 https://doi.org/10.24844/EM3603.07

Articuladores de los modos de pensar las superficies cuadráticas: Estudio hermenéutico

Modes of thinking' articulators of Quadratic Surfaces: Hermeneutic Research

Felipe Jacobo Alfaro,[1] Guadalupe Vera-Soria,[2]
Marcela Parraguez González[3]

Resumen: Se estudia la comprensión del concepto de superficies cuadráticas (SC) por parte de estudiantes universitarios, teniendo como sustento teórico el modelo de los modos de pensamiento Sintético-Geométrico (SG), Analítico-Aritmético (AA) y Analítico-Estructural (AE). Esta perspectiva propone que la comprensión de un concepto se logra al articular estos tres modos de pensar. El análisis de datos se dirige a examinar la evidencia extraída de seis entrevistas y cinco actividades aplicadas a seis estudiantes universitarios, para mostrar la construcción del concepto a través de los elementos matemáticos articuladores que se involucran al transitar entre los modos de pensar SG-SC, AA-SC y AE-SC. Los hallazgos revelan que, para establecer los primeros acercamientos a la comprensión de las SC, la interacción entre los modos SG-SC y AA-SC resulta indispensable, mientras que la transición al modo AE-SC requiere un pensamiento variacional mediante el cual, conjuntos de puntos ubicados en el espacio tridimensional se proyectan en un plano para configurar las trazas que constituyen a las SC.

Fecha de recepción: 17 de abril de 2023. **Fecha de aceptación:** 3 de julio de 2024.
[1] Universidad de Guadalajara, felipe.jacobo@academicos.udg.mx, https://orcid.org/0009-0003-7239-909X.
[2] Universidad de Guadalajara, guadalupe.vera@academicos.udg.mx, https://orcid.org/0000-0001-8294-6585.
[3] Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, marcela.parraguez@pucv.cl, https://orcid.org/0000-0002-6164-3056.

Palabras clave: *comprensión conceptual; superficies cuadráticas; modos de pensamiento; articuladores; estudio hermenéutico.*

Abstract: The understanding of the concept of quadratic surfaces (SC) in undergraduate students is studied, having as theoretical support the model of the Synthetic-Geometric (SG), Analytical-Arithmetic (AA) and Analytical-Structural (AE) modes of thinking. This perspective proposes that the understanding of a concept is achieved by articulating these three modes of reasoning. The data analysis is aimed at examining the evidence extracted from six interviews and five activities applied to six undergraduate students, to show the construction of the concept through the articulating mathematical elements that are involved when moving between the SG-SC, AA-SC and AE-SC modes of thinking. The findings reveal that to establish the first approaches to the understanding of the SC, the interaction between the SG-SC and AA-SC modes is essential, while the AE-SC transition requires variational thinking through which, sets of points located in three-dimensional space are projected onto a plane to configure the traces that constitute the SC.

Keywords: *conceptual understanding; quadratic surfaces; modes of thinking; articulators, hermeneutic research.*

1. INTRODUCCIÓN

En esta investigación se analiza cómo es la comprensión de superficies cuadráticas (SC) por parte de estudiantes universitarios que desarrollan actividades de exploración del concepto con el uso del software *GeoGebra*. Las SC son gráficas de ecuaciones de segundo grado, consideradas como los análogos tridimensionales de las secciones cónicas (Larson & Edwards, 2016; Thomas, 2015) en geometría analítica del plano.

Hasta ahora, la mayoría de las investigaciones sobre el aprendizaje de la geometría analítica del espacio se enfocan en las funciones de dos variables y, por el contrario, la documentación sobre el razonamiento de los estudiantes respecto a las SC, prerrequisito curricular de dichas funciones, es limitada. No obstante, la comprensión de conceptos de la geometría tridimensional como planos, cilindros y superficies resulta fundamental para dar sentido a las ideas involucradas en el cálculo multivariado, en particular derivadas e integrales de funciones de varias variables, que a su vez se aplican en la solución de problemas del área de ciencias exactas e ingeniería.

Investigaciones realizadas en varios países, concuerdan en que la comprensión de objetos matemáticos representados en el espacio no es sencilla, ni puede abstraerse de forma directa o inmediata a partir de la generalización de las estructuras relacionadas con el plano bidimensional (Kashefi, Ismail & Yusof, 2013; Martínez-Planell & Trigueros, 2021; Şefik & Dost, 2020; Weber & Thompson, 2014), sino que precisa de trabajo intenso en casos particulares, que la presente investigación explora.

Martínez-Planell y Trigueros (2007, 2010, 2013 y 2019), por ejemplo, realizan varios estudios desde el marco teórico APOE y la teoría de las representaciones semióticas, para indagar sobre las construcciones mentales y dificultades que los estudiantes enfrentan en el aprendizaje de funciones de dos variables; llegando a establecer que las dificultades más comunes en dichas funciones ocurren por deficiencias en el discernimiento del esquema del espacio $\mathbb{R}^3$ y, en la construcción de gráficas de funciones de dos variables. Los autores señalan que es necesario reconocer la noción de planos fundamentales (verticales y horizontales de la forma $x = c$, $y = c$ y $z = c, c \in \mathbb{R}$) y las curvas obtenidas al sustituir valores por una variable en $z = f(x,y)$ (con $x,y,z \in \mathbb{R}^3$), localizadas en un plano coordenado correspondiente a las variables que quedan. Y es que, para graficar una función de dos variables, se debe poder identificar la intersección de planos fundamentales con la superficie que representa la función, y reconocer los cambios que se van produciendo en las secciones transversales que se forman con estas curvas obtenidas conforme se va cambiando sucesivamente el valor de la constante $c \in \mathbb{R}$ de planos fundamentales paralelos entre sí.

Por otra parte, Weber y Thompson (2014), con fundamento en los modelos del razonamiento covariacional y el razonamiento cuantitativo, analizan las respuestas a las tareas asignadas a dos estudiantes universitarios inscritos en un curso de cálculo, y verifican que mediante la aplicación de una trayectoria hipotética de aprendizaje propuesta se promueve la generalización de funciones de una a dos variables, al pensar o imaginar un gráfico obtenido al barrer un punto en el plano para generar una curva y luego, barrer esa curva para generar una superficie en el espacio.

Y en relación con la comprensión de las SC, López-Vega (2018) describe el análisis *a priori* y *a posteriori* de las respuestas a las actividades de un estudiante de Arquitectura de una Universidad en Lima, en las que se explora el proceso de génesis instrumental del hiperboloide, cuando se desarrolla una secuencia didáctica mediada por el software *GeoGebra*. En ese estudio, se establece que el uso del *GeoGebra* posibilita el reconocimiento de propiedades del hiperboloide, como reconocer la relación entre la ecuación y la orientación de la superficie, la identificación de cómo afectan los parámetros de su ecuación a la superficie y determinar las características del hiperboloide a partir de los cortes en secciones transversales.

En la presente investigación, se asume que la comprensión de objetos en tres dimensiones que se representan en objetos figurales de dos dimensiones requiere de un razonamiento sintético (objeto figural que la representa) y analítico (ecuación que la describe) para transitar entre diferentes elementos matemáticos implicados en su abstracción. Con base en esto último, se tiene como objetivo de investigación: describir los modos de pensar las SC que estudiantes universitarios usan en situaciones matemáticas propuestas y determinar los tránsitos que ellos logran entre diferentes interpretaciones de las SC, poniendo de relieve los elementos matemáticos que involucran en ese proceso.

2. LOS MODOS DE PENSAMIENTO

Para Sierpinska (2000), los modos de pensamiento son formas de ver y entender los objetos matemáticos que al interactuar producen su comprensión. Cada modo de pensar conduce a diferentes significados de un objeto matemático, porque cada modo implica diferentes interpretaciones de dicho objeto –teóricas y prácticas– y sus conexiones con otros sistemas de hechos e ideas. Por otro lado, la complejidad epistemológica inherente al pensamiento teórico justifica las dificultades que los estudiantes muestran para aprender la matemática en todos los niveles, mientras que los argumentos geométricos y sintéticos son, a la vez, un apoyo visual y un desafío (Sierpinska, 2000); de ahí la necesidad de estudios científicos que expliciten el rol de estas formas de pensar involucradas en la interpretación de conceptos matemáticos.

En el modo Sintético-Geométrico (SG) la visualización matemática toma un rol fundamental en el entendimiento de un objeto matemático, es decir, se perciben las características geométricas de funciones, coordenadas, vectores, etc., representados por medio de imágenes donde se "utiliza el lenguaje de las figuras geométricas, planos, líneas, intersecciones, así como sus representaciones gráficas convencionales" (Sierpinska, 2000, p. 234-235). Por ejemplo, en este modo SG, un elipsoide es identificado por su representación gráfica y la descripción figural de esta superficie cuadrática, sin definirla a través de su ecuación.

