 https://doi.org/10.24844/EM3603.08

Significados personales sobre la demostración matemática de estudiantes al inicio de la educación superior

Students' personal meanings of mathematical proof at the start of higher education

Bettina Milanesio,[1] María Burgos[2]

Resumen. Cómo enseñar la demostración y cómo se produce su aprendizaje continúa siendo un reto tanto para los investigadores en educación matemática como para los propios profesores. Aunque las prácticas demostrativas están presentes en las clases de matemáticas en la etapa de secundaria, los estudiantes que acceden a titulaciones universitarias siguen mostrando grandes dificultades para desarrollar demostraciones con el grado de formalidad que se espera de la formación superior. El objetivo de este trabajo es analizar los significados personales sobre la demostración de estudiantes que acceden a los grados de física y matemáticas en una universidad argentina. Aplicamos el modelo de Toulmin y las herramientas teórico-metodológicas del Enfoque Ontosemiótico para caracterizar qué dificultades se encuentran, qué tipos de demostraciones desarrollan y cuáles son los niveles de formalización logrados. Los resultados de sus producciones muestran, por un lado, el predominio de argumentaciones no deductivas y la escasa presencia de demostraciones formales; por otro el avance en la comprensión y desarrollo de demostraciones de un mayor nivel de formalización, con la puesta en común y la discusión grupal.

Fecha de recepción: 25 de octubre de 2023. **Fecha de aceptación:** 5 de agosto de 2024.

[1] Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada, bettinamilanesio@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-2489-0004.

[2] Universidad de Granada,. mariaburgos@ugr.es, https://orcid.org/0000-0002-4598-7684.

Palabras clave: *educación superior, demostración matemática, niveles de algebrización, modelo de Toulmin, Enfoque ontosemiótico.*

Abstract. Teaching proof and how its learning occurs continues to be a challenge for both mathematics education researchers and teachers themselves. Although demonstrative practices are present in high school mathematics classes, students entering university degree programs still show significant difficulties in developing proofs to the level of formality expected in higher education. The objective of this work is to characterize the personal meanings of proof for students entering physics and mathematics programs at an Argentine university. We apply the Toulmin model and the theoretical-methodological tools of the Ontosemiotic Approach to analyze the difficulties encountered, the types of proofs developed, and the levels of formalization achieved. The results of their productions show, on the one hand, the predominance of non-deductive arguments and the limited presence of formal proofs; on the other hand, progress in the understanding and development of proofs of a higher level of formalization through group sharing and discussion.

Keywords: *higher education, mathematical proof, algebrization levels, Toulmin model, ontosemiotic approach.*

1. INTRODUCCIÓN

Demostrar es una parte indispensable del quehacer matemático, por lo que un objetivo fundamental de la enseñanza de las matemáticas debe ser que los estudiantes produzcan, comprendan y aprecien las demostraciones participando en prácticas demostrativas a lo largo de su educación (Stylianides y Stylianides, 2017; Weber *et al.*, 2020).

Si bien en la comunidad de matemáticos se comparte el significado de demostración matemática, entendida de un modo riguroso y absoluto (Godino y Recio, 2001), esto no ocurre entre los educadores matemáticos (Stylianides *et al.*, 2016), para los que la definición de demostración debe tener en cuenta el contexto en el que se utiliza, el grado de formalidad con el que se emplea y las restricciones de la propia disciplina (Stylianides *et al.*, 2022). Esto lleva a reconocer la importancia de otras formas de aproximarse a la demostración con distintos grados de formalidad y estructuras diferentes tales como justificación, validación, explicación, prueba y especialmente, la argumentación (Alfaro-Carvajal *et al.*, 2019; Balacheff, 2000; Godino y Recio, 2001; Pedemonte y Balacheff, 2016; Stylianides *et al.*, 2016; Stylianides *et al.*, 2017).

El papel de la demostración en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y la complejidad intrínseca a este mega-proceso, hace imprescindible que el profesor de matemáticas sea consciente sobre qué entienden los estudiantes por demostrar en matemáticas y qué dificultades encuentran en esta tarea. De esta forma podrán encontrar elementos de convergencia para apoyar el compromiso de los estudiantes con la práctica demostrativa (Alfaro-Carvajal *et al.*, 2019; Stylianides y Stylianides, 2022). Puesto que, en contextos escolares, la noción de demostración se abre a argumentaciones deductivas informales y a argumentaciones no deductivas (Godino y Recio, 2001), diversos autores se han preocupado por caracterizar las diferentes maneras de argumentar que se manifiestan en el aula (Alfaro-Carvajal *et al.*, 2019; Arce y Conejo, 2019; Cañadas, 2007; Inglis y Mejia-Ramos, 2005; Inglis *et al.*, 2007; Juthe, 2005; Molina y Samper, 2019; Molina *et al.*, 2019; Soler-Álvarez y Manrique, 2014). En su mayoría, estos trabajos adoptan el modelo de Toulmin (2003) para categorizar las argumentaciones propuestas por estudiantes ante diferentes tipos de tareas, observando predominio de argumentaciones inductivas, abductivas, analógicas o plausibles, que, si bien no son las pretendidas institucionalmente para validar de manera general el conocimiento matemático, son fundamentales en los procesos de experimentación y elaboración de conjeturas.

Las investigaciones que analizan las dificultades de los estudiantes en los procesos de comprensión y desarrollo de demostraciones insisten en que muchas de estas limitaciones vienen motivadas por las diferencias existentes entre las demostraciones desarrolladas a nivel escolar y las desarrolladas en el nivel universitario (Chacón, 2009; Lew y Mejía-Ramos, 2019; Nagel *et al.*, 2018, Rocha, 2019; Stylianides y Stylianides, 2017; Stylianides *et al.*, 2017).

Para Stylianides y Stylianides (2017) aceptar en un nivel educativo una forma argumentativa que se va a rechazar después en un nivel superior, supone un obstáculo para el alumnado, al que se le exige que rompa con ideas previas sobre lo que es una demostración matemática. La distancia estructural entre las argumentaciones informales y la argumentación deductiva que rige una demostración formal motiva que estudiantes de nivel universitario carezcan de las competencias necesarias para elaborar demostraciones con éxito, bien porque no dan sentido a enunciados con una estructura lógica compleja o no logran identificar argumentos inválidos (Stylianides *et al.*, 2017). Nagel *et al.* (2018) reconocen que la ausencia de demostraciones formales en el nivel secundario obliga a los estudiantes a superar diversas barreras para sobrellevar con éxito las demostraciones en la entrada al nivel universitario. Así, se les exige de manera prematura desarrollar habilidades avanzadas de razonamiento matemático para desenvolverse en las prácticas demostrativas, cuando están empezando a aprender la estructura de la demostración (Nagel *et al.*, 2018). Al comienzo de la etapa universitaria, los estudiantes no están familiarizados con el lenguaje formal (Rocha, 2019) ni con las convenciones de la escritura de las demostraciones matemáticas (Lew y Mejía-Ramos, 2019). Finalmente, presentar de manera extrema las matemáticas como producto axiomático-deductivo, motiva que estudiantes puedan desanimarse al verse empujados a un nivel con excesiva formalidad (Chacón, 2009).

Aunque estas investigaciones dan cuenta de la complejidad que entraña el estudio de la demostración matemática en diferentes etapas educativas, no han abordado, sin embargo, el origen de las dificultades que encuentran los estudiantes o los tipos de demostraciones que logran desarrollar a partir del análisis de los significados pragmáticos, es decir, en términos de los objetos y procesos que intervienen en las prácticas demostrativas y su grado de generalidad. Un primer avance se ha llevado a cabo en trabajos que toman el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino *et al.*, 2019) como marco de referencia para analizar la actividad matemática implicada en la demostración (Godino y Recio, 2001; Markiewicz *et al.*, 2021; Molina *et al.*, 2019; Recio y Godino, 2001). En particular, en Markiewicz *et al.* (2021) se analizan los objetos y procesos que emergen en las prácticas argumentativas logradas por estudiantes del último año de la escuela secundaria. Las autoras determinan los niveles de algebrización (Godino *et al.*, 2015) donde se sitúan dichas prácticas y los conflictos semióticos que obstaculizan el avance hacia la argumentación deductiva pretendida en la universidad. Esta investigación permite constatar ciertas distancias entre las pruebas logradas por estudiantes del último año de la escuela secundaria y las pretendidas en el nivel superior, dando cuenta de la necesidad de revisar las prácticas que se desarrollan en cada ámbito, con el fin de avanzar en una mayor articulación entre ambos niveles educativos.

El análisis de las prácticas, objetos y procesos y del nivel de generalidad se ha mostrado como una herramienta potente para caracterizar conocimientos institucionales o personales y analizar dificultades en distintos contenidos matemáticos y etapas educativas (Burgos y Godino, 2020; Gaita *et al.*, 2023; Godino *et al.*, 2014; entre otros). En línea con estos trabajos, nos proponemos caracterizar los significados personales sobre la demostración en estudiantes al inicio de la educación superior, a partir del análisis de sus prácticas matemáticas. Para cumplir este objetivo abordamos las siguientes cuestiones de investigación:

- ¿Qué estrategias argumentativas ponen de manifiesto los estudiantes en el ingreso al nivel superior?
- ¿Cuáles son los niveles de razonamiento algebraico identificados en sus prácticas matemáticas?
- ¿Cuáles son las dificultades que ponen en evidencia ante una situación que requiera justificar o demostrar?

En las prácticas demostrativas se pueden identificar diferentes niveles de razonamiento algebraico (Godino *et al.*, 2014), es decir, diferentes grados de generalidad de los objetos implicados, de los lenguajes usados y del cálculo analítico que se realiza con dichos objetos. Esto permite una categorización más profunda de los significados personales puestos en juego y facilita una nueva mirada a las dificultades encontradas por los estudiantes.

2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

En esta sección se describen los elementos esenciales del EOS como marco teórico utilizado en el diseño, implementación y evaluación de la investigación, así como los diferentes tipos de argumentación con base en el modelo de Toulmin.

