Evolución de la población de México, 1980-2005, conforme a la hipótesis de una tasa de crecimiento demográfico logística

Manuel Ordorica*

En la investigación en demografía se ha desarrollado un gran número de funciones matemáticas con el fin de representar la evolución de la población, entre las que sobresalen la exponencial y la logística. Sin embargo ninguna de estas funciones se ajusta fielmente a la realidad debido a que las hipótesis que subyacen a tales representaciones matemáticas no describen la dinámica de la población. El objetivo del presente trabajo es construir una función matemática que se aproxime a la descripción de la dinámica de la población total de México entre 1980 y 2005, al tiempo que reproduzca en forma adecuada la trayectoria de la tasa de crecimiento de la población observada en el periodo señalado. Asimismo se realiza un pronóstico de la población a partir de la función matemática encontrada. También se realiza la proyección de la población de un municipio con pocos habitantes, a fin de probar la fórmula en este estudio de caso y comparar sus resultados con los de otros métodos de pronóstico.

Palabras clave: proyecciones de población, función exponencial, función logística, poblaciones estables, poblaciones no estables, poblaciones cuasiestables, crecimiento de la población, dinámica demográfica, política de población, filtro de Kalman.

Fecha de recepción: 29 de mayo de 2007.

Fecha de aceptación: 10 de marzo de 2008.

Evolution of the Population of Mexico, 1980-2005, under the Hypothesis of a Logistic Demographic Growth Rate

In demographic research, several mathematical functions have been developed to represent the evolution of the population, including the exponential and logistic function. None of these functions fits reality perfectly, however, since the hypotheses underlying these mathematical representations fail to describe population dynamics. The aim of this study is to construct a mathematical function that approaches the description of the dynamics of the total population of Mexico between 1980 and 2005, while accurately reproducing the path of the population growth rate observed during this period. It therefore carries out a forecast of the population on the basis of the mathematical function found. It also carried out a forecast of the population in a municipality with very few inhabitants, in order to test the formula in this case study and compare its results with those of other forecasting methods.

* El Colegio de México. Correo electrónico: mordori@colmex.mx.

Key words: population forecasts, exponential function, logistic function, stable populations, unstable populations, quasi-stable populations, population growth, demographic dynamics, population policy, Kalman filter.

Introducción

> …no hay lugar para aquellas interpretaciones apocalípticas que predicen situaciones catastróficas para la evolución demográfica futura del país. La astrología es un oficio que florece en los momentos en que la ciencia no da cuenta de los fenómenos que ocurren en el mundo natural y social; por esto es que los astrólogos y los profetas pasan al lugar de los desempleados cuando las predicciones científicas toman la palabra.
>
> Gustavo Cabrera, *Los 80: el futuro nos visita.*

La gente se fascina con el futuro. Los lectores de cartas y de la palma de la mano, los astrólogos y adivinadores con la bola de cristal han encontrado clientes a lo largo de la historia por sus predicciones y visiones del porvenir. En la actualidad son los analistas y especialistas en la elaboración de pronósticos quienes usando modelos matemáticos y computadoras potentes, en vez de hojas de té, continúan intentando aproximarse al futuro. Este interés va más allá de la simple curiosidad: muchos estamos interesados en conocer la disponibilidad de alimentos, ropa y vivienda de millones de personas, mientras que el Estado se interesa en el estudio de las consecuencias de la dinámica demográfica sobre los aspectos económicos, sociales, políticos y ambientales. A fin de analizar el porvenir se ha construido un elevado número de modelos matemáticos que intentan describir el pasado y el presente para establecer escenarios sobre el futuro.

Existen diversos métodos, entre los que destacan los de tipo matemático, los económicos y las proyecciones que se valen del método de los componentes; este último es el que se utiliza con más frecuencia porque permite incorporar la estructura por edad de la población y además ofrece la posibilidad de plantear hipótesis acerca del comportamiento futuro de las variables demográficas. Es sin duda alguna el más robusto. En 1950 Harold F. Dorn en el artículo "Pitfalls in Population Forecasts and Projections" realizó una revisión histórica del uso de modelos matemáticos aplicados a la elaboración de pronósticos de población (Dorn, 1950).

En el presente trabajo se desarrollará un modelo de los del primer tipo; se construirá una función matemática con el propósito de analizar la dinámica demográfica e intentar avanzar en el concepto de las poblaciones no estables.[1] No se trata de aplicar o comparar modelos ya existentes, sino de generar uno nuevo a partir de una función matemática de tipo logístico que refleja la dinámica de la tasa de crecimiento demográfico total, resolviendo para ello la ecuación diferencial que se produce. ¿Hacia qué población estable se dirige nuestro país? ¿En cuánto tiempo? Ya Platón en el *Libro de las leyes* intentaba obtener una cifra que posibilitara la mejor planeación de la sociedad. Decía que

> Mas a los que, como a nosotros ahora, dio dios fundar Ciudad nueva y no tener entre nosotros enemistades algunas, sernos causa de enemistades eso de reparto de la tierra y habitaciones sería no humana ignorancia acompañada de toda maldad.
> ¿Cuál, pues, sería el modo correcto? Primero, hay que regular, en cuanto al número, cuál ha de ser el total de ellos; después de esto habrá que convenirse en cuanto al reparto de los ciudadanos: entre cuántas clases en número, y cuáles habrá que distribuirlos; pero, entre ellas, dividir, lo más igual posible, la tierra y las habitaciones.
> […] Para número adecuado sea el de cinco mil cuarenta el de los terratenientes y defensores de su lote; a tierra y habitaciones divídanselas parecidamente en otras tantos lotes, –varón y lotes apareados… Mas nosotros decimos que hemos elegido correctísimamente el número Cinco mil cuarenta que contiene todas las divisiones hasta el doce, partiendo del uno, –excepción, el once [Platón, 1983].

Dejando de lado la caprichosa cifra de 5 040, el interés de la ciudad–estado exige que su población no crezca desmesuradamente y que no disminuya en forma alarmante. Hay dos razones: una ciudad despoblada es una ciudad muerta y la sobrepoblación es un factor que acarrea conflictos sociales. La gente pelea por un puesto o por un pedazo de tierra. Nos encontramos ante la presencia de un ideal estacionario: la población debe permanecer invariable.