Y en el modo Analítico-Aritmético (AA) los objetos matemáticos se construyen por la definición de sus elementos. Las figuras se entienden como conjuntos de n-tuplas de números que satisfacen ciertas condiciones y en general, los objetos matemáticos se dan por relaciones, operaciones y procedimientos con números y variables (Sierpinska, 2000). Por ejemplo, en el modo AA una esfera es entendida a través de la ecuación $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$ que relaciona sus diferentes variables y parámetros.

Mientras que el modo Analítico-Estructural (AE), sintetiza los elementos algebraicos de las representaciones analíticas dentro de conjuntos estructurales. Los objetos matemáticos se explican a partir de propiedades, características, axiomas o definiciones más generales que se agrupan en estructuras (Sierpinska, 2000). Por ejemplo, en el modo AE las SC son construidas como un lugar geométrico conformado por familias de curvas donde se diferencian los rasgos que las caracterizan.

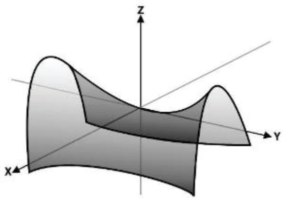
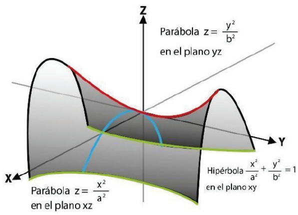
La diferencia entre el modo sintético y analítico (aritmético y estructural) es que en el modo sintético los objetos son dados directamente por la mente cuando se trata de describirlos; mientras que, en el modo analítico se dan indirectamente y solo son construidos a través de la definición de las propiedades de sus elementos. Una manera de coadyuvar en la comprensión de un objeto o concepto matemático es mediante la promoción de transiciones e interacciones entre estos tres tipos de pensamiento (Sierpinska, 2000). Parraguez (2012) indica que "para esta teoría comprender un objeto matemático es poder abordarlo articuladamente desde los modos SG, AA y AE" (p. 76); y en este sentido, es importante diseñar situaciones o actividades de aprendizaje que contemplan la interacción entre los modos de pensar un objeto matemático, para luego explicitar y evocar los elementos matemáticos que actúan como articuladores, que son precisamente los que permiten a los estudiantes transitar exitosamente entre los tres modos de pensar ese objeto.

Aunque un estudiante puede utilizar cada uno de los tres modos de pensamiento, se tiene tendencia a usar algunos que son más significativos y, por lo tanto, parecen más convenientes y fáciles de entender (Sierpinska, 2000).

2.1. Modos de Pensar las Superficies Cuadráticas

En la tabla 1 se caracterizan los modos de pensar las SC: mientras en el modo de pensamiento SG-SC se reconocen formas o figuras en el espacio tridimensional, en el modo AA-SC se identifica una ecuación que relaciona diferentes variables y parámetros; y en el modo AE-SC, se identifican familias de curvas que conforman una SC y se ponen de relieve los rasgos que caracterizan a las diferentes SC.

Tabla 1. Los modos de pensar las SC

Sintético-Geométrico (SG-SC)	Analítico-Aritmético (AA-SC)	Analítico-Estructural (AE-SC)
	$z = \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2}$	

Esta clasificación, surge de las distintas perspectivas de las SC que se advierten en el desarrollo del concepto: (1) en un primer momento, en la Grecia antigua, alrededor del año 200 a.C., Arquímedes estudia las características geométricas de sólidos de revolución (figuras generadas al girar elipses y parábolas sobre su eje de simetría, y por hipérbolas que giran alrededor de un eje transversal) (Lowell, 1968); (2) posteriormente, durante los siglos XVII y XVIII, a partir de la introducción del uso de coordenadas cartesianas en los escritos de Descartes, se produjo un segundo momento cuando Van Shooten, Fermat y Euler analizan las SC en el espacio tridimensional en relación con las ecuaciones de segundo grado en tres variables que las definen (Boyer, 1968; Kline, 1972); (3) y finalmente, se contempla un tercer momento a principios del siglo XIX con la aportación del trabajo de Monge y Hachette al estudio de las propiedades que definen a las SC (Lowell, 1968).

3. MÉTODO

Este estudio es de corte cualitativo, bajo la aproximación específica del método hermenéutico-interpretativo (Weiss, 2017) y se desarrolla en tres etapas.

3.1. Primera etapa

Se realiza una revisión bibliográfica de antecedentes y el análisis epistemológico de las SC por medio del cual se caracterizan los modos de pensar SG-SC, AA-SC y AE-SC (tabla 1). Asimismo, se diseñan actividades de exploración del concepto que incluyen el uso del software educativo *GeoGebra*.

Se plantea el uso del *GeoGebra* por su potencial expresivo para ilustrar las características del concepto en los modos SG-SC, AA-SC y AE-SC. Por ejemplo, en la actividad de exploración llamada "Trazas de Superficies Cuadráticas en *GeoGebra*" (figura 1), se incluye el uso de *applets* para apoyar a los estudiantes en el análisis de la relación entre ecuaciones cuadráticas y las gráficas que reflejan las condiciones de conjuntos de puntos y curvas en el espacio que configura a las SC.

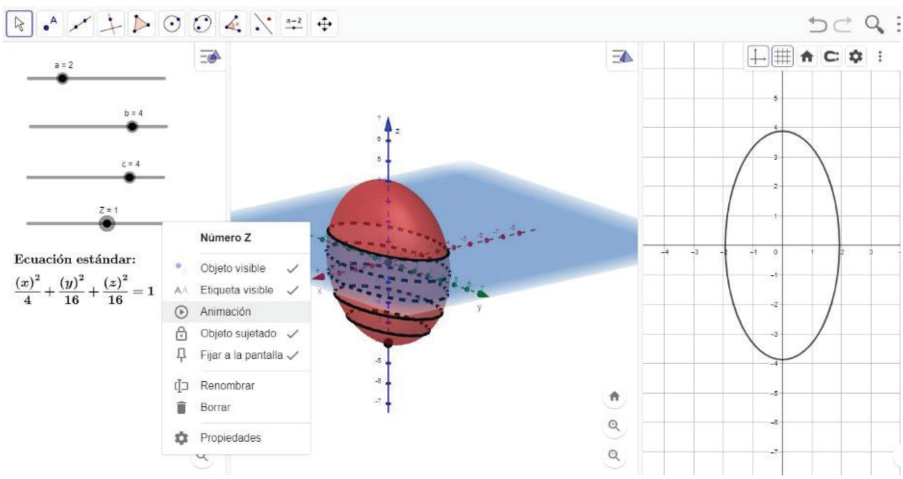
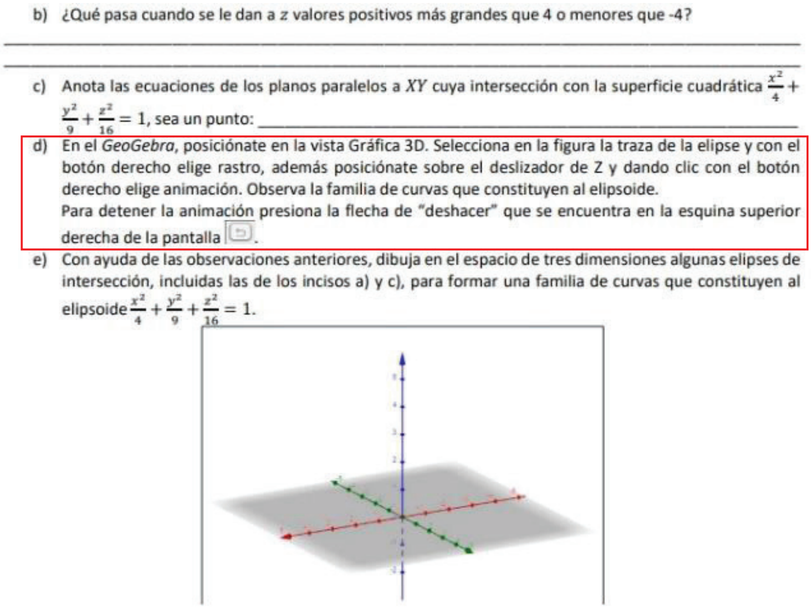


Figura 1. Actividad de exploración de Superficies Cuadráticas en *GeoGebra*

Las indicaciones en la actividad de exploración consideran centrar la atención sobre elementos matemáticos específicos, como el conjunto de curvas en el espacio que se configuran por puntos (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$ (figura 2). En relación con estos últimos, se había verificado previamente que satisfacen una ecuación de segundo grado.



b) ¿Qué pasa cuando se le dan a z valores positivos más grandes que 4 o menores que -4?

c) Anota las ecuaciones de los planos paralelos a XY cuya intersección con la superficie cuadrática $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$, sea un punto: __________

d) En el *GeoGebra*, posiciónate en la vista Gráfica 3D. Selecciona en la figura la traza de la elipse y con el botón derecho elige rastro, además posiciónate sobre el deslizador de Z y dando clic con el botón derecho elige animación. Observa la familia de curvas que constituyen al elipsoide.
Para detener la animación presiona la flecha de "deshacer" que se encuentra en la esquina superior derecha de la pantalla.

e) Con ayuda de las observaciones anteriores, dibuja en el espacio de tres dimensiones algunas elipses de intersección, incluidas las de los incisos a) y c), para formar una familia de curvas que constituyen al elipsoide $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$.

