



Estudio de una familia de funciones de periodo tres y su dinámica caótica

Study of a family of period three functions and its chaotic dynamics

Julio César Macías Ponce^{a*}, Luis Fernando Martínez Álvarez^{b*}

*Universidad Autónoma de Aguascalientes

RESUMEN

Objetivo: construir sistemas dinámicos caóticos unidimensionales mediante el estudio de una familia de funciones con dominio y contradominio en el intervalo $[0,1]$ la cual se define en términos de cuatro parámetros.

Método: con base a los parámetros que definen a cada función que proponemos, se identificaron aquellas que tienen periodo tres, las cuales inducen un sistema caótico en el contexto de Li-Yorke. Los teoremas del punto fijo y de Sharkovskii fueron la herramienta fundamental de nuestro trabajo.

Resultados: se obtuvo un conjunto de sistemas dinámicos caóticos, se describió un procedimiento sencillo para obtener sistemas dinámicos caóticos (adicionales a los obtenidos) y se sugiere como primera aplicación la obtención de números pseudoaleatorios.

Limitaciones: los sistemas dinámicos contruidos son caóticos en el sentido de Li-Yorke, -no necesariamente en el sentido de Devaney-.

Principales hallazgos: las funciones estudiadas tienen una gráfica *en forma de Zeta*, y para cada una de ellas se identifica a su respectiva *dual* (las gráficas que se obtienen presentan una relación de simetría), de esta manera se muestran las condiciones que deben verificar los parámetros -primal y dual- para obtener (y no obtener) período tres.



Recibido: 13 de agosto de 2018;
aceptado: 17 de marzo de 2019



Palabras clave:
caos, Sharkovskii,
sistemas dinámicos,
órbita.

ABSTRACT

Purpose: To build one-dimensional chaotic dynamical systems through the study of functions with domain and codomain in the interval $[0, 1]$ which is defined in terms of four parameters.

Methodology: Based on the parameters that define each function that is proposed, those which have period three were identified and which induce a chaotic system in the context of Li-Yorke. The fixed point and Sharkovskii theorems were the fundamental tools in this work.

Results: We obtained a set of chaotic dynamic systems. In turn, we described a simple process in order to obtain chaotic dynamic systems (additional to those obtained) and we suggest, as a first application, the obtainment of pseudo-random numbers.

Limitations: The dynamic systems that were built are chaotic in the Li-Yorke sense -not necessarily in the Devaney sense-.

Findings: The functions that were studied have a *Zeta form* graphic, and for each of those we identified its respective *dual* (the obtained graphics present a symmetric relation) and that is how we show the conditions that must verify the parameters -primal and dual- in order to obtain (or not) period three.



Keywords:
Chaos, Sharkovskii,
dynamic systems,
orbit.



Se autoriza la reproducción total o parcial de los textos aquí publicados siempre y cuando se cite la fuente completa y la dirección electrónica de la publicación. CC-BY-NC-ND

INTRODUCCIÓN

En Ramírez de La Cruz (2004) se relata lo siguiente:

A finales del siglo XIX, Henri Poincaré cuestionó la perfección newtoniana en relación con las órbitas planetarias, lo que se conoce como el problema de los tres cuerpos. Planteaba una atracción gravitatoria múltiple, que hasta entonces se resolvía con las leyes de Newton y la suma de un pequeño valor que compensara la atracción del tercer elemento.

Poincaré descubrió que, en situaciones críticas, ese tirón gravitatorio mínimo podía realimentarse hasta producir un efecto de resonancia que modificara la órbita o incluso lanzara el planeta fuera del sistema solar. Los procesos de retroalimentación se corresponden en física con las ecuaciones iterativas, donde el resultado del proceso es utilizado nuevamente como punto de partida para el mismo proceso. El ideal clásico sólo contemplaba sistemas lineales, en los que efecto y causa se identifican plenamente; se sumaban las partes y se obtenía la totalidad. Poincaré introdujo el fantasma de la no linealidad, donde origen y resultado divergen y las fórmulas lineales no sirven para resolver el sistema. Se había dado el primer paso para la teoría del caos (p.16).