Con el fin de describir las diferentes posiciones de los gobiernos respecto al crecimiento de la población, a lo largo de la historia de la

[1] Los aportes más significativos al desarrollo de poblaciones no estables fueron realizados por Bennet y Horiuchi en 1981 y por Preston y Coale en 1982.

ciencia demográfica se han desarrollado diversas funciones, entre las que sobresalen por ser más conocidas la exponencial y la logística, aplicadas a la población total, las cuales reproducen dos posiciones extremas en la historia de las doctrinas sociales. Los esfuerzos por establecer leyes matemáticas que representen el crecimiento demográfico se han acrecentado gracias a la creciente disponibilidad de estadísticas y al desarrollo de modelos matemáticos para la descripción de datos. Uno de los primeros intentos de expresar mediante una función matemática el crecimiento de la población fue obra de Quetelet, quien en 1835 decía que "la resistencia o la suma de los obstáculos que se oponen a un crecimiento ilimitado de la población aumenta en proporción al cuadrado de la velocidad con que tiende a aumentar la población" (Quetelet, 1835). Ninguna de estas representaciones matemáticas se ajusta fielmente a la realidad debido a que las hipótesis no describen la dinámica de los componentes del crecimiento de la población. Sin embargo han favorecido el avance de la teoría matemática de la demografía, como en el caso de las poblaciones estables.

El caso general corresponde a la siguiente ecuación, en la que se expresa la tasa de incremento demográfico como una serie de potencias de la población:

$$\frac{1}{P(t)}\frac{dP(t)}{dt} = r_0 + r_1 P(t) + r_2 P^2(t) + \ldots \qquad [1]$$

Cuando la serie que está en el miembro derecho queda reducida sólo al primer término se obtiene la función exponencial. Esto se logra al resolver la ecuación diferencial lineal de orden uno. En el caso de que consideremos los dos primeros términos del segundo miembro, obtenemos la logística. Esto quiere decir que la exponencial se deriva de suponer que la tasa de crecimiento demográfico permanece constante. La expresión en forma de ecuación diferencial es más útil y más fácil de interpretar para establecer la dinámica del ritmo de aumento de la población. La ecuación diferencial es la siguiente:

$$\frac{1}{P(t)}\frac{dP(t)}{dt} = r_0$$

en donde r_0 es una constante. Éste es el caso más simple. Alfred Lotka analizó con profundidad esta función, con sus implicaciones en la composición por edad de la población.

Esta función está vinculada a la visión pesimista que Robert Malthus expuso en su obra *Ensayo sobre el principio de la población.* Aunque las tesis de Malthus estuvieron alejadas de la realidad, tuvieron una gran influencia en la política. Afirmaba que el crecimiento demográfico libre de contenciones era un crecimiento exponencial, mientras que la producción de alimentos según su argumento seguía un crecimiento lineal. Puesto que la tasa de crecimiento de la población era más acelerada que la de los alimentos, Malthus pronosticaba que a partir de cierto límite de la población habría escasez de alimentos y en consecuencia una gran hambruna. Dicha hambruna jamás se produjo debido al desarrollo tecnológico, por lo que los supuestos de su modelo resultaron simplistas.

De la hipótesis de que la tasa de crecimiento demográfico es constante se deriva, como ya se dijo, la teoría de las *poblaciones estables,* que fue desarrollada por Lotka. Se supone además que la población es cerrada. Estas hipótesis generalmente no se cumplen, por lo que ha sido necesario desarrollar la teoría de las *poblaciones cuasiestables* a fin de aproximarse a la realidad, ya que éstas suponen cambios en el comportamiento de los componentes del crecimiento natural de la población. La función exponencial que surge de la ecuación [1] es: $P(t) = P(0)\, e^{rt}$, donde $P(t)$ es la población en el momento t, $P(0)$ es la población en el instante 0, r es la tasa de crecimiento demográfico y t es el tiempo. La ley de Malthus no puede representar en forma indefinida el crecimiento de una población porque los valores que da sobrepasan todos los límites en el largo plazo. De ahí surge la ley de Verhulst, quien fue el primero en sugerir, en 1838, la aplicación de la logística. Sostenía que

> si la población se expande libremente sobre un país no ocupado, la tasa porcentual de incremento es constante. Si crece en un área limitada, la tasa porcentual de incremento debe tender a reducirse al crecer la población, en forma que la tasa porcentual de incremento es cierta función de la población misma, y cae continuamente al aumentar los números de la población.

Cuando se supone que la tasa de crecimiento demográfico es función lineal de la población, se tiene la ecuación logística.[2] Significa eliminar los valores de la serie en la ecuación [1] a partir de r_2.

[2] Los supuestos de la logística son los siguientes: el crecimiento demográfico se presenta dentro de un área finita y debe tener un límite superior, de otra forma sigue la hipótesis de que la población puede aumentar infinitamente dentro de un área fini-

$$\frac{1}{P(t)}\frac{dP(t)}{dt} = r_0 + r_1 P(t)$$

En 1838 Verhulst desarrolló la logística, adecuada para describir la dinámica de la población total. Esta curva es un refinamiento del crecimiento exponencial y adopta la forma de una S invertida. Cuando una magnitud crece en un sistema finito, a partir de cierto momento el tamaño del sistema limita el crecimiento de la magnitud al no haber recursos abundantes suficientes para seguir permitiendo el crecimiento exponencial. En un comienzo Verhulst supuso que los obstáculos aumentan "exactamente en la misma proporción que la población superabundante", pero más tarde reemplazó este supuesto con la hipótesis de que los obstáculos "aumentan en proporción al porcentaje del exceso de población respecto de la población total" (Verhulst, 1938 y 1945). Dicha función se genera a partir de la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{1}{P(t)}\frac{dP(t)}{dt} = b - mP(t)$$

en donde *b* y *m* son mayores que 0. Esta función permaneció olvidada por muchos años debido a la falta de datos. En 1920 Pearl y Reed redescubrieron la función logística. Se supone que el ambiente físico es constante y que la población aumenta a partir de un límite inferior asintótico 0, hasta un límite superior (Pearl y Reed, 1920). Durante el decenio de 1920 esta función fue objeto de mucha atención. Se suponía que la dinámica de la población total tenía un punto asintótico difícil de establecer. ¿Qué elementos deberían considerarse para establecer dicha cifra límite? No es fácil responder a esta pregunta, por lo que muy probablemente la dificultad para determinar la cota superior de la población redujo sus aplicaciones. Sin embargo, si se considera que los componentes demográficos, la tasa de natalidad, la tasa de mortalidad y la tasa de crecimiento de la población evolucionan de acuerdo con la logística, es muy probable que se esté más cerca de la realidad, ya que esta función reproduce la transición demográfica a partir de cierto

ta, lo que es difícil de aceptar; el límite inferior debe ser cero, es decir, es imposible suponer una población negativa; dentro de cada época o ciclo de población, la tasa de crecimiento de la población no ha sido constante en el tiempo. Al principio crece lentamente, pero la tasa aumenta constantemente hasta cierto punto, donde alcanza un máximo, el cual es un punto de inflexión de la curva de crecimiento demográfico.