Figura 2. Indicaciones en la actividad de Trazas de Superficies Cuadráticas en *GeoGebra*

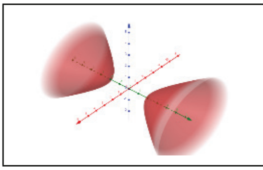
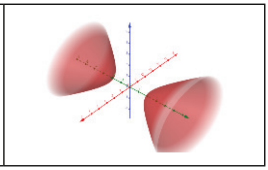
3.2. Segunda etapa

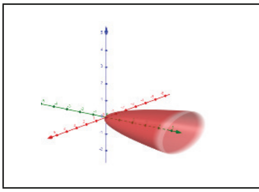
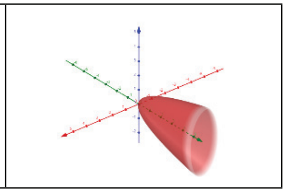
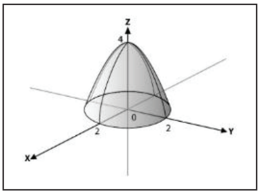
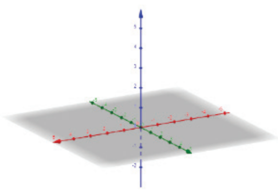
En la segunda etapa del estudio, una vez que los estudiantes revisaron los conceptos de gráficas de ecuaciones generales de segundo grado en dos variables en $\mathbb{R}^2$ (cónicas) y gráficas de planos y cilindros en $\mathbb{R}^3$, se implementaron las actividades didácticas diseñadas en un grupo de 38 estudiantes universitarios del área de ciencias e ingenierías (32 hombres y 6 mujeres), de entre 19 y 21 años de edad, inscritos en un curso de Cálculo de Varias Variables en una universidad pública estatal en México. De estos, seis estudiantes etiquetados como E1, E2, E3, E4, E5 y E6, se eligieron para participar en entrevistas, de acuerdo con los diferentes modos de pensar las SC y los elementos matemáticos que mostraron en sus respuestas.

Después de dar a conocer las intenciones de la investigación, los estudiantes manifestaron su disposición para participar en el estudio mediante un consentimiento informado. El tipo de muestreo que se lleva a cabo es de muestras diversas (Hernández *et al.*, 2010), dado que se pretende evaluar los elementos matemáticos que estudiantes con diferentes respuestas involucraron al transitar entre los distintos modos de pensar las SC.

Las técnicas utilizadas para recopilar información, en concordancia con el diseño hermenéutico-interpretativo, fueron el análisis de documentos y la entrevista. El instrumento de recolección de datos se conforma de cinco preguntas y tiene la finalidad de evidenciar el trabajo de los estudiantes en los diferentes modos de pensar las SC (tabla 2).

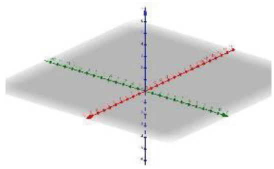
Tabla 2. Preguntas en las actividades de análisis

Actividad	Pregunta	Modos de pensar y tránsitos a observar
A1	A continuación, se da la gráfica de la superficie cuadrática $-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}-z^2=1$. En la gráfica de la izquierda identifica y marca los puntos donde ésta interseca con los planos $y=3, y=-2$. En la gráfica de la derecha identifica y marca los puntos donde ésta interseca con los planos $z=0, z=2$.  	SG-SC

A2	Escribe debajo de cada una de las siguientes figuras la ecuación que les corresponde. Elige entre $y = x^2 + 4z^2$, $y = x^2 + \frac{z^2}{4}$, $4y = x^2 + z^2$, $y = 4x^2 + z^2$. Describe con detalle el motivo de tus elecciones.   Ecuación: ____________ Ecuación: ____________ Describe con detalle el motivo de tus respuestas anteriores. Imagina que quieres explicar tus resultados a un compañero que apenas inicia el aprendizaje del tema.	SG-SC − AA-SC → AE-SC
A3	Considera la superficie cuadrática de la siguiente figura:  Dibuja y describe verbalmente lo más detalladamente posible, la curva de intersección de la superficie cuadrática con el plano $z = 1$.	SG-SC → AE-SC
A4	Representa en el espacio tridimensional la superficie cuadrática $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$. Luego traza y describe detalladamente la curva de intersección de la superficie con el plano $y = 1$.  Descripción:	AA-SC → AE-SC

<table>
<tr>
<td>A5</td>
<td>Transforma la ecuación general a la forma estándar correspondiente y luego identifica la superficie cuadrática. Dibuja su gráfica y descríbela mediante algunas de sus trazas.
<table>
<tr><th>Transformar a la ecuación estándar</th><th>Gráfica</th></tr>
<tr>
<td>$x^2 + y^2 - 4z^2 + 4x - 6y - 8z = 7$

Ecuación estándar:

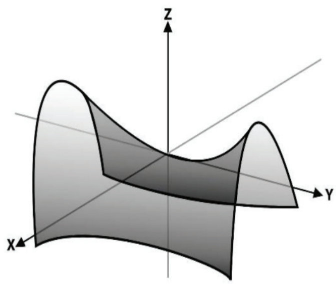
Nombre:</td>
<td>
Describir la gráfica mediante algunas de sus trazas:</td>
</tr>
</table>
</td>
<td>AA-SC → SG-SC → AE-SC</td>
</tr>
</table>

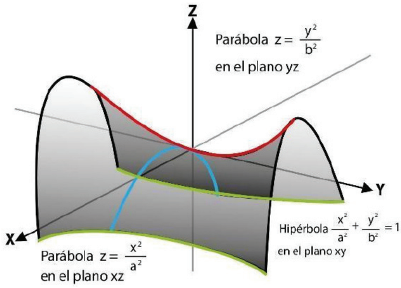
Complementario a las cinco preguntas anteriores, se conducen seis entrevistas semiestructuradas (Kvale, 2011), a estudiantes que realizaron las actividades didácticas y que involucraron distintas tendencias al responder las preguntas de la tabla 2. De manera específica, se propone la técnica de entrevista semiestructurada debido a que, aunque se cuenta con un guion para orientar las preguntas del entrevistador, se tiene libertad para realizar cuestionamientos adicionales con el fin de clarificar o ampliar las declaraciones de los informantes. El guion de las entrevistas incluye: (1) las descripciones que los estudiantes refieren sobre las gráficas y las ecuaciones de las superficies cuadráticas con las que se les propuso trabajar, (2) si las ideas representadas son utilizadas en un modo aislado o si se conectan diferentes modos de pensamiento, y (3) la manera en que se transita entre diferentes modos de pensar las SC mediante distintos elementos matemáticos como: trazas, simetrías, sustitución de valores de variables, parámetros, proyecciones, entre otros.

3.3. Tercera etapa

En esta etapa se realizó el análisis de los elementos matemáticos involucrados en los tránsitos entre los diferentes modos de pensar las SC, que se identifican en las respuestas de los estudiantes a las actividades de la tabla 2 y en los extractos de las transcripciones de las entrevistas. En la tabla 3 se especifican los elementos matemáticos considerados como evidencia observable del trabajo de los participantes en los distintos modos de pensar las SC.

Tabla 3. Elementos matemáticos observables en los modos de pensar las SC

Modos de pensamiento	Elementos matemáticos
SG-SC	 Puntos, líneas y /o curvas que forman una figura o forma determinada en el espacio tridimensional Referir simetría o proporciones, es decir, describir qué tanto abre hacia arriba o hacia abajo, a la izquierda o hacia la derecha a partir de un eje o el vértice una figura en el espacio, o de su proyección en un plano bidimensional.
AA-SC	$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$ Ecuación general Ecuación estándar Parámetros, signos, coeficientes y/o exponentes de las expresiones que componen las ecuaciones Operaciones con valores de variables

AE-SC	 Superficie generada por trazas (parábolas, circunferencias, elipses e hipérbolas) análogamente situadas en el espacio tridimensional, donde cada una de estas secciones cónicas se configuran por puntos (x, y, z) en R^3 que satisfacen una ecuación de segundo grado.

