 DOI: 10.24844/EM3003.06

Estrategias de cálculo mental para sumas y restas desarrolladas por estudiantes de secundaria

Mental calculation strategies for addition and subtraction developed by middle school students

Fernando Barrera-Mora[1]
Aarón Reyes-Rodríguez[2]
José Guadalupe Mendoza-Hernández[3]

Resumen: Las estrategias de cálculo mental juegan un rol importante en el desarrollo del sentido numérico. Al respecto, buscamos determinar cómo alumnos de una telesecundaria, ubicada en una comunidad rural del estado de Hidalgo, México, pueden desarrollar estrategias de cálculo mental al realizar tareas que involucran sumas y restas en contextos de compraventa. Identificamos ocho estrategias diferentes, algunas de las cuales emplearon el dinero de fantasía como sistema de representación, que apoyó la descomposición de las cantidades en forma novedosa. Los estudiantes hicieron referencia a estrategias que utilizan personas sin escolaridad al recibir el cambio de compras en el mercado; también aparecieron estrategias como quitar uno al minuendo en una resta con reagrupación, para obtener una sin reagrupación. Esto es, se observó una transferencia de las estrategias de cálculo mental, cuando los participantes modificaron el algoritmo estándar para la resta, con el objetivo

Fecha de recepción: 6 de diciembre de 2017. **Fecha de aceptación:** 17 de septiembre de 2018.

[1] Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Área Académica de Matemáticas y Física, fbarrera10147@gmail.com orcid.org/0000-0002-4289-5776.

[2] Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Área Académica de Matemáticas y Física, aaronr@uaeh.edu.mx orcid.org/0000-0001-8294-9022.

[3] Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Área Académica de Matemáticas y Física, pillo1976@hotmail.com orcid.org/0000-0002-6397-1141.

de facilitar los cálculos al resolver un problema. Esto es un indicador de creatividad y entendimiento de los números y las operaciones.

Palabras clave: *sentido numérico; cálculo mental; suma y resta; compraventa.*

Abstract: Mental calculation strategies play an important role in the development of students' number sense. In this regard, we sought to determine how students of a public middle school (distance education program), located in a rural community in the state of Hidalgo, Mexico, can develop mental calculation strategies when performing tasks involving addition and subtraction, in a shopping context. Eight different strategies were identified, some of which used fantasy money as a representation system that helped students to decompose quantities. They referred to strategies used by people, without schooling, when they receiving money back after paying for a purchase in the market. Strategies such as removing one to the minuend in a subtraction with regrouping also appeared, to obtain one addition without regrouping. That is, we identified a transfer of mental calculation strategies to paper and pencil scenarios, which facilitate calculations to solve a problem. This is an indicator of creativity and understanding of numbers and operations.

Keywords: *number sense; mental calculation; addition and subtraction; tasks in a shopping context.*

INTRODUCCIÓN

Uno de los principales objetivos de la educación matemática es proporcionar elementos teóricos y metodológicos que orienten el diseño e implementación de tareas, a partir de las cuales los estudiantes puedan entender conceptos y métodos matemáticos (Sarama y Clements, 2009). El entendimiento no es algo que se tenga o no se tenga, es algo que siempre está cambiando; es una idea importante, porque si entendemos algo, esto puede adaptarse y ser utilizado para resolver problemas. Entender significa darse cuenta de cómo un concepto, idea o procedimiento se conecta o relaciona con otras cosas que conocemos.

> ... un estudiante entiende cómo sumar 35 y 47 si puede relacionar este problema con otras cosas que sabe acerca de la suma y el significado de los numerales 35 y 47. Saber que 35 es 3 decenas y 5 unidades y que 47 es 4 decenas y 7 unidades, ayuda a identificar que existen diversas formas de combinar los números... la evidencia del entendimiento frecuentemente aparece como explicaciones de por qué las cosas funcionan como lo hacen... (Hiebert *et al.*, 1997: 4)

De la conceptualización de entendimiento, en términos de conexiones, se desprende que pueden existir diversos niveles del mismo, en función de la cantidad y robustez de las relaciones establecidas entre una idea y otros conocimientos previos (Sowder, 1992; Jones *et al.*, 1996; Munisamy y Doraisaimy, 1998; Pitta-Pantazi, Christou y Zachariades, 2007; Sarama y Clements, 2009; Chimhande, Naidoo y Stols, 2017). Además, estos niveles se caracterizan en dominios o temas matemáticos específicos (Burger y Shaugnessy, 1986; Sowder, 1992; Malloy, 1999; Sarama y Clements, 2009). Respecto al sentido numérico, el estándar de números y operaciones que propone el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de los Estados Unidos (NCTM, 2000) bosqueja algunos niveles de esta forma de pensamiento.

De acuerdo con algunas propuestas curriculares y trabajos de investigación, para transitar entre niveles de entendimiento es importante participar activamente en una comunidad de aprendizaje en la que se discuten y construyen significados, al conectar ideas y conceptos relacionados con experiencias y conocimientos previos mediante procesos de reflexión y comunicación de ideas (Hiebert *et al.*, 1997; NCTM, 2000). Particularmente, en el ámbito aritmético, es importante que los alumnos de los niveles educativos básicos desarrollen significado de las cantidades al abordar situaciones problemáticas, y que desarrollen hábitos para crear y utilizar representaciones relevantes, considerando el tipo de números involucrados y atendiendo al significado de las cantidades. Además, es relevante que apliquen, con flexibilidad, diferentes propiedades de los números y las operaciones, lo cual significa desarrollar habilidades que les permitan descomponer, agrupar, establecer relaciones entre cantidades (comparar, estimar, duplicar) y aplicar las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva para facilitar o simplificar los cálculos (NGACBP y CCSSO, 2010; SEP, 2011). La flexibilidad se refiere a usar métodos eficaces, en función de las características del problema que estén resolviendo, o de los números involucrados en el mismo (Blöte, Klein y Beishuizen, 2000). Por ejemplo, la estrategia de sumar decenas y unidades de forma separada, y luego sumar los resultados parciales, es más apropiada para calcular 55+24 que para sumar 33 y 29, mientras que la estrategia de redondear un número, antes de realizar la suma, es más eficaz para calcular 33+29 (Threlfall, 2002).

El sentido numérico ha sido conceptualizado de diferentes formas. Algunos autores consideran que se refiere al "entendimiento general de los números y las operaciones, junto con la habilidad e inclinación para usar este conocimiento de forma flexible, con el objetivo de efectuar juicios matemáticos y desarrollar estrategias útiles y eficaces para manejar situaciones numéricas" (Reys *et al.*, 1999: 61). Otros autores lo conciben como una red conceptual bien organizada que permite a las personas relacionar las propiedades de los números y las operaciones. Esto puede reconocerse cuando se ponen en práctica habilidades, de forma creativa y flexible, al usar magnitudes para realizar comparaciones, al efectuar juicios cualitativos y cuantitativos, al reconocer resultados no razonables antes de realizar cálculos, al llevar a cabo cálculos mentales y estimaciones mediante procedimientos no estándar, así como al resolver problemas que involucran números (Sowder, 1992).

El sentido numérico representa una forma de pensar, más que un cuerpo de conocimientos que puede transmitirse a otros (Sowder, 1992), por lo cual diversos investigadores han centrado la atención en las acciones que caracterizan a quienes poseen este tipo de pensamiento. Por ejemplo, Reys *et al.* (1999) consideran que un estudiante con sentido numérico es capaz de comparar cantidades, estimar o aproximar resultados y proponer procedimientos para llevar a cabo sumas, restas, multiplicaciones y divisiones de maneras alternativas a los algoritmos estándar, al igual que juzgar la pertinencia de los resultados obtenidos al ejecutar operaciones numéricas. De acuerdo con Sowder (1992), las habilidades que identifican a las personas que poseen sentido numérico son: (1) Habilidad de componer y descomponer números, para transitar entre diferentes representaciones semióticas y reconocer cuándo una representación es más útil que otra; (2) Habilidad en reconocer las magnitudes relativas de los números, incluyendo comparar y ordenar cantidades; (3) Habilidad para comprender magnitudes absolutas; (4) Habilidad de utilizar cantidades como puntos de referencia al realizar cálculos; (5) Habilidad para relacionar símbolos de números, operaciones y relaciones en formas significativas; (6) Habilidad en comprender el efecto de las operaciones sobre los números; (7) Habilidad para llevar a cabo cálculos mentales a través de estrategias que aprovechen las propiedades de los números y las operaciones; (8) Habilidad de realizar estimaciones y determinar en qué casos una estimación es adecuada y (9) Disposición para dar sentido a los números. En esta línea de ideas, Greeno (1991) considera que el sentido numérico requiere de un análisis teórico, más que de una definición, y propone acciones que efectúan aquellos que cuentan con un sentido numérico: (1) Cálculos numéricos flexibles, (2) Estimación numérica, y (3) Juicios e inferencias cuantitativos.