2.1. EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICOS

El EOS entiende las matemáticas como una actividad de las personas implicadas en la solución de cierta clase de situaciones e interpreta el significado pragmático de los objetos matemáticos en términos de los sistemas de prácticas operativas y discursivas que se ponen en juego en la solución de dichas situaciones (Godino *et al.*, 2019) por una persona (significado personal) o institución (significado institucional). El aprendizaje tiene como finalidad la apropiación por los estudiantes de los significados institucionales que le permitan afrontar la solución de determinados problemas y desarrollarse como persona.

Las dificultades y limitaciones de aprendizaje se interpretan en el EOS como disparidades o desajustes entre el significado manifestado por un sujeto y el significado institucional de referencia.

Significado pragmático

Se considera *práctica matemática* a toda actuación o expresión realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos. En estas prácticas intervienen *objetos matemáticos* entendidos como entidades que pueden ser separadas o individualizadas según su naturaleza y función. Pero, además de por su "estructura" (los objetos), la actividad matemática queda caracterizada por su "funcionamiento" (cómo interactúan los objetos), lo que lleva a hablar de *procesos matemáticos* concediéndole una perspectiva dinámica (Font *et al*., 2010). Así, los diferentes tipos de objetos matemáticos primarios: lenguajes, conceptos, proposiciones, argumentos, procedimientos y situaciones-problemas, emergen por medio de los respectivos procesos de comunicación, definición, enunciación, argumentación, algoritmización y problematización.

Por otro lado, estos objetos primarios pueden ser considerados desde cinco dimensiones duales, lo que lleva a la siguiente tipología de objetos secundarios: ostensivos (públicos) - no ostensivos (ideales); extensivos (particulares) - intensivos (generales); significantes (expresión) - significados (contenido) (antecedentes o consecuentes de una función semiótica); unitarios (considerados como un todo previamente conocido) - sistémicos (sistemas formados por distintos componentes); personales (sujetos individuales) - institucionales (compartidos en una institución). Tanto los objetos primarios como los secundarios se pueden considerar desde la perspectiva proceso-producto, lo que permite distinguir tipos de procesos matemáticos primarios (aquellos de los que emergen los objetos primarios) y secundarios (de los que emergen los objetos secundarios).

El reconocimiento explícito de tales objetos y procesos permite anticipar conflictos semióticos potenciales o efectivos entendidos como cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa (Godino *et al*., 2007).

Modelo de razonamiento algebraico elemental

El modelo de los niveles de razonamiento algebraico elemental (RAE) desarrollado en el EOS (Godino *et al.*, 2014; Godino *et al.*, 2015) describe la actividad matemática en términos del grado de generalidad y formalización de los objetos y procesos matemáticos implicados, facilitando un análisis microscópico de las prácticas y, por tanto, de los significados, institucionales o personales (Godino y Burgos, 2017) que se ponen en juego en el estudio de la demostración.

Los criterios para delimitar los niveles están basados en los objetos (relaciones binarias, operaciones y sus propiedades, funciones y estructuras) y representaciones usadas, el grado de generalidad o intensión y el cálculo analítico que se pone en juego en la actividad matemática. Además, el reconocimiento de la naturaleza algebraica en las prácticas matemáticas viene ligado a la identificación de los procesos de generalización, unitarización, representación y cálculo analítico. Mientras que, a través de un proceso de generalización se obtiene un objeto intensivo (regla que genera la clase), como resultado de un proceso de particularización se obtiene un objeto extensivo (particular). Una colección finita simplemente enumerada no se considera como un intensivo hasta el momento en que el sujeto muestra el criterio que se aplica para delimitar los elementos constituyentes del conjunto. En este momento el conjunto pasa a ser una entidad unitaria emergente del sistema, es decir, además de la generalización ocurre un proceso de unitarización. Esta nueva entidad unitaria debe ser materializada para que pueda participar de otras prácticas, procesos y cálculos mediante procesos de representación y transformación (Godino *et al.*, 2014). En concreto, los niveles de RAE son:

- Nivel 0 (N0). Se distingue por la ausencia de algebrización; se opera con objetos intensivos de primer grado de generalidad usando lenguajes natural, numérico, icónico o gestual.
- Nivel 1 (N1). Involucra objetos intensivos de segundo grado de generalidad (clases de intensivos de grado uno), propiedades de la estructura algebraica de $\mathbb{N}$ y la igualdad como equivalencia. La generalidad se reconoce de manera explícita mediante los lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos, pero sin operar con estos.
- Nivel 2 (N2). Se usan representaciones simbólico-literales para referir a objetos intensivos reconocidos ligados a la información y contextual; en

tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.
- Nivel 3 (N3). Los símbolos se emplean de forma analítica. Se realizan operaciones con indeterminadas o variables y se formulan de manera simbólica y descontextualizada reglas canónicas de expresión de funciones y patrones.
- Nivel 4 (N4). Primer encuentro con parámetros y coeficientes variables que implica la función paramétrica, esto es, la función que asigna a cada valor del parámetro una función o ecuación específica. Se opera con coeficientes variables, pero no con parámetros.
- Nivel 5 (N5). Tratamiento de parámetros. Se realizan cálculos analíticos en los que intervienen uno o más parámetros, junto con otras variables.
- Nivel 6 (N6). Introducción de algunas estructuras algebraicas (como la de espacio vectorial o grupo) y el estudio del álgebra de funciones.

Reconocer diferentes grados de generalidad y formalización en las prácticas que implican demostración permite definir significados parciales y establecer relaciones jerárquicas entre ellos en función de su complejidad e interdependencia.

Configuración didáctica y hecho didáctico significativo

En el EOS se introduce la noción de *configuración didáctica* como cualquier segmento de actividad didáctica comprendido entre el inicio y la finalización de la resolución de una tarea determinada. Contempla las acciones de los estudiantes y del profesor, así como los medios planificados o usados para abordar el estudio conjunto de la tarea a propósito de los objetos y procesos matemáticos que involucra (Godino *et al*., 2020).

En el transcurso de una configuración didáctica, pueden ocurrir hechos didácticos que interesa analizar, entendidos como cualquier acontecimiento que tiene un lugar y un tiempo en los procesos de instrucción matemática y que se considera una unidad. En particular, se considera un *hecho didáctico significativo* (HDS) cuando las acciones o prácticas didácticas que lo componen desempeñan una función o admiten una interpretación con relación al objeto instruccional pretendido. La significatividad se puede entender desde la perspectiva del docente, del alumno, o bien desde un punto de vista externo al sistema didáctico, constituido por el sujeto que ha realizado el estudio preliminar y el diseño instruccional.

2.2. Demostración, argumentación y el modelo de Toulmin

Se proporcionan las definiciones adoptadas en este trabajo de argumentación y demostración y se decribe el modelo de Toulmin para el análisis de la actividad argumentativa.

Consideramos la argumentación como "un proceso colectivo o individual que, de acuerdo con reglas compartidas, apunta a una conclusión mutuamente aceptable acerca de la veracidad o falsedad de una aserción" (Molina *et al.*, 2019, p. 95). A partir de un proceso de argumentación se desarrollan acciones propias del quehacer matemático, tales como, inducir, proponer analogías, abducir propiedades de hechos empíricos para la formulación de conjeturas, proveer pruebas deductivas de hechos previamente conjeturados y comunicar los resultados obtenidos (Molina y Samper, 2019).

En relación con la demostración, desde el punto de vista de la educación matemática, es fundamental adoptar una postura sobre la demostración que, además de respetar la integridad matemática, la concepción de demostración considere el papel de la comunidad del aula, pues las demostraciones deben tener sentido para los estudiantes en el contexto educativo en el que se insertan (Larios-Osorio *et al.*, 2018; Stylianides *et al.*, 2017). Así, consideramos la demostración como un tipo de argumentación en matemáticas que tiene las siguientes características (Stylianides *et al.*, 2017):

a) Utiliza un conjunto de aserciones aceptadas como verdaderas y que están disponibles para la comunidad de aula sin más justificación.
b) Se usan modos de argumentación válidos y conocidos por la comunidad o que están dentro de su alcance conceptual.
c) Se comunica con formas de expresión apropiadas, conocidas o dentro del alcance conceptual de la comunidad de aula.

Así, una demostración es una argumentación en matemáticas, pero no toda argumentación es una demostración. Además, Stylianides *et al.* (2017) distinguen entre la demostración entendida como producto, es decir, una secuencia conectada de afirmaciones, y como proceso que implica acciones en la búsqueda de una conclusión a favor o en contra de una afirmación matemática. En estas acciones pueden estar implicadas actividades precursoras de la demostración, tales como, conjeturar mediante el uso de ejemplos, analogías, inducción, abducción, entre otros, esenciales para el aprendizaje de los escolares (Larios-Osorio *et al.*, 2018; Marmolejo y Moreno, 2021; Stylianides *et al.*, 2022).

Como hemos mencionado, diferentes autores han tomado el modelo de Toulmin (2003) para caracterizar las argumentaciones que se manifiestan en las clases de matemáticas, documentar las dificultades que encuentran los estudiantes con la demostración y analizar cómo progresa el aprendizaje (Arce y Conejo, 2019; Molina y Samper, 2019; Molina *et al.*, 2019; entre otros). Tanto Arce y Conejo (2019) como Soler-Álvarez y Manrique (2014) emplean la idea de razonamiento de Peirce, quien lo entiende como un proceso mediante el cual se llega a una conclusión a partir de unas premisas, y conduce a un conocimiento verdadero para quien razona. Teniendo en cuenta esa concepción, Soler-Álvarez y Manrique (2014) afirman que un razonamiento para Peirce se puede considerar un tipo de argumento según Toulmin (2003). Por otro lado, desde la perspectiva pragmática del EOS se entiende el razonamiento como un sistema de acciones (prácticas operativas y discursivas) que involucran un proceso de argumentación.