4. ANÁLISIS Y RESULTADOS

Con base en el modelo teórico que fundamenta esta investigación, se postula que la comprensión de un concepto se logra al transitar articuladamente por los tres modos de pensamiento SG, AA y AE. En los resultados que a continuación se reportan, obtenidos al analizar las respuestas de los estudiantes en las actividades y las transcripciones de las entrevistas, se describe explícitamente la manera en que se logra la articulación entre los diferentes modos de pensar las SC, mediante distintas rutas cognitivas y los elementos matemáticos involucrados en esos tránsitos.

La tabla 4 muestra las diferentes rutas cognitivas interpretadas a través de los modos de pensar las SC, obtenidas como resultado de la evaluación y valoración de los argumentos de E1, E2, E3, E4, E5 y E6 al responder las cinco actividades de análisis y la entrevista.

Tabla 4. Tránsitos entre los Modos de Pensar las SC en las Actividades

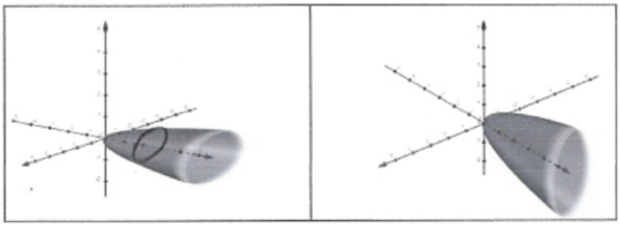
Actividad / Estudiante	A1	A2	A3	A4	A5
E1	SG → AA → AE	SG → AA → AE	SG → AA Insuficiente → AE Falso	AA → SG → AE	AA → SG → AE Insuficiente
E2	No responde	SG → AA Falso	SG → AA Insuficiente → AE Falso	SG → AA Insuficiente → AE Falso	AA → SG
E3	SG → AA → AE	AA → SG → AE	SG → AA → AE	AA → SG → AE	AA → SG → AE
E4	SG Insuficiente → AA → AE Falso	SG → AA → AE	SG → AA → AE	AA → SG → AE	AA → SG → AE
E5	SG → AA → AE	SG → AA Falso	SG → AA Falso	AA → SG Insuficiente	AA → SG → AE Falso
E6	SG → AA → AE	SG → AA → AE	SG → AA → AE	AA → SG → AE	AA → SG → AE

A continuación, se describen las respuestas en las cinco actividades marcadas en color en la tabla 4, debido a que son representativas de los tránsitos entre los modos de pensar las SC que mostraron los estudiantes en sus diferentes respuestas.

4.1. Tránsitos desde AA-SC → SG-SC → AE-SC y de SG-SC → AA-SC → AE-SC

Los estudiantes que alcanzan el modo de pensar AE-SC, inician desde cualquier otro modo mediante las rutas cognitivas AA-SC → SG-SC → AE-SC y SG-SC → AA-SC → AE-SC, lo que se verifica al considerar y comparar los argumentos que los estudiantes exponen al desarrollar las actividades y participar en las entrevistas. Por ejemplo, el estudiante E3 sigue la ruta cognitiva AA-SC → SG-SC → AE-SC en la actividad A2. E3 comienza de la *ecuación general* de segundo grado de la SC $y = x^2 + 4y^2$ (modo AA-SC), en la cual realiza una *transformación algebraica* para expresarla en *forma estándar* y verificar sus *parámetros* (figura 3).

Escribe debajo de cada una de las siguientes figuras la ecuación que les corresponde. Elige entre $y = x^2 + 4z^2$, $y = x^2 + \frac{x^2}{4}$, $4y = x^2 + z^2$, $y = 4x^2 + z^2$. Describe con detalle el motivo de tus elecciones.



Ecuación: $y = x^2 + 4z^2$ Ecuación: $y = 4x^2 + z^2$

Describe con detalle el motivo de tus respuestas anteriores. Imagina que quieres explicar tus resultados a un compañero que apenas inicia el aprendizaje del tema.

· De la primera ecuación, podemos reescribirla:

$$y = \frac{x^2}{1} + \frac{z^2}{\frac{1}{4}} = \frac{x^2}{1^2} + \frac{z^2}{(\frac{1}{2})^2}$$

Figura 3. Respuesta de E3 en la A2

Con esto, E3 señala las *simetrías* que percibe de manera intuitiva en el paraboloide elíptico respecto a los ejes *X* y *Z*, como se muestra en la figura 4.

Sabemos que "y" es lineal porque es el eje de simetria del paraboloide eliptico, y en el caso del primero, el semieje en "x" es mayor que el de "z", caso contrario que en la 2do, que tiene el semieje mayor en "z".

Figura 4. Respuesta de E3 en la A2

Luego, el estudiante E3 *sustituye* $y = 2$ para obtener una *ecuación de dos variables* en la que identifica los *parámetros* con los que transita al modo de pensar SG-SC, al establecer las *simetrías* de una *curva de intersección* (elipse) que *proyecta* en un plano bidimensional (*XZ*) (figura 5).

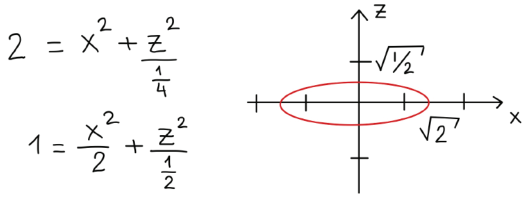


Figura 5. Respuesta de E3 en la A2

Posteriormente, en la intersección de la superficie con un *plano en el espacio*, E3 ubica el conjunto de puntos que configuran una *traza* (*variabilidad de puntos*), y reconoce que "depende del valor que tome *Y*" se podrían generar diferentes trazas situadas análogamente en el espacio (*variabilidad de trazas*) con las cuales se configura la SC (modo AE-SC), como se muestra en el siguiente extracto de la entrevista:

Entrevistador:	Entonces, ¿Cómo pudiste ver que efectivamente esas elipses corresponden con la ecuación de ese paraboloide?
E3:	Mjum.
Entrevistador:	¿Cómo se vería eso gráficamente?
E3:	¿En el plano o...?
Entrevistador:	O en la gráfica de la superficie.
E3:	Sí... ehhh. Dependería del valor que tome Y...
Entrevistador:	Y en la superficie ¿Cómo podría verse?
E3:	Ajá. Estaría como Y es igual a 2, pues los tendríamos más o menos a esta altura, y serían los puntos que van alrededor. Así. (Dibuja la traza sobre el paraboloide de la izquierda, figura 6)

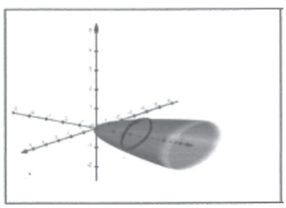


Figura 6. Respuesta de E3 en la A2

Entrevistador:	Ajá.
E3:	Sí... si Y fuera cero, pues en el plano se vería nada más un punto.

Entrevistador: Mjum.
E3: Sí. Si Y pues fuera un valor más...
Entrevistador: Por ejemplo, dos.
E3: Ajá. Si fuera dos....
Entrevistador: ¿Cómo sería?
...
E3: Entonces nos quedaría en ese punto, en Y igual a 2, una elipse que abre raíz de dos, o sea, el semieje de... de X, es raíz de dos y en Z la raíz de un medio (1/2).

Por otra parte, los tránsitos que muestra el estudiante E6 en la actividad A3 son SG-SC → AA-SC → AE-SC. En esta actividad se solicita que el estudiante dibuje y describa verbalmente, la curva de intersección de un paraboloide elíptico con el plano fundamental $z = 1$, y para responderla E6 se sitúa en el modo SG-SC al reconocer la *forma de la superficie cuadrática* (figura 7), a partir de la cual identifica algunas *transformaciones gráficas* que relaciona con la *fórmula de la ecuación estándar* para establecer los *parámetros* de la ecuación del paraboloide (modo AA-SC).

