 https://doi.org/10.24844/EM3603.04

Uso da linguagem algébrica com compreensão: Uma experiência de ensino baseada no Raciocínio Matemático

Using algebraic language with understanding: A teaching experiment based on Mathematical Reasoning

Kelly Aguiar,[1] João Pedro da Ponte,[2]
Marisa Quaresma[3]

Resumo: Este artigo pretende analisar o desenvolvimento do uso da linguagem algébrica com compreensão por alunos de 8º ano, a partir de uma experiência de ensino que promove o raciocínio matemático. Adotando a metodologia de Investigação Baseada em Design e uma perspectiva qualitativa e interpretativa, utilizamos as resoluções escritas e orais de alunos de 8º ano ao resolverem tarefas algébricas. Os resultados mostram que as justificações dos alunos evidenciam os significados que atribuem aos símbolos algébricos, constituindo um valioso apoio para darem significados a partir de diferentes perspetivas. As conjeturas e generalizações formuladas evidenciam para os alunos que a linguagem algébrica tem como valor prático a expressão de relações matemáticas. A valorização do raciocínio matemático dos alunos, no âmbito do uso da linguagem algébrica, mostrou favorecer o desenvolvimento de competências de adoção e interpretação de símbolos algébricos, e contribuir para que os

Fecha de recepción: 29 de julio de 2024. **Fecha de aceptación:** 21 de septiembre de 2024.

[1] Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal, kelly.aguiar@edu.ulisboa.pt, orcid.org/0000-0002-8516-9715

[2] Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal, jpponte@ie.ulisboa.pt, orcid.org/0000-0001-6203-7616

[3] Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal, mq@edu.ulisboa.pt, orcid.org/0000-0002-0861-6016

alunos deem significados aos símbolos e expressões algébricas com base em diversas perspetivas.

Palavras-chave: *Raciocínio matemático. Álgebra. Linguagem algébrica. Sentido de símbolo. Aprendizagem.*

Abstract: This article aims to analyze the development of the use of algebraic language with understanding by grade 8 students, based on a teaching experiment that promotes mathematical reasoning. Adopting the Design-Based Research methodology and a qualitative and interpretative approach, we used the students' written and oral answers when solving algebraic tasks. The results show that students' justifications highlight the meanings they give to algebraic symbols, providing valuable support for making sense of symbols from different perspectives. The conjectures and generalizations formulated show for students that algebraic language has the practical value of expressing mathematical relations. Valuing students' mathematical reasoning, within the scope of the use of algebraic language, proved to favor the development of skills in adopting and interpreting algebraic symbols, and contributing to students making sense of algebraic symbols and expressions based on different perspectives.

Keywords: *Mathematical reasoning. Algebra. Algebraic Language. Symbol Sense. Learning.*

1. INTRODUÇÃO

Desenvolver a compreensão dos símbolos matemáticos formais é um aspeto fundamental na aprendizagem matemática (Lannin *et al.*, 2023). A construção de uma linguagem algébrica que seja significativa para o aluno possibilita o uso dos símbolos algébricos de modo flexível e crítico (Arcavi *et al.*, 2017). Desse modo, a linguagem algébrica pode auxiliar o pensamento na resolução de problemas e na realização de novas aprendizagens. No entanto, usar a linguagem algébrica constitui um desafio para muitos alunos (Arcavi *et al.*, 2017; Jupri, *et al.*, 2021; Kop *et al.*, 2020). Ao estudá-la num contexto distante da expressão de ideias matemáticas, os alunos não compreendem o seu valor prático e apresentam sérias dificuldades em usá-la (Arcavi *et al.*, 2017). Por isso, é necessário que práticas como refletir, questionar, identificar relações, selecionar estratégias, justificar e validar justificações integrem amplamente o processo de aprendizagem da linguagem algébrica (Friedlander y Arcavi, 2017).

Pela relevância de conhecer mais acerca do uso da linguagem algébrica num contexto de valorização destas práticas (Arcavi *et al.*, 2017), realizamos uma investigação com alunos de 8º ano de três escolas em Portugal visando responder à seguinte questão de investigação: *como se desenvolve o uso da linguagem algébrica com compreensão pelos alunos ao longo de uma experiência de ensino baseada na promoção do raciocínio matemático?* Assim, o nosso objetivo é analisar como, no quadro de uma experiência de ensino, ocorre o desenvolvimento do uso da linguagem algébrica com compreensão por alunos de 8º ano.

2. LINGUAGEM ALGÉBRICA E SENTIDO DE SÍMBOLO

A capacidade de formular generalizações é central na aprendizagem da Álgebra (Kieran, 2022), sendo a simbolização uma ferramenta que serve o propósito da generalização (Sibgatullin *et al.*, 2022). Os alunos devem ser capazes de compreender que as expressões algébricas podem comunicar ideias e relações matemáticas e de interpretar os seus significados (Lannin *et al.*, 2023). No entanto, diversas investigações têm mostrado as dificuldades dos alunos neste campo (Arcavi *et al.*, 2017: Sibgatullin *et al.*, 2022) e a sua falta de sentido de símbolo (Jupri *et al.*, 2021; Kop *et al.*, 2020).

Sentido de símbolo é uma noção paralela à de sentido de número e passa pela capacidade de compreender como e quando os símbolos podem ser usados para expressar relações e generalizações (Arcavi, 1994). Compreende uma série de competências ligadas à adoção, interpretação e manipulação de símbolos e o seu desenvolvimento dá-se ao longo da trajetória escolar dos alunos (Arcavi *et al.*, 2017). Tendo em conta que o sentido de símbolo tem grande influência na aprendizagem algébrica (Somasundram, 2021), três destas competências podem ser promovidas explicitamente nos alunos: 1) saber que é possível representar informações com exatidão por meio de expressões simbólicas e ser capaz de as construir; 2) ter consciência da necessidade de ver e rever os significados dos símbolos durante a resolução de um problema; e 3) reconhecer diversos aspetos de um significado a partir de expressões algébricas equivalentes (Arcavi, 1994).

Neste sentido, as práticas de sala de aula devem valorizar a busca do significado dos símbolos e dos diferentes aspetos matemáticos que eles podem evidenciar

(Arcavi *et al.*, 2017). Para Arcavi *et al.* (2017), os alunos devem exercitar a procura pela estrutura expressa por símbolos, a leitura do seu significado e a perceção de seu potencial na resolução de problemas. Lannin *et al.* (2023) afirmam que os alunos devem ter oportunidades de interpretar expressões algébricas, assim como de criar e comparar novas expressões. White *et al.* (2023) também referem a importância de dar significado a expressões algébricas em contexto. Estes autores argumentam que os alunos devem interpretar os significados das expressões algébricas a partir de diferentes perspetivas (White *et al.*, 2023), pelos conceitos, propriedades ou relações matemáticas e pelos procedimentos matemáticos ou rotinas automáticas. Lannin *et al.* (2023) destacam também que as discussões em sala de aula assumem um papel essencial para que os alunos aprofundem a compreensão dos significados dos símbolos algébricos.

3. O RACIOCÍNIO MATEMÁTICO PARA A APRENDIZAGEM COM COMPREENSÃO

Explorar contextos, analisar relações e padrões, comparar e formular estratégias na experiência com a Álgebra é fundamental para dar-lhe significado (Friedlander y Arcavi, 2017). Dar significado, na atividade matemática, envolve a compreensão de uma situação, contexto ou conceito conectando-o com conhecimento existente (NCTM, 2009). Pelo seu lado, o raciocínio matemático envolve diversos processos, com destaque para a formulação de conjeturas, generalizações e justificações (Lannin *et al.*, 2011). De acordo com o NCTM (2009), abordar conteúdos e tarefas matemáticas valorizando o raciocínio matemático favorece a aprendizagem com compreensão, constituindo um suporte central para que os alunos possam dar significado a objetos e relações matemáticas. Para isso, é fundamental que os alunos sejam incentivados a comunicar suas conjeturas e generalizações, bem como a justificar e validar afirmações (Ponte *et al.*, 2020).