> Desde un punto de vista cognitivo, las relaciones entre razonamiento y argumentación son las que se establecen entre un constructo y sus indicadores empíricos. [El razonamiento] como actividad intelectual que no puede reducirse meramente a la manipulación de informaciones, da origen a las prácticas argumentativas, personales o institucionales, que constituyen su dimensión ostensiva y comunicacional. Al mismo tiempo, el razonamiento se desarrolla por medio de dichas prácticas, de modo que el estudio del razonamiento está constitutivamente ligado al estudio de la argumentación. (Godino y Recio, 2001, p. 406)

Toulmin (2003) estudió el funcionamiento de los argumentos a fin de comprobar cómo se relaciona su validez con su estructura, teniendo en cuenta la forma lógica involucrada en cada argumento. Siguiendo a este autor, entendemos por argumento un discurso oral o escrito producto de un proceso de argumentación compuesto por tres elementos básicos: *conclusión* (se manifiesta una afirmación u opinión cuyo valor se está tratando de establecer), *datos* (permiten apoyar la afirmación realizada, la conclusión) y *garantía* (posibilita que el paso de los datos a la conclusión sea legítimo, ya que, permite conectarlos mediante una justificación a partir de inferencias basadas en reglas generales, principios, enunciados). Toulmin también considera tres elementos auxiliares que permiten describir un argumento: *respaldo* (otras certezas que soportan la garantía), *calificativo modal* (grado de fuerza o de probabilidad conferida por la garantía que acompaña a la conclusión) y *refutaciones* (condiciones de excepción en las que la garantía se podría anular) (figura 1).

El objetivo de Toulmin fue proporcionar un modelo que sirviera para analizar argumentos en general y no solo deductivos (Pedemonte y Reid, 2011), por lo que será de especial utilidad en este trabajo.

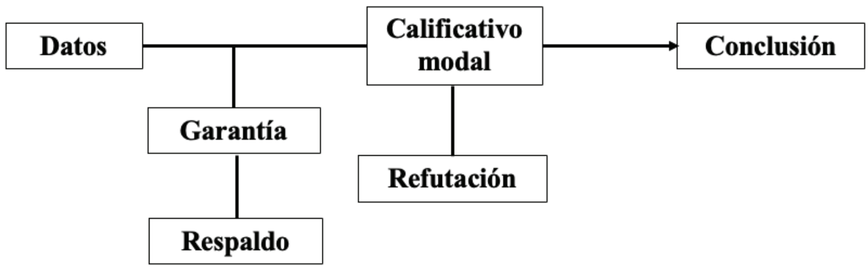


Figura 1. Esquema argumentativo según Toulmin (2003, p. 141).

A continuación, caracterizaremos con base en el modelo de Toulmin las argumentaciones más relevantes para este trabajo: abductiva, inductiva, deductiva, analógica y plausible.

En el argumento que surge en una *argumentación abductiva*, un hecho observado (conjetura) actúa como conclusión, y se propone una posible explicación que lo justifique a partir de posibles datos, una garantía y un respaldo (Arce y Conejo, 2019). La garantía actúa como una regla hipotética que proviene de una exploración empírica o de una regla aceptada dentro de una exploración teórica (Molina y Samper, 2019). Está respaldada por un enunciado o una teoría matemática de la cual podría derivarse la garantía.

La *argumentación inductiva* parte de la evidencia empírica sobre casos particulares para concluir una afirmación matemática general, por lo que, el proceso de generalización desempeña un papel fundamental. Siguiendo el modelo de Toulmin (2003), en el argumento que surge, los datos corresponden a verificaciones en casos particulares de la conclusión y la garantía está respaldada por la verificación de la conclusión en esos casos concretos, aunque es insuficiente para inferir la validez de la conclusión. Por esto, se deriva de forma plausible y provisional un enunciado general (conclusión) (Arce y Conejo, 2019; Molina *et al.*, 2019).

La *argumentación deductiva* se produce generalmente en los procesos de demostración de conjeturas, siendo la única que permite validar conocimiento en matemáticas, irrefutable a excepción de que existan cambios en el sistema axiomático de partida. En el argumento emergente de esta argumentación se aplica una proposición general conocida (garantía) a unos datos dados para obtener la conclusión. A su vez, la garantía está respaldada por una teoría matemática que hace que la misma sea válida. (Arce y Conejo, 2019; Molina *et al.*, 2019).

Soler-Álvarez y Manrique (2014) e Inglis *et al.* (2007) consideran el uso de contraejemplos como argumentaciones deductivas. Soler-Álvarez y Manrique (2014) los caracterizan a partir del modelo de Toulmin (2003), tomando como dato al caso no válido $\exists y: (P(y) \wedge \neg Q(y))$, como garantía la regla general $\forall x: (P(x) \rightarrow Q(x))$, como respaldo la equivalencia lógica $\forall x: (P(x) \rightarrow Q(x)) \leftrightarrow \neg\exists y: (P(y) \wedge \neg Q(y))$ y como conclusión, el no cumplimiento de la regla general.

En el argumento analógico producto de una *argumentación analógica* se obtiene una conclusión a partir de premisas en las que se establece una analogía o comparación entre elementos o conjuntos de elementos distintos (Cañadas, 2007). Para Juthe (2005) un buen argumento por analogía es aquel en el que: el contenido de los datos y la conclusión están adecuadamente relacionados; los datos son verdaderos, probables o fiables; la prueba adecuada de la conclusión es una analogía correcta enunciada en uno o varios datos.

En estas argumentaciones, la garantía corresponde a la relación entre un hecho conocido y el caso que se está estudiando (Soler-Álvarez y Manrique, 2014). El respaldo hace referencia a la analogía entre los dominios donde se desarrolla la argumentación, aunque no proporciona ciertamente un respaldo para las garantías pues no las justifica (Marraud, 2007). Se infiere de manera plausible la conclusión (conjetura).

Las *argumentaciones plausibles* son definidas por Polya (1954) como aquellas que permiten observar, relacionar, buscar regularidades, elaborar conjeturas que parecen acertadas, examinar su validez, contrastarlas y reformularlas para obtener nuevas hipótesis susceptibles de ser puestas a prueba. Como asegura este autor, una buena parte de nuestra confianza en las demostraciones puede proceder de estos argumentos. Si bien pretenden guiar hacia lo que probablemente es verdad –sin que necesariamente se haya terminado o sea cierto– no permiten probar la validez del conocimiento matemático en cuestión (Cañadas, 2007).

De acuerdo con Inglis y Mejía-Ramos (2005), entenderemos al argumento que da lugar una argumentación plausible como aquel en el que, a partir de considerar la evidencia, la garantía, el respaldo y la conclusión se intenta decidir por uno mismo el calificativo modal (específica la fuerza de la aserción, expresando el grado de confianza en la tesis) con el cual uno completaría el argumento.

En la práctica escolar, el modelo de Toulmin (2003) usado por autores como Soler-Álvarez y Manrique (2014) o Arce y Conejo (2019) permite esclarecer las partes en las que se puede descomponer una práctica argumentativa, poniendo al descubierto las relaciones lógicas y, por ende, la estructura (Soler-Álvarez y Manrique, 2014). Una vez reconocida la estructura de dicha práctica (el tipo de estrategia argumentativa), el análisis de los niveles de algebrización, permite tomar conciencia de la naturaleza de los objetos y procesos emergentes.

3. METODOLOGÍA

Se trata de una investigación descriptiva de enfoque mixto: cualitativa, pues permite describir e interpretar las competencias y dificultades de estudiantes con la demostración matemática y cuantitativa, pues facilita el tratamiento de los datos a través de la categorización, medición y descripción de las características y los perfiles del grupo de participantes. Empleamos el análisis de contenido (Cohen *et al.*, 2011) de los informes de los estudiantes, apoyado en las categorías del EOS (prácticas, objetos y procesos, niveles de RAE, conflictos semióticos). La primera autora de este trabajo realizó el análisis a priori de la tarea de evaluación (resolución, descripción de las prácticas, objetos, procesos, niveles de RAE e identificación de potenciales conflictos), que fue después revisado y completado (cuando fue necesario) por la segunda autora. A continuación, ambas realizaron de manera independiente el análisis descriptivo de los informes de los estudiantes y finalmente de manera conjunta discutieron sus discrepancias, acordando las categorías resultantes del análisis, en un proceso cíclico e inductivo, característico de la investigación cualitativa. De igual forma, las investigadoras consensuaron los criterios de pertinencia de las respuestas de los estudiantes.

3.1. CONTEXTO Y PARTICIPANTES

Los participantes del estudio fueron un grupo de 31 estudiantes de ingreso en el primer curso universitario de las carreras de grado Profesorado y Licenciatura en Matemáticas y Licenciatura en Física en la Universidad Nacional de Río Cuarto (Argentina) en el año 2023. El nivel de desempeño en matemáticas de estos estudiantes era estándar según los resultados de los cursos de nivel secundario.

La implementación se llevó a cabo durante la primera clase de las actividades del ingreso en la asignatura Matemática Discreta que comparten estos estudiantes (actividades desarrolladas a lo largo de un mes para iniciar al alumnado en los contenidos de la asignatura), por lo que no hubo un proceso formativo previo (los conocimientos disponibles de los estudiantes fueron los estudiados en educación secundaria). La docente a cargo de la asignatura proporcionó el problema a los estudiantes para que lo resolvieran de forma individual. Cuando los estudiantes manifestaron haberlo finalizado, se llevó a cabo la puesta en común de la solución a los tres primeros ítems, con la intención de discutir las estrategias argumentativas empleadas y su adecuación para validar de manera general el conocimiento implicado.

3.2. Instrumento de recogida de datos y análisis a priori

En este trabajo mostramos el análisis de los resultados obtenidos en uno de los problemas propuestos (figura 2) que involucra la demostración de diversas propiedades matemáticas, en un contexto aritmético-algebraico cercano a los conocimientos esperados de los estudiantes. Escogimos este problema teniendo en cuenta, por un lado, los contenidos expuestos en las directrices curriculares de los últimos cursos de educación secundaria, considerando que los estudiantes acababan de ingresar al nivel universitario. Por otro lado, acordamos con la profesora que impartía la asignatura Matemática Discreta el contexto matemático del problema, teniendo en cuenta los contenidos que se abordarían en la misma.