Hoy en día, apoyándose en los avances tecnológicos muchos matemáticos se dedican al estudio, generación y aplicación de modelos caóticos, en este trabajo nos restringiremos al estudio de sistemas dinámicos discretos unidimensionales y construiremos modelos inéditos.

El alcance de este trabajo es explicativo, proporciona una familia de sistemas dinámicos inédita, cuyas propiedades se demuestran con el debido rigor matemático; en este sentido, se pueden tomar los ejemplos expuestos para utilizarlos en contextos pertinentes relativos a los sistemas dinámicos discretos.

Debido a que la composición de una función consigo mismo será mencionada con frecuencia; para el resto del trabajo denotaremos con f^n -donde n es un entero positivo- a la composición de f consigo misma n veces. Así, estamos en condiciones de dar la definición de punto periódico que será de utilidad en el desarrollo del trabajo.

Definición 1. Sea $x_0 \in D_f$, decimos que x_0 es de periodo

n si, $n f^n(x_0) = x_0$, para algún $n \in \mathbb{N}$, y $f^k(x_0) \neq x_0$, para $k < n$. Al conjunto de puntos periódicos se le denotará como $Per(f)$ (Devaney, 1989).

La definición matemática más aceptada en la teoría del caos se debe a Devaney (1989) y es la siguiente:

Definición 2. Decimos que una función $f: I \rightarrow I$ es caótica si f satisface las siguientes tres condiciones:

- Existe una $\delta > 0$ tal que, para cualquier $x \in I$ y cualquier vecindad B de x , existe una $y \in B$ y $n \geq 0$ tal que $|f^n(x) - f^n(y)| \geq \delta$. A esta condición se le conoce como *sensibilidad a condiciones iniciales*
- Para cualquier par de conjuntos abiertos $U, V \subset I$ existe $k > 0$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Si esto sucede, se dice que la función es *topológicamente transitiva*.
- $Per(f)$ es denso en I .

Sin embargo, en Aulbach y Kieninger (2000) se encuentra otra definición que se atribuye a Li y Yorke (una década anterior a la definición de Devaney, 1989), misma que tendrá prioridad en nuestro trabajo:

Definición 3. Una función $f: X \rightarrow X$ en un espacio métrico compacto (X, d) es caótica en el sentido de Li y Yorke si existe un conjunto no contable $S \subseteq X$ con las siguientes condiciones:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup d(f^n(x), f^n(y)) > 0$ para todo $x, y \in S, x \neq y$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf d(f^n(x), f^n(y)) = 0$ para todo $x, y \in S, x \neq y$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup d(f^n(x), f^n(p)) > 0$ para todo $x \in S, p \in X$, p periódico.

En Aulbach y Kieninger (2000) se estudia la relación entre estas definiciones, en particular se tiene que la primera definición (Devaney, 1989) implica la segunda (pero la otra implicación no es válida). En lo que resta del trabajo nos referiremos -cuando el contexto se preste a confusión- a la primera definición usando simplemente “caos” mientras que la segunda se enunciará como “caos en el sentido de Li-Yorke”.

En Devaney (1989) encontramos diversos sistemas dinámicos discretos que son caóticos, algunos unidimensionales y otros de dos o más dimensiones, en este

trabajo nos restringimos a los primeros, podemos citar la función tienda, la función logística y la función “recorrimiento” (King y Mendez, 2015), éstas han sido tratadas desde ilustración para los conceptos relativos al caos hasta la aplicación en modelos de encriptación (Li y Yorke, 1975), así como modelos económicos (Tarasova y Tarasov, 2017). En el presente trabajo nos enfocamos en construir modelos y exhibir sus propiedades caóticas dejando en segunda prioridad la aplicación,¹ en particular presentamos una familia de sistemas dinámicos que dependen de un conjunto de parámetros y buscamos condiciones entre estos, de manera que los sistemas sean caóticos en el sentido de Li-Yorke. La forma de proceder se sustenta fuertemente en los teoremas de Sharkovskii (Devaney, 1989) y del punto fijo para funciones unidimensionales; el primero de ellos se presenta a continuación.