Conjeturar envolve raciocinar sobre relações matemáticas para desenvolver afirmações que se pensa poderem ser verdadeiras (Lannin *et al.*, 2011). Conjeturas de natureza geral constituem generalizações (Ponte *et al.*, 2020). Para Lannin *et al.* (2011), generalizar inclui pensar sobre uma relação, representação, padrão ou outra propriedade matemática para identificar semelhanças. A formulação de conjeturas, específicas ou gerais, serve como um ponto de entrada para o raciocínio matemático e leva à realização de outros processos (Lannin *et* *al.*, 2011), como a justificação dessas mesmas conjeturas. Justificar é um processo de busca por dados e razões que permitam a mudança do valor epistémico de uma afirmação, para verdadeira ou falsa ou mesmo para mais provável (Jeannotte y Kieran, 2017). Uma justificação é um argumento matemático que suporta uma afirmação a partir de declarações aceites como verdadeiras para uma comunidade, por meio de formas de expressão por ela consideradas válidas (Staples *et al.*, 2012).

Para promover o raciocínio matemático em sala de aula é preciso uma dinâmica de aula e ações do professor que incentivem questionamentos e discussões (Ponte *et al.*, 2020). De acordo com Ponte *et al.* (2020), a aula organizada em três fases (lançamento da tarefa, trabalho autónomo dos alunos e discussão coletiva) pode favorecer a promoção do raciocínio matemático. No quadro 1 descrevemos algumas ações do professor, nestas diferentes fases, que evidenciam e promovem o raciocínio matemático e que decorrem de uma abordagem de ensino exploratória (Ponte, 2005), em que os alunos assumem um papel central na construção do conhecimento.

Quadro 1. Algumas ações do professor para promover o raciocínio matemático

Fase da aula	Ações do professor
Lançamento da tarefa	1. Assegurar que todos os alunos compreendem os termos matemáticos do enunciado; 2. Assegurar que todos os alunos compreendem o contexto; 3. Desenvolver uma linguagem comum para descrever os aspetos essenciais da tarefa;
Trabalho autónomo	1. Acompanhar a resolução da tarefa dando apenas as indicações necessárias, sem reduzir de modo significativo o seu grau de desafio; 2. Para os alunos com dificuldades em formular ou concretizar uma estratégia de resolução, dar sugestões ou colocar questões facilitadoras que os ajudem a chegar por si próprios a uma estratégia;

Fase da aula	Ações do professor
Discussão coletiva	1. Encorajar a partilha de ideias; 2. Explorar desacordos entre alunos, levando-os a argumentar as suas posições; 3. Aceitar e valorizar contribuições incorretas ou parciais, promovendo uma discussão que as desconstrua, complemente ou clarifique; 4. Solicitar a explicação do "porquê", a apresentação de justificações de respostas ou estratégias de resolução e a formulação de justificações alternativas; 5. Solicitar aos alunos que identifiquem justificações válidas e inválidas, destacando o que as valida.

Fuente: Adaptado de Ponte *et al.*, 2020.

Outro aspecto fundamental para promover o raciocínio matemático em sala de aula é o uso de tarefas que incentivem a formulação de conjeturas, generalizações e justificações, bem como a realização de outros processos de raciocínio matemático, tais como a comparação e a exemplificação (Ponte *et al.*, 2020). O quadro 2 apresenta seis princípios para a seleção ou elaboração de tarefas que promovam o raciocínio matemático em sala de aula.

Quadro 2. Alguns princípios para a elaboração de tarefas que promovem o raciocínio matemático

Princípios gerais	Princípios específicos
Incluir questões que:	
1. Permitem uma variedade de estratégias de resolução. 2. Envolvem uma variedade de representações. 3. Incentivem e favoreçam a reflexão sobre os processos de raciocínio utilizados.	1. Incentivem a formulação de generalizações. 2. Solicitem ou incentivem a justificação de respostas e de estratégias de resolução. 3. Solicitem a identificação justificada da verdade ou falsidade de afirmações matemáticas, inclusive nas justificações apresentadas por outros alunos.

Fuente: Adaptado de Ponte, 2022.

4. METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

A investigação apresentada neste artigo assume uma abordagem qualitativa e interpretativa (Bogdan y Biklen, 1994), seguindo uma metodologia de Investigação Baseada em Design (Cobb *et al.*, 2016). Esta opção metodológica justifica-se pelo propósito de estudar uma intervenção em educação, que busca promover aprendizagens particulares, visando compreender os processos que lhe estão subjacentes (Cobb *et al.*, 2016). O estudo concretizou-se por meio da realização de uma experiência de ensino, em turmas de 8º ano, construída com características específicas a fim de promover o raciocínio matemático dos alunos. Estas características são relativas às tarefas usadas e à dinâmica de aula e inserem-se numa abordagem de ensino exploratório (Ponte, 2005), ou seja, num contexto onde os alunos assumem um papel de destaque na interpretação de questões, na sua resolução e na discussão das soluções. A dinâmica das aulas priorizou oportunizar os alunos a comunicar e refletir em conjunto, entre si e com o professor. Assim, as aulas foram organizadas em três fases e de acordo com as ações do professor sugeridas no quadro 1 e as tarefas foram elaboradas considerando o conjunto de princípios apresentados no quadro 2. A conjetura inicial da investigação é: *uma experiência de ensino que tem como base o ensino exploratório e a promoção do raciocínio matemático, nomeadamente através da realização de conjeturas, generalizações e justificações, apoia o desenvolvimento do uso da linguagem algébrica com compreensão, na aprendizagem de tópicos algébricos*. Além disso, tivemos ainda em conta a importância de valorizar a reflexão sobre os significados dos símbolos (Arcavi *et al.*, 2017) e de criar oportunidades para que os alunos interpretem, criem e comparem expressões algébricas (Lannin *et al.*, 2023).

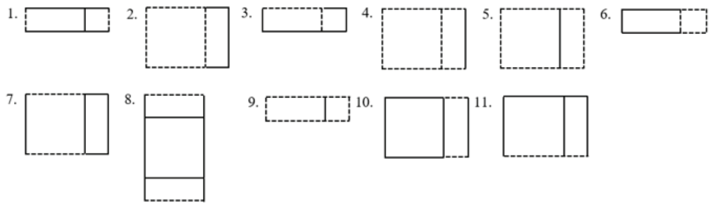
A experiência de ensino, realizada em três turmas de 8º ano de diferentes escolas em Portugal, foi constituída por seis aulas lecionadas pelas professoras de Matemática de cada turma, aqui designadas por A, B e C. Na fase de planeamento do trabalho, foram realizadas reuniões com cada uma das professoras tendo em vista discutir o que é o raciocínio matemático e como o promover. Nesta fase, os princípios dos quadros 1 e 2 foram amplamente explorados e as tarefas que compunham a experiência de ensino foram analisadas e discutidas com as professoras. O trabalho de sala de aula teve início em novembro de 2021, na turma A; em março de 2022, na turma B; e em outubro de 2022, na turma C, constituindo três ciclos de design. As turmas tinham cerca de 20 alunos cada e os alunos trabalharam em grupos de três ou quatro, mostrando-se participativos na resolução e discussão das tarefas. A maioria das aulas, com duração de 90 minutos, foi dedicada a uma tarefa ou parte, começando com a leitura de toda a tarefa pela professora, seguida pela realização de cada questão autonomamente e, finalmente, pela sua discussão coletiva.