En este trabajo adoptamos la caracterización de Reys *et al.* (1999: 62), quienes consideran que el sentido numérico está integrado por seis componentes: (1) Entendimiento del significado y tamaño de los números, (2) Entendimiento y uso de representaciones equivalentes de los números, (3) Entendimiento del significado y efecto de las operaciones, (4) Entendimiento y uso de expresiones equivalentes, (5) Fluidez al aplicar estrategias de cálculo y conteo flexible para realizar cálculos mentales, cálculos escritos y con uso de tecnología, (6) Medidas y puntos de referencia.

En la actualidad, el sentido numérico constituye una de las habilidades básicas de todo ciudadano con una educación elemental (Devlin, 2017), ya que, a pesar de la existencia de tecnologías digitales que realizan cálculos y llevan a cabo una amplia diversidad de procedimientos matemáticos en cuestión de segundos, estas no pueden interpretar resultados y tomar decisiones fundamentadas, capacidades que siguen siendo del dominio exclusivo de los seres humanos (Fuson, 1992). Particularmente, es importante entender los fundamentos de procedimientos tales como: suma y multiplicación de números racionales, solución de ecuaciones lineales y polinomiales, operaciones con matrices, diferenciación de funciones analíticas, solución de ecuaciones diferenciales, etcétera. También es indispensable que estos procedimientos sean estructurados con los conceptos subyacentes, de modo que se desarrollen habilidades para determinar cuándo y cómo utilizarlos en la comprensión de fenómenos, naturales o sociales, del mundo que nos rodea.

El cálculo mental, aunado a la habilidad para aproximar y estimar cantidades, son componentes básicos del sentido numérico (Reys *et al.*, 1999). El cálculo mental es una forma de hacer operaciones aritméticas sin utilizar apoyos externos, como anotaciones, calculadoras o materiales manipulables (Reys *et al.*, 1995). Al realizar cálculos mentales es importante encontrar relaciones entre las cantidades, incluyendo agrupaciones, compensaciones o descomposiciones útiles para transformar cantidades iniciales y, de esta forma, operar con otros números que facilitan los cálculos (Reys *et al.*, 1999; Valencia, 2013).

REVISIÓN DE LA LITERATURA

Revisamos literatura en torno a investigaciones que abordan el desarrollo tanto de aspectos generales como específicos del sentido numérico. Los trabajos sobre sentido numérico han seguido diferentes perspectivas. Han explorado la forma en que profesores de educación básica valoran y fomentan el sentido numérico en sus salones de clase, concluyendo que la mayoría de los docentes emplean tareas en las que los estudiantes deben ejecutar procesos algorítmicos, sin dar la importancia a los significados de los números y las operaciones (Tsao y Lin, 2011). Otras investigaciones buscan evaluar la efectividad de intervenciones didácticas en el desarrollo del sentido numérico y concluyen que cuando se forman conexiones robustas entre ideas matemáticas, es más probable que estas sean almacenadas en la memoria a largo plazo y sean fácilmente recuperables (Markovits y Sowder, 1994). Asimismo, han propuesto marcos teóricos para capturar los elementos esenciales del sentido numérico en los niveles de educación básica (McIntosh, Reys y Reys, 1992).

Por otro lado, hay estudios enfocados en analizar aspectos específicos del sentido numérico; por ejemplo, aquellos en los que se identifica la habilidad o flexibilidad para realizar cálculos mentales (Reys *et al.*, 1995; Blöte, Klein y Beishuizen, 2000; Swan y Sparrow, 2001; Berch, 2005), diferencias entre métodos utilizados por estudiantes de distintos países al hacer cálculos mentales (Beshuizeny Anghileri, 1998), generación de estrategias para sumar y restar números enteros de varios dígitos (Carpenter *et al.*, 1997), relación entre el entendimiento de las cantidades discretas y continuas (Leivobich *et al.*, 2017), entendimiento de los números racionales y el razonamiento proporcional (Lamon, 2007), o análisis de métodos escritos para efectuar divisiones (Anghileri, Beishuizen y Van Putten, 2002). Otros trabajos han intentado caracterizar niveles de entendimiento respecto de componentes particulares del sentido numérico, tales como el valor posicional (Jones *et al.*, 1996), la flexibilidad al realizar cálculos mentales (Threlfall, 2002), procedimientos para realizar sumas y restas de números de un dígito (Fuson, 1992), habilidad para estimar el resultado de sumas (Case y Sowder, 1990), el uso de representaciones equivalentes de los números (Pitta-Pantazi, Christou y Zachariades, 2007), o cálculo de múltiplos y potencias de 10 (Anghileri, 2006), entre otros.

Es importante hacer notar que durante las últimas décadas del siglo XX y las primeras del XXI, la educación escolarizada ha enfatizado los aspectos procedimentales y algorítmicos de la aritmética. Una consecuencia de este enfoque es que una alta proporción de la población adulta, a nivel mundial, tiene dificultades para resolver problemas que involucran operaciones aritméticas básicas, incluyendo el cálculo de porcentajes o probabilidades (Paulos, 2000). Considerando lo anterior, algunos investigadores proponen fomentar ambientes de instrucción en los que el análisis de las estrategias de cálculo mental anteceda al aprendizaje de las estrategias de papel y lápiz (Reys *et al.*, 1995; Gómez, 2005). Otras investigaciones han obtenido evidencia de que la habilidad para realizar cálculos mentales de forma eficiente se encuentra conectada estrechamente con la habilidad para estimar (Yang, Hsu y Wang, 2004; Cortés, Backhoff y Organista, 2004).

De acuerdo con Sowder (1992), el desarrollo de actividades orientadas al cálculo mental puede conducir a un incremento en el entendimiento y flexibilidad para trabajar con los números. Es decir, la comprensión y el manejo de estrategias de cálculo mental son fundamentales para la formación matemática de los alumnos. Sin embargo, pocos trabajos hacen uso de tareas de instrucción contextualizadas en situaciones reales o similares a las que aparecen en el entorno de los estudiantes. Además, este tipo de tareas están ausentes en los contextos escolares, sobre todo de los estratos socioeconómicos menos favorecidos (Lubienski, 2000). Argumentamos que el desarrollo de tareas en contextos reales o hipotéticos proporciona un ambiente robusto y flexible que puede favorecer la creatividad de los alumnos para utilizar sus conocimientos extraescolares en las aulas, conectarlos con los conocimientos institucionalizados y, de esta manera, ver cómo las matemáticas ayudan a dar sentido a los fenómenos que ocurren en nuestro mundo (Barrera-Mora y Santos-Trigo, 2001; Clarke y Roche, 2017). Tomando como referente lo expuesto anteriormente, formulamos la pregunta que orienta este trabajo: en un contexto de compraventa, ¿cuáles son las estrategias de cálculo mental, para realizar sumas y restas, que desarrollan estudiantes de una escuela telesecundaria ubicada en una comunidad rural del estado de Hidalgo? Esta pregunta es importante ya que, de acuerdo con la caracterización del sentido numérico que propone Reys *et a*l. (1999), el cálculo mental es parte fundamental del sentido numérico. Asimismo, el sentido numérico es una forma de pensar relevante y útil en la vida diaria, al igual que una herramienta valiosa en la promoción y el monitoreo del pensamiento matemático avanzado (Reys *et al.*, 1995). Por otro lado, diversas investigaciones y propuestas de aprendizaje valoran la importancia que tiene situar las tareas en contexto (Sullivan, Clarke y Clarke, 2013). Las tareas contextualizadas aportan oportunidades de aprendizaje a los estudiantes, al relacionar aspectos de la vida real con situaciones que enfrentan en el aula. En esta línea de ideas, la investigación en educación matemática ha aportado evidencias de que diversas deficiencias en el conocimiento de los alumnos se deben, en gran medida, a la falta de conexión entre los conocimientos escolares y los conocimiento informales o intuitivos que poseen (Fuson, 1992; Sarama y Clements, 2009).