El teorema de Sharkovskii es de gran utilidad para estudiar la existencia de puntos periódicos, para enunciarlo necesitamos “listar” a los números naturales como sigue, que es el *orden de Sharkovskii* (De Melo y Van Strien, 1993).

$$\begin{aligned} & 3 < 5 < 7 < 9 < \dots \text{ (Números impares)} \\ & \dots < 3 \cdot 2 < 5 \cdot 2 < 7 \cdot 2 < 9 \cdot 2 < \dots \text{ (Números impares multiplicados por 2)} \\ & \dots < 3 \cdot 2^2 < 5 \cdot 2^2 < 7 \cdot 2^2 < 9 \cdot 2^2 < \dots \text{ (Números impares multiplicados por } 2^2) \\ & \vdots \\ & \dots < 3 \cdot 2^n < 5 \cdot 2^n < 7 \cdot 2^n < 9 \cdot 2^n < \dots \text{ (Números impares multiplicados por } 2^n) \\ & \dots < 2^n < \dots < 2^3 < 2^2 < 2 < 1 \text{ (Potencias de 2)} \end{aligned}$$

Como se observa primero se enlistan los números impares excepto el uno, después se continúa multiplicando estos números por las potencias de dos, y para terminar se agregan las potencias de dos en orden decreciente. Se utiliza la notación $a < b$ para representar “a precede a b”.

Ahora bien, el teorema de Sharkovskii enuncia lo siguiente:

Teorema 1. Sea $f: I \rightarrow I$ una función continua donde I es un intervalo cerrado y acotado. Suponga que f tiene un punto periódico de periodo k Si $k < l$ en el orden de Sharkovskii, entonces f también tiene un punto periódico de periodo l (Devaney, 1989).

El teorema argumenta, que las funciones con puntos de periodo tres tienen puntos periódicos de cualquier orden; luego, a partir del trabajo de (Li y Yorke, 1975) “periodo tres implica caos” -Li y Yorke argumentan que la existencia de puntos con periodo tres implica que se

verifican las condiciones de su definición de caos-, los sistemas dinámicos unidimensionales son susceptibles a observarse desde la perspectiva del periodo tres. Luego, el procedimiento para “construir caos” es sencillo, basta con definir funciones continuas con dominio y contra-domínio un intervalo cerrado y acotado I y encontrar puntos fijos de la función compuesta consigo misma tres veces (estos serán los candidatos a ser puntos de periodo tres).

En particular cada función que se presenta en este trabajo tiene una “forma de Z”, su gráfica consiste de 3 rectas que “se pegan bien” definidas en el intervalo unitario y con rango el mismo intervalo. Además de la gráfica de cada función en forma de Zeta, se presentan las gráficas de dicha función compuesta tres veces consigo misma para identificar los puntos fijos de esta última los cuales corresponde a candidatos de puntos de periodo tres de la función original. Luego entonces mostramos matemáticamente las condiciones que deben satisfacer los valores de los parámetros, de manera, que se garantice la existencia de periodo tres, y por tanto de caos.

El artículo se encuentra dividido en tres secciones. En la primera, se refieren los aspectos metodológicos, se presenta la definición de la familia de funciones que se abordarán y se presentan los resultados teóricos, con las demostraciones correspondientes, que garantizan la existencia del caos. En la segunda sección se presentan diversos ejemplos donde se exhiben los resultados teóricos y computacionales obtenidos, también se muestra una lista de números generados con una función tipo Zeta junto con los resultados de las pruebas estadísticas pertinentes. La tercera y última sección expone las conclusiones, primero se describe un procedimiento para construir sistemas caóticos y posteriormente una estrategia para generar secuencias de números susceptibles a pruebas de aleatoriedad.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Comenzamos definiendo una familia de funciones que por la forma de la gráfica le llamaremos **Funciones tipo Zeta** y a partir de éstas obtendremos sistemas dinámicos los cuales podrán ser (o no) caóticos.