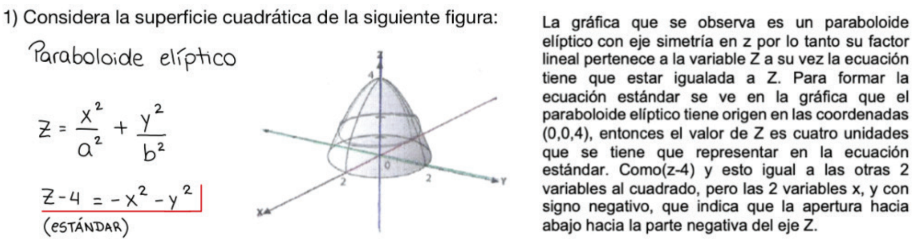


Figura 7. Respuesta de E6 en la A3

Para esto, E6 señala en la entrevista que con el fin de verificar que la ecuación estándar que había identificado correspondía la del paraboloide, *sustituye* $z=0$ en ella para obtener la *ecuación de dos variables* que representa la curva de intersección del paraboloide con el plano *XY*, y con esto E6 comprueba que los *parámetros* de la ecuación obtenida se relacionan con la circunferencia representada en dicha intersección, como se verifica en el extracto de la entrevista:

E6: [...] Ok, primeramente, esta es mi fórmula general de la circunferencia ¿no? Cuando Z es igual a cero, esa tendría que ser cuatro. Porque al sacar la raíz cuadrada te da dos y ese sí es el radio. (figura 8)

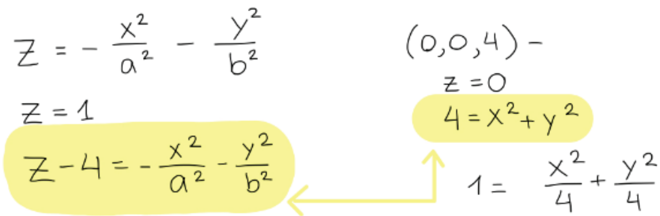
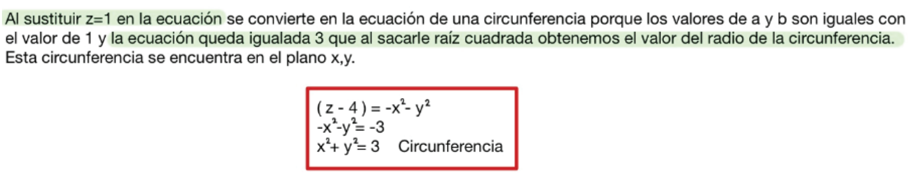


Figura 8. Respuesta de E6 en la A3

Entrevistador: Ah, muy bien.

E6: Y entonces, ahora sí, ahora ya que tengo esta, ese es cuando Z vale cero... Ok. Y entonces, ahora, entonces [murmura procedimiento] entonces esta tendría que ser mi fórmula para el paraboloide elíptico.

Después, E6 *sustituye* $z = 1$ en la ecuación $z - 4 = -x^2 - y^2$ para determinar una *ecuación de dos variables*, cuyos *parámetros* ayudan a *proyectar* la curva de intersección en un plano bidimensional (figura 9).


Al sustituir z=1 en la ecuación se convierte en la ecuación de una circunferencia porque los valores de a y b son iguales con el valor de 1 y la ecuación queda igualada 3 que al sacarle raíz cuadrada obtenemos el valor del radio de la circunferencia. Esta circunferencia se encuentra en el plano x,y.

$(z - 4) = -x^2 - y^2$
$-x^2 - y^2 = -3$
$x^2 + y^2 = 3$ Circunferencia

Figura 9. Respuesta de E6 en la A3

El hecho de realizar esa sustitución, le permite a E6 ubicar un *plano en el espacio* a través del conjunto de puntos que configuran a la traza (*variabilidad de puntos*), según se verifica en las respuestas de E6 en la entrevista:

E6: [...] Entonces, si Z va a ser igual a uno entonces me va a quedar una traza en el plano XY.
Entrevistador: ¿Cuál sería esa traza?
E6: Bueno, aquí, ah, ésta es cuatro ¿no?
Entrevistador: Ajá.
E6: Pues más o menos sería dividirlo como en cuatro partes, ahí más o menos, pues este sería el uno. Z igual a uno, entonces se cree... Haría más o menos un círculo como por aquí.

...

E6: Pues sería todo lo del conjunto de puntos que se encuentran en esta traza, donde el radio, cuando, bueno en la coordenada, en este caso sería para cuando Z vale uno, esto sería cuando Z vale uno, y serían todos los conjuntos de puntos que estén en la circunferencia.

En suma, se identifica que en el tránsito desde AA-SC hacia SG-SC se incorporan los elementos matemáticos articuladores: *ecuación general − transformación algebraica − ecuación estándar − parámetros − simetrías − sustitución − ecuación de dos variables − parámetros − simetrías − curva de intersección*; mientras que desde SG-SC hacia AA-SC los articuladores que se reconocen son: *forma de la superficie − transformaciones gráficas − fórmula de la ecuación estándar − parámetros − sustitución − ecuación de dos variables − parámetros − ecuación estándar.* Estos elementos matemáticos en las aproximaciones iniciales al comparar las gráficas y ecuaciones con las que se les propone trabajar incluyen articuladores tanto del modo SG-SC como del modo AA-SC (tabla 3), que interactúan para interpretar la información que se percibe en los primeros acercamientos a la comprensión del concepto de SC.

Por otra parte, desde el modo SG-SC hacia AE-SC los elementos articuladores que se registran son: *proyección − plano en el espacio − variabilidad de puntos en el espacio − traza − variabilidad de trazas,* y desde el modo AA-SC hacia AE-SC se identifican los articuladores: *sustitución − ecuación de dos variables − parámetros − proyección − plano en el espacio − variabilidad de puntos en el espacio − traza*; de donde se advierte que en los tránsitos hacia AE-SC los articuladores comunes que se involucran son: *proyección, plano en el espacio* y *variabilidad.*

4.2. Dificultades en el modo de pensamiento AA-SC o SG-SC y su implicación para el modo AE-SC

Respecto a los estudiantes que presentan dificultades para trabajar en los elementos que describen el modo de pensar SG-SC o AA-SC, se reconoce que no abordan el modo de pensar AE-SC, al evidenciar las siguientes rutas cognitivas: SG-SC → AA-SC Insuficiente → AE-SC Falso y SG-SC Insuficiente → AA-SC → AE-SC Falso.

Como se señala en la tabla 2, la intención de la actividad A4 es verificar los posibles tránsitos desde el modo AA-SC hacia el modo AE-SC. En esa actividad se solicita representar en el espacio tridimensional la superficie cuadrática con ecuación $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ y que se trace y describa la curva que se forma en la intersección de la superficie con el plano $y = 1$. Para responder esta actividad, el estudiante E2 desarrolla la ruta SG-SC → AA-SC Insuficiente → AE-SC Falso. Aunque esta actividad se presenta desde el modo AA-SC, E2 inicia en el modo de pensar SG-SC, cuando introduce la ecuación general de la superficie y la ecuación del plano en el software *GeoGebra*, para observar la *forma de la superficie* y la *forma de la curva de intersección* de la superficie con el plano. Luego, a partir de sus observaciones E2 reconoce la figura de un elipsoide y aunque intenta realizar una transformación algebraica de la ecuación $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ para obtener los valores *a*, *b* y *c* en la *fórmula de la ecuación estándar* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, con los que pretende justificar las simetrías que observa en la figura de A4, solo llega a determinar el valor del parámetro *c* de la ecuación estándar, como se interpreta en el extracto de la entrevista:

E2: [Anota en el *GeoGebra* la ecuación para obtener la gráfica] Pues ese es un elipsoide. Entonces en un elipsoide con un plano en Y, es igual a Y, igual a uno [dibuja en *GeoGebra* el plano $y = 1$]... (figura 10)

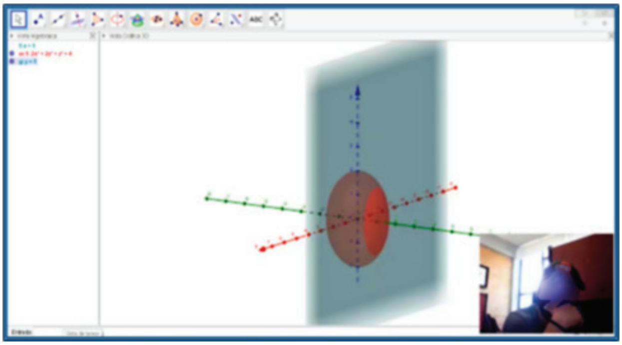


Figura 10. Respuesta de E2 en la A4

Ok. La curva... intersección... entonces ahí sí creo que tenemos que describir esta figura que está aquí. Es una elipse. Aquí ya podemos identificar que es un elipsoide, así que la ecuación estándar sería X al cuadrado más Y cuadrada, más Z al cuadrado igual a cuatro, digo, igual a uno, sobre *A*, sobre [ininteligible], sobre C cuadrada. Ok. Esto igualada a uno. Este es igual a cuatro, significa que esta ecuación estándar fue multiplicada por cuatro para que diera esto. Entonces todo esto se multiplicó por cuatro y para sacar los valores de *a, b*, y *c* [...]. Más bien como estos son dos, se debió de haber sido dividido por cuatro porque ese es el único que no tiene un coeficiente aquí al lado, que sería el dos, por lo tanto, Z... C es el que debe de valer dos y el cuadrado sería cuatro. Entonces, para eliminar este cuatro se multiplicó todo por cuatro y también este, entonces... esa es la figura que hice, ¿edá? aquí. [Murmura, ininteligible]

De esta manera, E2 identifica únicamente *uno de los parámetros de la ecuación estándar*, por lo que que transita a un modo AA-SC Insuficiente. Luego, *sustituye* que $y = 1$ en la ecuación general para obtener una *ecuación de dos variables* en la cual vuelve a sustituir para $z = 0$ y para $x = 0$ respectivamente, y determinar *valores de variable* con los que confirma las *simetrías* de la elipse que se forma en la intersección de la superficie con el plano (figura 11).