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

El marco de investigación que orienta este trabajo incluye tres dimensiones: (i) Ontológica, (ii) Epistemológica y (iii) Didáctica. En cuanto a la dimensión ontológica, consideramos que matemáticas es la ciencia de los patrones (Steen, 1988) y que aprenderlas consiste, en gran medida, en adquirir una disposición para ver el mundo a través de la lente de un matemático (Schoenfeld, 1992; Sarama y Clements, 2009; Clements y Sarama, 2013; Yoong, 2015), más que únicamente memorizar hechos y adquirir fluidez para llevar a cabo algoritmos o procedimientos rutinarios. Esta disposición conlleva a que los estudiantes experimenten, exploren relaciones matemáticas, formulen conjeturas, justifiquen resultados, comuniquen ideas y resuelvan problemas utilizando diferentes rutas (Polya, 1945). Además, es importante que desarrollen una actitud inquisitiva, es decir, una habilidad para formular, de manera sistemática, preguntas y nuevos problemas (Santos-Trigo, 2007; Berger, 2014).

Respecto a la dimensión epistemológica, adoptamos una perspectiva de corte socio constructivista (Simon, 1994), por lo cual suponemos, por un lado, que cada persona construye, de forma activa, su propio conocimiento al enfrentar problemas que desequilibran sus estructuras cognitivas, independientemente del contexto o la presencia y naturaleza del proceso de enseñanza. Por otro lado, consideramos que el aprendizaje es un proceso continuo que se lleva a cabo en una comunidad, en donde se construyen significados o entendimientos considerados-como-compartidos (Cobb *et al.*, 1991), ya que cada estudiante interpreta una experiencia y organiza cierto conjunto de ideas en términos de su propia estructura cognitiva, la cual es diferente de la del resto de sus compañeros debido a que aprender es un proceso social, en donde el medio cultural y sus producciones, entre ellas los sistemas semióticos de representación, determinan las características del conocimiento que se construye (Wertsch, 1993). Así, las oportunidades para aprender, es decir las situaciones que desequilibran las estructuras cognitivas, surgen de los intentos que llevan a cabo los alumnos para conciliar puntos de vista dentro de un grupo, al comunicar ideas matemáticas y al lograr consensos (Jones, 1996).

La dimensión didáctica se refiere a las características del conocimiento que consideramos deseables, y las condiciones que permitan que éste tenga tales características. Al respecto, estamos interesados en que los estudiantes entiendan ideas matemáticas, lo cual implica la construcción de conexiones robustas entre un conocimiento nuevo y los recursos de un alumno, que tienen lugar a partir de los procesos de reflexión y comunicación de ideas llevados a cabo durante la resolución de problemas (Hiebert *et al*. 1997). Además, creemos que entender una idea o concepto requiere necesariamente de usar esa idea o concepto para crear nuevas ideas o resolver problemas (Zull, 2002). Una persona que ejecuta con precisión los algoritmos aritméticos puede que no posea sentido numérico, y solo tenga un nivel de entendimiento elemental de los números y las operaciones. Por ejemplo, si alguien para calcular lo que debe pagar por dos productos, cada uno de los cuales cuesta $25 y tienen 50% de descuento, divide mediante el algoritmo convencional 25 entre dos para obtener 12.50 y luego suma 12.50+12.50 para obtener 25, a pesar de que ha implementados los algoritmos de forma correcta, solo tiene un entendimiento elemental de los números y las operaciones (ejemplo adaptado de McIntosh, Reys y Reys, 1992). En contraste, quien razona que obtener 50% de una cantidad implica dividir entre dos y comprar dos productos del mismo precio significa multiplicar por dos, y que las operaciones de multiplicación por dos y división entre dos son inversas una de la otra y, por tanto, concluye que el resultado de la compra es 25, ha establecido mayor número de relaciones y, por ende, posee un mayor nivel de entendimiento de los números y las operaciones.

La construcción de entendimiento o comprensión matemática requiere que los alumnos desarrollen sucesivamente ciclos de acción, observación, formulación de conjeturas y justificación de resultados (Zull, 2002; Barrera-Mora y Reyes-Rodríguez, 2016). Cada *ciclo básico para la construcción de entendimiento matemático* (Figura 1) se robustece con la información y las relaciones de los anteriores. En este proceso se ponen en práctica todos los elementos del pensamiento matemático. En la fase de acción, los estudiantes interactúan con los datos e identifican aquellos que son relevantes de los que no lo son; también representan la información, cuantifican atributos de algunos objetos o agregan elementos auxiliares para ampliar la información del planteamiento. Esta fase es importante porque el conocimiento tiene su origen en las experiencias físicas (ver, tocar, escuchar, etcétera) y en las imágenes mentales formadas a partir de estas experiencias (Zull, 2002). Sin referencia a eventos u objetos físicos (incluidas las representaciones semióticas), las ideas matemáticas no pueden tener significado. La acción no es suficiente para entender algo, es necesario llevar a cabo un proceso de reflexión; por ello, en la fase de observación identificamos relaciones entre datos e incógnitas, así como patrones y regularidades. Las fases de acción y de observación se relacionan mediante flechas en ambas direcciones (Figura 1), debido a que la identificación de relaciones y patrones puede requerir de una interacción recurrente con los objetos físicos en los que están inmersas. En la fase de formulación de conjeturas, los alumnos generalizan los resultados observados en la fase previa y formalizan sus observaciones en términos matemáticos. Finalmente, en la fase de justificación comunican sus conjeturas al resto de los integrantes de la comunidad de práctica (el salón de clase), expresando argumentos de diferentes tipos para sustentarlas: visuales, empíricos y formales. Aunado a lo anterior, en esta última etapa del ciclo extienden resultados o se formulan nuevas preguntas y problemas que conducirán a una nueva fase de acción.

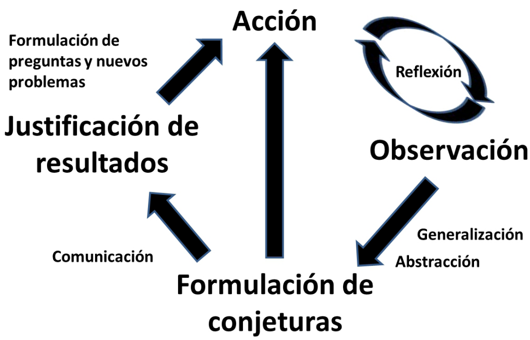


Figura 1. Ciclo básico para el desarrollo de entendimiento matemático (adaptado de Zull, 2002).

METODOLOGÍA Y TRABAJO DE CAMPO

La tarea de instrucción propuesta en este trabajo se denomina "La tienda departamental". Esta tarea fue implementada durante el ciclo escolar 2016-2017 en un grupo de 24 estudiantes (9 hombres y 15 mujeres) pertenecientes a los tres grados de una escuela telesecundaria ubicada en una comunidad rural en el estado de Hidalgo, México. La aplicación de la tarea se llevó a cabo con todos los alumnos inscritos en la escuela, durante sesiones dedicadas para implementar la *ruta de mejora escolar*, en horarios establecidos por la Dirección de la escuela y aprobados por el supervisor escolar, aunque para el análisis de los resultados únicamente consideramos el trabajo de aquellos que mostraron una actitud favorable hacia el desarrollo de las actividades, ya que hubo un conjunto de participantes renuentes a realizar las tareas que se dedicó a hacer actividades ajenas a ellas. En la elección de esta tarea seguimos la sugerencia de Clarke y Roche (2017), quienes argumentan que las tareas contextualizadas deben conectarse con los intereses y experiencias de los estudiantes, involucrar matemáticas importantes, interesar a los alumnos en la realización de las actividades y ayudarlos a apreciar la utilidad de las matemáticas.

