leur perception de l'opportunité d'approfondir les concepts de continuité et de dérivabilité à travers un travail didactique plus substantiel. Cette tendance reflète les recommandations du programme officiel de mathématiques du secondaire de 2008, qui accordent peu d'importance au rôle crucial des contre-exemples dans la compréhension des domaines de validité et des hypothèses des énoncés mathématiques.

CONCLUSION

Les contre-exemples jouent un rôle important à la fois dans le domaine des mathématiques et dans leur enseignement et apprentissage. Leur utilité dépasse la simple réfutation d'affirmations universelles erronées. En structurant un travail mathématique précis, les contre-exemples peuvent enrichir la compréhension des conditions de validité des propositions, approfondir les notions mathématiques en jeu, et favoriser le développement du raisonnement critique chez les apprenants (Lakatos, 1984; BenBachir et Zaki, 2001a, 2001b; Durand-Guerrier, 2005; Klymchuk, 2012).

Dans cette étude basée sur un questionnaire, nous avons exploré les pratiques déclarées de vingt-neuf enseignants de mathématiques tunisiens en activité, en ce qui concerne leur approche pour réfuter des propositions mathématiques erronées avancées par des élèves, tout en visant à approfondir leurs connaissances mathématiques. Nos analyses révèlent que la majorité des enseignants considère le contre-exemple principalement comme un outil pour démontrer la fausseté des affirmations universelles, reflétant ainsi une conception réductrice de son rôle potentiel en mathématiques. Bien que les deux tiers des enseignants interrogés affirment accorder de l'importance aux contre-exemples dans leur enseignement, contrairement aux conclusions précédentes de Hitt (1998a) et Klymchuk (2012), le fait qu'ils n'expliquent pas les raisons sous-jacentes à cette importance suggère un manque de conscience quant aux potentialités didactiques et mathématiques des contre-exemples.

Concernant la réfutation des propositions mathématiques erronées, la majorité des enseignants privilégient les réfutations par contre-exemple spécifique ou semi-général, alignés avec leur conception dominante du rôle des contre-exemples. Bien que ces approches soient efficaces pour démontrer la fausseté des affirmations, elles n'encouragent pas une exploration approfondie des spécificités des propositions erronées ni une réévaluation des domaines de validité et des hypothèses sous-jacentes. En revanche, les réfutations par contre-exemple général, reconnues pour leur capacité explicative substantielle, sont peu courantes dans les pratiques déclarées des enseignants interrogés. Plusieurs recherches antérieures (Selden et Selden, 1998; Knuth, 2002; Klymchuk, 2012; Zeybek, 2017; Creager, 2022) ont également mis en lumière la rareté des réfutations par contre-exemple général parmi les apprenants et futurs enseignants. Ce constat, applicable également aux enseignants expérimentés interrogés, soulève des questions quant à l'impact potentiel de leur expérience professionnelle sur leurs pratiques didactiques en matière de réfutation mathématique.

Cette recherche constitue une première exploration de la notion de contre-exemple en Tunisie. Notre expérience avec les enseignants de mathématiques tunisiens a produit des résultats significatifs, mettant en évidence la nécessité d'enrichir cette étude par des entretiens approfondis. Un aspect notable de notre expérience est l'observation fréquente chez de nombreux enseignants de liens entre une fonction non dérivable en un point et la présence d'un point anguleux sur son graphique. Nous estimons qu'une enquête approfondie sur ce sujet serait pertinente pour évaluer son impact sur la manière dont les élèves conceptualisent les fonctions non dérivables.

En conclusion, nous pensons que cette recherche ouvre des perspectives prometteuses pour de futures études, notamment sur la formation des enseignants à l'utilisation des réfutations par contre-exemple général. Une telle formation pourrait potentiellement améliorer la compréhension des élèves en leur fournissant des outils plus efficaces pour explorer et approfondir les concepts mathématiques.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*(2), 147176.

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématiques chez des élèves de collège*. Thèse de l'Institut National Polytechnique Grenoble.

Barrier, T. (2016). Les exemples dans l'élaboration des démonstrations mathématiques : une approche sémantique et dialogique. *Recherches en éducation*, *27*, 94-117. https://doi.org/10.4000/ree.6263

Benbachir, A., & Zaki, M. (2001a). Production d'exemples et de contre-exemples en analyse : Étude de cas en première année d'université. *Educational Studies in Mathematics, 47*(3), 273–295.

BenBachir, A., & Zaki, M. (2001b). Reconnaissance de contre-exemples en analyse : Approche par questionnaire en première année universitaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 7*, 117–145.

Bloch, I. (2009). Les interactions mathématiques entre professeurs et élèves. Comment travailler leur pertinence en formation, *Petit x*, *81*, 25-52.

Borasi, R. (1987). Exploring mathematics through the analysis of errors. *For the Learning of Mathematics, 7*(3), 2-8.

Bressoux, P. & al. (1999). Diversité des pratiques d'enseignement à l'école élémentaire. *Revue française de pédagogie*, *126*, 97-110. https://doi.org/10.3406/rfp.1999.1097

Cerclé, V. (2019). Faire vivre les énoncés contingents dans la classe de mathématiques : Pourquoi et comment ? *Petit x*, *110-111*, 27-55.