En cada caso, justifica tu respuesta.

a) Si se suman tres números naturales consecutivos cualesquiera, ¿el resultado es siempre un múltiplo de 3?

b) Si se suman cinco números naturales consecutivos cualesquiera, ¿el resultado es siempre múltiplo de 5?

c) ¿Cuándo será cierto que, si se suman k números naturales consecutivos cualesquiera, el resultado es múltiplo de k?

d) El resultado de la suma de cinco números naturales que tienen distinto resto al dividirlos por cinco, ¿es un múltiplo de cinco?

Figura 2. Problema propuesto. Fuente: ítems a y b tomados de Sessa (2005, p. 113), ítem c adaptado de Sessa (2005, p. 113), ítem d adaptado de Quercia *et al.* (2014, p.752)

La tarea perseguía la puesta en juego de diversos objetos matemáticos (números naturales consecutivos, múltiplos, números impares, propiedades de la suma y multiplicación en $\mathbb{N}$, propiedades de la división entre naturales y del resto de la división) y de procesos como la exploración de diferentes ejemplos, la búsqueda de contraejemplos, el planteamiento de conjeturas y la propuesta de alguna demostración que permita validar dichas conjeturas. En el caso del ítem c), si bien no se esperaba una excesiva formalidad en la demostración de la doble generalización involucrada distinguida en Sessa (2005) (comienzo de la suma por cualquier número natural y cualquier cantidad de sumandos implicados), si era previsible que desarrollen algún tipo de argumentación menos sofisticada. A continuación, se presentan las soluciones expertas a los diferentes apartados del problema, identificando potenciales conflictos semióticos por parte de los estudiantes.

En la tabla 1 se incluye la configuración ontosemiótica de la solución al primer apartado, como ejemplo del tipo de análisis realizado de las prácticas esperadas. Por limitaciones de espacio, en las siguientes consignas solo se incluyen las prácticas matemáticas que conducen a la solución experta.

Tabla 1. Configuración ontosemiótica apartado a)

Secuencia de prácticas, objetos y procesos		
Práctica elemental 1. La suma de tres naturales consecutivos se puede representar por $m+(m+1)+(m+2)$, con $m \in \mathbb{N}$, fijo pero arbitrario.		
Intencionalidad	Objetos	Procesos
Atribuir significado a la suma de tres naturales consecutivos cualesquiera como $m+(m+1)+(m+2)$, con $m \in \mathbb{N}$, identificando la generalidad del natural m.	*Conceptos:* números naturales, suma, números naturales consecutivos. *Lenguajes:* natural, simbólico. *Procedimientos:* representar la suma de tres naturales consecutivos en lenguaje simbólico. *Propiedad disponible:* $(m+2)=(m+1)+1$ es el consecutivo de $m+1$.	*Representación:* la expresión “suma de tres naturales consecutivos cualesquiera” se traduce de manera simbólica como $m+(m\ +1)+(m+2)$, con $m \in \mathbb{N}$. Se representa con m a un natural fijo pero arbitrario. *Generalización:* tomar m como un natural concreto pero arbitrario. *Significación:* interpretar, por ejemplo, $m+1$ como el consecutivo de m. *Idealización:* el ostensivo $m+(m\ +1)$ $+(m+2)$ evoca la suma de tres naturales consecutivos cualesquiera. *Reificación:* se sintetiza la suma de tres naturales consecutivos en la expresión unitaria $m+(m+1)+(m+2)$.
Práctica elemental 2. Aplicando las propiedades asociativa y conmutativa de la suma en $\mathbb{N}$ y agrupando términos semejantes en la expresión anterior, se obtiene $m+(m+1)+(m+2)=3m+3$. Por la propiedad distributiva en $\mathbb{N}$, se obtiene que $3m+3=3\times(m+1)$, que es múltiplo de 3, ya que, $m+1 \in \mathbb{N}$ por cierre de la suma en $\mathbb{N}$.		
Intencionalidad	Objetos	Procesos
Reescribir la expresión $m+(m+1)+(m+2)$ como un múltiplo de 3.	*Conceptos:* números naturales, suma, producto, múltiplo. *Lenguajes:* natural, simbólico. *Procedimientos:* Simplificar la expresión $m+(m+1)+(m+2)$ hasta obtener $3m+3$. Extraer factor común para obtener $3\times(m+1)$. *Propiedades disponibles (PD):* PD1. Asociativa de la suma en $\mathbb{N}$. PD2. Conmutativa de la suma en $\mathbb{N}$. PD3.Distributiva del producto respecto a la suma en $\mathbb{N}$. PD4. Cierre de la suma en $\mathbb{N}$. *Proposiciones emergentes (PE):* PE1: $m+(m+1)+(m+2)=3m+3$. PE2: $3m+3=3\times(m+1)$ *Argumentos:* basados en las propiedades disponibles y la definición de múltiplo.	*Idealización y representación*: asociados al cálculo sintáctico para expresar $m+(m+1)+(m+2)$ como $3m+3$ y $3m+3$ como $3\times(m+1)$. *Reificación:* los símbolos que participan del cálculo sintáctico se desprenden de los objetos a los que representan para participar de transformaciones. *Descomposición:* los objetos son tratados como sistémicos para interpretar que $3\times(m+1)$ es múltiplo de 3. *Idealización:* el ostensivo $3\times(m+1)$ evoca un múltiplo de 3. *Significación:* interpretar que $3\times(m+1)$ es múltiplo de 3 y que $m+1$ es un número natural.

Práctica elemental 3. Por tanto la suma de tres naturales consecutivos cualesquiera es múltiplo de 3.		
Intencionalidad	Objetos	Procesos
Declarar la verdad de la proposición.	*Conceptos:* números naturales, suma, números naturales consecutivos, múltiplo. *Lenguaje:* natural. *Proposición emergente:* la suma de tres naturales consecutivos cualesquiera es un múltiplo de 3. *Argumentos:* basados en la secuencia de prácticas elementales 1) a 2).	*Generalización*: partir de un natural dado arbitrario m y generalizar para todo natural. *Reificación:* los objetos y procesos previos constituyen una nueva entidad unitaria reconocida como la proposición demostrada. *Idealización:* el resultado de las prácticas anteriores se desmaterializa para ser interpretado como solución al problema.

El análisis ontosemiótico permite identificar como conflictos semióticos potenciales: traducir la expresión "suma de tres naturales consecutivos cualesquiera" de manera simbólica; evocar con un ostensivo como m un natural concreto pero arbitrario; considerar los objetos como sistémicos para interpretar que $3 \times (m+1)$ es un múltiplo de 3 y $m+1$ es un natural; considerar el carácter general de la regla por haber tomado m como natural, aunque arbitrario pero concreto; entre otros.

En la figura 3 presentamos el esquema argumentativo según Toulmin para la solución experta del primer apartado del problema.

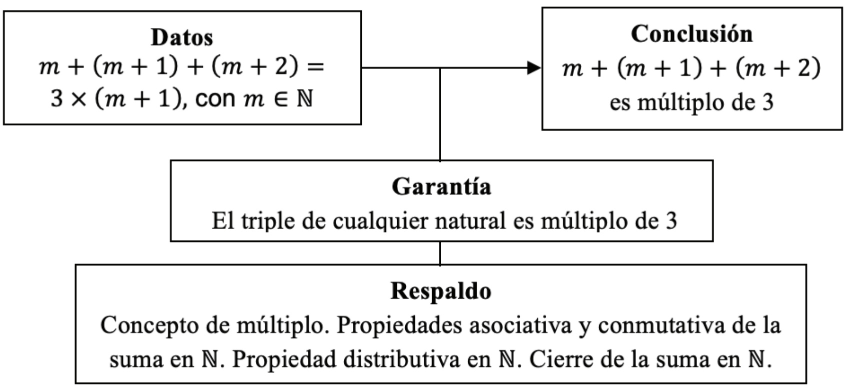


Figura 3. Modelo de Toulmin para la solución experta apartado a).

En la solución experta del apartado c) (Figura 4) los conflictos semióticos que anticipamos se reflejan en dificultades para traducir de manera simbólica ciertas expresiones como, "si se suman k naturales consecutivos, el resultado es múltiplo de k si y sólo si k es un natural impar"; reconocer, por ejemplo, en el ostensivo $\sum_{i=0}^{k-1}(m+i)\ k \times k'$ que la suma de k naturales consecutivos es múltiplo de k; tratar los objetos presentes en la demostración de la ida de la implicación como sistémicos para poder interpretar que k es un número impar; reconocer que, a partir de un natural cualesquiera k y dos números naturales cualesquiera siendo el primero mayor que el segundo (k' y m), la regla se generaliza para todo natural con dichas condiciones, entre otros.

1. Analizamos los siguientes ejemplos:
   Si $k = 2$, entonces $2 + 3 = 5$ no es múltiplo de 2.
   Si $k = 3$, entonces $2 + 3 + 4 = 9$ es múltiplo de 3.
   Si $k = 4$, entonces $2 + 3 + 4 + 5 = 14$ no es múltiplo de 4.
   Si $k = 5$, entonces $2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$ es múltiplo de 5.

Conjetura: Si se suman k naturales consecutivos, el resultado es múltiplo de k si y sólo si k es un natural impar. De forma simbólica, sea $m \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^{k-1}(m+i) = k \times k'$, con $k' \in \mathbb{N}$, $k' > m$ sí y sólo si k es un natural impar.

Demostración de la conjetura:

$\Rightarrow$)

2. Se trata de probar que, dado $m \in \mathbb{N}$, si $\sum_{i=0}^{k-1}(m+i) = k \times k'$ ($k' \in \mathbb{N}$, $k' > m$) entonces k es un natural impar.
3. Partimos de la hipótesis: $\sum_{i=0}^{k-1}(m+i) = k \times k'$, ($k' \in \mathbb{N}$, $k' > m$). Es posible descomponer la sumatoria en dos sumandos de la forma: $\sum_{i=0}^{k-1} m + \sum_{i=0}^{k-1} i = k \times k'$.
   En la primera sumatoria, todos los términos, k, son iguales a m, y la segunda corresponde a la suma de los $k-1$ primeros números naturales. Por tanto: $m \times k + \frac{(k-1)\times k}{2} = k \times k'$.
4. Dividimos a ambos lados de la equivalencia anterior por k, de manera que obtenemos una expresión equivalente: $m + \frac{(k-1)}{2} = k'$.
   Similarmente, multiplicando a ambos lados de la equivalencia por 2, obtenemos la expresión equivalente: $2m + k - 1 = 2k'$. De donde, $k = 2k' - 2m + 1$.
   Sacando factor común se obtiene $k = 2(k' - m) + 1$.
5. Puesto que, por hipótesis, $k' > m$, $k' - m \in \mathbb{N}$, lo que muestra que k es impar.