¹ Una aplicación inmediata que proponemos para trabajos futuros sería la generación de números pseudoaleatorios que a su vez sería la base para otras aplicaciones.

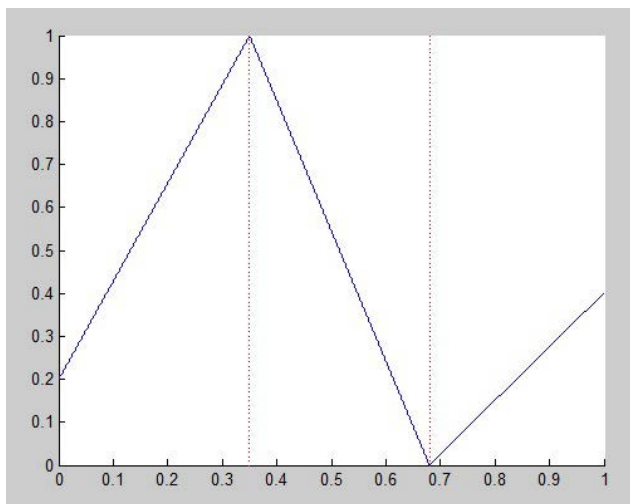
Definición 4. Sean $a, b, c, d \in [0, 1]$ con $0 < b < c < 1$, definimos una **Función tipo Zeta**

$f_{a,b,c,d}: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ como:

$$f_{a,b,c,d}(x) = \begin{cases} \frac{1-a}{b}x + a & \text{si } x \in [0, b] \\ \frac{c-x}{c-b} & \text{si } x \in (b, c] \\ \frac{d}{1-c}(x-c) & \text{si } x \in (c, 1] \end{cases}$$

En la figura 2 presentamos la forma de la gráfica de una función tipo Zeta con parámetros $a=0.2$, $b=0.35$, $c=0.68$, $d=0.4$

Figura 1. Típica forma de una función tipo Zeta



Fuente: elaboración propia.

Para cada arreglo de parámetros (a, b, c, d) que definen a una función tipo Zeta identificamos a otra función de la misma familia a la que llamaremos la **función dual**.

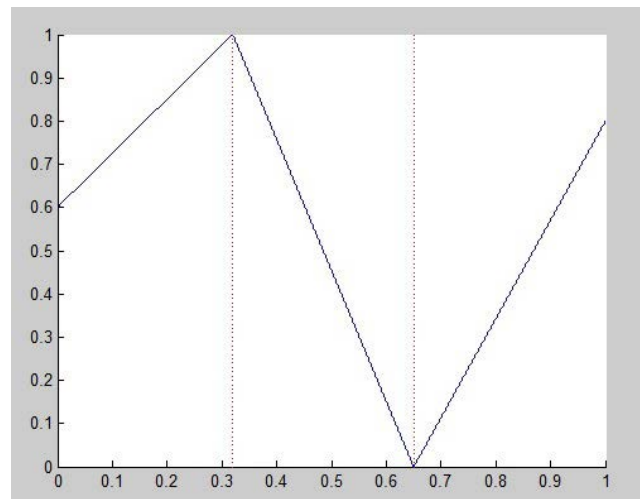
Definición 5. Dada una función tipo Zeta $f_{a,b,c,d}$ definimos la función dual de f como la función dada por $f_{a,b,c,d}^* = f_{1-d,1-c,1-b,1-a}$.

Note pues que la función $f_{a,b,c,d}^*: [0,1] \rightarrow [0,1]$ será la función dada por:

$$f_{a,b,c,d}^*(x) = \begin{cases} \frac{d}{1-c}x + (1-d) & \text{si } x \in [0, 1-c] \\ \frac{1-b-x}{c-b} & \text{si } x \in (1-c, 1-b] \\ \frac{1-a}{b}(x+b-1) & \text{si } x \in (1-b, 1] \end{cases}$$

En la figura 2 se visualiza la gráfica de la función dual asociada a la función representada en la figura 1.