Descripción:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$2x^2+2=4 \qquad 2(1)^2+z^2=4$$

$$x^2=\frac{2}{2} \qquad z^2=\pm\sqrt{2}$$

$$x=\pm\sqrt{1} \quad x=\pm 1$$

La figura que se forma en el plano x, y, z es una elipsoide que al tener coeficientes diferentes de 1 en x e y su forma se ve afectada. Respecto al plano $y=1$ al sustituir sus valores en la ecuación nos da como resultado en $x=1$ y en $z=\sqrt{2}$.

Figura 11. Respuesta de E2 en la A4

Asimismo, a partir de las simetrías que percibe, E2 dibuja un cilindro elíptico y señala que a lo largo del cilindro "Y vale uno" porque es constante, es decir, no identifica que la traza se ubica en la intersección de la superficie con el plano $y=1$ y no logra advertir que y tiene diferentes valores a lo largo del cilindro (figura 12), por lo que llega a transitar a un modo de pensar AE-SC Falso.

E2: Esta es la superficie cuadrática, esta es la intersección del plano Y igual a uno con esta superficie, nada más que yo la estoy proyectando en toda esta parte, pero pues es lo mismo porque Y vale uno en toda esta parte. Y es constante, por lo tanto, pues es una proyección de todo esto y aquí sería el plano... Bueno es que no sé cómo hacer el plano... ese sería el plano [traza en la figura el plano $y=1$ que está representado en GeoGebra]... este es el plano Y igual a uno que al cortar con la superficie cuadrática nos da esta figura, pero se puede proyectar por toda esta parte porque Y es constante y nos seguirá saliendo esa misma figura.

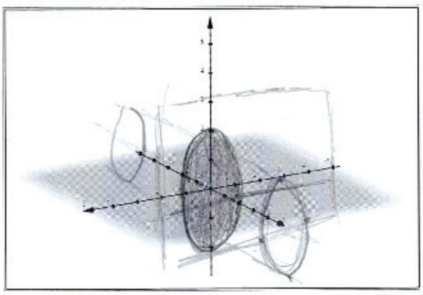


Figura 12. Respuesta de E2 en la A4

Por otra parte, en la actividad A1 se presentan dos gráficas de un mismo hiperboloide de dos hojas junto con su ecuación estándar ($-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}-z^2=1$) y se solicita a los estudiantes identificar y marcar en las gráficas los puntos de intersección de la superficie con diferentes planos fundamentales; por lo que para responder esta actividad, el estudiante E4 que presenta los tránsitos SG-SC Insuficiente → AA-SC → AE-SC Falso, comienza dibujando en el hiperboloide de la izquierda las *curvas de intersección* de la superficie con los planos $y=3$ y $y=-2$ (una elipse y un punto), mientras que en el de la derecha solo ubica tres puntos en el eje de las z, en vez de trazar las hipérbolas que se forman en la intersección de la superficie con los planos $z=0$ y $z=2$ (figura 13).

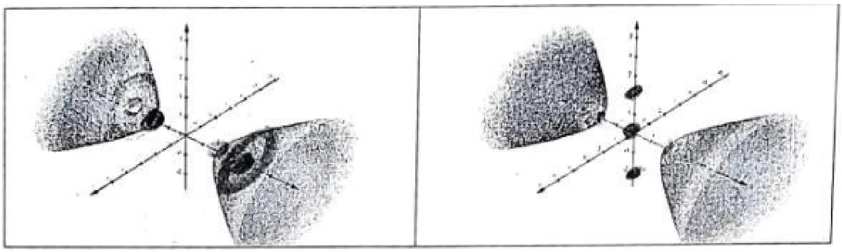


Figura 13. Respuesta de E4 en la A1

Posteriormente, durante la entrevista a E4, dibuja de nuevo sin dificultad la elipse y el punto que representan las intersecciones en el hiperboloide de la izquierda de A1 y *no logra ubicar las hipérbolas correspondientes en la gráfica de la derecha de A1*, por lo que se solicita argumentar sus respuestas. El estudiante utiliza la *ecuación estándar* que se presenta en la instrucción de la actividad para señalar que si se *sustituye* primero $y=3$ y después $y=-2$ en esa ecuación, se obtienen como resultado las *ecuaciones de dos variables* (modo AA-SC) correspondientes a la elipse y al punto que había identificado geométricamente (figura 14).

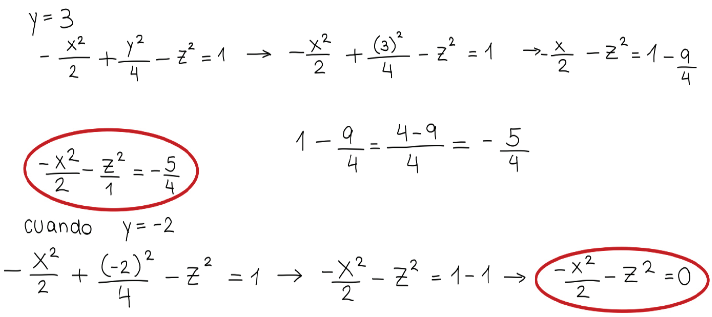


Figura 14. Respuesta de E4 en la A1

Así mismo, E4 *sustituye* en la ecuación de dos variables de la elipse $x = 0$ y $z = 0$ para *obtener valores de variable* con los que justifica las *simetrías* de la curva de intersección (elipse) que *proyecta* en un plano bidimensional (figura 15) y que había ubicado inicialmente en el espacio de tres dimensiones.

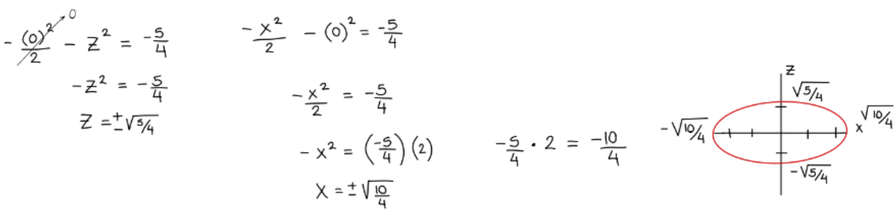


Figura 15. Respuesta de E4 en la A1

Respecto a la intersección de los planos $z = 0$ y $z = 2$ con el hiperboloide de la derecha de A1, E4 manifiesta una serie de argumentos en los que señala que la forma de las curvas de intersección son hipérbolas, aunque no logra trazar en la gráfica estas curvas. E4 menciona que la intersección es el área del plano $z = 0$, y la relaciona con "la parte más abierta" del hiperboloide de dos hojas. El estudiante E4 solo puede distinguir la altura a la que se encuentran los planos, pero no ubica sobre ellos la curva de intersección (modo AE-SC Falso), según se advierte en el extracto de la entrevista que a continuación se presenta:

Entrevistador: ¿Y cuál es el plano Z igual cero?

E4: O sea, simplemente no habría nada. Ah, no, pérame. Si... es que no me acuerdo cómo lo hice... Ah, ya, ya perdón. Eh, pues simplemente quedaría en el plano, este, XY, serían estos... ¿cómo se dice? Todos los puntos que pasa en esta intersección ¿sí? (dibuja el plano $z = 0$ en el hiperboloide de la figura 16).

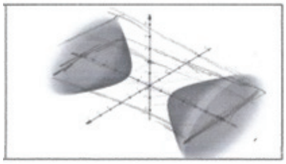


Figura 16. Respuesta de E4 en la A1

Entrevistador: ¿Cómo sería la curva de intersección?

E4: Ahm... ¿Cómo?

Entrevistador: Tú dices que este es el plano $z = 0$, entonces, ¿Cómo se vería la curva que se obtiene al cortar la superficie con ese plano?