$\Leftarrow$)

6. Se trata de probar que dado $m \in \mathbb{N}$, si k es un natural impar entonces:
   $\sum_{i=0}^{k-1}(m+i) = k \times k'$, con $k' \in \mathbb{N}$, $k' > m$.
7. Si k es impar entonces $k = 2n + 1$ o bien $k = 2n - 1$ con $n \in \mathbb{N}$. En particular, tomamos $k = 2n + 1$, ya que, si se cambia la variable n por $n + 1$ en el caso $k = 2n - 1$ se obtiene $k = 2n + 1$.
8. Partimos del primer lado de la igualdad que queremos obtener, es decir:
   $\sum_{i=0}^{k-1}(m+i) = k \times k'$, con $k' \in \mathbb{N}$, $k' > m$. Es posible descomponer la sumatoria en dos sumandos: $\sum_{i=0}^{k-1}(m+i) = \sum_{i=0}^{k-1} m + \sum_{i=0}^{k-1} i$.
   En el primer sumando, todos los términos, k, son iguales a m, y el segundo es la suma de los $k-1$ primeros naturales. Por lo tanto: $\sum_{i=0}^{k-1} m + \sum_{i=0}^{k-1} i = m \times k + \frac{(k-1)\times k}{2}$
9. En la última identidad reemplazamos k por $2n + 1$ y simplificamos:
   $\sum_{i=0}^{k-1} m + \sum_{i=0}^{k-1} i = m \times (2n+1) + \frac{(2n+1-1)\times(2n+1)}{2} = m \times (2n+1) + n \times (2n+1)$.
   Sacando factor común: $m \times (2n+1) + n \times (2n+1) = (2n+1)(m+n)$,
   con $m + n = k' \in N$, por ser la suma cerrada en $\mathbb{N}$ y $k' > m$.
10. Lo que muestra que si k es un natural impar entonces $\sum_{i=0}^{k-1}(m+i) = k \times k'$, con $k' \in \mathbb{N}$, $k' > m$.

Figura 4. Solución experta apartado c).

El análisis de las prácticas que llevan a la solución del ítem d) (figura 5) nos lleva a considerar como potenciales conflictos traducir expresiones de manera simbólica, por ejemplo "la suma de cinco naturales que tienen distinto resto al dividirlos por 5"; interpretar y evocar con el ostensivo $5k + (5m + 1) + (5n + 2) + (5p + 3) + (5q + 4)$ la suma de cinco naturales que tienen distinto resto al dividirlos por 5 o con $5 \times (k + m + n + p + q + 2)$ un múltiplo de 5. También son previsibles dificultades asociadas al cálculo sintáctico donde los ostensivos se deben desprender de los objetos a los que representan para participar de transformaciones. Además, es posible que los estudiantes encuentren conflictos para considerar el carácter general de la regla (algunos vinculados con la posibilidad de generalizar para todo número natural que tiene distinto resto en la división por 5) a partir de haber tomado k, m, n, p, q naturales concretos pero arbitrarios. Finalmente, es posible prever dificultades al tratar de manera sistémica los objetos de forma que se pueda interpretar que $5 \times (k + m + n + p + q + 2)$ es múltiplo de 5, entre otras.

1. **Dado que los posibles restos de dividir un natural por 5 son 0, 1, 2, 3 o 4, los naturales que tienen distinto resto al dividirlos por 5 se pueden escribir como:** $5k, 5m + 1, 5n + 2, 5p + 3$ **o** $5q + 4$, **con** $k, m, n, p, q \in \mathbb{N}$, **por propiedades de la división de naturales.**
2. **La suma se podría representar de la siguiente manera (o en diferente orden):** $5k + (5m + 1) + (5n + 2) + (5p + 3) + (5q + 4)$.
3. **Aplicando las propiedades asociativa y conmutativa de la suma y la distributiva del producto respecto a la suma en** $\mathbb{N}$ **se obtiene que:** $5k + (5m + 1) + (5n + 2) + (5p + 3) + (5q + 4) = 5 \times (k + m + n + p + q) + 10$. **Por propiedad distributiva se tiene:** $5 \times (k + m + n + p + q) + 10 = 5 \times (k + m + n + p + q + 2)$
4. $5 \times (k + m + n + p + q + 2)$ **es un múltiplo de 5, ya que,** $k + m + n + p + q + 2 \in \mathbb{N}$ **por cierre de la suma en** $\mathbb{N}$. **Por tanto, la suma de cinco naturales cualesquiera que tienen distinto resto al dividirlos por 5 es múltiplo de 5.**

Figura 5. Solución experta apartado d).

La actividad matemática desarrollada en estas prácticas argumentativas expertas para los diferentes ítems se sitúa en un nivel 5 de RAE (Godino *et al.*, 2015), ya que, se llevan a cabo cálculos analíticos o sintácticos en los que intervienen parámetros.

3.3. Pautas de análisis

Se consideraron los siguientes grados de pertinencia para las respuestas de los estudiantes.

- Correcta (C). Una respuesta se considera correcta si se establece y garantiza la validez general de la proposición implicada (figura 8).
- Parcialmente correcta (PC). Una respuesta se considera parcialmente correcta si se basa en propiedades matemáticas correctas pero que no permiten valorar la validez de la proposición. Por ejemplo, aquellas argumentaciones abductivas en las que el dato es un conocimiento matemáticamente válido que implica la conclusión o aquellas argumentaciones deductivas por contraejemplo para el ítem c) (figura 9).
- Incorrecta (I). En otro caso (figura 6 o 7).

4. RESULTADOS

En esta sección se incluye, en primer lugar, una descripción de las argumentaciones empleadas por los participantes y los niveles de razonamiento algebraico asociados, analizando los logros y dificultades encontradas. En segundo lugar, se presentan los resultados de la puesta en común con los estudiantes sobre los tres primeros ítems del problema, identificando HDS.

4.1. Argumentaciones y niveles de RAE

En la tabla 2 se resumen los grados de pertinencia logrados por los estudiantes en cada ítem del problema según los tipos de estrategias argumentativas empleadas. Se observa que, los 31 participantes respondieron a los ítems a) y b), donde algunos emplearon más de un tipo de estrategia, y que dos no lo hicieron en los apartados c) y d).

Tabla 2. Grado de pertinencia de las producciones según los tipos de estrategias.

Tipo de estrategia argumentativa	Grado de pertinencia										Total
	Ítem a			Ítem b			Ítem c			Ítem d	
	I	PC	C	I	PC	C	I	PC	C	I	
Abductiva	4	5	0	8	4	0	0	0	0	17	38
Inductiva de un solo caso	4	0	0	4	0	0	0	1	0	0	9
Inductiva de varios casos	7	0	0	7	0	0	0	3	0	1	18
Plausible	4	0	0	3	0	0	0	0	0	1	8
Analógica	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
Deductiva	0	0	4	0	0	4	0	0	1	1	10
Deductiva por contraejemplo	1	0	0	0	0	0	0	6	0	6	13
Conjetura sin argumentación	3	0	0	2	0	0	12	5	0	3	25
Total	23	5	4	24	4	4	13	15	1	29	122

Como se observa en la tabla 2, los participantes tuvieron dificultades para resolver correctamente los apartados a), b) y especialmente d), en el que todos aquellos que respondieron lo hicieron de forma incorrecta. Los resultados fueron algo mejores en el ítem c) donde 15 respondieron de forma parcialmente correcta. Las argumentaciones más frecuentes empleadas en los ítems a) y b) fueron abductivas o inductivas de varios casos, en su mayoría incorrectas. Para el ítem c) la mayoría de los estudiantes propuso de forma incorrecta conjeturas sin dar ningún tipo de argumentación. Para el ítem d) propusieron con mayor frecuencia argumentaciones abductivas incorrectas.

A continuación, se relacionan los diferentes tipos de estrategias empleadas con los niveles RAE implicados en las prácticas matemáticas. Estos se ejemplificarán por medio de algunas de las respuestas más significativas de los estudiantes.

Tabla 3. Estrategias empleadas según los niveles RAE.

Tipo de estrategia argumentativa	Frecuencia								Total
	Ítem a				Ítem b				
	N0	N1	N2	N5	N0	N1	N2	N5	
Abductiva	2	7	0	0	5	7	0	0	21
Inductiva de un solo caso	4	0	0	0	4	0	0	0	8
Inductiva de varios casos	6	0	1	0	6	0	1	0	14
Plausible	3	1	0	0	2	1	0	0	7
Analógica	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Deductiva	0	0	0	4	0	0	0	4	8
Deductiva por contraejemplo	0	1	0	0	0	0	0	0	1
Conjetura sin argumentación	3	0	0	0	2	0	0	0	5
Total	18	9	1	4	19	8	1	4	64

De manera general, se observa una escasa actividad matemática de naturaleza algebraica; el nivel de RAE asociado oscila en su mayoría entre el nivel puramente aritmético y el proto-algebraico incipiente.

La tabla 3 muestra que, para los ítems a) y b), la actividad matemática desplegada en las argumentaciones abductivas o inductivas se situó de forma general entre un nivel aritmético (nivel 0 RAE) y proto-algebraico incipiente (nivel 1 RAE). Este último se asignó cuando lograron enunciar la regla general en lenguaje natural. La actividad de naturaleza algebraica (nivel 5 RAE) fue escasa y se observó solo en las argumentaciones deductivas (figura 8) propuestas por los mismos estudiantes tanto para el ítem a) como para el b).