Para atender o objetivo proposto, analisamos respostas e momentos de discussão decorrentes da resolução de duas das tarefas realizadas pelos alunos, as últimas realizadas na experiência de ensino. A seleção destas tarefas decorre da sua realização ter por base todo o trabalho anterior e também pela riqueza do trabalho que proporcionaram, no que refere aos significados atribuídos pelos alunos aos símbolos e expressões algébricas e às competências de sentido de símbolo que puderam praticar na sua resolução e discussão. Ambas as tarefas selecionadas foram elaboradas com características específicas para promover o raciocínio matemático. Para além disso, é também de destacar como inovador o modo como estas tarefas foram conduzidas em sala de aula, guiando os alunos numa trajetória de aprendizagem e descoberta centrada no raciocínio matemático. A primeira tarefa, *Tracejados & Áreas* é composta por duas partes (figura 1 e figura 2), insere-se num contexto de exploração de comprimentos e áreas e visa o uso da linguagem algébrica na criação de expressões, bem como a sua justificação.

1. A figura é construída com segmentos de dois comprimentos distintos. Em sua formação há um quadrado e outro retângulo. Para representar a medida do comprimento total da linha tracejada nesta figura, Pedro escreveu a expressão $2x + 4y$. Explica, a partir da figura, o raciocínio do Pedro, indicando o que podem significar o x e o y.

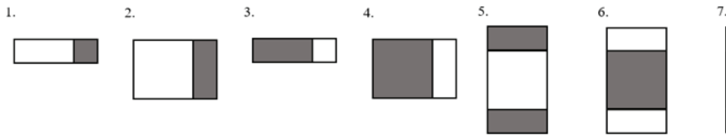
2. As figuras a seguir também são construídas com segmentos de dois comprimentos distintos.

a) Usando x e y, como o Pedro, escreve uma expressão para representar a medida do comprimento total da linha tracejada em cada figura:



b) Identifica todos os pares de figuras cujas linhas tracejadas totalizam a mesma medida. Justifica.

c) Usando x e y, escreve uma expressão para representar a medida da área total sombreada em cada figura:



d) Para representar a medida da área total sombreada na figura, Pedro escreveu a expressão $(x + y)y$ e Rita escreveu a expressão $xy + y^2$. Explica, usando a figura, quem está certo.

e) Escreve duas expressões algébricas para representar a medida da área total sombreada de cada figura. Explica como pensaste para construir cada expressão.

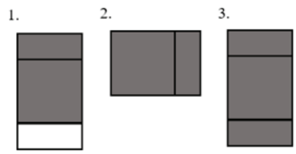
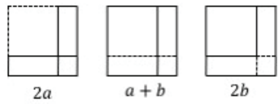


Figura 1. Tarefa Tracejados & Áreas parte I. (Adaptada de Vlassis y Demonty, 2002)

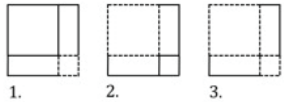
A parte I (figura 1) pretende que os alunos explorem inicialmente o uso dos símbolos para representar diversas medidas de comprimento e área e criem expressões equivalentes. A parte II (figura 2) pretende dar seguimento à criação e análise de expressões algébricas pela comparação, identificação de relações, generalizações a partir de exemplos, justificação e validação de argumentos. O contexto desta tarefa envolve situações de cálculo de medida de área de figuras familiares aos alunos de 8º ano.

Um quadrado foi dividido, obtendo-se dois quadrados menores e outros dois retângulos. As expressões algébricas representam a medida do comprimento total da linha tracejada em cada figura:



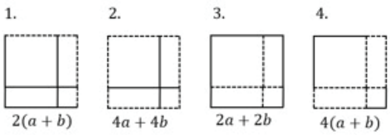
a. Qual é a medida do lado de cada um dos quadrados? Justifica cada resposta.

b. Escreve uma expressão algébrica para representar a medida do comprimento total da linha tracejada em cada figura:



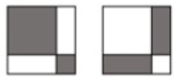
Que relação existe entre a medidas expressas nas figuras 1, 2 e 3? Justifica.

c. Compara as medidas do comprimento total da linha tracejada e as expressões dadas nas figuras. O que podes afirmar acerca das medidas e das expressões?

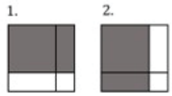


Qual é o significado dos parênteses nas expressões referentes às figuras 1 e 4? Explica.

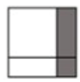
d. Escreve uma expressão algébrica que represente a medida da área total sombreada em cada figura. Explica como pensaste.



e. Para a figura 1, Pedro escreveu a expressão $a^2 + ab$ e, para a figura 2, Ana escreveu a expressão $a(a + b)$. Quem está certo? Explica como cada um deles pensou ao elaborar as expressões.



f. Escreve duas expressões algébricas que representem a medida da área total sombreada da figura ao lado.



g. A partir da reflexão acerca das alíneas *e* e *f*, escreve uma generalização acerca de como multiplicar monómio por binómio.

h. Escreve três expressões algébricas que representem a medida da área total sombreada.

i. Para representar a medida da área total sombreada da figura na alínea *h*, Pedro escreveu a expressão $a(a + b) + b(a + b)$. Pedro está certo? Justifica a tua resposta e explica como o Pedro pensou.

j. Para representar a medida da área total sombreada da figura na alínea *h*, Ana escreveu duas expressões: $(a + b)^2$ e $a^2 + b^2$. Ana argumentou que estas expressões são equivalentes. Ana está certa? Justifica a tua resposta e explica como a Ana pensou.

Figura 2. Tarefa Tracejados & Áreas parte II (Adaptada de Vlassis y Demonty, 2002).

A segunda tarefa, Duas sequências (figura 3) pretende que os alunos identifiquem padrões de formação, usem a linguagem algébrica para os representar e formulem conjeturas, generalizações e justificações relativamente a relações entre as representações pictóricas e algébricas das sequências. O contexto desta tarefa envolve a observação de sequências de figuras e a identificação de semelhanças e relações.

Sequência A

1.a) Quantos quadrados são necessários para formar a figura na sexta posição? E a figura na décima terceira posição? Explica como encontraste estes números.

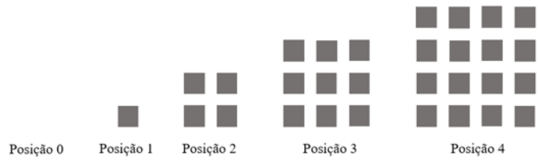
1.b) Escreve uma expressão algébrica para encontrar o número de quadrados necessários para formar a figura na posição *n*. Justifica.

1.c) Discute com os teus colegas, que números são estes. Justifica.

Sequência B

2.a) Quantos quadrados são necessários para formar a figura na sétima posição? E a figura na décima quinta posição? Explica como encontraste estes números.

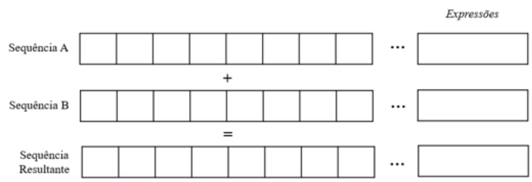
2.b) Escreve uma expressão algébrica para encontrar o número de quadrados necessários para formar a figura na posição *n*. Justifica.



2.c) Discute com os teus colegas, que números são estes. Explica a vossa conclusão.

3.a) Compara as sequências A e B. Qual é a diferença entre elas? Explica.