momento, lo cual está vinculado a la teoría de las poblaciones. Según observaciones realizadas en varios países, es aceptable suponer que la tasa de natalidad sigue una trayectoria de acuerdo con la función logística, sin embargo la tasa de mortalidad desciende hasta un punto a partir del cual empieza a crecer, para luego estabilizarse en un número asintótico. Esto se explica por el efecto de la estructura por edad de la población en la tasa de mortalidad. El caso de la tasa de crecimiento social, es decir, la diferencia entre la tasa de inmigración y la de emigración, ha seguido un comportamiento ascendente en el último quinquenio, el cual es difícil de modelar por medio de una función matemática. Este fenómeno ha sido producto de la fuerte salida de mexicanos a Estados Unidos. No obstante, a pesar de que cada uno de los componentes del crecimiento natural y social sigue una trayectoria diferente que no se ajusta a relaciones matemáticas conocidas y bien definidas, podemos afirmar que la dinámica de la tasa de aumento demográfico sigue un patrón que se aproxima a la logística. Todo esto nos lleva a plantear que es más probable hacer un supuesto sobre la cota inferior de la tasa de crecimiento de la población que sobre la población misma o sobre la tasa de mortalidad. Aun cuando la población no sea cerrada y se presente una fuerte migración, como en el caso de México, es aceptable la hipótesis de que la dinámica en el ritmo de crecimiento demográfico total se comportará aproximándose a una función logística. Podemos pensar que el crecimiento demográfico cero podría ser una posible asíntota inferior, mientras que es casi imposible decir cuál es el límite o cota superior al que tiende la población. Conviene advertir que una característica esencial de la función logística es que para valores pequeños de t nos recuerda a la función exponencial, mientras que en el caso de valores grandes de t se estabiliza aproximándose cada vez más al valor límite o asintótico.

Un problema que se presenta con estos modelos es que resulta difícil avanzar en la teoría debido a que la formulación matemática sobre la estructura por edad y otros indicadores demográficos se vuelve más compleja cuando suponemos que la tasa de crecimiento demográfico no es constante.

¿Podríamos usar la logística para representar la evolución de la tasa de crecimiento demográfico en el caso de México?

Ése es el propósito del presente trabajo. Sabemos que desde mediados de los setenta la tasa de natalidad empezó a descender rápidamente y como consecuencia se redujo la tasa de crecimiento demográfico. En 1977 el Consejo Nacional de Población estableció una política de población con objetivos y metas en el ritmo de crecimiento demográfico, de 2.5% para 1982 y de 1% para el año 2000. La tasa de incremento demográfico descendió rápidamente durante los primeros años que siguieron a la definición de la política poblacional y luego bajó más lentamente. La función matemática que podría acercarse a reproducir esta evolución de la tasa de crecimiento demográfico a partir de la mitad del decenio de los setenta es la logística. Conviene recordar que debido a su forma gráfica esta función no permite describir la dinámica de la intensidad del crecimiento poblacional antes de 1975, puesto que dicha tasa se incrementó apenas a mediados de los setenta, cuando alcanzó su máximo, y luego empezó a declinar. Sin embargo es posible utilizarla a partir del momento en que comenzó a descender la intensidad del crecimiento poblacional, pues es poco probable que en el corto y mediano plazos revierta su tendencia y empiece a crecer nuevamente. Por tanto es útil para anticiparse a lo que ocurrirá en los años futuros del siglo XXI y parecería que se está estabilizando a un crecimiento demográfico alrededor de cero. Esto se puede asegurar debido a que la tasa global de fecundidad se acerca en nuestro país al reemplazo de 2.1 hijos por pareja. Es difícil pensar que la tasa de crecimiento de la población podría cambiar su tendencia decreciente en el corto y mediano plazos, debido a la inercia demográfica.[3]

La hipótesis de que la tasa total de crecimiento demográfico sigue un comportamiento logístico parte del supuesto de que la tasa de

[3] El crecimiento de la población es uno de los mejores ejemplos que se pueden utilizar para analizar el concepto de inercia de un fenómeno. Aun cuando sabemos que no se debe utilizar un concepto de las ciencias físicas en las ciencias sociales, a veces permite aclarar conceptos teóricos. Por ejemplo, supóngase un barco de 80 mil toneladas que viaja a 20 nudos por hora, ¿qué ocurre si lo queremos detener? A partir del momento en que paramos las máquinas comienza a perder velocidad, pero por la ley de la inercia sigue avanzando. No se detiene inmediatamente. Con el crecimiento poblacional se presenta un fenómeno similar. Aunque detengamos dicho crecimiento, la población sigue incrementándose. Sólo después de muchos decenios el crecimiento de la población podrá estabilizarse. También significa que si quisiéramos aumentar el crecimiento de la población no lo podríamos hacer, puesto que resulta muy difícil revertir procesos sociales de este tipo. La desaceleración en la velocidad de crecimiento demográfico no ha impedido, ni impedirá, que se presenten adiciones significativas en números absolutos de población. ¿Por qué si disminuye la tasa de crecimiento demográfico se suma un número mayor de habitantes? Porque las poblaciones tienen oculto el impulso de su crecimiento en la estructura por edades. Con una población joven el número de padres y madres potenciales va en aumento, porque esas generaciones ya han nacido. A esto se le conoce como inercia demográfica, que no es más que una fuerza similar a la que impulsa a los cuerpos físicos en movimiento. Cuando se aplican los frenos el movimiento no se detiene instantáneamente, sino que continúa durante un trecho, empujado por la ley de la inercia.

natalidad evoluciona aproximadamente de acuerdo con la función logística y este componente tiene una fuerte ponderación en la intensidad de aumento demográfico. En nuestro país el número de nacimientos es cuatro veces superior al número de defunciones y también casi cuatro veces mayor que el crecimiento social. Por cierto, esta última cifra ha crecido en forma significativa en años recientes, es decir, ha salido más población que en el pasado.

Por lo que se refiere a la tasa de mortalidad, en varios casos se ha observado que tiene un comportamiento logístico durante un periodo y luego empieza a ascender como resultado del envejecimiento de la población. Por otra parte, la tasa de crecimiento social se ha incrementado en valor absoluto como resultado de la mayor emigración de mexicanos a Estados Unidos. Su evolución puede ser muy volátil.