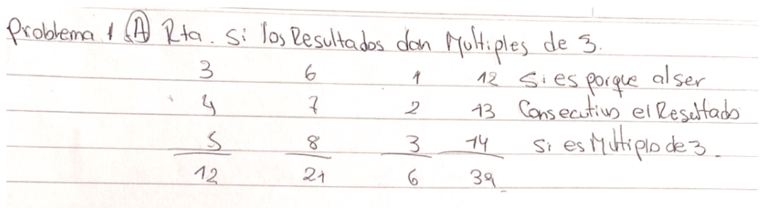
En la tabla 4 aparecen relacionadas las diferentes estrategias argumentativas empleadas para los ítems c) y d), según los niveles de RAE implicados. Esta tabla muestra que, para el ítem c) la actividad matemática basada en la elaboración de conjeturas sin argumentación se situó entre un nivel aritmético y proto-algebraico incipiente pues, en algunos casos, lograron enunciar reglas generales en lenguaje natural (nivel 1). Las prácticas argumentativas con carácter algebraico en c) fueron deductivas (nivel 4 RAE) o deductivas por contraejemplo (figura 9, nivel 5 RAE).

Tabla 4. Estrategias empleadas según los niveles RAE.

Tipo de estrategia argumentativa	Frecuencia							Total
	Ítem c				Ítem d			
	N0	N1	N2	N4/N5	N0	N1	N5	
Abductiva	0	0	0	0	9	8	0	17
Inductiva de un solo caso	1	0	0	0	0	0	0	1
Inductiva de varios casos	0	3	0	0	1	0	0	4
Plausible	0	0	0	0	1	0	0	1
Analógica	0	1	0	0	0	0	0	1
Deductiva	0	0	0	1	0	0	1	2
Deductiva-contraejemplo	0	3	1	2	1	5	0	12
Conjetura sin argumentar	10	7	0	0	3	0	0	20
Total	11	14	1	3	15	13	1	58

Salvo una argumentación deductiva de nivel 5 RAE, todas las prácticas desarrolladas para responder al ítem d) fueron de naturaleza aritmética o proto-algebraica incipiente.

A continuación, se ejemplifican las estrategias más representativas, así como los errores más frecuentes puestos de manifiesto en las producciones. Cada caso lo acompañamos con el modelo de Toulmin que caracteriza la argumentación, identificando los objetos y procesos implicados, así como el nivel de RAE asociado.



Datos. La suma de 3, 4 y 5 es 12.
La suma de 6, 7 y 8 es 21.
La suma de 1, 2 y 3 es 6.
La suma de 12, 13 y 14 es 39.

Conclusión.
La suma de tres naturales consecutivos es múltiplo de 3.

Garantía. La verificación en 4 casos particulares asegura la validez de la conclusión.

Respaldo. 12, 21, 6 y 39 son múltiplos de 3.

Figura 6. Respuesta de E8 al ítem a. Argumentación inductiva. Nivel 0 de RAE. Incorrecta.

La mayor frecuencia de respuestas incorrectas en las argumentaciones inductivas de varios casos para los ítems a) y b) puede deberse al hecho de que, en nivel educativo de primaria y secundaria se acepta la comprobación, en algunos casos particulares, como suficiente para argumentar la validez general de proposiciones (Stylianides y Stylianides, 2017). Como se muestra en la figura 6, el estudiante E8 empleó una argumentación inductiva para asegurar la validez del ítem a), que solo llegó a corroborar en cuatro casos particulares. En su argumentación aparecen involucrados los conceptos de suma, números consecutivos y múltiplo de 3, procedimientos aritméticos (suma de números naturales) y emerge la proposición “la suma es múltiplo de 3” que justifica “al ser consecutivos”. E8 usó de manera incorrecta parte de la proposición como su argumento. La actividad matemática es de naturaleza aritmética, pues solo intervienen números naturales particulares y la operación suma. La propiedad ser múltiplo de 3 no se usa para generar nuevos objetos, sino como la condición que se satisface de manera particular (en el respaldo) para asegurar la validez de la conclusión. Por lo tanto, el nivel RAE es 0 (Godino *et al.*, 2015).

En muchas producciones para los ítems a), b) y d) se emplearon argumentaciones abductivas, en las que los estudiantes propusieron posibles explicaciones que justifican algún hecho observado que actúa como su conclusión (Arce y Conejo, 2019). La mayoría fueron categorizadas como incorrectas.

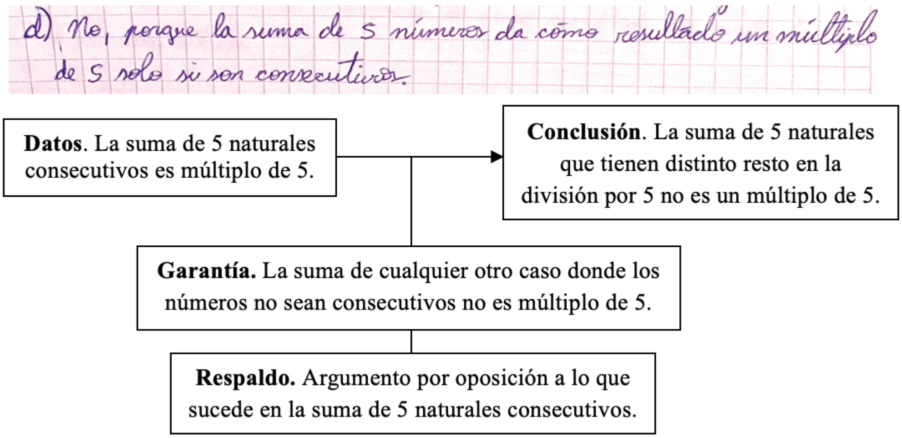


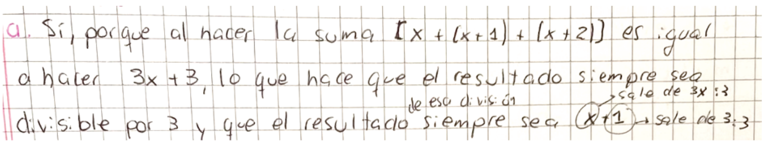
Figura 7. Respuesta de E7 al ítem d. Argumentación abductiva. Nivel 1 de RAE. Incorrecta.

Como se observa en la figura 7, E7 empleó una argumentación abductiva para afirmar que el resultado de la suma de cinco naturales que tienen distinto resto al dividirlos por 5 no es un múltiplo de 5 (proposición emergente). E7 había incluido las operaciones: “8+9+10+11+12=40” (suma de cinco naturales consecutivos) y “6+8+9+11+13=47” (suma de cinco naturales no consecutivos; no todos con resto distinto al dividirlos por 5) sin considerar en ningún momento cuál había sido el resto al dividir por cinco de los sumandos, ni que cinco números naturales consecutivos necesariamente tienen diferente resto al dividirlos por 5. Así, no llegó a idealizar de manera adecuada los ostensivos implicados en la propiedad que se espera demostrar. El nivel de RAE es 1 pues enunció una regla general en lenguaje natural (Godino *et al.*, 2015) “la suma de 5 números da como resultado un múltiplo de 5 solo si son consecutivos”.

Otras argumentaciones abductivas frecuentes en a) y b) fueron categorizadas como parcialmente correctas, por ejemplo, la respuesta de E24 al ítem a) donde utilizó un dato válido que implica la conclusión “Si, siempre que se sumen 3 números consecutivos va a ser múltiplo de 3, ya que la cantidad de números que se suman es impar (3)”. El nivel de RAE en la actividad matemática de E24 es 1 en tanto enunció una regla general en lenguaje natural.

El hecho de que los estudiantes hayan recurrido a particularizaciones para argumentar una proposición general, a argumentaciones abductivas o incluso, a la propuesta de conjeturas sin argumentación, puede estar motivado por algunas dificultades que han encontrado para representar en lenguaje simbólico apropiado números consecutivos generalizados o su suma. Por ejemplo, E9, quien propuso en el escrito una conjetura sin argumentarla para el ítem a) "sí, siempre que se sumen tres números reales continuos, el resultado será múltiplo de 3", mostró estas dificultades durante la puesta en común, pues escribió en la pizarra $(n) + (n1) + (n2)$ haciendo referencia a $n1$, por ejemplo, como el número continuado a n.

Por otra parte, las pocas respuestas correctas que se manifestaron en los ítems a), b) y c) se relacionan, en todos los casos, con argumentaciones deductivas. Por ejemplo, en la figura 8 se incluye la respuesta de E4 al apartado a). En las prácticas matemáticas que desarrolló E4, aparecen implicados los conceptos de suma, números consecutivos y múltiplo de 3, propiedades como asociativa y conmutativa de la suma en $\mathbb{N}$ o distributiva en $\mathbb{N}$. Emerge la proposición "la suma de tres naturales consecutivos cualesquiera es múltiplo de 3". Los procesos de idealización, generalización y reificación se combinan con la representación, traducción del lenguaje natural al simbólico y transformación en este registro; así como la significación (por ejemplo, para interpretar $x + 1$ como el consecutivo de x). El nivel de RAE es 5 pues aparecen involucrados parámetros como generalizadores y se opera con ellos (Godino *et al.*, 2015).



Datos. La suma de 3 naturales consecutivos es el triple del primero más 3, es decir: $x + (x + 1) + (x + 2)$ es igual a hacer $3x + 3$.

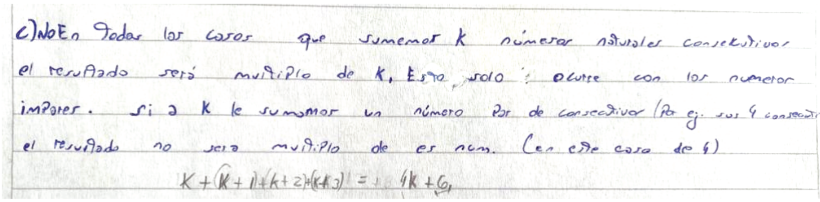
Conclusión. $x + (x + 1) + (x + 2)$ es divisible por 3.

Garantía. El triple de un natural más 3 es divisible por 3.

Respaldo. Definición de múltiplo de un natural. Propiedades asociativa y conmutativa de la suma en $\mathbb{N}$. Propiedad distributiva en $\mathbb{N}$.

Figura 8. Respuesta de E4 al ítem a. Argumentación deductiva. Nivel 5 de RAE. Correcta.