3.b) Preenche as tabelas com os números que compõe cada sequência e as respetivas expressões algébricas. De seguida soma cada elemento da sequência A ao respetivo elemento da sequência B, e escreve uma expressão algébrica para a sequência resultante.



3.c) Observa a sequência resultante e compara-a com a sequência B. Discute com os teus colegas. Explica a vossa conclusão.

Figura 3. Tarefa Duas sequências (Adaptada de Kindt *et al.*, 2006)

A recolha de dados foi feita pela primeira autora em sala de aula, por meio da observação direta, com recurso a gravação de vídeo e diário de bordo e recolha documental das produções escritas dos alunos. Assim, foram utilizados como dados as produções escritas dos alunos e as transcrições dos momentos de discussão coletiva. Para a análise dos dados, começamos pela sua organização, observação dos registos das produções escritas dos alunos e pela transcrição integral dos áudios das discussões coletivas. A seguir, identificamos os momentos mais significativos das discussões e, por fim, analisamos estas unidades de registo a partir de categorias de análise definidas com base na revisão de literatura. As categorias de análise e suas subcategorias (Quadro 3) fundamentam-se nos processos de raciocínio matemático, nas perspetivas para dar significados aos símbolos e em competências de adoção e interpretação de símbolos.

Quadro 3. Categorias de análise

<table>
<tr><th>Dimensão de Análise</th><th>Categoria de Análise</th><th>Subcategoria</th><th>Código</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Processos de Raciocínio Matemático</td><td>Conjeturas e Generalizações</td><td></td><td>R1</td></tr>
<tr><td>Justificações</td><td></td><td>R2</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Perspetiva para dar significados</td><td>Contexto da tarefa</td><td></td><td>S1</td></tr>
<tr><td>Conceitos e propriedades matemáticas</td><td></td><td>S2</td></tr>
<tr><td>Procedimentos</td><td></td><td>S3</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Competências</td><td rowspan="2">Adoção de símbolos algébricos</td><td>Reconhecer a representação de informações</td><td>CA1</td></tr>
<tr><td>Criar expressões</td><td>CA2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Interpretação de símbolos algébricos</td><td>Ver e rever significados</td><td>CI1</td></tr>
<tr><td>Reconhecer aspetos de significados</td><td>CI2</td></tr>
</table>

Assim, tendo em conta as produções escritas dos alunos e as observações feitas em aula e posteriormente a partir dos vídeos gravados, cada excerto da discussão coletiva selecionado, foi analisado a partir destas categorias e subcategorias (Quadro 3). Buscamos responder se os alunos formularam conjeturas, generalizações e justificações; que perspetivas usaram para dar significados aos símbolos e expressões algébricas e que competências de adoção e interpretação de símbolos exercitaram ou mesmo evidenciaram durante a realização e discussão das tarefas. Ao longo da discussão referimos de que modo estas categorias contribuem para responder ao objetivo proposto. Os resultados são organizados separadamente por tarefa e por momentos de discussão, que constituem partes da resolução das tarefas onde centramos a nossa atenção.

5. RESULTADOS

5.1. Tarefa "Tracejados & Áreas" – Parte I

1.º Momento – Os significados de x e y

A maioria dos alunos usou o contexto da tarefa para apontar as linhas tracejadas representadas pelos símbolos x e y, ou para afirmar que x e y representariam os segmentos de maior e menor comprimento, respetivamente. Entretanto, alguns alunos indicaram outros significados para estes símbolos. O excerto de diálogo da turma B exemplifica outras conjeturas que surgiram nas diferentes turmas:

Filipa:	O x é a altura e o y é o comprimento neste retângulo. E o x também é o lado do quadrado.
Professora B:	A Filipa está certa?
Alunos:	Não!
Professora B:	Porquê?
Timóteo:	Na figura temos duas medidas maiores e quatro menores em linha tracejada.
Maria Clara:	Ela trocou. A medida maior é o x e a medida menor é o y.
Duarte:	Mas o x também poderia ser a linha grande, que é a junção do lado do quadrado com o comprimento do retângulo.
Professora B:	O que acham?
Timóteo:	Só sobravam duas medidas, então o que seria o 4y?
Duarte:	Pois, então não dava!

(Turma B, discussão coletiva, abril de 2022)

Nas discussões, as justificações dos alunos foram fundamentais para que todos chegassem a um significado único para os símbolos x e y. A partir disto, os alunos passaram a escrever expressões algébricas para representar medidas de comprimento das linhas tracejadas e de área, nas alíneas $2a$ e $2c$, justificando suas expressões e identificando expressões equivalentes. Na figura 4, exemplificamos o que os alunos apresentaram no quadro nas discussões:

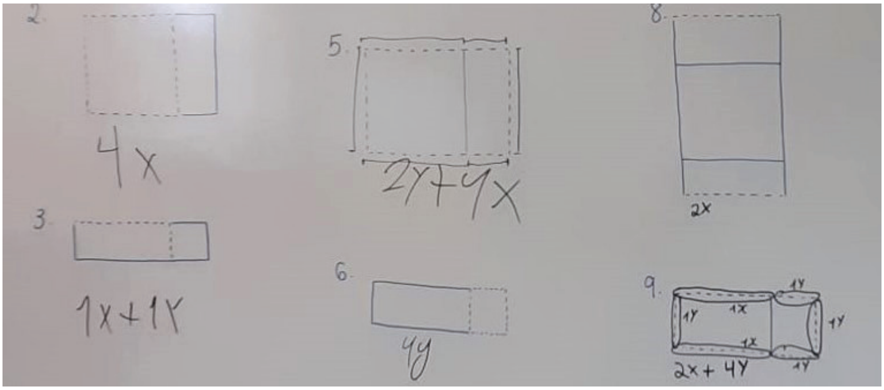


Figura 4. Captura de parte do quadro (Alínea *2a*) na turma A

Os alunos formularam conjeturas e justificações relativamente aos significados dos símbolos (R1 e R2), a partir da expressão $2x + 4y$. Suas perspetivas para dar significado aos símbolos basearam-se no contexto da tarefa pela observação da figura, nos conceitos de adição e multiplicação, ou ainda no procedimento de contagem de segmentos (S1, S2 e S3). Neste primeiro momento, os alunos exercitam competências de adoção e interpretação dos símbolos, pelo exemplo de que $2x + 4y$ representava a situação apresentada (CA1), pela busca e revisão do significado de x e y (CI1), pela criação de várias expressões nas alíneas $2a$ e $2c$ (CA2) e pela identificação de expressões equivalentes e reconhecimento do que cada uma evidenciava (CI2) na alínea $2b$.

2.º Momento – Que expressão é válida?

Ao serem questionados sobre a validade de duas expressões para representar a medida de área de uma figura, na alínea $2d$, a maioria dos alunos respondeu no trabalho autónomo que apenas uma delas era válida, a expressão $xy + y^2$. Na discussão coletiva, entretanto, alguns alunos fizeram novas conexões, como vemos no excerto da discussão na turma B:

Professora B:	Quem é que tem razão?
Filipa:	A Rita, porque a área do retângulo é comprimento vezes largura, mais a área do quadrado que é lado vezes lado! Que dá x vezes y, mais y ao quadrado.
Professora B:	Então, e a expressão do Pedro, $(x + y) \cdot y$?

Matilde: A expressão do Pedro não faz sentido nenhum!
Duarte: Ah! Afinal os dois estão certos porque se aplicarmos a propriedade distributiva fica x vezes y, mais y vezes y, que é y ao quadrado!
Professora B: E o que é o x mais y na expressão do Pedro? Olhem para a figura!
Sarah: Os dois juntos, x mais y, é o comprimento do retângulo mais o lado do quadrado.
Ester: É a medida desta linha toda, como se fosse um retângulo só.
Estevão: Ah, e a largura é o y.
Ester: Então na expressão temos comprimento do retângulo maior vezes a largura!
Duarte: Ah!
Sarah: Ah, agora faz sentido!