Figura 2. Dual de la función tipo Zeta



Fuente: elaboración propia.

Cuando no se preste a confusión omitiremos los parámetros (a, b, c, d) y nos referiremos simplemente a las funciones como f y f^* y donde una es la función dual de la otra (obsérvese que $f^{**}=f$).

El siguiente resultado será útil para trabajar de manera operativa con las funciones f y f^* .

Proposición 1. Dada la función tipo Zeta f y su función dual f^* se tiene que

$$f(x) = 1 - f^*(1-x) \text{ para todo } x \in [0, 1].$$

Demostración: particionando el dominio de la función tenemos lo siguiente:

Si $x=b$, tendremos que

$$\begin{aligned} 1 - f^*(1-b) &= 1 \\ &= f(b) \end{aligned}$$

Para el caso $x=c$, tenemos que

$$\begin{aligned} 1 - f^*(1 - c) &= 1 - [d + (1 - d)] \\ &= 0 \\ &= f(c) \end{aligned}$$

El caso $0 \leq x < b$ equivale a $1 - b < 1 - x \leq 1$, luego

$$\begin{aligned} 1 - f^*(1 - x) &= 1 - \frac{1-a}{b}(b-x) \\ &= 1 - (1-a) + \frac{1-a}{b}x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Cuando $b < x < c$ se sigue que $1-c < 1-x < 1-b$, y así obtenemos

$$\begin{aligned} 1 - f^*(1 - x) &= 1 - \frac{x-b}{c-b} \\ &= \frac{c-b-(x-b)}{c-b} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Obsérvese que $c < x \leq 1$ equivale a $0 \leq 1-x < 1-c$, por tanto

$$\begin{aligned} 1 - f^*(1 - x) &= d - \frac{d(1-x)}{1-c} \\ &= d \left(1 - \frac{1-x}{1-c} \right) \\ &= d \left(\frac{x-c}{1-c} \right) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Corolario 1. Dada la función tipo Zeta f y su función dual f^* se tiene que

$$f^n(x) = 1 - f^{*n}(1-x) \text{ para todo } x \in [0,1] \text{ y para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demostración: por inducción matemática.

Como dijimos anteriormente, las funciones tipo Zeta son fundamentales en el desarrollo de nuestro trabajo, ya que a partir de estas generaremos sistemas dinámicos discretos y los estudiamos en el contexto del caos. A con-

tinuación presentamos los conceptos básicos relativos a los sistemas y su dinámica.

Para el resto de este trabajo, si A es un subconjunto del dominio de una función f denotaremos con $f(A)$ a la imagen del conjunto A bajo la función f .

Las siguientes definiciones son esenciales para el desarrollo de este trabajo.

Definición 6. Sea f una función real de variable real con $f(D_f) \subseteq D_f$ y $x_0 \in D_f$, definimos y denotamos la órbita de x_0 bajo f como sigue

$$O(x_0, f) = \{f^n(x_0) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

Donde $f^0(x_0) = x_0$, además, un punto $x_0 \in I$ es fijo si $f(x_0) = x_0$.

La siguiente definición se debe a Hirsch, Smale, y Devaney (2004) y habla de un sistema dinámico general pero redefiniendo el dominio se tiene la definición que necesitamos en nuestro contexto: basta sustituir \mathbb{R} por $\mathbb{N} \cup \{0\}$ en el dominio de la función ϕ .

Definición 7. Un sistema dinámico en \mathbb{R}^n es una función continuamente diferenciable

$\phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde $\phi(t, x) = \phi_t(x)$ satisface:

- 1) $\phi_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es la función identidad $\phi_0(x) = x$.
- 2) $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$ para cada $t, s \in \mathbb{R}$.