Coulange, L. (2012). *L'ordinaire dans l'enseignement des mathématiques : Les pratiques enseignantes et leurs effets sur les apprentissages des élèves* [Habilitation à diriger des recherches, Université Paris-Diderot - Paris VII]. HAL. https://theses.hal.science/tel-00801863

Creager, M. A. (2022). Geometric refutations of prospective secondary mathematics teachers. *International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology (IJEMST), 10*(1), 74-99. https://doi.org/10.46328/ijemst.1594

Durand-Guerrier, V. (2005). *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique : Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique* [Habilitation à diriger des recherches, Université Lyon 1]. HAL. https://theses.hal.science/tel-00201626

Durand-Guerrier, V. (2007). Retour sur le schéma de la validation explicite dans la théorie des situations didactiques, à la lumière de la théorie des modèles de Tarski. *Actes du colloque Didactiques : quelles références épistémologiques ? Bordeaux, France, mai 2005.*

Fisher, R. J. (1993). Social desirability bias and the validity of indirect questioning. *Journal of Consumer Research, 20*(2), 303–315.

Grenier, D. (2015). De la nécessité de définir les notions de logique au lycée. *Repères-IREM*, *100*, 65-83.

Hersant, M. (2013). Analyse didactique des séances et des productions des élèves. *Pratiques enseignantes en mathématiques*. Presse Universitaire de Bordeau, 31-51.

Hitt, F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. In M. Baron, D. Guin et L. Trouche (Éds.), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. Conception et usages, regards croisés* (pp. 65-88). Paris : Hermès.

Hitt, F. (1998a). Systèmes sémiotiques de représentation liés au concept de fonction. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 6*, 7-26.

Hitt, F. (1998b). Researching a problem of convergence with MATHEMATICA. Hystory and visualization of a mathematical idea. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, *28* (5), 697-706.

Horoks, J. (2022). Des pratiques aux apprentissages mathématiques, en passant par la formation. : Circulation des savoirs issus des recherches en Didactique des Mathématiques. Habilitation à Diriger des Recherches. CY Cergy Paris Université.

Huang, C.-H. (2014). Engineering students' generating counterexamples of calculus concepts. *Global Journal of Engineering Education*, *16*(2), 93–97. http://www.wiete.com.au/journals/GJEE/Publish/vol16no2/06-Huang-C-H.pdf

Klymchuk, S. (2012). Using counter-examples in teaching & learning of calculus: Students' attitudes and performance. *Mathematics Teaching-Research Journal Online*, *5*(4), 1–30.

Knuth, E. (2002). Proof as a tool for learning mathematics. *Mathematics Teacher. 95*(7), 486-490.

Lakatos, I. (1984). *Preuves et réfutations : essai sur la logique de la découverte mathématique*. Éditions Hermann.

Lockwood, E., Ellis, A. B., & Lynch, A. G. (2016). Mathematicians' example-related activity when exploring and proving conjectures. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *2*(2), 165–196.

Mercier, A., & Buty, C. (2004). Évaluer et comprendre les effets de l'enseignement sur les apprentissages des élèves : problématiques et méthodes en didactique des mathématiques et des sciences. *Revue française de pédagogie, 148*, 47–59.

Peled, I., & Zaslavsky, O. (1997). Counter-Examples That (Only) Prove and Counter-Examples That (Also) Explain. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *19*(3), 4961.

Selden, A., & Selden, J. (1998). The role of examples in learning mathematics. *Research Sampler columns, The Mathematical Association of America Online*. https://maa.org/t_and_l/sampler/rs_5.html [URL non fonctionnelle ; téléchargé le 30 août 2014].

Tanguay, D., & Mathieu-Sousy, S. (2015). Logique et enseignement des mathématiques. *Bulletin AMQ*, *55*(1), 15–38. https://www.amq.math.ca/wp-content/uploads/bulletin/vol55/no1/07-maitre-logique.pdf

Zeybek, Z. (2017). Pre-service elementary teachers' conceptions of counterexamples. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology (IJEMST)*, *5*(4), 295–316. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1151451.pdf

Documents officiels

Ministère de l'Éducation nationale de Tunisie. (2011). Programmes officiels de l'enseignement des mathématiques du collège. http://www.edunet.tn/ressources/pedagogie/programmes/nouveaux_programme2011/preparatoire/sciences/math_college.pdf

Ministère de l'Éducation nationale de Tunisie. (2008). Programmes officiels de l'enseignement des mathématiques du secondaire. http://www.edunet.tn/ressources/pedagogie/programmes/nouveaux_programme2011/secondaire/math.pdf

Datos de correspondencia

Imed Kilani

Dirección: ISEFC-Institut Supérieur de l'Education et de la Formation Continue,
43 rue de la Liberté 2019 Le Bardo Tunisie, Université Virtuelle de Tunis
(Tunis, Tunisie)
kilanis2006@yahoo.fr