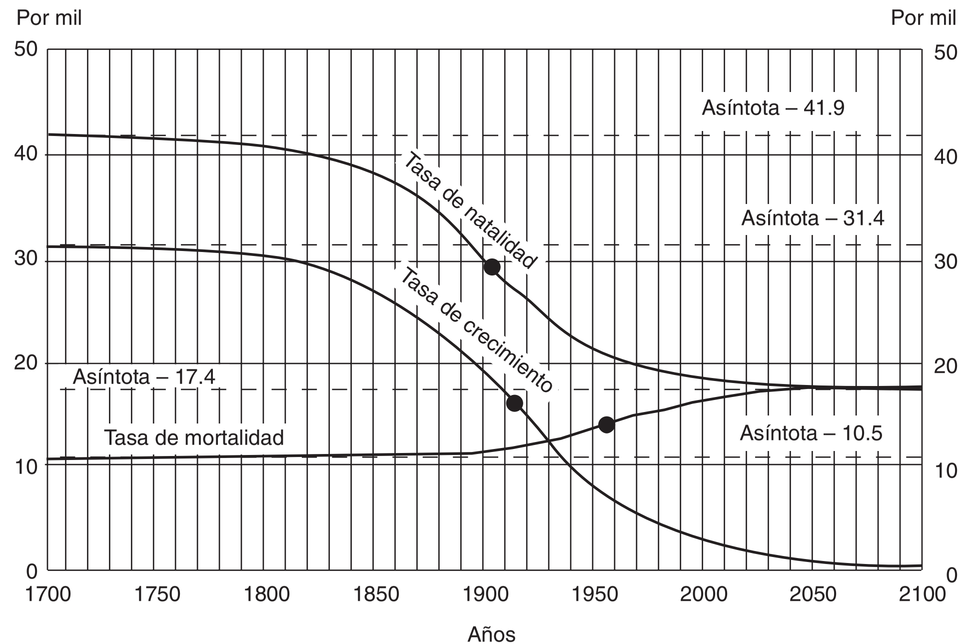
Por esta razón se supuso que la tasa de crecimiento demográfico total podría seguir un comportamiento logístico, el cual depende de que la tasa de natalidad siga una trayectoria logística y de la relación entre el monto de nacimientos y el número de defunciones, y también de la relación entre los nacimientos y el número de emigrantes. Un mayor número de nacimientos respecto a los otros componentes podría significar que domina la trayectoria de los nacimientos. No obstante, las proyecciones de población del Consejo Nacional de Población muestran que tanto la dinámica de la tasa de crecimiento natural de la población como la de crecimiento total se alejan de la función logística. Por tanto, el análisis de este trabajo puede considerarse una aproximación a la realidad, como ocurre con todos los modelos que buscan acercarse al futuro.

Lotka presenta en su libro *Teoría analítica de las asociaciones biológicas* un ejemplo de la evolución de la tasa de crecimiento natural de la población, la cual puede apreciarse gráficamente como una logística. Estas curvas se calcularon manteniendo constante la tabla de vida en Estados Unidos para el periodo de 1919-1920 (véase la gráfica 1).

Conviene aclarar que existe una diferencia teórica entre el método de los componentes demográficos y el que se presenta en este artículo, el cual sigue la misma lógica que el modelo elaborado por Lotka. Mientras que en el método de los componentes demográficos los supuestos sobre la evolución futura se formulan sobre las variables por edad y sexo y luego se estiman los parámetros generales, en el modelo planteado en este documento las hipótesis se formulan sobre los indicadores generales y luego se busca avanzar sobre indicadores específicos. Se ha observado que en ambos casos se llega a resultados similares

GRÁFICA 1

Curvas de las tasas de natalidad, mortalidad y crecimiento, en una población logística bajo el régimen de una tabla de mortalidad constante



FUENTE: Lotka, 1969: 116.

en el ámbito teórico. No se trata de ponerlos a competir, cada uno tiene sus bondades particulares y no hay duda de que el método de los componentes proporciona resultados de más fácil interpretación y podría mostrar una mayor versatilidad teórica que el modelo de Lotka. La idea es dar un pequeño paso en este campo de la demografía matemática siguiendo los pasos de Lotka.

Objetivo

En el presente trabajo se pretende construir una función matemática capaz de describir la dinámica de la tasa de crecimiento demográfico y, en consecuencia, la evolución de la población entre 1980 y 2005, y sus perspectivas, a fin de establecer escenarios de lo que pudiera ocurrir en el corto, mediano y largo plazos, buscando unas funciones que sean más complejas que la desarrollada por Lotka, pero no tan difíciles de trabajar matemáticamente.

El pronóstico según las diversas alternativas de crecimiento demográfico podrá dar algunas pistas para redefinir la política poblacional del siglo XXI, pero sobre todo para avanzar en la teoría matemática de las poblaciones humanas. También se presentará un ejemplo de la aplicación del modelo para realizar pronósticos de población de un municipio que cuente con números reducidos en las variables demográficas y en su población, puesto que el método de los componentes no funciona adecuadamente en áreas con números de población pequeños.

Metodología

Sea

$$\frac{1}{P(t)}\frac{dP(t)}{dt} = r(t)$$

la tasa instantánea de crecimiento de la población. Donde $r(t)$ es función del tiempo.

Supongamos que se puede representar un descenso por medio de la función logística en la siguiente forma:

$$\frac{1}{P(t)}\frac{dP(t)}{dt} = k_1 + \frac{k_2}{1+e^{a+bt}}$$

donde k_1 es la asíntota inferior y k_1+k_2 es la asíntota superior y, a y b son parámetros a estimar. La expresión del segundo término se puede expresar como una tangente hiperbólica.[4] Estas funciones tienen importantes aplicaciones en demografía, por ejemplo, para realizar proyecciones de la esperanza de vida al nacer y de la tasa global de fecundidad, ya que la evolución de dichas variables sigue un comportamiento logístico, conforme a la teoría de la transición demográfica.

Podemos expresar también la ecuación [2] de la siguiente manera, aprovechando las propiedades de la derivación:

$$\frac{d\ln P(t)}{dt} = k_1 + \frac{k_2}{1+e^{a+bt}}$$

Integrando ambos lados de manera indefinida, tenemos:

$$\ln P(t) = \int (k_1 + \frac{k_2}{1+e^{a+bt}})dt$$

De lo anterior se obtiene la siguiente igualdad:

$$\ln P(t) = k_1 t + \frac{k_2}{b}(bt - \ln(1+e^{a+bt})) + c$$

Al aplicar la función exponencial en ambos lados de la ecuación y establecer las condiciones iniciales, la población puede definirse a partir de la siguiente fórmula:

$$P(t) = P(0)\,(1+e^{a})^{\frac{k_2}{b}}\, e^{(k_1+k_2)t}(1+e^{a+bt})^{-\frac{k_2}{b}}$$

donde a y b son los parámetros, k_1 es la asíntota inferior y $k_1 + k_2$ es la asíntota superior. Cuando t tiende a infinito, $r(t)$ tiende a k_1. Esto significa que k_1 es la tasa de crecimiento demográfico a la que se tiende cuando t tiende a infinito. Los dos primeros factores de la función $P(t)$ son constantes y quedaron establecidos cuando $t = 0$. El momento $t = 0$ representa el año de 1980, que es el punto inicial.