(Turma B, discussão coletiva, abril de 2022)

Vemos que, a partir das justificações de Filipa e Duarte, desenvolveu-se um diálogo de busca por significado para a expressão $(x + y)y$. Mais alunos respondem aos questionamentos, concluindo que ambas as expressões eram válidas. As aprendizagens feitas na discussão desta questão foram essenciais para que os alunos criassem expressões equivalentes na alínea $2e$. Exemplificamos o trabalho feito no quadro (figura 5), com expressões apresentadas na turma A:

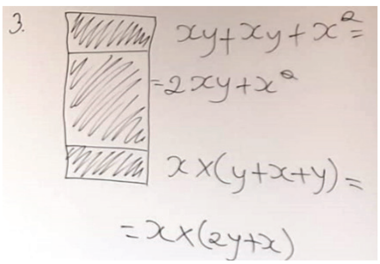


Figura 5. Resposta à alínea *2.e* (Captura do quadro) na Turma A

Os alunos formularam conjeturas e justificações (R1 e R2) sobre a validade das duas expressões $xy + y^2$ e $(x + y)y$. Suas perspetivas para lhes dar significado basearam-se primeiramente no contexto da tarefa e na propriedade da área de retângulo (S1 e S2), indicando que $xy + y^2$ representava a área do retângulo de comprimento x e largura y, mais a área do quadrado de lado y. Duarte baseou-se na propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, com ênfase no procedimento realizado (S3), para afirmar que $(x + y)y$ também seria válida. A partir dos questionamentos, os alunos reconheceram que $(x + y)y$ representava a área total do retângulo de comprimento $x + y$ e largura y. Neste momento os alunos exercitaram competências de adoção e interpretação dos símbolos, pelo exemplo de que as duas expressões representavam a situação (CA1), pela busca do significado de ambas as expressões (CI1), pela criação de expressões equivalentes na alínea $2e$ (CA2) e pelo reconhecimento dos diferentes aspetos que cada uma delas evidencia (CI2).

5.2. Tarefa "Tracejados & Áreas" – Parte II

1.º Momento – Comparando medidas e expressões algébricas

A seguir ao trabalho feito na Parte I, os alunos não tiveram dificuldades em atribuir significado aos símbolos e em construir expressões algébricas para representar medidas de comprimento, na alínea b. Ao compararem medidas e expressões dadas na tarefa, na alínea c, os alunos apresentaram suas conjeturas, que exemplificamos com excertos de diálogos das turmas B e C:

Professora B:	O que é que concluíram acerca das medidas?
António:	Que a do primeiro e a do terceiro são iguais, e a do segundo e a do quarto também são iguais.
Professora B:	Então e as expressões?
Martin:	As expressões são equivalentes!
Professora B:	E qual é o significado dos parênteses nas expressões?
Martin:	Professora eu escrevi "usando a propriedade distributiva fica $2a$ mais $2b$ e $4a$ mais $4b$.
Professora B:	Ora, os parênteses é para aplicar a distributiva. Quem tem uma resposta diferente?
Sarah:	Por exemplo, no 1 serve para indicar que o a e o b aparecem duas vezes porque se não tivesse os parênteses seria interpretado de maneira errada.
Timóteo:	Professora, os parênteses indicam um conjunto, por exemplo na figura 1 são dois conjuntos de a mais b!

(Turma B, discussão coletiva, abril de 2022)

Leonor: O que está dentro dos parênteses vai multiplicar pelo que está fora.
Professora C: Outras respostas!
Ana: Os parênteses servem para separar o número de vezes que aquela medida se repete.
Professora C: Olhem lá para a primeira figura, veem a medida a mais b? Quantas vezes é que ela se repete?
Leonor: Ah, duas vezes!

(Turma C, discussão coletiva, novembro de 2022)

As justificações apresentadas apontam para as perspetivas para dar significado às expressões em que os alunos se basearam. A afirmação de que as expressões são equivalentes foi baseada na comparação das medidas nas figuras e das expressões, ou seja, do contexto da tarefa (S1). Relativamente aos parênteses, os significados iniciais relacionavam-se com a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, com ênfase no procedimento a realizar (S2 e S3). Timóteo e Ana referiram o contexto e a ideia de multiplicação para perceber o significado aos parênteses e, a partir disto, outros alunos conseguiram dar significado às expressões $2(a+b)$ e $4(a+b)$ no contexto da tarefa, referindo-se a $a+b$ como uma só medida. Neste momento, os alunos exercitaram as competências de adoção dos símbolos, pela criação de expressões na alínea b (CA2) e pelo reconhecimento de que expressões podem representar informações, a partir da observação das expressões e das medidas que representam (CA1). Exercitaram também a revisão de significado, ao buscarem interpretar o uso dos parênteses (CI1) e o reconhecimento de diferentes aspetos de um significado evidenciado pelas expressões equivalentes identificadas (CI2).

2-º Momento – Criando e validando expressões algébricas

Ao longo da tarefa os alunos tiveram a oportunidade de escrever várias expressões algébricas para representar as medidas de área (alíneas d e f) e de analisar a validade de outras expressões (alínea e). Nesta exploração de exemplos, os alunos basearam-se em diferentes perspetivas para dar significado às expressões, nomeadamente, contexto da tarefa, conceitos e propriedades matemáticas e procedimentos. Na alínea h, como resultado das aprendizagens feitas, muitos alunos representaram uma medida de área por meio de várias expressões algébricas, como exemplificamos nos diálogos nas turmas A e C:

Ana: a ao quadrado, mais $2ab$, mais b ao quadrado.
Professora C: Porquê?
Ana: É a área do quadrado grande, mais a área do quadrado pequeno, mais a área do retângulo, duas vezes.
Marta: Fizemos a mais b, entre parênteses, vezes a mais b, entre parênteses também.
Professora C: Esta era muito importante. Como é que pensaram?
Marta: Fizemos a área do quadrado maior, de lado a mais b.
(Turma C, discussão coletiva, novembro de 2022)

Nuno: Eu fiz tudo com uma área só! Porque daqui a aqui é a mais b, e daqui a aqui também é a mais b. Então vai ser o a mais b, vezes o a mais b!
Professora A: Observem, o Nuno multiplicou um número por ele mesmo, o quê que dá?
António: Ao quadrado!
(Turma A, discussão coletiva, janeiro de 2022)

Pelas justificações dadas, vemos que as expressões equivalentes criadas pelos alunos são resultado de diferentes relações matemáticas que eles observaram. Na alínea i, os alunos deveriam validar a expressão $a(a+b)+b(a+b)$ para a mesma figura da alínea h:

Rosa: Eu usei a propriedade distributiva e deu o mesmo, a ao quadrado, que é a área do quadrado grande, ab que é a área dos retângulos e b ao quadrado, que é a área do outro quadrado.
Professora A: Mas se olharmos para a expressão do Pedro, como é que vemos as áreas?
Marcos: Professora, a figura está dividida em duas partes. É a área do lado esquerdo e do lado direito! $a(a+b)$ é a área deste retângulo $b(a+b)$ é a área deste retângulo.
Rosa: Ah, o comprimento é a mais b, depois a largura é a e depois b.
(Turma A, discussão coletiva, janeiro de 2022)

Professora B: Porque é que a expressão do Pedro está bem?
Sarah: Porque o a mais b é o comprimento, vezes a parte de cima, que é o a, depois a mais b multiplicado pelo b, que é a parte de baixo. E assim eu tenho o quadrado todo!
(Turma B, discussão coletiva, abril de 2022)

Por fim, os alunos deveriam validar as expressões $(a+b)^2$ e a^2+b^2 para esta mesma figura da alínea h. Muitos alunos, ao olharem para as expressões, afirmaram que ambas eram válidas:

Filipa:	Acho que a Ana está certa! Se está com parênteses o expoente é tanto do a como do b. Sem parênteses tem que se pôr o expoente nos dois!
Professora B:	Concordam com a Filipa?
Timóteo:	Eu não! O $a+b$ ao quadrado é a área do quadrado inteiro porque é um lado vezes o outro. Na outra expressão é a área do quadrado médio mais a área do quadrado pequeno, então não é o mesmo!
Filipa:	Ah, faltam os retângulos!