La mayoría de los estudiantes que participaron en esta investigación cursaron la educación primaria en escuelas multigrado del Consejo Nacional de Fomento Educativo (Conafe) y en escuelas bidocentes de la SEP. Estos alumnos, en opinión de los profesores de cada uno de los grupos, muestran diversas deficiencias en lo que respecta a: (i) Comprensión lectora y (ii) Manejo de algoritmos convencionales para realizar operaciones aritméticas con números naturales y racionales. Previo a la participación de los estudiantes en el desarrollo de la tarea, y debido a su edad, se notificó por escrito a los padres de familia que los resultados de estas actividades serían utilizados para el desarrollo de un proyecto de investigación, y se les solicitó autorización para grabar en video el trabajo de sus hijos. Les informamos que los videos serían observados únicamente por el equipo de investigación, y que para mantener confidencialidad, la identidad de los alumnos se mantendría bajo reserva, al utilizar un seudónimo para cada uno de ellos. Los seudónimos son: Aby, Alex, Alexis, Alondra, Angy, Balta, Bere, Beto, David, Faby, Fany, Fer, Idalid, Jorge, Julio, Landin, Lolis, Luz, Mario, Memo, Ponchito, Toñis y Toñita.

La tarea "Tienda departamental" incluyó la organización, en el salón de clase, de un escenario de instrucción que simuló un contexto que los alumnos pueden encontrar en su vida cotidiana. Durante la primera fase de implementación realizaron la compraventa de diversos productos empleando dinero de fantasía (fase de acción). Esto con la finalidad de que surgiera la necesidad de realizar mentalmente cálculos aritméticos, cuando los estudiantes debieran determinar cuáles productos, de su interés, podrían comprar (fase de observación). Se pidió a los alumnos que llevaran a la escuela productos que no utilizaran en casa (ropa, calzado, discos de música o de películas, memorias USB, balones, celulares) y que investigaran los precios comerciales de estos productos, suponiendo que eran nuevos, para etiquetarlos con los precios respectivos, y con algunos descuentos identificados con tarjetas de colores. En la estructuración de un contexto en el que aparecen objetos y precios reales, consideramos la sugerencia de Van den Heuvel-Panhuizen (2005), quien propone evitar situaciones excesivamente simplificadas (una tienda donde los productos sean dibujos o empaques de productos) o no familiares para los estudiantes.

Los alumnos se dividieron en dos equipos: el equipo A de los vendedores y el equipo B de los compradores. Cuatro estudiantes fueron designados los cajeros de la tienda y cuatro más eran los responsables de almacén. Finalmente, entregamos a cada comprador la cantidad de $2,000 pesos y a cada cajero $2,500 pesos. Los compradores debían tratar de gastar la mayor parte del dinero y todos los participantes tenían que registrar las transacciones en unas hojas de control elaboradas para tal fin (Figura 2). Después de 30 minutos, los alumnos intercambiaron sus roles, de vendedores a compradores y viceversa. Los cajeros intercambiaron con los almacenistas; entregamos nuevas hojas de control a cada participante y nuevas cantidades de dinero a los compradores y a los cajeros.

Nombre del vendedor: ______________________________

Hoja de registro de control de ventas					
No de venta	**Artículo vendido**	**Precio original**	**Venta de oferta**		**Total a pagar**
			% de descto.	**Monto de descto.**	

Figura 2. Hoja de control de los vendedores.

Durante esta primera fase, la cual fue grabada en video, la función del investigador que implementó la tarea, quien también es docente de la escuela Telesecundaria, fue corroborar que los participantes respetaran sus funciones y realizaran sus anotaciones en las hojas de control. Durante la implementación de la tarea aparecieron situaciones en las cuales los cajeros no sabían cuál era el cambio que debían entregar a los clientes; entonces sus compañeros les proporcionaron apoyo en la forma de sugerencias para realizar los cálculos, tales como aplicar la estrategia de complementos parciales (500-103.50=1.50+5+90+300=396.5), o asesoría en la ejecución de los algoritmos estándar para sumar y restar.

"La tienda departamental" proporcionó un contexto real para los estudiantes, además de que se promovió un ambiente de resolución de problemas que les permitiera desarrollar una visión de las matemáticas como una herramienta para comprender el mundo (Schoenfeld, 1992).

En una segunda fase, organizamos un escenario que favoreciera la reflexión acerca de cómo desarrollar, comprender y comunicar estrategias de cálculo mental, para sumar y restar, durante la solución de diversos problemas que enfrentaron los alumnos al comprar y vender en "La tienda departamental". Las fases de formulación y comunicación de las estrategias, así como la justificación de ideas, son centrales en el proceso de desarrollo de entendimiento matemático, como establecimos en los elementos teóricos de este trabajo.

En esta segunda fase formaron cuatro equipos, integrados por estudiantes de cada uno de los tres grados escolares. Pedimos a cada equipo que indicara el costo de dos productos que hubiesen comprado, y el docente escribió en el pizarrón la suma (un pantalón de 425 pesos más un balón de 215 pesos). Después se les invitó a que, al interior de cada equipo, conversaran sobre las operaciones que debían realizar para contestar la pregunta: ¿Cuánto dinero le sobró a su compañero si pagó los productos con billetes de 500 pesos? El maestro orientó la actividad con cuestionamientos del tipo: ¿Al realizar las sumas y restas, siempre se debe empezar a partir de las unidades? ¿Cuáles son los valores posicionales del 5 en el número 575.50? Si se tienen 42 pesos, ¿cuánto faltaría para completar 100 pesos?

Después de la discusión al interior de los equipos, por turnos, un representante pasó al pizarrón a explicar una estrategia de cálculo mental para la suma (fase de formulación de conjeturas); el reto consistió en que el jugador del siguiente equipo debería presentar una estrategia diferente a las ya expuestas.

Cada participante explicó su estrategia de cálculo, comentando sus ventajas y proponiendo diversos ejemplos (fase de justificación de resultados). Los demás equipos expresaban sus dudas, o las desventajas de la estrategia presentada. Para finalizar esta fase, los equipos participaron en una competencia. En cada ronda participaba un jugador que resolvía diferentes ejercicios de suma y por cada resultado y explicación correcta ganaban dos puntos para el equipo. La fase de competencia fue importante en el desarrollo de entendimiento matemático, ya que generó la necesidad de utilizar estrategias propias para hacer sumas y restas, la cual estuvo orientada por el objetivo de ganar la competencia.

La competencia terminó cuando todos los jugadores de cada equipo pasaron una vez al pizarrón, ganando el equipo que obtuvo más puntos. Esta misma dinámica se llevó a cabo para las estrategias de resta. Es importante mencionar que las actividades en el salón de clase fueron organizadas con base en el ciclo básico para el desarrollo de entendimiento matemático (Figura 1). La fase de acción incluyó la interacción que los estudiantes desarrollaron en las actividades de compraventa. Buscamos que el contexto favoreciera el surgimiento de una necesidad para llevar a cabo operaciones aritméticas. La fase de justificación, basada principalmente en la comunicación de resultados, tuvo lugar cuando los alumnos discutieron al interior de los grupos y cuando comunicaron al resto de sus compañeros por qué las estrategias propuestas proporcionaban resultados correctos. En esta fase se implementó un elemento central de una aproximación socio-constructivista, ya que, independientemente de la actividad, asignamos tiempo para analizar las diversas formas de obtener las respuestas, señalar el rango de posibles estrategias y destacar las más eficientes o apropiadas (QCA, 1999: 19).

RESULTADOS

Identificamos cuatro estrategias principales para la suma y cuatro para la resta. Algunas de ellas estaban sustentadas en el contexto de “La tienda departamental”, mientras que otras, si bien no son propiamente estrategias de cálculo mental, permitieron a los estudiantes realizar cálculos de manera ágil, usando los billetes de fantasía como sistema de representación para descomponer las cantidades, o mediante al algoritmo estándar con papel y lápiz. Los alumnos inventaron las estrategias, sin que el instructor las haya enunciado o ejemplificado previamente; es decir, estuvieron inmersos en un contexto de resolución de problemas (Polya, 1945), en el cual utilizaron sus conocimientos previos para resolver situaciones problemáticas, además de que compartieron ideas al escuchar y opinar sobre las estrategias de los diferentes equipos.