[4] Cabe mencionar que la función $f(t) = \frac{f_\infty}{1+e^{a+bt}}$ es igual a: $\frac{1}{2} f_\infty (1+\tanh(-(a+bt)/2))$.

Es importante destacar que este modelo tiene limitaciones. La sola proyección del monto de la población es insuficiente para determinar las demandas en educación, empleo, salud y vivienda. Para ello debería incorporarse en el modelo la variable edad; el problema es que se complica la matemática, pues tratamos con funciones no lineales. Por otro lado, no hay duda de que el método de los componentes demográficos resulta ser más robusto en la medida en que se establecen hipótesis sobre el comportamiento futuro de la fecundidad, la mortalidad y la migración, por edad y sexo, lo que ofrece la posibilidad de generar las nuevas cohortes de individuos a partir de una población inicial. Asimismo, es importante reconocer que el método de los componentes demográficos permite responder a las preguntas iniciales sobre la población estable a la que se tiende y el tiempo de llegada a esa condición. No se pretende aquí comparar los métodos en términos de sus propiedades, más bien se busca un área de aplicación en donde el método de los componentes no ofrezca buenos resultados.

Sería posible aplicar este método en algunos municipios en donde se presentaran cifras pequeñas en población, en nacimientos y en defunciones, y a la vez hubiera una fuerte emigración. En este caso el modelo de componentes demográficos no ofrece resultados plausibles porque es muy difícil obtener estimaciones confiables de los componentes demográficos por edad y sexo a este nivel, y más difícil es hacer pronósticos de dichos componentes.

Los resultados y su análisis

Para estimar los parámetros a y b se parte de la ecuación:

$$r(t) = k_1 + \frac{k_2}{1 + e^{a+bt}}$$

Despejando $a + bt$ se tiene:

$$a + bt = \ln \left[\frac{k_2}{r(t) - k_1}\right] - 1 \quad = Y(t)$$

Para obtener a y b se aplicó el método de los mínimos cuadrados. Se utilizaron las tasas de crecimiento demográfico para México estimadas por el Conapo, de .025 para 1980, de .022 para 1985, de .019 para 1990, de .016 para 1995, de .013 para 2000 y de .009 para 2005. La población inicial calculada por Conapo para 1980 fue de 67.4 millones. Los valores de los parámetros son: $a = -0.93205$; $b = 0.07649$. La asíntota inferior utilizada fue igual a 0 y la asíntota superior igual a 0.035. Lo que supone que la tasa de crecimiento de la población de México tenderá a cero, lo cual es solamente un ejemplo. El coeficiente de correlación del modelo fue de .997 y el de determinación de .994, lo que muestra un excelente ajuste. La proyección de población para 2010 con base en el modelo es de 108.3 millones de habitantes.

En el cuadro 1 se presentan las poblaciones observadas y las estimadas. Es posible observar que los resultados estimados que derivan de la función matemática son muy semejantes a los observados, lo que significa que el modelo reproduce de manera adecuada la dinámica demográfica del periodo 1980-2005.

La proyección para el 2010 es de 108.3 millones de personas, como ya dijimos, y para el futuro es de 114.1 en 2020, de 117.3 en 2030, de 118.8 para 2040 y de 119.5 para la mitad del siglo, datos comparables a la luz de los resultados de los censos de esos años. Conviene destacar que según esta función logística la población se estabilizaría en alrededor de 120.2 millones de habitantes desde mediados del siglo XXI, con un crecimiento cero. En la segunda mitad de este siglo empezaría a crecer muy lentamente.

Es importante mencionar que la función $g(t)$ que se presenta a continuación, que es parte de $P(t)$, converge en 1.783177481. Esta función es prácticamente igual a la función $P(t)$ sin la población inicial $P(0)$.

$$g(t) = (1+e^{a})^{\frac{k_2}{b}} e^{(k_1+k_2)t} (1+e^{a+bt})^{-\frac{k_2}{b}}$$

Si multiplicamos $g(t)$ por $P(0)$, obtenemos la cifra en que se estabilizaría la población total, es decir, la población de 1980 que se estimó en 67.4 millones se incrementa con 78.3% y se obtiene la población estabilizada. El primer factor de $g(t)$ es una constante igual a 1.16405888, el cual no influye en la tendencia de $g(t)$.

Se observa que mientras la función exponencial $e^{(k_1+k_2)t}$, a la que llamaremos $a(t)$, crece aceleradamente, la función $(1+e^{a+bt})^{-\frac{k_2}{b}}$ a la que denominaremos $b(t)$, decrece también rápidamente, y lo que es más interesante, el producto de ambas $a(t) * b(t)$ al que denominaremos $c(t)$, converge a 1.53186. Es decir, el tercer factor de $g(t)$ amortigua el crecimiento del segundo factor que es una exponencial elevada a $(k_1 + k_2)t$ (véase el cuadro 2 y las gráficas 2, 3 y 4).

CUADRO 1

Estados Unidos Mexicanos: tasa de crecimiento demográfico, población real, población estimada, 1980-2005, en saltos de 5 años

Año	t	$r(t)$ *Tasa de crecimiento demográfico (%)*	$Y(t)$ $\ln\left[\frac{k_2}{r(t)-k_1}-1\right]=Y(t)$	$P(t)$ *Población real (en millones)*	$P_e(t)$ *Población estimada con el modelo (en millones)*
1980	0	2.5	-0.91629	67.4	67.4
1985	5	2.2	-0.52609	75.8	75.9
1990	10	1.9	-0.17185	84.0	84.1
1995	15	1.6	0.17185	91.7	91.7
2000	20	1.3	0.52609	98.4	98.3
2005	25	0.9	1.06087	103.0	103.9

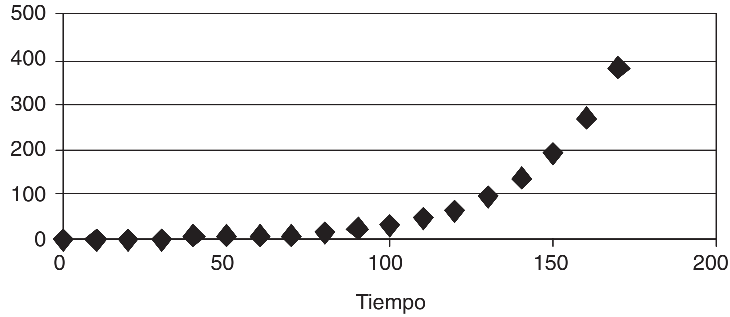
FUENTE: Cálculos propios.