E4: ¿Qué figura da?

Entrevistador: Ajá.

E4: Creo que era una parábola.

Entrevistador: Entonces ¿esa es la forma tendría ese conjunto de puntos donde el hiperboloide de dos hojas, intercepta a Z igual a cero y a Z igual a dos?

E4: Ok. Entonces ¿lo dibujo o cómo?

Entrevistador: Sí, puedes dibujarlo.

E4: Es que no te entiendo.

Entrevistador: Tú dices que la curva es un ¿qué?

E4: Es una elipse. Bueno, es... Bueno es, es que como son dos, es una hipérbole.

Entrevistador: ¿Una hipérbole?

E4: Ajá.

Entrevistador: Si así se ve el plano Z igual a cero, ¿cómo se ve aquí la figura que se forma?...

E4: Aquí intercectan los puntos que vienen en esta área.

Entrevistador: Exactamente. Entonces ¿cómo puedes expresar esa intersección de manera gráfica?

E4: Sería todos estos... como un plano, sería así, interceptan esto y todo este es la, la intersección, ajá.

Entrevistador:	Y entonces esa intersección en particular con el hiperboloide de dos hojas ¿cuál es exactamente esa intersección del plano con el hiperboloide de dos hojas?
E4:	¿Cuál es el plano?
Entrevistador:	Ya dibujaste el plano, tienes el hiperboloide de dos hojas ¿cuál es la intersección entre ambos?
E4:	¿La elipse? No, la hipérbole, perdón
Entrevistador:	Ajá
E4:	Dependiendo, sería cuando... Es la parte más abierta de las... ¿cómo se llama? Del hiperboloide de dos hojas. (remarca en la figura los extremos del plano dibujado $z = 0$)
Entrevistador:	Ok.
E4:	Es que me pongo nervioso.
Entrevistador:	No, no te preocupes, está bien, tú tranquilo.
E4:	Y cuando Z vale igual a dos, simplemente sería más chica la, la hipérbola, sería en este caso aquí, entonces interceptarían en todos estos planos, o sea esto es como iría, en todos estos valores. Bueno sería más en la parte más arriba, sería más chica la hipérbole. (dibuja el plano $z = 2$).

Por lo tanto, en el contexto del análisis anterior, se advierte que si se privilegia el modo de pensamiento SG-SC y no se presentan los elementos matemáticos articuladores: *sustitución − ecuación de dos variables − parámetros* en el tránsito hacia el modo AA-SC, entonces el modo de pensar AE-SC no se alcanza y así mismo, si se restringe el modo de pensamiento SG-SC, posiblemente a ciertas formas, entonces el tránsito hacia el modo AA-SC no es posible, como se verifica en el caso del estudiante E4, quien incorpora los articuladores: *sustitución − ecuación de dos variables − valores de variable − simetrías − parámetros* únicamente en caso de haber percibido inicialmente la forma de las curvas de intersección. Por lo tanto, aunque el pensamiento sintético resulta necesario para establecer una aproximación intuitiva a la noción de SC, este no es suficiente para lograr transitar al reconocimiento estructural de las propiedades del concepto de SC.

4.3. Tránsitos desde AA-SC → SG-SC y dificultades para alcanzar el modo AE-SC

La ruta cognitiva AA → SG → AE Insuficiente se presenta cuando el estudiante E1 responde la actividad A5, en la que se solicita transformar la ecuación $2x^2 + y^2 - 2z^2 - 4x + 8z - 8 = 0$ a la forma estándar e identificar la superficie cuadrática correspondiente, además de dibujar su gráfica y describirla mediante algunas de sus trazas. Ante esto, E1 realiza una transformación algebraica a partir de la cual establece la ecuación estándar y anota que la forma de la superficie es un hiperboloide de una hoja (modo SG-SC), junto a la cual E1 anota las coordenadas $(1, 0, 2)$, punto que es centro del hiperboloide y que E1 identifica en los parámetros de la ecuación estándar que plantea en la figura 17.

Transformar ecuación estándar

$$2x^2 + y^2 - 2z^2 - 4x + 8z - 8 = 0$$

$$(2x^2 - 4x) + y^2 - 2z^2 + 8z = 8$$

$$2(x^2 - 2x) + y^2 - 2(z^2 - 4z) = 8$$

$$2(x^2 - 2x + 1) + y^2 - 2(\cdots$$

$$\cdots 2^2 - 4z + 4) = 8 + 2 \cdot 8$$

$$2(x-1)^2 + y^2 - 2(z-2)^2 = 2$$

$$\frac{2(x-1)^2}{1} + \frac{y^2}{2} - \frac{2(z-2)^2}{2} = 1$$

$$(x-1)^2 + \frac{y^2}{2} - (z-2)^2 = 1$$

Ecuación estándar:

$$\frac{(x-1)^2}{1} + \frac{y^2}{2} - \frac{(z-2)^2}{1} = 1$$

Nombre:

Hiperboloide de una hoja

$(1,0,2)$

Figura 17. Respuesta de E1 en la A5

Luego, E1 en la figura 18 propone cuatro diferentes puntos en el espacio y verifica mediante una sustitución que sus coordenadas satisfacen a la ecuación estándar del hiperboloide (puntos que pertenecen al hiperboloide pero que no están graficados y tampoco se explica de qué forma se obtienen). Después E1 considera los valores correspondientes a la coordenada de estos puntos y los sustituye en la ecuación estándar para establecer ecuaciones de dos variables, con las que dibuja algunas trazas del hiperboloide, aunque no representa en la gráfica las cuatro ecuaciones propuestas, sino que ubica dos de ellas y no obtiene la ecuación de una de las trazas que grafica correspondiente al plano $z = 4$ (modo AE-SC Insuficiente).

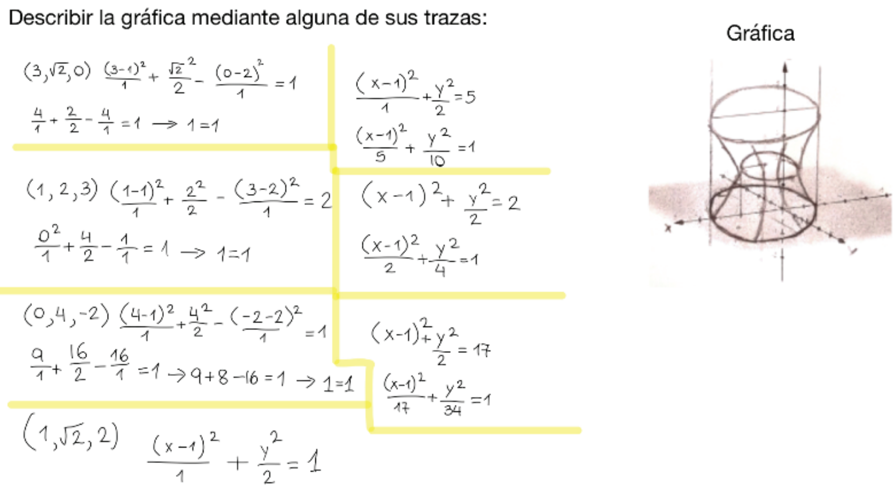


Figura 18. Respuesta de E1 en la A5

En consecuencia, a diferencia de los estudiantes E2 y E4 que presentan restricciones respecto a los modos de pensar SG-SC o AA-SC, el estudiante E1 articula ambos modos de pensamiento, y en particular involucra los elementos matemáticos: *sustitución – ecuación de dos variables – parámetros*, no obstante, en el tránsito hacia el modo de pensar AE-SC se advierte que los argumentos que expone no presentan en todos los casos una correspondencia entre lo sintético y lo analítico, y no se incorpora el elemento articulador variabilidad, lo cual restringe el paso para llegar al modo de pensar AE-SC.

5. CONCLUSIONES

Aunque en general los reportes que anteceden a este trabajo explican la construcción de las funciones de dos variables (Kashefi *et al.*, 2013; Martínez-Planell & Trigueros, 2013, 2019, 2021; Şefik & Dost, 2020; Weber & Thompson, 2014), este estudio se distingue por profundizar en los tránsitos entre los modos de pensar las SC –prerrequisito curricular de dichas funciones– por parte de estudiantes que resuelven situaciones matemáticas propuestas, poniendo de relieve los elementos matemáticos que ellos evocan en su resolución.