(Turma B, discussão coletiva, abril de 2022)

António:	As duas expressões são equivalentes, porque o quadrado fica no a e no b!
Marcos:	Não são equivalentes! Porque $a+b$ ao quadrado corresponde à área toda, e a ao quadrado mais b ao quadrado são só os quadrados de dentro. Então está incompleta!
António:	Ah, tens razão!

(Turma A, discussão coletiva, janeiro de 2022)

Marta:	As expressões não são equivalentes, mas não sei explicar.
Professora C:	Observem lá as expressões que nós escrevemos na alínea h.
Marta:	Ah, ficava a faltar o $2ab$!

(Turma C, discussão coletiva, outubro de 2022)

Neste momento os alunos apresentaram primeiramente as expressões que criaram, que constituem suas conjeturas sobre as medidas de área, justificandoas e argumentaram ainda sobre a validade de outras expressões apresentadas (R1 e R2). Suas justificações mostram novamente em que perspetivas os alunos se basearam para dar significado às expressões. Na criação das expressões estes significados estão baseados no contexto, pela observação da composição visual das figuras e no conceito de área de retângulo (S1 e S2). Já na validação de $a(a+b)+b(a+b)$ e de a^2+b^2, a maioria dos alunos deixou de referir o contexto, baseando-se na propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição para justificar $a(a+b)+b(a+b)$ e na realização de um procedimento equivocado para justificar a^2+b^2, nomeadamente pela aplicação da potenciação a a e a b para calcular $(a+b)^2$ (S2 e S3). Entretanto, alguns alunos se basearam na composição visual da figura e no conceito de medida de área para dar significado e argumentar sobre a validade destas duas expressões. A discussão coletiva foi fundamental para que outros alunos fizessem novas conexões e dessem significado às expressões a partir do contexto. Relativamente às competências de adoção e interpretação de símbolos, nesta fase final da tarefa, observamos uma maior facilidade na criação de expressões e que estas expressam relações matemáticas observadas pelos alunos (CA2). Há um maior reconhecimento por parte dos alunos que as expressões podem representar situações com exatidão (CA1) e dos diferentes aspetos de um significado evidenciado nas expressões equivalentes (CI2). As várias expressões exploradas levaram os alunos a praticarem não só este reconhecimento como a revisão de significados (CI1), no caso em particular das expressões $a(a+b)+b(a+b)$ e a^2+b^2.

5.3. Tarefa "Duas Sequências"

1.º Momento – Observar e generalizar

Em ambas as sequências, os alunos começaram a resolução procurando semelhanças, testando exemplos e elaborando conjeturas e generalizações. A busca imediata por expressões algébricas que gerassem termos quaisquer das sequências, foi observada no trabalho da maioria dos alunos, o que exemplificamos nos diálogos nas turmas B e C:

Jorge:	Nós fizemos logo uma expressão geral, $2n+1$, e testamos para várias posições.
Professora C:	E como é que chegaram a esta expressão?
Jorge:	2 é o que era adicionado, então ficou $2n$, e mais 1 porque daria sempre números pares e não os ímpares.

(Turma C, discussão coletiva, outubro de 2022)

Daniel:	Eu fiz a expressão $2n+1$, porque vamos sempre acrescentar mais 2.
Professora B:	Mas, de onde é que vem o mais 1?
Daniel:	É do quadrado que está na quina, na pontinha, no vértice.
Filipa:	Eu disse que é o da posição zero, porque depois é sempre a acrescentar 2.

(Turma B, discussão coletiva, abril de 2022)

Martin: Achamos melhor fazer a expressão geradora, que é n ao quadrado! Então a sétima posição é 7 ao quadrado, que é 49. E a décima quinta posição terá 225 quadrados!

Professora B: Quem é que quer explicar o porquê desta expressão geradora?

Leonor: Como são quadrados, posso fazer lado vezes lado, e o lado tem o mesmo número de quadrados da posição em que está!

(Turma B, discussão coletiva, abril de 2022)

Os alunos observaram regularidades entre o número de quadrados que compõe cada figura e a sua posição, formulando generalizações, como vemos numa observação feita por uma aluna da turma B:

Ester: São sempre ímpares, porque nós fazemos a posição vezes 2 que vai dar sempre um número par, só que aí temos de adicionar a posição 0, que é 1, então vai dar sempre ímpar.

(Turma B, discussão coletiva, abril de 2022)

Os alunos formularam conjeturas, generalizações e justificações sobre as sequências e os números que elas produziam (R1 e R2). Suas justificações evidenciam as perspetivas em que se basearam para lhes dar significado. No caso da primeira expressão, vimos a observação do contexto por muitos alunos, mas também o uso por outros alunos de um procedimento que consiste em observar o número que está a ser acrescentado de um termo para outro e multiplicá-lo pela ordem, verificando posteriormente o que seria necessário ajustar na expressão (S1 e S3). No caso da segunda expressão, como este procedimento não é válido, os alunos basearam-se no contexto, pela observação da relação entre o termo e a ordem e no conceito de números quadrados (S1 e S2). Relativamente às competências de adoção e interpretação de símbolos, vimos que neste contexto e para estas sequências os alunos já apresentam uma consciência de que é possível representá-las por meio de expressões (CA1) e têm mais facilidade em criá-las (CA2). Houve, por parte de alguns alunos, um exercício de revisão do significado das expressões criadas (CI1), em particular pela discussão do tipo de número que cada sequência produzia. Alguns alunos referiram as expressões $n + n + 1$ e $n \times n$, mas não houve uma exploração dos diferentes aspetos evidenciados nas sequências (CI2).

2.º Momento – Comparar sequências e expressões algébricas

Na comparação das duas sequências, diferentes conjeturas surgiram, mas uma delas foi destacada nas três turmas, o que exemplificamos pelos diálogos a seguir:

> Marcos: Os quadrados da sequência B completam os quadrados da sequência A.
> Professora A: Completam a formar o quê?
> Marcos: Um quadrado perfeito!
>
> (Turma A, discussão coletiva, janeiro de 2022)

> Duarte: Se juntarmos a mesma posição das duas sequências, vamos obter o quadrado que está na próxima posição da sequência B! Eu usei como exemplo a posição 2, mas dá com todas!
>
> (Turma B, discussão coletiva, abril de 2022)

Depois desta perceção visual das sequências, os alunos exploraram os números que elas resultavam (figura 6), vendo novamente que, ao somar os números das respetivas posições em cada sequência, teriam uma nova sequência de números quadrados perfeitos. Observaram também as expressões algébricas criadas, relacionando-as entre si (figura 6).