ESTRATEGIAS DE CÁLCULO MENTAL PARA LA SUMA

1. Suma por el valor posicional del número. La estrategia consiste en hacer la suma separando las cifras de una cantidad, con base a su valor posicional. Después de separar los sumandos en centenas, decenas y unidades se efectúa la suma agrupando unidades, decenas y centenas. Por ejemplo, al sumar 425 y 215, primero se suman las centenas 400+200=600, después las decenas 20+10=30 y finalmente las unidades 5+5=10. Para obtener el resultado final se agrupan nuevamente las unidades, decenas y centenas, es decir, 425+215=600 + (30+10)=640.

> **Profesor:** Vamos a comprar una blusa que cuesta 315 y un pantalón que cuesta 285, ¿cuánto vamos a pagar? A ver... Explícanos tu estrategia.
>
> **Estudiante:** Bueno, nosotros lo que hicimos fue empezar por las cantidades grandes 300 más 200 son... 500. Ahora le seguimos con las cantidades medianas, se puede decir que son (aquí sabemos que estas son decenas y las decenas son de 10 [Unidades]). Entonces son 10 (unidades) y aquí son 8 decenas, son 80, serían 90. Y luego las unidades, pues las unidades son de 1, 5 unidades y 5 unidades serán 10 unidades. Y luego sumamos todo... 90 más 10, 100; más 500, 600. [La alumna escribe el resultado final]

2. Suma por partes. Es una variante de la estrategia por valor posicional. Aquí únicamente se descompone el segundo sumando en centenas, decenas y unidades y, posteriormente, se realizan las sumas parciales. Por ejemplo, al sumar 425+215, al primer sumando (425), se le suman primero 200, después 10 y finalmente 5, obteniéndose las siguientes sumas parciales 425+200=625, después 625+10=635 y finalmente 635+5=640.

> **Profesor:** Tenemos un pantalón que cuesta 318 pesos y una blusa que cuesta 224, ¿cuánto se paga por las dos prendas? ¿Cómo obtuvieron el resultado?

Estudiante: Yo voy a sumar 318 más 200, 518.

Profesor: Escríbelo, 318 más 200 te da 518, estoy de acuerdo, ¿y luego?

Estudiante: Este... a esos 518 le voy a sumar 24. Le sumo 20 y luego 4... serían... 538, [Le sumo] el 4. Serían... 542.

Comentarios: Las dos estrategias anteriores reflejan que los estudiantes entienden el significado y tamaño de los números, la evidencia de esto aparece cuando descomponen los sumandos en centenas, decenas y unidades. En la primera estrategia identifican un orden entre ellas (las centenas son mayores que las decenas y las unidades). En la implementación de ambas estrategias los alumnos exhibieron entendimiento y uso de expresiones equivalentes porque, por ejemplo, el número 315 se expresó como 300+10+5. Al efectuar operaciones, los estudiantes emplearon las propiedades asociativa y conmutativa de la suma, lo cual es indicador de un entendimiento del efecto de las operaciones, además de fluidez al aplicar estrategias de cálculo.

3. Redondear a decenas los sumandos. Antes de elaborar la suma, cada sumando es redondeado a la decena superior, por ejemplo: al sumar 545+327, al primer sumando le agregan 5 para redondear a 550, al segundo sumando le agregan 3 para redondear a 330, después hacen la suma de los nuevos sumandos 550+330=880 y al final restan las unidades agregadas durante el redondeo inicial, 880−8=872.

Profesor: Muy bien, tenemos un pantalón que cuesta 318 pesos y una blusa que cuesta 224, ¿cuánto se paga por las dos prendas? Dinos, ¿cómo le vas a hacer?

Estudiante: Primero voy a completar... [Escribe 318 + 2 y 224 + 6]

Profesor: Ok, entonces si ya lo completaste a decenas, ¿cuánto sería ahora?

Estudiante: 320 más 230 [Escribe los nuevos sumandos y realiza la suma siguiendo el algoritmo convencional] son 550. Se le resta ocho [Señala el +2 y el +6 que agregó a los sumandos iniciales] y quedan 542.

4. Redondear a decenas restando. Es una variante de la estrategia redondear a decenas sumando; redondean a la decena inferior restando cierta cantidad a cada sumando. Ejemplo: al sumar 435+125.5, al primer sumando le restan 5 para redondear a 430, al segundo sumando le restan 5.5 y redondean a 120, suman los nuevos sumandos 430+120=550 y al final suman las unidades restadas al inicio: 550+10.5=560.5.

> **Profesor:** Se va a comprar una chamarra de 443 y unas zapatillas de 512, ¿cuánto se debe pagar? Explica tu estrategia para realizar esa suma.
>
> **Estudiante:** Yo aquí le resté 3 y luego aquí [Le resté] 2...
>
> **Estudiante:** Este... para que me quedaran 440 y 510. Aquí puse 440 de acá y aquí 510 de aquí... lo sumé y me dio 950, después sumé el 3 y el 2 [Señala el -3 y el -2] y son 5 y aquí me dio 955.

Comentarios: Al implementar esta estrategia, los alumnos mostraron un entendimiento del significado y tamaño de los números, lo cual fue evidente cuando redondearon las cantidades a la decena inmediata, inferior o superior; además, esto indica uso de puntos de referencia al realizar cálculos. Los estudiantes utilizaron las propiedades asociativa y conmutativa de la suma y, de forma implícita, la propiedad del neutro aditivo, lo cual es indicador de un entendimiento del efecto de las operaciones, así como de fluidez al aplicar estrategias de cálculo. En la segunda estrategia, el estudiante justificó el resultado de su estrategia indicando que sumar significa juntar cosas; entonces, a los dos conjuntos de dinero les quitaron ocho pesos, se juntaron los grupos resultantes y al final agregaron nuevamente los ocho pesos que quitaron en un inicio.

Es importante mencionar que algunos alumnos recurrieron constantemente al algoritmo de papel y lápiz. En la estrategia “completar a decenas” realizaron la suma de los sumandos redondeados 320+230 con el algoritmo convencional. Conjeturamos que este comportamiento se debió a que durante la explicación de la estrategia hicieron anotaciones en el pizarrón. Tres casos (Memo, Julio y Angy) mostraron algunas dificultades para comprender el valor posicional de los números que integran una cantidad; por ejemplo, para sumar 318+236 sumaron las centenas correctamente, pero al sumar las decenas, solo consideraron el valor de los dígitos 1+3 (en lugar de 10+30). Además, identificamos que al colocar los resultados parciales no respetaron el valor posicional de los números, por tanto, al tratar de hacer la suma siguiendo el algoritmo convencional obtuvieron un resultado incorrecto (1,020). Lo anterior es un indicador de cómo algunos estudiantes de este grupo no le dan sentido a las operaciones ni a las cantidades al usar los algoritmos convencionales, a diferencia de lo que ocurre al utilizar estrategias de cálculo mental. Lo anterior debido a que los algoritmos estándar para realizar operaciones aritméticas son herramientas diseñadas para ser medios eficaces y precisos en la realización de cálculos, pero en los cuales los fundamentos conceptuales subyacentes son opacos (Carpenter *et al.*, 1997).

ESTRATEGIAS DE CÁLCULO MENTAL PARA LA RESTA

1. Resta por descomposición del sustraendo. La estrategia consiste en descomponer el sustraendo en centenas, decenas y unidades, para posteriormente realizar restas parciales consecutivas. Por ejemplo, para efectuar la resta 1,000−640, el 640 se descompone en 600 más 40, posteriormente a 1,000 le restan 600 y al resultado parcial le restan 40, y así se obtiene el resultado final que es 360.

> **Profesor:** Cuando Antonia llegó a la tienda departamental tenía 900 pesos y con ellos pagó 587, ¿cuánto dinero le sobró?
>
> **Estudiante:** Bueno, primero a las centenas que son 900 le quito 500 me quedan 400, luego le quito 80 que son las decenas y me quedan 320, y por último le quito las unidades que son 7 y me quedan 313.