CUADRO 2
Estados Unidos Mexicanos: factores de la función de población *P(t)*

Año	*Tiempo*	*a(t)*	*b(t)*	*a(t)b(t)*
1980	0	1	0.85906307	0.85906307
1990	10	1.41906755	0.75538942	1.07194862
2000	20	2.01375271	0.62246662	1.25349384
2010	30	2.85765112	0.48296761	1.38015293
2020	40	4.05519997	0.35879052	1.4549673
2030	50	5.75460268	0.25970575	1.49450343
2040	60	8.16616991	0.1854125	1.51410994
2050	70	11.5883467	0.13146987	1.52351839
2060	80	16.4446468	0.0929154	1.52796089
2070	90	23.3360646	0.06556557	1.53004247
2080	100	33.115452	0.04623263	1.53101428
2090	110	46.9930632	0.03258922	1.53146722
2100	120	66.686331	0.0229684	1.53167815
2110	130	94.6324083	0.01618659	1.53177635
2120	140	134.28978	0.01140684	1.53182206
2130	150	190.566268	0.00803838	1.53184334
2140	160	270.426407	0.00566458	1.53185324
2150	170	383.753339	0.00399178	1.53185785

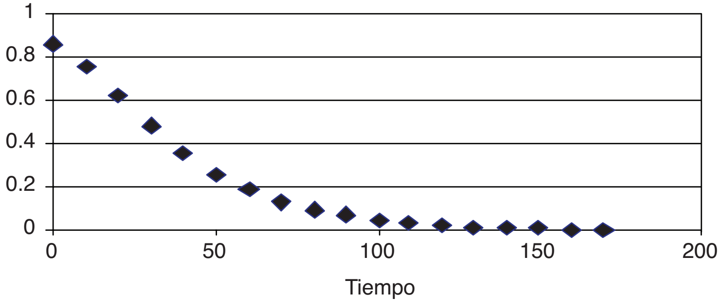
FUENTE: Cálculos propios.

GRÁFICA 2
Función *a*(*t*)



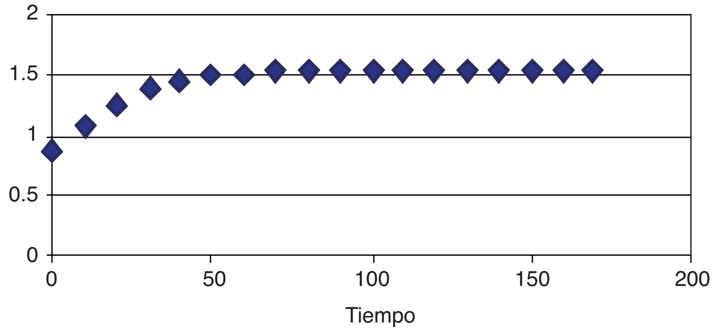
FUENTE: Cálculos propios.

GRÁFICA 3
Función *b*(*t*)



FUENTE: Cálculos propios.

GRÁFICA 4
Función producto *a*(*t*) *b*(*t*)



FUENTE: Cálculos propios.

Otra forma de llegar a 1.53186 es tomando el límite de la función $c(t)$ cuando t tiende a infinito:

Sea

$$\lim_{t \to \infty} c(t) = \lim_{t \to \infty} [e^{(k_1+k_2)t}(1+e^{a+bt})^{-\frac{k_2}{b}}]$$

Simplificando la expresión anterior y sabiendo que k_1 es igual a cero, se tiene:

$$\lim_{t \to \infty} p(t) = \lim_{t \to \infty} [e^{-bt}(1+e^{a+bt})]^{-\frac{k_2}{b}}$$

expresión que es igual a:

$$\lim_{t \to \infty} [e^{-bt} + e^{a})]^{-\frac{k_2}{b}}$$

Como t tiende a infinito y a, b, y k_2 son conocidas, con a negativa y b positiva, el límite es igual a:

$$= e^{-\frac{ak_2}{b}} = 1.531861$$

Cabe mencionar que los resultados del modelo nos muestran que a diferencia de otras proyecciones de población, la estabilidad, con una k_1 igual a cero, se va a alcanzar más rápido de lo que suponíamos, y con una cifra también más baja a las estimadas en otras proyecciones demográficas. Esto se explica porque la tasa de crecimiento demográfico incluye la migración internacional, y ésta fue más elevada que la pronosticada para los primeros años del presente siglo. La tasa de emigración es más elevada que la tasa de mortalidad, lo que significa que México pierde más población por salidas del país que por muertes. Según estimaciones del Consejo Nacional de Población de 2007, en el país murieron 501 mil personas en 2005 y salieron 583 mil mexicanos, principalmente rumbo a Estados Unidos.

Una característica de la función generada en el presente artículo es que la población podría disminuir si se supone que la asíntota inferior es igual a una cifra negativa o aumentar indefinidamente en el caso de que la asíntota inferior fuera positiva. Es decir, este modelo es más flexible que los otros que se han desarrollado, ya que puede producir una infinidad de trayectorias dependiendo de los valores de los parámetros.

Análisis de sensibilidad de la asíntota inferior

Con el propósito de analizar diferentes escenarios sobre el número de personas que habría al final del siglo XXI, se realizaron tres pronósticos de población a partir de tres hipótesis respecto al valor de k_1, que como ya se ha mencionado es el límite inferior de la tasa de crecimiento demográfico. Los supuestos de k_1 son 0, 0.5 y –0.5%. En el primer caso, que es el ya descrito, tenderíamos hacia una población estacionaria; en el segundo se supone una trayectoria hacia un crecimiento positivo, y en el tercero hacia un crecimiento negativo de la población. Estos valores de k_1 corresponden aproximadamente a las tasas de crecimiento total de la población para el año 2050 según diferentes hipótesis: media, alta y baja, estimadas por Naciones Unidas en la revisión de las proyecciones de población de 2004 (Naciones Unidas, 2005).

Cabe mencionar que los diferentes valores de k_1 representan tres posibles escenarios del nivel al que tendería la tasa de crecimiento demográfico total. Aunque podría haber una infinidad de escenarios posibles, el propósito es analizar el grado de sensibilidad de la población a cambios en las cifras de la asíntota inferior, más que adoptar un valor posible; no se trata de elegir una de ellas, sino más bien de conocer la variabilidad de la población futura a cambios de k_1. Las proyecciones de población publicadas por el Consejo Nacional de Población en 2006 plantean, en su hipótesis recomendada, que para el año 2008 se alcanzará el nivel de reemplazo generacional. Con base en esta hipótesis, la tasa de crecimiento demográfico de la población total sería de –0.2% en 2050 y tendería a estabilizarse seguramente en una cifra cercana a –0.5% anual al finalizar el siglo XXI.