En el contexto de la definición 7, recordemos que $n=1$ para sistemas unidimensionales y estamos usando supraindices para la función f . Abusando del lenguaje, estamos escribiendo “ f es caótica” para referirnos al respectivo sistema dinámico discreto inducido por la función f donde $\phi_n(x) = f^n(x)$. Además, para nuestro propósito se puede relajar la condición de continuamente diferenciable por continua.

En la definición anterior tenemos que pueden existir puntos a los que conoceremos como preperiódicos: un punto $y \in D_f$ es preperiódico si existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(y) \in Per(f)$.

En este orden de ideas, el resultado más importante para el objetivo corresponde a Li y Yorke “Period Three Implies Chaos” (Li y Yorke, 1975), pues basta mostrar que f tiene puntos de periodo tres (y por tanto de todos los periodos) para afirmar que f es caótica en el sentido

de Li-Yorke.

Proposición 2. Dada f y su respectiva función dual f^* entonces f tiene un punto de periodo 3 si y solo si f^* posee un punto de periodo 3.

Demostración:

\Rightarrow) Sea x_0 un punto de periodo 3 y que no es punto fijo de f , entonces mostraremos que $1-x_0$ es punto de periodo 3 para f^* .

Por el corolario 1 se tiene que

$$\begin{aligned}(f^*)^3(1-x_0) &= 1-f^3(x_0) \\ &= 1-x_0\end{aligned}$$

veamos ahora que $1-x_0$ no es punto fijo de f^*

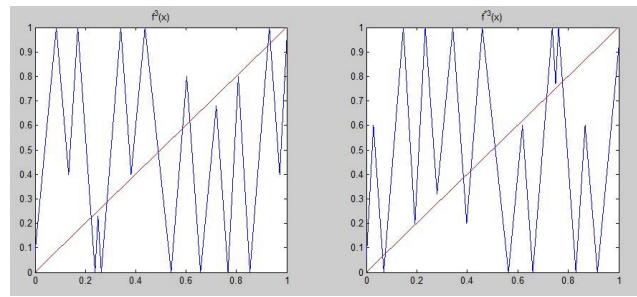
$$\begin{aligned}f^*(1-x_0) &= 1-f(x_0) \\ &\neq 1-x_0\end{aligned}$$

Por tanto si f posee un punto de periodo tres también f^* lo tendrá.

\Leftarrow) Supongamos que f^* posee un punto de periodo 3, por la parte anterior entonces $f^{**} = f$ posee también un punto de periodo 3.

En la figura 3 podemos observar las gráficas de las funciones f^3 y f^{*3} asociadas a una función tipo Zeta con parámetros $a=0.4$, $b=0.25$, $c=0.72$, $d=0.8$, donde los puntos de periodo 3, además de los posibles puntos fijos (de f) son aquellos donde se intersecta la gráfica de la función f^3 correspondiente con la de la función identidad.

Figura 3. Representación de los puntos de periodo 3 de una función tipo Zeta y su respectiva función dual



Fuente: elaboración propia.

Ahora identificaremos un punto en el dominio de la función tipo Zeta que será relevante en el resto del trabajo.

Proposición 3. Sea f una función tipo Zeta, entonces $x_F = \frac{c}{1+c-b}$ es un punto fijo de la función.

Demostración: sabemos que $0 < b < c < 1$, por lo que se obtienen las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}b(c-b) &< c-b \\ \Rightarrow b+bc-b^2 &< c \\ \Rightarrow b(1+c-b) &< c\end{aligned}$$

Y a su vez

$$\begin{aligned}0 &< c(c-b) \\ \Rightarrow c &< c+c^2-bc \\ \Rightarrow c &< c(1+c-b)\end{aligned}$$

Además, claramente $1+c-b > 0$ por lo que $b < x_F < c$, y así

$$\begin{aligned}f(x_F) &= \frac{c - \frac{c}{1+c-b}}{c-b} \\ &= \frac{c^2 - bc}{(c-b)(1+c-b)} \\ &= \frac{c}{1+c-b}\end{aligned}$$

Proposición 4. Si f es una función tipo Zeta tal que $a \geq x_F$ y $d \leq x_F$ entonces f no tiene puntos de periodo 3.