Comentarios: En la estrategia anterior se muestra que los alumnos entienden el significado y tamaño de los números, la evidencia de esto aparece cuando descomponen el sustraendo en centenas, decenas y unidades. En la implementación de la estrategia, los estudiantes exhibieron entendimiento y uso de expresiones equivalentes al descomponer 587 como 500+80+7.

2. Resta con base en la suma de complementos parciales. El sustraendo se aumenta repetidamente de forma apropiada hasta obtener el minuendo y la resta es obtenida sumando los complementos parciales. Por ejemplo, para realizar la resta 1000−645, al 645 primero se le suman 5 unidades para completar 650, luego le suman 50 para completar 700 y finalmente le suman 300 para completar 1000, entonces el resultado de la resta original es igual a 5+50+300=355. (A veces, este proceso es utilizado para verificar que la operación sea correcta).

> **Profesor:** Muy bien, llegué a la tienda con 600 pesos y tengo que pagar 302 pesos, ¿cuánto me va a sobrar?... [Después de que los alumnos de cada equipo resuelven el ejercicio en el pizarrón] A ver, escuchemos a Fabiola.
>
> **Estudiante:** A 302 le sumé 8 y me dio 310, a 310 le sumé 90 y me dio 400, a 400 le sumé 200 y me dio 600, luego sume esto [Señala los complementos +8 +90 y +200] y me dio 298 [Esta estrategia es una adaptación de la forma en que algunas personas adultas sin escolaridad se convencen de que reciben el cambio correcto al comprar en el mercado, y a la cual hicieron referencia algunos estudiantes]
>
> **Comprador:** Cóbreme por favor 238. [Entrega al cajero 250 pesos]
>
> **Cajero:** Este... ¿le cobro 238? [Duda cuánto dar de cambio]
>
> **Comprador:** [Tomando del dinero del cajero, le explica cómo entregar el cambio] Un peso son 239, más otro peso son 240 y esta moneda de 10 son 250.
>
> **Cajero:** [Reflexionando un poco, toma las monedas y se las entrega al comprador] Está bien, aquí tiene su cambio.

Comentarios: Al aplicar esta estrategia los estudiantes muestran un entendimiento del significado y tamaño de los números, lo cual se evidencia al redondear las cantidades a la decena o centena superior, además de que esto muestra el uso de puntos de referencia al realizar cálculos.

3. Resta en la que se utiliza el dinero de fantasía como sistema de representación. La estrategia requiere separar el minuendo en dos cantidades, de tal manera que una de ellas se acerque al sustraendo y que, además, esta cantidad se pueda obtener con billetes de denominación conocida. Por ejemplo, al restar 1000-385.50, primero dividen los 1000 pesos en dos billetes de 500, con uno de ellos pagan los 385.50, al final suman los 114.50 que reciben de cambio más los 500 pesos que separaron al inicio, por tanto el resultado es 500+114.50=614.50.

Profesor: Si tienes 1200 y pagas en la tienda 715 pesos, ¿cuánto te sobra?

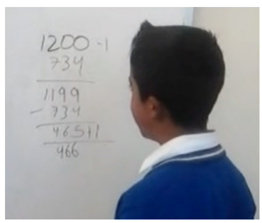
Estudiante: Para pagar 715 utilizaría un billete de 500, uno de 200 y uno de 100... Y serían 800 y me sobrarían de los 1200, sobrarían 400.

Profesor: Sí...y pagas 800.

Estudiante: Y....primero a los 800 quito los 700 y me sobrarían 100 pesos, y a esos 100 pesos le quito 15 y me sobrarían... 85. Entonces de 800 menos 715 me sobrarían 85 y le sumo los 400 que me sobraron de los 1200 y me darían 485.

Comentarios: La estrategia anterior demuestra que los estudiantes entienden el significado y tamaño de los números, cuya evidencia aparece al redondear a la centena superior el sustraendo y descomponer esta cantidad en función de las denominaciones del dinero de fantasía (800=500+200+100). Lo anterior también es indicativo del uso de puntos de referencia.

4. Cambio de resta con reagrupación a resta sin reagrupación ajustando, unidades, decenas y centenas. Aunque no se refiere precisamente a una estrategia de cálculo mental, esta técnica fue muy recurrente. Consiste en disminuir en una unidad al minuendo, después realizar la resta de manera convencional, y al final sumar la unidad que restaron al inicio. Ejemplo: para restar 1000-278 se resta 999-278=721, y a ese resultado le suman 1 para obtener 722. Esta técnica evita el "llevar" cifras en cada etapa del proceso y muestra la conexión entre la suma y la resta de cantidades como procesos inversos, un concepto relevante en el desarrollo de las matemáticas.

Profesor: Llego a la tienda con 1200 pesos y tengo que pagar 734 pesos, ¿cuánto me sobra? **Estudiante:** Ehh, pues a 1200 le resté 1 y me quedó 1199, le resté 734 y me dio 465, y le sumé 1 que le resté aquí arriba y me dio 466.	

Comentarios: Al efectuar operaciones emplea las propiedades asociativa y conmutativa de la suma, y utiliza de forma implícita la propiedad del neutro aditivo, al sumar y después restar la misma cantidad, lo cual es indicador de un entendimiento del efecto de las operaciones, además de mostrar fluidez al aplicar estrategias de cálculo; también muestra entendimiento del algoritmo de la resta y los problemas que implica hacer una resta que requiere reagrupación. Asimismo, aprovecha las propiedades de las operaciones para facilitar la ejecución de las operaciones con papel y lápiz. El estudiante justifica el resultado indicando los dos procesos que efectuó al implementar la estrategia. Primero, al restar una unidad al minuendo, la cual tuvo que compensarse; en segundo lugar, al sumar este mismo número al resultado final.

Esta última alternativa para elaborar la resta reafirma la idea de que los alumnos prefieren recurrir a los algoritmos convencionales, debido a que estos resultados les proporcionan mayor confianza. Este resultado contrasta con la evidencia obtenida en otras investigaciones, donde se concluye que los estudiantes de primaria tienden a emplear sus propios métodos, con mejores resultados, a pesar de que ya se les hayan enseñado los algoritmos estándar (Anghileri, 2006: 107). La implementación del algoritmo convencional para realizar restas requiere distinguir al menos dos casos: el de las restas que no requieren agrupación y el de aquellas que sí la requieren. Identificamos que las estrategias de cálculo mental presentan la ventaja de requerir un único procedimiento, que se aplica de la misma manera en los dos casos de la resta.

CONCLUSIONES

La organización de las actividades con la participación de estudiantes de los tres grados favoreció el trabajo solidario y de tutoreo entre pares (Vygotski, 2006). El contexto de juego y competencia promovió que los alumnos que poseen más experiencia en la realización de cálculos brindaran apoyo y asesoría a sus compañeros que mostraban algunas dificultades, ya que esto favoreció el desempeño de los equipos en la fase de competencia. Hubo algunos (Jorge, David, Alondra), a quienes los profesores consideran con desempeño académico bajo, que recibieron reconocimiento por parte de sus compañeros de equipo; el reconocimiento derivó de haber identificado que poseen habilidades para hacer cálculos aritméticos y esto los llevó a ser elegidos representantes de equipo para resolver situaciones de desempate en la actividad de competencia. El reconocimiento que recibieron los motivó a interesarse en la realización de las tareas.

Obtuvimos evidencia de que el juego puede ser una estrategia útil para incentivar la autoconfianza de los estudiantes respecto de su habilidad para aprender matemáticas. También se evidenció que el reconocimiento al logro académico (Jorge, David, Alondra) puede ser el mejor estímulo para despertar el interés de aquellos alumnos considerados "de bajo rendimiento".