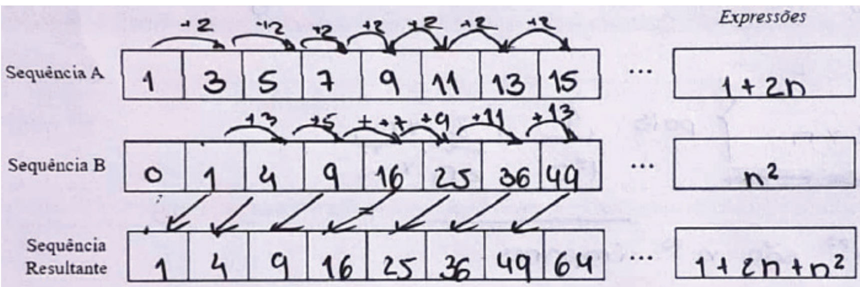


Figura 6. Resolução de uma aluna (Turma B).

No trabalho autónomo, muitos alunos escreveram a expressão $n^2 + 2n + 1$ a partir da consideração de que se adicionassem os respetivos números das sequências A e B, obteriam a sequência resultante. Na alínea c, os alunos compararam a sequência B e a sequência resultante e muitos deles destacaram a diferença relativa ao primeiro termo de cada uma delas. Estes alunos escreveram a expressão $(n+1)^2$ para representar o termo geral da sequência resultante e suas justificações nas discussões coletivas contribuíram para que outros alunos também dessem significado a esta expressão, o que exemplificamos por meio de um diálogo da turma B:

Filipa:	Eu escrevi que a sequência resultante é n mais 1 entre parênteses, ao quadrado.
Professora B:	O quê é este mais 1 da tua expressão?
Filipa:	É a posição que falta.
Ester:	É a posição 0! É o 1 de avanço que uma sequência tem em relação a outra.
Duarte:	Ah, uma é n ao quadrado e a outra é n mais 1, ao quadrado, por causa do 1 de avanço.
Professora B:	Mas voltem lá à alínea b, qual era a expressão resultante?
Sarah:	Era n ao quadrado, mais $2n$, mais 1.
Professora B:	E agora vocês disseram que a sequência resultante é n mais 1, ao quadrado. Estas duas expressões são equivalentes?
Timóteo:	Sim, sabemos pelos desenhos!
Professora B:	Mas só pelos desenhos?
Filipa:	Temos que fazer n mais 1, vezes n mais 1 para ter a certeza! Usar a distributiva!

(Turma B, discussão coletiva, abril de 2022)

Diferentes conjeturas foram apresentadas pelos alunos, apontando e justificando relações entre as sequências A, B e Resultante (R1 e R2). No trabalho autónomo vimos que muitos alunos deram significado à expressão n^2+2n+1 a partir da generalização que formularam a partir do contexto da tarefa (S1). Nas discussões, a expressão $(n+1)^2$ foi sugerida por poucos alunos em cada turma, tendo por base a ideia de sucessor e a generalização feita a partir de n^2 (S2 e S1), e a sua equivalência foi sustentada pela propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, que estes alunos sabiam aplicar (S2). A partir destas discussões outros alunos conseguiram dar significado a esta expressão. Neste segundo momento, os alunos exercitaram competências de adoção de símbolos pelo exemplo de que n^2+2n+1 e $(n+1)^2$ representava a situação apresentada (CA1) e por estas expressões terem sido criadas por eles a partir de relações observadas (CA2). Os alunos que não pensaram na expressão $(n+1)^2$ exercitaram a busca pelo significado desta expressão durante a discussão (CI1) e os que conseguiram criá-la demonstraram reconhecer aspetos diferentes evidenciados pelas expressões equivalentes (CI2).

6. DISCUSSÃO

Na realização destas tarefas, e ao longo de toda a experiência de ensino, observamos o envolvimento dos alunos na formulação e justificação de conjeturas e generalizações e que isto foi potenciado pelos princípios para a promoção do raciocínio matemático (Ponte *et al.*, 2020), pilares da experiência de ensino. A partir destes processos realizados, analisamos o uso da linguagem algébrica pelos alunos no quadro desta experiência, de acordo com o objetivo proposto. Nesta análise consideramos dois aspetos centrais: as perspetivas em que os alunos se baseiam para dar significado aos símbolos e expressões algébricas (S1, S2 e S3) e as competências de adoção e interpretação de símbolos que praticaram ou evidenciaram (CA1, CA2, CI1 e CI2). A seguir discutimos os resultados no que concerne a cada aspeto e de que modo eles estão relacionados no desenvolvimento do uso da linguagem algébrica com compreensão.

Relativamente às perspetivas usadas pelos alunos para dar significado aos símbolos, é preciso destacar primeiramente que a experiência de ensino buscou que os alunos refletissem sobre estes significados, como indicado por Friedlander y Arcavi (2017), promovendo e destacando tais momentos de reflexão. Destacamos também que a ideia de que os alunos podem dar significado aos símbolos a partir de diferentes perspetivas, apontada por White *et al.* (2023), foi fundamental na análise conduzida.

A formulação de conjeturas a partir da exploração do contexto das tarefas foi fundamental para que os alunos dessem significados aos símbolos e expressões algébricas (Lannin *et al.*, 2023) e suas justificações orais colocaram estes significados em evidência, favorecendo a discussão de ideias diferentes e a realização de novas conexões (NCTM, 2009). Na realização das tarefas os alunos usaram diferentes perspetivas para dar significados aos símbolos – contextos, conceitos e propriedades matemáticas e procedimentos (S1, S2 e S3). Vimos tanto situações em que os alunos referiam apenas uma perspetiva, como situações em que eles referiam mais de uma perspetiva, articulando-as. Observamos, entretanto, uma inclinação por parte da maioria dos alunos de se basear apenas na perspetiva procedimental para dar significado a expressões de maior complexidade, principalmente no caso de expressões com parênteses. Ao discutirem $(x+y)\cdot y$ e $a(a+b)+b(a+b)$, por exemplo, muitos alunos não apontaram inicialmente aspetos encontrados no contexto, mas deram ênfase ao procedimento a realizar pela propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Tal como White *et al.* (2023), vimos que ao usarem mais do que uma perspetiva para dar significado aos símbolos (S1, S2 e S3), os alunos chegaram a uma maior compreensão dos símbolos e expressões algébricas. Em particular, dar significado a uma expressão no contexto e articulá-la com as perspetivas dos conceitos, propriedades e procedimentos mostra-se essencial para a compreensão dos símbolos algébricos, como vimos por exemplo na discussão acerca das expressões $(a + b)^2$ e $a^2 + b^2$. Neste aspeto, observamos que as conjeturas, generalizações e justificações assumem um papel fundamental para que os alunos perspetivem o significado de expressões tanto no seu contexto, como destacam Lannin *et al.* (2023), como a partir de outras perspetivas, como apontam White *et al.* (2023).

No que concerne às competências de adoção e interpretação de símbolos, destacamos que a experiência de ensino considera a importância de criar oportunidades para que os alunos interpretem, criem e comparem expressões algébricas, tal como indicam Lannin *et al.* (2023). Neste cenário, vimos os alunos explorarem paralelamente a interpretação e a adoção dos símbolos ao longo das tarefas, praticando a competência de ver e rever os significados dos símbolos e expressões (CI1). Este aspeto foi evidenciado, em particular, pelas justificações apresentadas pelos alunos e pelas discussões em torno da validação de outras expressões. Por meio da ampla exploração do contexto e da formulação de conjeturas, os alunos exercitaram o reconhecimento de diferentes aspetos de um significado evidenciados por expressões equivalentes (CI2) e assim avançaram com mais facilidade para a criação de expressões (CA2), identificando e expressando relações matemáticas (Arcavi *et al.*, 2017; Lannin *et al.*, 2023), inclusive por meio de expressões equivalentes. Naturalmente, algumas destas expressões revelaram conceções erróneas dos alunos, situações nas quais as justificações orais e a argumentação entre os alunos ajudaram a clarificar os erros, proporcionando a realização de novas conexões (Ponte, 2022). Relativamente ao reconhecimento de que expressões algébricas podem representar com exatidão situações dadas (CA1), vimos que os alunos praticaram esta competência no contexto da tarefa "Tracejados e Áreas", avançando gradualmente nesta competência. No contexto da tarefa de sequências, entretanto, observamos que os alunos já reconhecem que as expressões podem representar as informações dadas e que usá-las é uma boa estratégia (CA1). Neste contexto, esta competência está mais desenvolvida e relacionamos este resultado com o facto deste tópico ser bastante explorado no currículo de Matemática dos anos anteriores. Salientamos que as conjeturas e generalizações formuladas pelos alunos ao longo das tarefas favoreceram a perceção da linguagem algébrica como um meio para expressar relações matemáticas, pela comunicação de ideias matemáticas que eles mesmos observaram, conjeturaram e testaram (Ponte *et al.*, 2020).