Los hallazgos del estudio indicaron que el tránsito entre los modos SG-SC ↔ AA-SC resulta indispensable en los primeros acercamientos en la comprensión del concepto en estudio, y se logra al identificar los elementos matemáticos: transformaciones gráficas/algebraicas, ecuación estándar, parámetros, sustitución, ecuación de dos variables, simetrías y curva de intersección, como se muestra en la figura 19; mientras que la transición a la interpretación estructural del concepto requiere un pensamiento variacional mediante el cual, conjuntos de puntos ubicados en el espacio tridimensional se proyectan en un plano para configurar las trazas que constituyen a las superficies cuadráticas, es decir, la comprensión de estos elementos matemáticos representados en el espacio (modo AE-SC), se favorece cuando intervienen de manera conjunta los elementos articuladores: proyección – plano en el espacio – variabilidad.

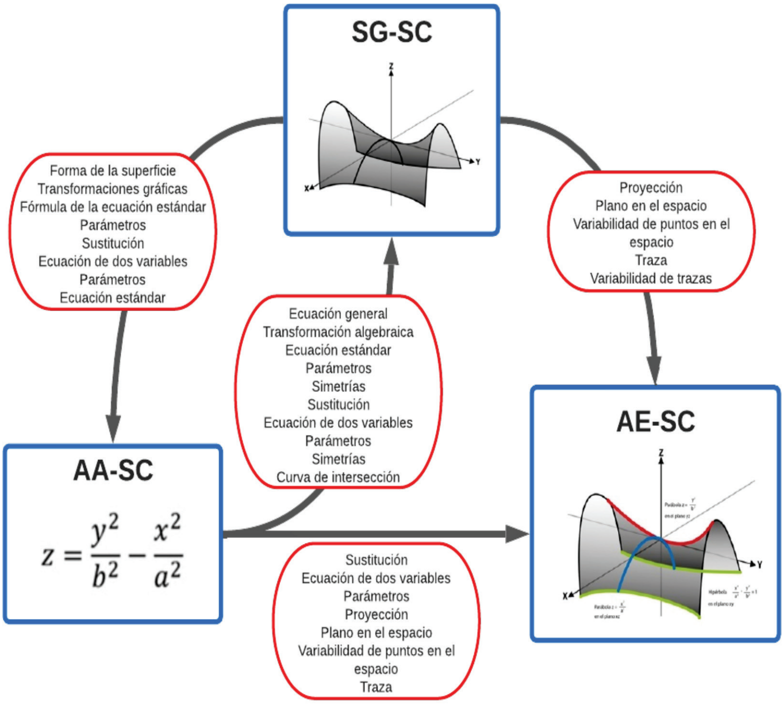


Figura 19. Articuladores entre los Modos de Pensar las SC

De manera específica, la evidencia mostró que la variabilidad es un elemento matemático indispensable para alcanzar el modo AE-SC, para lo cual el *GeoGebra* mostró un rol importante en su reconocimiento. Lo anterior, debido a que la interacción con el entorno gráfico-algebraico del software permitió a los estudiantes percibir la variabilidad relacionada con el concepto, lo cual es difícil comunicar a través de un argumento observable si solo se trabaja con lápiz y papel. Así mismo, en concordancia con los resultados reportados en el trabajo de López-Vega (2018), el uso del *GeoGebra* favoreció el tránsito entre los modos SG-SC y AA-SC, para relacionar la ecuación de las superficies con las orientaciones de sus gráficas (transformaciones gráficas – fórmula de la ecuación estándar) y para reconocer cómo afectan los parámetros de la ecuación a la superficie (ecuación estándar – parámetros – simetrías).

Por otra parte, los estudiantes que privilegiaron exclusivamente alguno de los modos de pensamiento SG-SC o AA-SC, no llegaron al modo de pensar AE-SC.

Por ejemplo, de manera análoga a los resultados reportados por Trigueros y Martínez-Planell (2010), los datos de esta investigación mostraron que una tendencia al modo SG-SC produce un obstáculo para poder articular los modos SG-SC y AA-SC, debido a que si se enfoca la atención exclusivamente en las formas y simetrías de las superficies cuadráticas y de las curvas de intersección, solo es posible realizar una aproximación intuitiva a la noción; por lo que se debe de prever que los estudiantes que privilegian este modo podrían limitarse a un reconocimiento visual y no estructural del concepto de superficies cuadráticas.

Aunque también, los resultados mostraron que el modo de pensar SG-SC resulta imprescindible en la comprensión de las superficies cuadráticas; y es que si se restringe este modo, posiblemente a ciertas formas, entonces el tránsito hacia el modo AE-SC tampoco se alcanza, debido a que no se perciben las formas gráficas. Como consecuencia de esto último, no es posible incorporar los elementos matemáticos: sustitución – ecuación de dos variables – parámetros, necesarios para articular al modo AA-SC en el proceso de comprensión del concepto. Al respecto, se sugiere que en las actividades didácticas, creadas para explorar en el *GeoGebra* las características de las superficies cuadráticas, se incluya el análisis de trazas de diferentes curvas cónicas y no solo con formas elípticas.

Desde un punto de vista metodológico y práctico, la descripción de la comprensión de las SC por parte de estudiantes universitarios, a través de la relación entre elementos matemáticos articuladores de diferentes formas de ver el concepto, ofrece una referencia útil para los profesores de matemáticas con el fin de aclarar el diseño y orientación de los esfuerzos de enseñanza y evaluación del tema.

Futuras investigaciones podrían focalizarse en confirmar los hallazgos que surgen en este trabajo, a través de un estudio de corte cuantitativo en el que los resultados que aquí se presentan se utilicen como hipótesis para contrastar un grupo control con instrucción tradicional y uno experimental, que sea expuesto a una experiencia de aprendizaje que involucre la exploración de los elementos matemáticos articuladores de los modos de pensar las SC antes descritos.

REFERENCIAS

Boyer, C. (1968). *A history of mathematics*. Wiley International.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. Mc Graw Hill.

Kashefi, H., Ismail, Z., & Yusof, Y. (2013). Learning Functions of Two Variables Based on Mathematical Thinking Approach. *Jurnal Teknologi*, *63*(2), 59-69. https://doi.org/10.11113/jt.v63.2010

Kline, M. (1972). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Alianza.

Kvale, S. (2011). *Las entrevistas en investigación cualitativa*. Ediciones Morata.

Larson, R., & Edwards, B. (2016). *Cálculo. Tomo II.* Cengage Learning.

López-Vega, P. (2018). *Génesis instrumental del hiperboloide en estudiantes de arquitectura mediada con el GeoGebra*. [Tesis para optar el título de Magíster, Pontificia Universidad Católica del Perú]. https://bit.ly/3CvLBot

Lowell, J. (1968). *A history of the conics sections and quadric surfaces*. Dover publications, Inc.

Martínez-Planell, R., & Trigueros, M. (2013). Graphs of functions of two variables: results from the design of instruction. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44*(5), 663-672. https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.780214

Martínez-Planell, R., & Trigueros, M. (2019). Using cycles of research in APOS: The case of functions of two variables. *Journal of Mathematical Behavior, 55*, 1-22. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.01.003

Martínez-Planell, R., & Trigueros, M. (2021). Multivariable calculus results in different countries. *ZDM – Mathematics Education, 53*, 695-707. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01233-6

Parraguez, M. (2012). *Teoría de los modos de pensamiento*. Instituto de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Şefik, Ö., & Dost, Ş. (2020). The analysis of the understanding of the three-dimensional (Euclidian) space and the two-variable function concept by university students. *The Journal of Mathematical Behavior, 57*, 1-19. https://doi.org/10.1016/J.JMATHB.2019.03.004

Sierpinska, A. (2000). On Some Aspects of Students´ Thinking in Linear Algebra. En: J.L. Dorier (ed) *On the Teaching of Linear Algebra, 23*, 209-246. Springer https://doi.org/10.1007/0-306-47224-4_8

Thomas, G. (2015). *Cálculo varias variables. Treceava edición*, Pearson Education.

Trigueros, M., & Martínez-Planell, R. (2007). Visualization and abstraction: Geometric representation of functions of two variables. En T. Lamberg &L. R. Wiest (Eds.), *Proceedings of the 29th Annual Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 100-107.

Trigueros, M., & Martínez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics, 73*, 3-19. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9201-5

Weber, E., & Thompson, P. (2014). Students' images of two-variable functions and their graphs. *Educational Studies in Mathematics, 87*(1), 67-85. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9548-0

Weiss, E. (2017). Hermenéutica y descripción densa versus teoría fundamentada, *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *22*(73), 637-654. https://www.redalyc.org/pdf/140/14050493013.pdf

Autor de correspondencia

GUADALUPE VERA-SORIA

Dirección postal: Marcelino García Barragán #1421, colonia Olímpica,
C.P. 44430, Guadalajara, Jalisco, México.
Edificio V, tercer nivel Cubículo 6
guadalupe.vera@academicos.udg.mx

Teléfono: +52 (33) 1378 5900 ext. 27753