El uso del dinero de fantasía durante la aplicación de la tarea se convirtió en un referente o sistema de representación para efectuar cálculos aritméticos (Duval, 2006), ya que apoyó la generación de estrategias de cálculo mental basadas en los conocimientos extraescolares que poseen los estudiantes, y que generalmente no aparecen en los salones de clase. Particularmente, el uso de dinero de fantasía permitió la descomposición de las cantidades en formas no convencionales. Argumentamos que usar representaciones con objetos (dinero de fantasía), junto con la planeación didáctica, puede apoyar a que los alumnos establezcan conexiones entre la matemática escolar y sus experiencias fuera del aula. La estrategia que mejor comprendieron y utilizaron fue la suma por partes y, en el caso de la resta, la estrategia por descomposición del sustraendo. La realización de cálculos mentales permitió a los estudiantes no solo desarrollar diversos aspectos del sentido numérico, sino darse cuenta de que un problema puede resolverse de diferentes maneras, además de que es importante comunicar sus ideas a otros y justificar sus rutas de solución. Todo esto resulta fundamental en el desarrollo de formas matemáticas de pensar (Barrera-Mora y Reyes-Rodríguez, 2013). Hasta finales del siglo pasado, el currículo estándar pasaba por alto, o no enfatizaba, el uso de los conocimientos informales de los alumnos (Mulligan y Mitchelmore, 1997), a pesar de que investigadores como Ausubel (2000) argumentan que los conocimientos previos son la base o anclaje para el desarrollo de nuevos significados. Este reconocimiento de la importancia de los conocimientos previos se refleja en la revisión curricular de 2017 de los planes y programas de estudio de matemáticas para la educación secundaria en México, los cuales sugieren valorar el aprendizaje informal y buscar medios de incorporarlo en el aula para, de esta manera, conectarlo con los aprendizajes formales (SEP, 2017).

Este trabajo proporciona evidencia de que los conocimientos informales o extra escolares de los estudiantes pueden ser de gran utilidad para desarrollar entendimiento matemático, así como servir de punto de partida para generar estrategias novedosas de cálculo mental, o de nuevos procedimientos para realizar cálculos con las herramientas de papel y lápiz. Los resultados obtenidos nos han llevado a preguntarnos si con estrategias como las desarrolladas por los alumnos puede abordarse, de mejor manera que la tradicional, el cálculo con números positivos y negativos. Los estudiantes reconocieron que los algoritmos convencionales no son la única manera de hacer cálculos y vincularon las matemáticas escolares con las de la vida cotidiana (Diez, 2004; Carraher, 1993, citados en Benítez, 2011). El proponer y ejecutar estrategias de cálculo mental para la suma permitió que los alumnos pudieran dar sentido a las operaciones con números decimales, evitando algunas confusiones que se presentan con los algoritmos convencionales.

El juego es una actividad que permite modificar la concepción que tienen los estudiantes hacia las matemáticas. Ellos las perciben como una asignatura rígida e inflexible en la aplicación de reglas y procedimientos; sin embargo, una tarea contextualizada y con elementos lúdicos aprovecha la tendencia natural de los alumnos para formar grupos, jugar y aprender. Esta aproximación ha permitido que los estudiantes puedan establecer conexiones entre la aritmética del salón de clase y la que tiene lugar en un contexto de la vida diaria. En otras palabras, se han acercado a lograr un aprendizaje con entendimiento.

Identificamos que la discusión de las estrategias que pusieron en práctica los alumnos permitió al docente caracterizar las formas de pensamiento y razonamiento que surgieron durante las actividades. El análisis de las ideas expresadas por los estudiantes lleva a concluir que el profesor debe poseer habilidades para ayudarlos a expresar verbalmente sus pensamientos en forma clara, de manera que el resto de sus compañeros entiendan sus ideas. Esta característica y capacidad del maestro también ha sido identificada como relevante en otras investigaciones (Swam y Sparrow, 2001). Durante la puesta en práctica de las estrategias de cálculo mental para las operaciones de suma y resta, los estudiantes continuamente mostraron preferencia por el uso de los algoritmos convencionales. Esto puede deberse a que gran parte de su aprendizaje relacionado con las operaciones básicas se ha centrado en el desarrollo de tareas algorítmicas y esto ha conducido a un automatismo sin sentido en el manejo de las cantidades, lo que puede observarse en una amplia gama de respuestas erróneas derivadas de la implementación incorrecta de los algoritmos estándar (Segura, 2015). La implementación impecable de un algoritmo no garantiza que el ejecutor posea sentido numérico; en contraste, el desarrollo de estrategias propias para realizar cálculos mentales es evidencia de poseer esta forma de pensar (McIntosh, Reys y Reys, 1992). El desarrollo del sentido numérico es complejo y tiene diversos niveles, lo cual dificulta su evaluación, ya que implica atender y entender las explicaciones, muchas veces verbales, de los alumnos. Es un proceso más cualitativo que cuantitativo, y no contamos con instrumentos apropiados que puedan medir lo que las pruebas escritas pudiesen reportar; se requiere de un trabajo de observación detallada y cuidadosa por parte del profesor.

Los profesores pueden aprender mucho de los estudiantes, si la comunidad en un aula se convierte en una verdadera comunidad de aprendizaje. Las autoridades educativas, directores o supervisores escolares –de acuerdo con nuestra experiencia personal– muchas veces consideran que la realización de actividades contextualizadas, como "La tienda departamental", son una pérdida de tiempo que no permite cubrir el programa de estudios en forma lineal. Sin embargo, los resultados de este trabajo aportan evidencia de lo contrario: son un ambiente propicio para favorecer la creatividad de los alumnos, quienes son capaces de modificar algoritmos convencionales para realizar operaciones aritméticas. En el desarrollo de la actividad pudimos identificar una transferencia de conocimientos y procesos cuando se efectúan cálculos mentales, al ámbito de las estrategias escritas. Al utilizar algoritmos convencionales, regularmente se trabaja con los valores o números iniciales especificados en el problema. Sin embargo, las actividades contextualizadas, junto con el contexto instruccional, generan una necesidad de que los estudiantes realicen diferentes descomposiciones de las cantidades, por ejemplo, 1000=500+500 o 1000=400+600, 1000-465=999-465+1, etcétera. Lo anterior es indicador de un entendimiento de las cantidades y las operaciones aritméticas, además de un contexto para conectar operaciones inversas.

Por último, las tareas de aprendizaje que estimulan la participación de los estudiantes pueden ser un vehículo apropiado para que construyan sus propias estrategias, sustituyendo con ello la práctica y memorización de las estrategias propuestas por el profesor. Esto también puede contribuir a fomentar la autoconfianza de los alumnos en su capacidad para hacer y aprender matemáticas con entendimiento. En este sentido, nuestra propuesta difiere de las de otros investigadores que sugieren que las estrategias sean enseñadas por los maestros y que la flexibilidad se aprenda cuando los estudiantes discutan cuáles estrategias parecen más afectivas con tipos particulares de números (Threlfall, 2002). Consideramos que las estrategias de cálculo mental tienen sentido para los alumnos cuando son resultado de una necesidad que emerge de un contexto.

Agradecimientos

Los autores agradecemos el apoyo brindado para la elaboración de este trabajo a través del proyecto Conacyt-168543 (México) y del Plan Nacional I+D+I del MCIN (España) EDU2015-65270-R y EDU2017-84276-R.

REFERENCIAS

Anghileri, J. (2006). *Teaching number sense* (2nd ed.). London: Continuum.

Anghileri, J., Beishuizen, M. y Van Putten, K. (2002). From informal strategies to structured procedures: Mind the gap! *Educational Studies in Mathematics, 49*(2), 149-170.

Ausubel, D. P. (2000). *The acquisition and retention of knowledge: A cognitive view.* Dordrecht: Kluwer.

Barrera-Mora, F. y Reyes-Rodríguez, A. (2013). *Elementos didácticos y resolución de problemas: formación docente en matemáticas.* Pachuca: Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.

Barrera-Mora, F. y Reyes-Rodríguez, A. (2016). Designing technology-based tasks for enhancing mathematical understanding through problem solving. En L. Uden *et al.* (eds.), *International Workshop on Learning Technology for Education in Cloud* (pp. 183-192). Cham: Springer.

Barrera-Mora, F. y Santos-Trigo, M. (2001). Cualidades y procesos matemáticos importantes en la resolución de problemas: un caso hipotético de suministro de medicamentos. En Ministerio de Educación Nacional, Dirección de Calidad de la Educación Preescolar, Básica y Media (ed.), *Memorias del Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas* (pp. 166-185). Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-81040_archivo3.pdf

Beishizen, M. y Anghileri, J. (1998). Which mental strategies in the early number curriculum? A comparison of British ideas and Dutch views. *British Education Research Journal, 24*(5), 519-538.