Considerando a questão de investigação proposta, observamos ao longo da experiência de ensino realizada e em particular das tarefas analisadas neste artigo, que a promoção do raciocínio matemático e as consequentes conjeturas, generalizações e justificações formuladas pelos alunos, favorecem o desenvolvimento do uso da linguagem algébrica com compreensão. As justificações dos alunos evidenciam os significados que atribuem aos símbolos e expressões algébricas, constituindo uma valiosa ferramenta para a realização de novas conexões e para a atribuição de novos significados aos símbolos algébricos, em particular pela articulação de diferentes perspetivas (S1, S2 e S3). Estas justificações favorecem a perceção de significado a partir de contexto, conceitos e procedimentos mesmo diante da predominância inicial da perspetiva procedimental assumida pelos alunos em expressões algébricas mais complexas. As conjeturas e generalizações feitas são essenciais na busca pelos significados dos símbolos e evidenciam para os alunos o valor prático da linguagem algébrica para expressar relações matemáticas. Deste modo, evidencia-se que a promoção do raciocínio matemático pode contribuir para o desenvolvimento gradual de competências de adoção e interpretação dos símbolos ao longo do trabalho dos alunos (CA1, CA2, CI1 e CI2).

7. CONCLUSÃO

Os resultados deste estudo indicam que a valorização do raciocínio matemático contribui para que os alunos deem significados aos símbolos e expressões algébricas com base em múltiplas perspetivas, nomeadamente, contexto da tarefa, conceitos, propriedades matemáticas e procedimentos, favorecendo o desenvolvimento do uso da linguagem algébrica com compreensão. Mostram ainda que, neste ambiente, os alunos praticaram competências de adoção e interpretação de símbolos algébricos, a partir tanto da exploração dos contextos das tarefas, que levou à formulação de conjeturas e generalizações, como das discussões coletivas, que produziram justificações e validações. Embora isto se tenha concretizado de formas distintas nos alunos, os pilares da experiência de ensino – a promoção do raciocínio matemático e o ensino exploratório – conduziram a que estas competências de sentido de símbolo ficassem em evidência na realização e discussão das tarefas.

A realização e análise de uma experiência de ensino com base em princípios para promover o raciocínio matemático dos alunos (Ponte *et al.*, 2020) na aprendizagem da linguagem algébrica com compreensão constitui um dos principais contributos de investigação deste artigo. A análise de perspetivas usadas pelos alunos para dar significado aos símbolos e as competências de adoção e interpretação dos símbolos por eles praticadas ao realizarem as tarefas contribui para uma maior compreensão do tema do uso da linguagem algébrica, com implicações para o ensino. Por fim, destacamos que futuros estudos contemplando diferentes tópicos algébricos ao longo de um ou mais anos escolares poderão ajudar a saber em que medida os alunos podem se tornar mais autónomos na realização de raciocínios matemáticos para dar significado aos símbolos e expressões algébricas e quais as implicações disso para a sua aprendizagem.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho é financiado pela FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia através da Bolsa de Doutoramento 2020.08843.BD e da UIDEF - Unidade de Investigação e Desenvolvimento em Educação e Formação, UIDB/04107/2020, https://doi.org/10.54499/UIDB/04107/2020.

REFERÊNCIAS

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14*(3), 24–35.

Arcavi, A., Drijvers, P., & Stacey, K. (2017). *The learning and teaching of algebra: Ideas, insights and activities.* Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315545189

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação.* Porto Editora.

Cobb, P., Jackson, K., & Dunlap, C. (2016). Design research: An analysis and critique. Em L. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3 ed., pp. 481–503). Routledge.

Friedlander, A., & Arcavi, A. (2017). *Tasks and competencies in the teaching and learning of algebra.* NCTM.

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics volume, 96*, 1–16. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

Jupri, A., Sispiyati, R., & Chin, K. (2021). An investigation of students algebraic proficiency from a structure sense perspective. *Journal on Mathematics Education, 12*(1), 147–158. https://doi.org/doi.org/10.22342/jme.12.1.13125.147-158

Kieran, C. (2022). The multidimensionality of early algebraic thinking: background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM Mathematics Education, 54*(1), 1131–1150. https://doi.org/doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6

Kindt, M., Roodhardt, A., Dekker, T., Wijers , M., Spence, M., Simon, A., Pligge, M., & Burrill, J. (2006). Patterns and figures. In Wisconsin Center for Education Research, & Freudenthal Institute, *Mathematics in Context.* Encyclopedia Britannica.

Kop, P., Janssen, F., Drijvers, P., & van Driel, J. (2020). The relation between graphing formulas by hand and students' symbol sense. *Educational Studies in Mathematics, 105*, 137–161. https://doi.org/doi.org/10.1007/s10649-020-09970-3

Lannin, J., Austin, C., & Geary, D. (2023). Developing meaning for mathematical expressions. *Mathematics Teacher: Learning and Teaching PK-12, 116*(8), 598–603. https://doi.org/10.5951/MTLT.2022.0234

Lannin, J., Ellis, A.B., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning: Pre-K-Grade 8*. NCTM.

NCTM (2009). *Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making.* NCTM.

Ponte, J.P. (2005). Gestão Curricular em Matemática. Em GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). APM.

Ponte, J.P. (2022). *Raciocínio matemático e formação de professores.* Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. http://reason.ie.ulisboa.pt/produtos/

Ponte, J.P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2020). Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula? *Educação e Matemática*, 7–11.

Sibgatullin, I., Korzhuev, A., Khairullina, E., Sadykova, A., Baturina, R., & Chauzova, V. (2022). A systematic review on algebraic thinking in education. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 18*(1), 1–15. https://doi.org/doi.org/10.29333/ejmste/11486

Somasundram, P. (2021). The role of cognitive factors in year five pupils' algebraic thinking: A structural equation modelling analysis. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 17*(1), 1–12. https://doi.org/doi.org/10.29333/ejmste/9612

Staples, M., Bartlob, J., & Thanheise, E. (2012). Justification as a teaching and learning practice: Its (potential) multifacted role in middle grades mathematics classrooms. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31, 447–462.

Vlassis, J., & Demonty, I. (2002). *A álgebra ensinada por situações-problemas.* Instituto Piaget.

White, I., Foster, M., & Lobato, J. (2023). Making sense of algebraic expressions in context. *Mathematics Teacher: Learning and Teaching PK-12, 116*(8), 604–612. https://doi.org/10.5951/MTLT.2022.0196

Autor de correspondencia:
Kelly Aguiar
Dirección: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa,
Alameda da Universidade, 1649-013 Lisboa.
kelly.aguiar@edu.ulisboa.pt