En la gráfica 5 y en el cuadro 3 se presenta un análisis comparativo de los resultados de los tres escenarios. En el supuesto de crecimiento demográfico cero es posible observar que la población se estabiliza en 120 millones de habitantes, como ya lo habíamos mencionado. Si se supone que la población tiende hacia una tasa de crecimiento negativo de –0.5% anual se alcanzarían 80 millones de personas en el 2100. Esto significa que la población decrecería en aproximadamente 20 millones en un siglo respecto a la de 2000. El máximo se encontraría en el año 2020 con 111.3 millones de individuos. Al cabo de unas centurias la población tendería a la extinción. El valor negativo de k_1 repercute en la función $e^{(k_1+k_2)t}$, lo que a su vez afecta a $P(t)$ y hace que la población descienda exponencialmente. Los valores estimados de los parámetros son: $a = -1.700806751$; $b = 0.08479158$. La asíntota

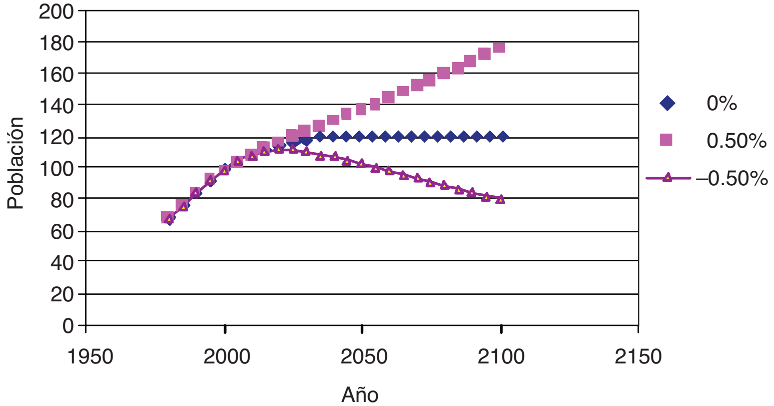
CUADRO 3

Estados Unidos Mexicanos: diferentes escenarios de estabilización de la población futura, según tasas de crecimiento demográfico en 0, 0.5 y -0.5%, 1980-2100 (millones de habitantes)

	Crecimiento demográfico		
Año	*0%*	*0.50%*	*-0.50%*
1980	67.4	67.4	67.4
1985	75.87346258	76.03152638	75.81557613
1990	84.10216531	84.13337704	84.21018565
1995	91.69603997	91.41900945	92.0970002
2000	98.34502824	97.78528113	98.96460099
2005	103.8794758	103.2894389	104.4043447
2010	108.2812918	108.0816295	108.2169345
2015	111.65007	112.3390357	110.4384285
2020	114.1497932	116.2246781	111.281383
2025	115.9610676	119.8705923	111.0393197
2030	117.2504624	123.3760996	110.0059106
2035	118.1566039	126.8127033	108.4302352
2040	118.7875691	130.2306074	106.5033
2045	119.2240611	133.6646435	104.3623211
2050	119.5246215	137.138936	102.1016621
2055	119.7308917	140.6703163	99.78428248
2060	119.8720995	144.2707222	97.45125918
2065	119.9685746	147.9488422	95.12889576
2070	120.0343705	151.7112263	92.83372423
2075	120.079161	155.5630295	90.57590025
2080	120.1095865	159.5085065	88.36145751
2085	120.1301956	163.5513396	86.19378369
2090	120.1441006	167.6948566	84.07457796
2095	120.1534284	171.9421743	82.00446858
2100	120.159632	176.2962943	79.98340961

FUENTE: Cálculos propios.

GRÁFICA 5
México: escenarios de estabilización*



* Población en millones de habitantes.
FUENTE: Cálculos propios.

inferior utilizada fue igual a –0.5% y la asíntota superior igual a 0.035. El coeficiente de correlación del modelo fue de .997 y el de determinación de .993, lo que muestra también un excelente ajuste.

Por lo que respecta a la hipótesis con crecimiento demográfico positivo de 0.5% anual, la población ascendería a 176.3 millones de habitantes en 2100, casi 80 millones más que la de 2000. En este caso continuaría creciendo sin detenerse. El valor positivo de k_1 incide en el valor de $e^{(k_1+k_2)t}$, lo que afecta el valor de $P(t)$, haciendo que la población se incremente exponencialmente. Los valores estimados de los parámetros son: $a = -0.406036168$; $b = 0.08873874$. La asíntota inferior utilizada fue igual a 0.5% y la asíntota superior igual a 0.035. El coeficiente de correlación del modelo fue de .983 y el de determinación de .966, lo que muestra un muy buen ajuste.

En conclusión, un rango en la tasa de crecimiento demográfico entre –0.5 y 0.5% anual, que parecería ser pequeño, produce grandes diferencias en el número de habitantes que habría en 2100, que va de 80 millones según la hipótesis de $k_1 = -0.5\%$ a 176 millones en el supuesto de $k_1 = 0.5\%$, es decir, una variación de 1% anual en la tasa de crecimiento demográfico produce una diferencia de 100 millones en 2100.

Los tres ajustes presentan elevados coeficientes de determinación, cercanos a 1, aunque es ligeramente mejor el que supone una k_1 igual a cero. Las cifras estimadas en los tres modelos son cercanas a las derivadas de los censos de población.

Este modelo supone en el largo plazo niveles constantes en la natalidad, la mortalidad y la migración. Se reconoce que los procesos demográficos tienen su propia inercia, derivada de la estructura por edades, por lo que es difícil revertirlos. De eso nos valemos los demógrafos para hacer nuestros pronósticos, aunque advertimos que la migración internacional pudiera presentar mayor volatilidad por ser un componente altamente vinculado a las condiciones económicas y sociales y a los cambios en las políticas.

Este análisis podría enriquecerse al incorporar la estructura por edad de la población y separar los componentes de su crecimiento. Sin embargo, la matemática que subyace a este modelo es complicada, lo que dificulta su desarrollo. Se podrían simular trayectorias logísticas de las tasas específicas de fecundidad y de mortalidad por edad. Desde el punto de vista estadístico podrían calcularse los intervalos de confianza para los parámetros a y b, y encontrar diversos escenarios de la función población.

Estos supuestos nos llevan a determinar qué país queremos en el largo plazo. ¿Un país que continúe creciendo y que en un siglo tenga 80 millones de habitantes más que en 2000?, ¿un país que pierda 20 millones respecto al principio del siglo XXI y tienda a la extinción?, o ¿un país que se estabilice en 120 millones de mexicanos? ¿Qué queremos? Este momento es propicio para redefinir nuestra política de población.