Benítez, A. (2011). La importancia de los eventos contextualizados en el desarrollo de competencias matemáticas. En P. Lestón (ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (vol. 24, pp. 51-59). México: CLAME. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/4659/1/BenitezLaimportanciaALME2011.pdf

Berch, D. B. (2005). Making sense of number sense implications for children with mathematical disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 38*(4), 333-339. Recuperado de http://www.psy.cmu.edu/~siegler/est-berch05.pdf.

Berger, W. (2014). A more beautiful question: The power of inquiry to spark breakthrough ideas. New York, NY: Bloomsbury.

Blöte, A. W., Klein, A. S. y Beishuizen, M. (2000). Mental computation and conceptual understanding. *Learning and Instruction, 10*(3), 221-247.

Burger, W. F. y Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the Van Hiele Levels of Development in Geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 17*(1), 31-48.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., Jacobs, V. J., Fennema, E. y Empson, S. B. (1997). A longitudinal study of invention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(1), 3-20.

Case, R. y Sowder, J. T. (1990). The development of computational estimation: A neo-piagetian analysis. *Cognition and Instruction, 7*(2), 79-104.

Chimhande, T., Naidoo, A. y Stols, G. (2017): An analysis of Grade 11 learners' levels of understanding of functions in terms of APOS theory. *Africa Education Review, 14*(3-4), 1-19.

Clements, Douglas H. (2013). Rethinking early mathematics: What is research-based curriculum for young children? En L. D. English y J. T. Mulligan (eds.), *Reconceptualizing Early Mathematics Learning* (pp. 121-147). Dordrecht: Springer.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., Nichols, J., Wheatley, G., Trigatti, B. y Perlwitz, M. (1991). Assessment of a problem-centered second grade mathematics project. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 3-29.

Cortés, J., Backoff, E. y Organista, J. (2004). Estrategias de cálculo mental utilizadas por estudiantes de secundaria de Baja California. *Educación Matemática, 16*(1), 149-168.

Devlin, K. (2017, enero 1). *All the mathematical methods I learned in my university math degree became obsolete in my lifetime*. The Huffington Post. Recuperado de https://www.huffingtonpost.com/entry/all-the-mathematical-methods-i-learned-in-my-university_us_58693ef9e4b014e7c72ee248.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 103-131.Fuson, K. C. (1992). Research on learning and teaching addition and subtraction of whole numbers. En G. Leinhard, R. Putman y R. A. Hattrup (eds.), *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching* (pp. 53-187). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Ginsburg, H. P. y Russell, R. L. (1981). Social class and racial influences on early mathematical thinking. *Monographs of the Society for Research in Child Development, 46*(6), 1-69.

Gómez, B. (2005). La enseñanza del cálculo mental. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 4, 17-29. http://www.fisem.org/www/union/revistas/2005/4/Union_004_005.pdf.

Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(3), 170-218.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A. y Human, P. (1997). *Making sense: teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. En F. K. Lester Jr. (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (vol. 2, 629-667). Reston, VA: NCTM.

Leivobich, T., Katzin, N., Harel, M. y Henik, A. (2017). From "sense of number" to "sense of magnitude": The role of continuous magnitudes in numerical cognition. *Behavioral and Brain Sciences, 40*(1), 1-62.

Lubienski, S. (2000). Problem solving as a means towards mathematics for all: An exploratory look through a class lens. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(4), 454-482.

Malloy, C. E. (1999). Perimeter and area through the Van Hiele model. *Mathematics Teaching in the Middle School, 5*(2), 87-90.

Marcovits, Z. y Sowder, J. (1994). Developing number sense: an intervention study in grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(1), 4-29.

McIntosh, A., Reys, B. J. y Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12*(3), 2-8.

Mulligan, J. y Mitchelmore, M. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(3), 309-330.

Munisamy, S. y Doraisamy, L. (1998) Levels of understanding of probability concepts among secondary school pupils. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 29*(1), 39-45.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers [NGACBP & CCSSO] (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington, D.C.: NGACBP & CCSSO. Recuperado de http://www.corestandards.org/Math/

Paulos, J. A. (2000). *El hombre anumérico: el analfabetismo matemático y sus consecuencias*. Madrid: Tusquets.

Pitta-Pantazi, D., Christou, C. y Zachariades, T. (2007). Secondary school students' levels of understanding in computing exponents. *Journal of Mathematical Behavior, 26*(4), 301-311.

Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Qualifications and Curriculum Authority [QCA] (1999). *The National Numeracy Strategy. Teaching mental calculation strategies*. London: QCA.

Reys, R. E., Reys, B. J., Nohda, N. y Emori, H. (1995). Mental computation performance and strategy use of Japanese students in grades 2, 4, 6, and 8. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(4), 304-326.

Reys, R., Reys, B., McIntosh, A., Emanuelsson, G., Johansson, B. y Yang, D. C. (1999). Assessing number sense of students in Australia, Sweden, Taiwan, and the United States. *School, Science and Mathematics, 99*(2), 61-70.

Santos-Trigo, M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos*. México: Trillas.

Sarama, J. y Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. New York: Routledge.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. En D. Grouws (ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Secretaría de Educación Pública [SEP] (2011). *Planes y programas de Estudio de Educación Secundaria*. México: SEP.

Secretaría de Educación Pública [SEP] (2017). *Aprendizajes clave para la educación integral. Matemáticas. Educación Secundaria. Plan y programa de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación*. México: SEP.

Segura, J. (2015). La utilización de los algoritmos de sustracción en educación primaria. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 4*(2), 73-88.

Simon, M. A. (1994). Learning mathematics and learning to teach: Learning cycles in mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics, 26*(1), 71-94.

Sowder, J. T. (1992). Making Sense of Numbers in School Mathematics. En G. Leinhard, R. Putman y R. A. Hattrup (eds.), *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching* (pp. 1-51). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Steen, L. A. (1988). The science of patterns. *Science, 240*(29), 616.Sullivan, P., Clarke, D. y Clarke, B. (2013). *Teaching with tasks for effective mathematics learning*. New York: Springer.

Swan, P. y Sparrow, L. (2001). Strategies for going mental. En *Proceedings of the Eighteenth Biennial Conference of The Australian Association of Mathematics Teachers* (pp. 236-243). Canberra: Australian National University. Recuperado de http://www.aamt.edu.au/content/download/21441/285094/file/tdt_MC_swan1.pdf.

Thompson, I. (2010). *Issues in teaching numeracy in primary school* (2nd ed.). Berkshire: Open University Press.

Threlfall, J. (2002). Flexible mental calculation. *Educational Studies in Mathematics, 50*(1), 29-47.

Tsao, Y. L. y Lin, Y. C. (2011). The study of number sense and teaching practice. *Journal of Case Studies in Education, 2*, 1-14. Recuperado de http://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1057181.pdf.

Valencia, E. (2013). Desarrollo del cálculo mental a partir de entrenamiento en combinaciones numéricas y estrategias de cálculo. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 84*, 5-23. Recuperado de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/84/Volumen_84.pdf.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2005). The role of contexts in assessment problems in mathematics. *For the Learning of Mathematics, 25*(2), 2-9.

Vygotski, L. S. (2006). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Crítica.

Wertsch, J. V. (1993). *Voices of the Mind: A Sociocultural Approach to Mediated Action*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Wong, K. Y. (2015). *Effective mathematics lessons through an eclectic Singapore approach*. Singapore: World Scientific.

Yang, D. C., Hsu, C. J. y Huang, M. C. (2004). A study of teaching and learning number sense for sixth grade students in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education, 2*(3), 407-430.

Young, R. M. y O'Shea, T. (1981). Errors in children's subtraction. *Cognitive Science, 5*(2), 153-177.

Zull, J. E. (2002). *The art of changing the brain: Enriching the practice of teaching by exploring the biology of learning*. Sterling, VA: Stylus.

Aarón Reyes-Rodríguez

Dirección: Área Académica de Matemáticas y Física, Ciudad Universitaria de la UAEH, Carretera Pachuca-Tulancingo Km. 4.5, Col. Carboneras, C. P. 42184, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México

Teléfono: (01 771) 71 72 000, extensión 2536