Otro tipo de argumentación deductiva manifestada frecuentemente para el ítem c) fue la argumentación deductiva a partir del uso de contraejemplos. Estas prácticas fueron categorizadas como parcialmente correctas, puesto que, si bien el contraejemplo les sirvió para mostrar una excepción a una regla general posible y, por ende, conjeturar, no les permitió valorar la validez general de la conjetura.



Datos. La suma de 4 naturales consecutivos no es múltiplo de 4.

Conclusión. No es cierto que, si se suman k naturales consecutivos con cualquier k, el resultado es un múltiplo de k.

Garantía. Para todo k natural, la suma de k naturales consecutivos es múltiplo de k (regla general)

Respaldo. Para todo k natural, la suma de k naturales consecutivos es múltiplo de k si y sólo si no existe k' natural tal que el resultado de la suma de k' naturales consecutivos no es múltiplo de k'.

Figura 9. Respuesta de E27 al ítem c. Argumentación deductiva por contraejemplo. Nivel 5 de RAE. Parcialmente correcta.

Como se observa en la figura 9, E27 argumentó que la proposición "el resultado de la suma de cualquier k números naturales consecutivos es múltiplo de k si k es impar" es verdadera, basándose en que no lo es cuando se suma una cantidad par (4) de números naturales consecutivos. Para ello, empleó los conceptos de números consecutivos, impares y múltiplo, transitando por procesos de idealización y representación asociados al cálculo sintáctico para interpretar $k+(k+1)+(k+2)+(k+3)$ como $4k+6$, de significación para interpretar $k+(k+1)+(k+2)+(k+3)$ como la suma de 4 números consecutivos o procesos de generalización pues obtuvo una regla general. El nivel de RAE asignado a la actividad es 5, en tanto intervienen parámetros como generalizadores y se opera con ellos para obtener expresiones canónicas.

En conclusión, la mayoría de los estudiantes tuvieron dificultades para responder correctamente, debido al uso de argumentaciones inductivas en los ítems a) y b) para asegurar la validez general de las proposiciones involucradas, al planteamiento de conjeturas sin argumentación en el ítem c) y a la propuesta de argumentaciones abductivas incorrectas para el ítem d). Para el ítem c), si bien se han observado algunas conjeturas por argumentaciones inductivas o por analogía, la mayoría de los estudiantes elaboraron conjeturas sin argumentarlas (por ejemplo "se dará siempre y cuando k sea un número impar", E11). El planteamiento de argumentaciones abductivas incorrectas para el ítem d) deja ver que, si bien se generan nuevas ideas a través de un proceso creativo en la construcción del conocimiento (Soler-Álvarez y Manrique, 2014) estas no se corresponden con datos matemáticamente válidos y, por ende, no implican dicha conjetura ("sí, siempre es múltiplo de 5 porque son 5 los números que se suman", E24).

4.2. Puesta en común

Durante la puesta en común se encontraron algunos HDS que aportan información con cierta interpretación desde el punto de vista didáctico, en relación con los significados personales de los estudiantes sobre la demostración matemática, las dificultades identificadas en sus producciones y cómo la discusión ayuda en algunos casos a superar dichas dificultades.

HDS1. Los estudiantes identificaron la insuficiencia de mostrar con casos particulares la validez general de las proposiciones involucradas. Por ejemplo, el siguiente diálogo muestra cómo E31 y otros estudiantes de la clase dan cuenta de esto con la profesora (P):

E31:	Tendríamos que hacer infinitos ejemplos para abarcar todos.
P:	¿Por qué dice que tendríamos que mirar infinitos ejemplos?
Otro estudiante de clase:	Porque los naturales son infinitos.
P:	Entonces ¿vamos a poder mirar todos los números? ¿Cómo podemos estar seguros de que esta proposición vale siempre?
Otro estudiante de clase:	No, a menos que encuentre uno que no lo cumpla.

HDS2. Los estudiantes emplearon calificativos modales que reforzaron algunas de las argumentaciones plausibles que manifestaron en los escritos. Por ejemplo, E29 en su escrito empleó para 1 a) y b) argumentaciones plausibles, reforzándolas en la puesta en común con calificativos modales como "inevitablemente", "no puede fallar", "hasta ahí llegué".

HDS3. Los estudiantes tuvieron dificultades para representar en lenguaje simbólico apropiado el consecutivo de un natural y la suma de tres naturales consecutivos. Sin embargo, progresaron en su representación durante la puesta en común, gracias a la discusión sobre el ejemplo $101 + 102 + 103 = 101 + (101{+}1) + (101{+}2)$ que les permitió expresar el consecutivo de un natural n como $n + 1$ y el consecutivo de este como $n + 2$.

HDS4. Los estudiantes encontraron limitaciones para argumentar sin particularizar por qué $3n + 3$ es un múltiplo de 3. Por ejemplo, E27 manifestó dichas dificultades en la discusión, aunque se puede ver cómo se produce un avance hacia una argumentación general de la proposición.

P:	Esa expresión a la que llegaron $3n + 3$, ¿se puede escribir como 3 por un número entero?
E27:	Sí, hay que reemplazar la n por el valor.
P:	¿Es necesario? volvemos para atrás a los casos particulares.
Otra estudiante de clase:	Hay que sacar factor común el 3. Te queda 3 por $n + 1$ y $n + 1$ multiplica al número, y ese número multiplicado por 3 va a ser múltiplo de 3.

HDS5. En la puesta en común se establecieron analogías con la suma de tres naturales consecutivos para argumentar el ítem b). Por ejemplo, cuando E29, que propuso una argumentación abductiva y plausible en su informe escrito, en la pizarra desarrolló una argumentación deductiva para validar la proposición involucrada:

E29: O sea, fue seguir lo mismo que se había explicado antes de las tres n, pero ahora se le agregan dos más porque sería por 5, entonces también se le agregan otros consecutivos, pasando del segundo consecutivo, hay un cuarto y un quinto. De ahí se vuelven a aplicar las mismas propiedades, la conmutativa y la asociativa, y se juntan las n, todos los números, y se puede reducir como $5n + 10$, que es la suma de los consecutivos, y termina quedando $5 \times (n + 10)$. Sería así ¿no?

HDS6. Los estudiantes destacaron dos propiedades de los números 3 y 5, el ser primo o impar, para conjeturar cuándo es cierto que si se suman k naturales consecutivos el resultado es múltiplo de k. Se observó, por ejemplo, que ante la afirmación de E7 "la consigna se cumple cuando k pertenece a los primos, pero 2 también es primo y no lo cumple, entonces cuando k pertenece a los primos y es mayor a 2", E23 le propuso un contraejemplo ($k = 9$), que le permitió a E7 avanzar en sus significados iniciales y reformular su conjetura.

5. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Los resultados de nuestra investigación muestran que los estudiantes recurrieron en la mayoría de los casos a argumentaciones no deductivas (inductivas, abductivas, plausibles) para validar las proposiciones implicadas en el problema implementado. Si bien dichas argumentaciones son fundamentales en los procesos de exploración para soportar conjeturas y ayudan a acercarse a la verdad de una teoría o refinarla, no permiten validar de manera general el conocimiento matemático, como si lo hacen las argumentaciones deductivas (Arce y Conejo, 2019; Molina y Samper, 2019). En muchos casos, los estudiantes asumieron como suficiente el uso de la abducción, o en otros, la comprobación en algunos casos particulares, limitaciones reconocidas por diversos investigadores en Educación Matemática como constituyentes de obstáculos para construir demostraciones (Arce y Conejo, 2019; Markiewicz *et al.*, 2021; Stylianides y Stylianides, 2017). El uso de argumentaciones inductivas es, en general, el más utilizado por los estudiantes (Soler-Álvarez y Manrique, 2014), aunque, se consideran deficientes pues, incluso si una afirmación es verdadera para todos los ejemplos que el estudiante verificó, todavía podría haber un contraejemplo (Weber *et al.*, 2020).

El análisis de sus prácticas, en términos de los objetos matemáticos, especialmente, de los argumentos empleados, el grado de generalidad y la formalización en el lenguaje, muestran un escaso carácter algebraico en la actividad desarrollada (manifestado en las pocas argumentaciones deductivas de nivel 4 o 5 de RAE) y la prevalencia de argumentaciones intuitivas o informales (Godino *et al.*, 2015). Este hecho puede relacionarse con la escasa familiaridad de los estudiantes, no solo con el lenguaje formal esperado en la escritura de las demostraciones (Lew y Mejía-Ramos, 2019), sino con la propia estructura, funcionalidad y reglas internas de la demostración (Nagel *et al.*, 2018).

El análisis también nos permitió identificar conflictos semióticos que obstaculizan la transición hacia la matemática más avanzada. Algunos están vinculados con la interpretación por parte de los estudiantes de qué elementos son necesarios y suficientes para construir una demostración, y otros, anticipados a priori, relacionados a los procesos que se deberían efectuar durante el desarrollo de una demostración. Fundamentalmente, se encontraron conflictos asociados a los procesos de representación y descomposición que se reflejaron en dificultades para traducir afirmaciones en lenguaje natural de manera simbólica, recurrir a ostensivos adecuados para representar un objeto ideal o considerar los objetos como sistémicos para interpretar, por ejemplo, que $3x+3$ es múltiplo de 3.

Pese a las dificultades puestas en evidencia por los estudiantes, la discusión llevada a cabo en la puesta en común les permitió reconocer que las argumentaciones no deductivas no son suficientes para validar las proposiciones matemáticas y proponer argumentaciones deductivas para demostrar algunas de las proposiciones implicadas. Promover los espacios de discusión en estas clases es indispensable para favorecer la comprensión sobre la demostración, pues permite a los estudiantes tomar conciencia de sus errores, replantear sus argumentos y conjeturas y lograr consensos sobre aspectos esenciales que se van a aceptar en este nivel (Espinosa *et al.*, 2010).