Si bien es cierto que los coeficientes de correlación son elevados en los tres casos analizados, pudiera ocurrir que al introducir las variables por edad el modelo no siguiera una trayectoria logística, sino que sólo se acercara a ella. Esto se podría constatar utilizando el método de los componentes demográficos. Es decir, podría ocurrir que la tasa global de fecundidad siguiera una evolución logística, pero esto no significaría que el crecimiento natural o el total lo hicieran también.

Proyección de población en el ámbito municipal: un estudio de caso

El método que hemos desarrollado en el presente trabajo puede aplicarse con buenos resultados en el ámbito municipal, sobre todo si se trata de un área con una reducida población y pocos componentes demográficos. Dentro de ese rango es difícil calcular los indicadores de las variables demográficas por sexo y edad, ya que presentan oscilaciones ocasionadas por el pequeño número de datos. Resulta también difícil hacer un pronóstico de las variables por edad y por sexo.

A fin de ejemplificar la aplicación de la función de población construida en este artículo elegí el municipio de Santa Magdalena Jicotlán del estado de Oaxaca, que contaba en el año 2000 con 109 habitantes. Su población y sus tasas de crecimiento se muestran en el cuadro 4.

Con base en esta información se estimaron los parámetros a y b. El valor de a fue de –.821667 y el de b igual a .377. Si bien el coeficiente de correlación es igual a .99, se tienen únicamente tres datos. Este ejercicio se ha tomado a manera de ejemplo de la posible aplicación de nuestro modelo. La población estimada para el municipio en 1995 es de 137 y la del año 2000 es de 110. Los valores de k_1 y k_2 son –0.05 y 0.05, respectivamente. A fin de encontrar un mejor ajuste sería necesario disponer de un mayor número de datos y de una calibración de los valores de las asíntotas.

En el caso de que hiciéramos una proyección de población con la función exponencial o incluso suponiendo un cambio lineal, los resultados obtenidos con estas funciones llevarían a una extinción de la población del municipio en un plazo breve. Dichas funciones no son aplicables en estos casos. En cambio la técnica que hemos desarrollado

CUADRO 4
Municipio de Santa Magdalena Jicotlán

Año	*Población*	*Tasa de crecimiento demográfico*
1990	157	-4.71%
1995	121	-2.47%
2000	109	-0.94%

FUENTE: Para 1990: XI Censo General de Población y Vivienda. Para 1995: II Conteo de Población y Vivienda. Para 2000: XII Censo General de Población y Vivienda. Resultados preliminares.

en este trabajo podría ser de mayor flexibilidad, sobre todo si además la combinamos con mapas del municipio y sus áreas en diferentes momentos. Podría aplicarse el Filtro de Kalman. Se combinarían los datos de los censos con la información geográfica. Resulta fundamental contar con dos fuentes independientes de información a este nivel de análisis.

A manera de conclusión podríamos manifestar que los resultados del modelo que hemos presentado en este artículo deben considerarse una mera aproximación a la realidad, más que acontecimientos que van a ocurrir. Cabe también advertir que las proyecciones de población son válidas en periodos cortos debido a la inercia demográfica, y que estimaciones a largo o muy largo plazos deben considerarse especulaciones que sólo nos sirven para analizar los diversos escenarios que podrían presentarse. Conviene también aclarar que el modelo desarrollado proporciona resultados adecuados en el ámbito municipal tratándose de áreas pequeñas y, sobre todo, es más fácil establecer hipótesis sobre las cifras futuras en el crecimiento demográfico.

Bibliografía

Bennet, Neil y Shiro Horiuchi (1981), "Estimating the Completness of Death Registration in a Closed Population", *Population Index*, vol. 47, núm. 2, pp. 207-221.

Cabrera, Gustavo (1981), *Los 80: el futuro nos visita*, México, Conacyt.

Coontz, Sidney H. (1960), *Teorías de la población y su interpretación económica*, México, Fondo de Cultura Económica.

Dorn, Harold F. (1950), "Pitfalls in Population Forecasts and Projections", *Journal of the American Statistical Association*, vol. 45, núm. 251, pp. 311-334.

Keyfitz, Nathan (1979), *Introducción a las matemáticas de la población*, Santiago de Chile, Centro Latinoamericano de Demografía.

López, Álvaro (1961), *Problems in Stable Population Theory*, Princeton, Princeton University Press.

Lotka, Alfred (1976), *Teoría analítica de las asociaciones biológicas*, Santiago de Chile, Centro Latinoamericano de Demografía [traducción del original en francés publicado en 1939].

Malthus, Thomas Robert (1986), *Ensayo sobre el principio de la Población*, México, Fondo de Cultura Económica.

Naciones Unidas (1953), Factores determinantes y consecuencias de las tendencias demográficas", *Estudios sobre Población*, núm. 17, Nueva York.

Naciones Unidas (2005), *World Population Prospects. The 2004 Revision*, Nueva York, ONU.

Ordorica, Manuel (1990), "Ajuste de una función expologística a la evolución de la población total de México, 1930-1985", *Estudios Demográficos y Urbanos*, vol. 5, núm. 3 (15), pp. 373-386.

Ordorica, Manuel (2006), "Cuatro escenarios de la población de México para fines del siglo XXI construidos a través de una función exponencial", en José Luis Lezama y José B. Morelos (coords.), *Población, ciudad y medio ambiente en el México contemporáneo,* México, CEDUA, El Colegio de México.

Partida, Virgilio (2006), *Proyecciones de la población de México 2005-2050,* México, Consejo Nacional de Población.

Partida, Virgilio (2008), "Proyecciones de la población de México, de las entidades federativas, de los municipios y localidades, 2005-2050", documento metodológico, México, Consejo Nacional de Población.

Pearl, Raymond y Lowell J. Reed (1920), "On the Rate of Growth of the Population of the United States since 1790 and its Mathematical Representation", *Proceedings of the National Academy of Sciences,* vol. 6, núm. 6, pp. 275-288.

Platón (1983), *Obras completas,* Venezuela, Facultad de Humanidades y Educación, Universidad Central de Venezuela.

Preston, Samuel y Ansley J. Coale (1982), "Age Structure, Growth, Attrition and Accession: a New Synthesis", *Population Index,* vol. 48, núm. 2, pp. 217-259.

Quetelet, A. (1835), *Sur l´homme et le développement de ses facultés,* París, Bachelier.

Verhulst, P.F. (1838), "Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement", *Correspondances Mathematiques et Physiques,* núm. 10, pp. 113-121.

Verhulst, P.F. (1845), "Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population", *Nouveaux Memoires de l'Academie Royale des Sciences et Belex-Lettres de Bruxelles,* núm. 1, pp. 1-45.

Whelpton, Pascal K. (1936), "A Empirical Method for Calculating Future Populations", *Journal of the American Statistical Association,* núm. 31, pp. 457-473.