6. CONCLUSIONES

El estudio de la demostración ha sido objeto de diferentes aproximaciones y enfoques en las investigaciones en Educación Matemática (Alfaro-Carvajal *et al.*, 2019; Godino y Recio, 2001; Stylianides *et al.*, 2017). En la demostración, se debe producir un argumento matemático a favor o en contra de una proposición matemática. Este argumento debe ser matemáticamente sólido y formulado en un discurso que sea conceptualmente accesible por los miembros de la comunidad donde se comparte (Stylianides y Stylianides, 2017). Sin embargo, la complejidad intrínseca a la actividad matemática implicada hace que, desde el punto de vista de su enseñanza y aprendizaje, sea necesario considerar e investigar la existencia de diferentes formas de argumentar en las clases de matemáticas reconociendo sus diversos grados de formalización.

El objetivo de nuestra investigación ha sido analizar los significados personales de estudiantes argentinos que acceden a grados universitarios en los que la demostración matemática tiene un papel importante en su día a día. Hemos empleado el modelo de Toulmin para clasificar las argumentaciones producidas y el análisis ontosemiótico para describir las prácticas matemáticas desarrolladas e identificar su nivel de RAE. Este análisis nos ha permitido reconocer conflictos semióticos, vinculados tanto con la concepción de los propios participantes sobre lo que es (necesario y suficiente en) una demostración matemática, como con la complejidad de los objetos y procesos matemáticos implicados. Aunque estos resultados no permiten hacer generalizaciones debido al tamaño de la muestra, dejan entrever la significativa distancia entre los significados personales y los significados institucionales pretendidos sobre la demostración en el nivel universitario (Lew y Mejía-Ramos, 2019; Markiewicz *et al.*, 2021; Recio y Godino, 2001; Rocha, 2019). Asimismo, los resultados de la puesta en común dan cuenta de la importancia de promover estos espacios de discusión, puesto que, los estudiantes lograron reconocer la insuficiencia de las argumentaciones inductivas, abductivas o plausibles para validar el conocimiento matemático y la necesidad de recurrir a las argumentaciones deductivas para tal fin.

Así, este trabajo ayuda a problematizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la demostración en función de los objetos y procesos que son necesarios movilizar para avanzar hacia un mayor nivel de algebrización, permitiendo a los estudiantes superar sus dificultades en la transición hacia matemáticas más avanzadas (Lew y Mejía-Ramos, 2019; Markiewicz *et al.*, 2021; Stylianides y Stylianides, 2017). A su vez, invita a los profesores a conocer las estrategias argumentativas utilizadas por los estudiantes y considerar en sus decisiones instruccionales las dificultades ante la demostración.

Como futuras líneas de investigación, resultaría interesante conocer si la formación que reciben los estudiantes de estos grados mejora su competencia para desarrollar demostraciones y cuál es la evolución de los tipos de argumentaciones y el grado de formalización. Además, sería conveniente ampliar el estudio con estudiantes de educación secundaria, así como con estudiantes de otras titulaciones y contextos educativos. Esto posibilitaría tener una comprensión más profunda sobre la problemática, con la intención de diseñar propuestas de enseñanza que permitan superar las dificultades diagnosticadas en esta y otras investigaciones, favoreciendo la transición desde las argumentaciones intuitivas informales hacia prácticas demostrativas de mayor grado de sofisticación en el nivel secundario y universitario.

REFERENCIAS

Alfaro-Carvajal, C., Flores-Martínez, P. y Valverde-Soto, G. (2019). La demostración matemática: significado, tipos, funciones atribuidas y relevancia en el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas. *Uniciencia, 33*(2), 55-75. https://doi.org/10.15359/ru.33-2.5

Arce, M. y Conejo, L. (2019). Razonamientos y esquemas de prueba evidenciados por estudiantes para maestro: relaciones con el conocimiento matemático. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 163-172). SEIEM.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemática*. Una empresa docente.

Burgos, M. y Godino, J. D. (2020). Modelo ontosemiótico de referencia de la proporcionalidad. Implicaciones para la planificación curricular en primaria y secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (18), 1-20. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i18.255

Cañadas, M. C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas* [Tesis doctoral]. Repositorio de la Universidad de Granada.

Chacón, I. M. (2009). Actitudes matemáticas: propuestas para la transición del bachillerato a la universidad. *Educación Matemática, 21*(3), 5-32.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2011). *Research methods in education*. Routledge.

Espinosa, A. J., Ávila, N. Y. S. y Mendoza, S. M. G. (2010). La comunicación: eje en la clase de matemáticas. *Praxis & Saber, 1*(2), 173-202.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje, 33*(1), 89-105. https://doi.org/10.1174/021037010790317243

Gaita, C., Wilhelmi, M. R, Ugarte, F. y Gonzales, C. (2023). Indicadores de niveles de razonamiento algebraico elemental en educación primaria en la resolución de tareas de proporcionalidad con tablas de valores. *Educación Matemática, 35*(3), 49-81. https://doi.org/10.24844/EM3503.02

Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(1), 199-219. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM, 39*(1-2), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The ontosemiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 38-43.

Godino, J. D. y Burgos, M. (2017). Perspectiva ontosemiótica del razonamiento algebraico escolar. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en educación matemática XXI* (pp. 49-66). SEIEM.

Godino, J. D., Font, V. y Batanero, C. (2020). El enfoque ontosemiótico: implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *RECHIEM, 12*(2), 47-59. https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i2.25

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 8*, 117-142.

Godino, J. D. y Recio, A. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 19*(3), 405-414.

Inglis, M. y Mejía-Ramos, J. P. (2005). La fuerza de la aserción y el poder persuasivo en la argumentación en matemáticas. *Revista Ema, 10*(2-3), 328-353.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P. y Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics, 66*, 3-21. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9059-8

Juthe, A. (2005). Argument by analogy. *Argumentation, 19*(1), 1-27. https://doi.org/10.1007/s10503-005-2314-9

Larios, V., Arellano, C. y González, N. (2018). Análisis de argumentos producidos por alumnos de bachillerato al resolver problemas de geometría. *REDIMAT, 7*(3), 280-310. http://dx.doi.org/10.17583/redimat.2018.2343

Lew, K. y Mejía Ramos, J. P. (2019). Linguistic conventions of mathematical proof writing at the undergraduate level: Mathematicians' and students' perspectives. *Journal for Research in Mathematics Education, 50*(2), 121-155. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.50.2.0121

Markiewicz, M. E., Etchegaray, S. C. y Milanesio, B. (2021). Análisis ontosemiótico de procesos de validación en estudiantes del último año de la escuela secundaria. *UNION Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 17*(62).

Marmolejo, E. y Moreno, G. (2021). Unidad cognitiva: argumentar-conjeturar-demostrar. En E. Marmolejo, G. Moreno, J. M. López-Mojica y M. E. Méndez-Guevara (Eds.), *Demostración Matemática Escolar: Propuestas para su Innovación* (pp. 29-36). CLAVE.

Marraud, H. (2007). La analogía como transferencia argumentativa. *Revista de Teoría, Historia y Fundamentos de la Ciencia, 22*(2), 167-188.

Molina, O., Font, V. y Pino-Fan, L. (2019). Estructura y dinámica de argumentos analógicos, abductivos y deductivos: un curso de geometría del espacio como contexto de reflexión. *Enseñanza de las Ciencias, 37*(1), 93-116. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2484

Molina, O. y Samper, C. (2019). Tipos de problemas que provocan la generación de argumentos inductivos, abductivos y deductivos. *Bolema, 33*, 109-134. https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a06

Nagel, K., Schyma, S., Cardona, A. y Reiss, K. (2018). Análisis de la argumentación matemática de estudiantes de primer año. *Pensamiento Educativo, Revista de Investigación Latinoamericana, 55*(1), 1-12. https://doi.org/10.7764/PEL.55.1.2018.10

Pedemonte, B. y Balacheff, N. (2016). Establishing links between conceptions, argumentation and proof through the ck¢-enriched Toulmin model. *Journal of Mathematical Behavior, 41*, 104-122. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.10.008

Pedemonte, B. y Reid, D. (2011). The role of abduction in proving processes. *Educational Studies in Mathematics, 76*, 281-303. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9275-0

Polya, G. (1954). *Induction and Analogy in Mathematics, Mathematics and Plausible Reasoning*. Princeton.

Quercia, M., Pirro, A. y Moro, L. (2014). Las prácticas matemáticas en los inicios del nivel superior. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 745-754). Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C.

Recio, A. y Godino, J. D. (2001). Institucional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 83-99. https://doi.org/10.1023/A:1015553100103

Rocha, H. (2019). Mathematical proof: From mathematics to school mathematics. *Philosophical transactions of the royal society: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 377*(2140), 1-12. https://doi.org/10.1098/rsta.2018.0045

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra*. Libros del zorzal.

Soler-Álvarez, M. N. y Manrique, V. H. (2014). El proceso de descubrimiento en la clase de matemáticas: los razonamientos abductivo, inductivo y deductivo. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(2), 191-219. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1026

Stylianides, A., Bieda, K. y Morselli, F. (2016). Proof and argumentation in mathematics education research. En A. Gutierrez, G. Leder y P. Boero (Eds.), *Second handbook of research on the psychology of mathematics education: The journey continues* (pp. 315-351). Sense Publishers.

Stylianides, A. J., Komatsu, K., Weber, K. y Stylianides, G. J. (2022). Teaching and learning authentic mathematics: The case of proving. En *Handbook of Cognitive Mathematics* (pp. 727-761). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-031-03945-4_9

Stylianides, A. J. y Stylianides, G. J. (2022). Introducing students and prospective teachers to the notion of proof in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior, 66*. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100957

Stylianides, G. J. y Stylianides, A. J. (2017). Based Interventions in the area of proof: The past, the present, and the future. *Educational Studies in Mathematics, 96*(2), 119-127.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. y Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. En J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 237-266). National Council of Teachers of Mathematics.

Toulmin, S. (2003). *The Uses of Arguments*. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511840005

Weber, K., Lew, K. y Mejía Ramos, J. P. (2020). Using expectancy value theory to account for students' mathematical justifications. *Cognition and Instruction, 38*(1), 27-56. https://doi.org/10.1080/07370008.2019.1636796

Autor de correspondencia.
Bettina Milanesio

Dirección: Departamento de Didáctica de la Matemática,
Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada, España.
Campus Universitario de Cartuja C.P. 18071 (Granada) Granada
bettinamilanesio@gmail.com