Demostración: bajo la condiciones anteriores es claro que $f(x) \geq x_F$ para todo $x \in [0, x_F]$ y $f(x) \leq x_F$ si $x \in [x_F, 1]$ así pues note que

- Si $0 \leq x < x_F$

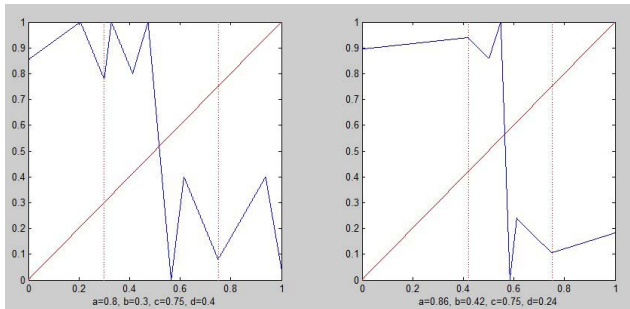
$$\begin{aligned} f(x) &\geq x_F \\ \Rightarrow f^2(x) &\leq x_F \\ \Rightarrow f^3(x) &\geq x_F > x \end{aligned}$$

- Si $x_F < x \leq 1$

$$\begin{aligned} f(x) &\leq x_F \\ \Rightarrow f^2(x) &\geq x_F \\ \Rightarrow f^3(x) &\leq x_F < x \end{aligned}$$

La figura 4 presenta la gráfica de f^3 para dos funciones tipo Zeta que poseen los parámetros indicados y que cumplen las condiciones de la proposición 4, como se observa, la gráfica de f^3 no intersecta a la gráfica de la función identidad —a excepción del punto fijo x_F — por lo que no poseen puntos de periodo 3.

Figura 4. Ausencia de puntos de periodo tres según las condiciones de la proposición 4



Fuente: elaboración propia.

Proposición 5. Sea f una función tipo Zeta tal que $a=0$ entonces f posee un punto de periodo 3 en el intervalo $(0, b)$.

Demostración: primeramente notamos que si $a=0$ se tiene que $f(0)=0$ y $f((0,b)) = (0, 1)$.

Dado que f es continua entonces existen puntos $x_1, x_2 \in (0, b)$ tales que $f(x_1)=x_F$ y $f(x_2)=c$, además debido a que f es creciente en el intervalo $(0, b)$ tendremos que $x_1 < x_2$.

Observe que $f^3(x_1)=x_F > x_1$ y $f^3(x_2)=0 < x_2$.

Definamos ahora la función h sobre el intervalo $(0, b)$

dada por $h(x)=f^3(x)-x$.

Debido a que la función f es continua en el intervalo $(0, b)$ tendremos que h es continua también en este intervalo.

Nótese que $h(x_1) > 0$ y $h(x_2) < 0$ entonces por el teorema del valor intermedio existe un punto $x_0 \in (x_1, x_2) \subset (0, b)$ tal que $h(x_0)=x_0$ o equivalentemente $f^3(x_0)=x_0$.

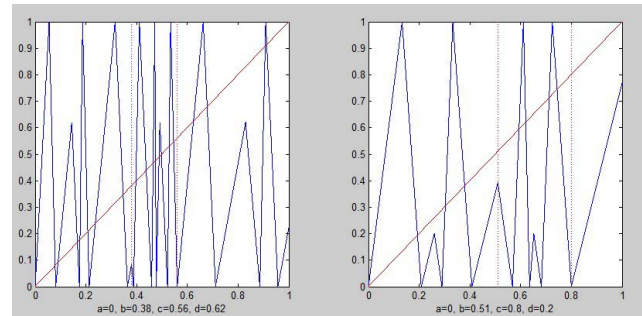
Verifiquemos finalmente que x_0 no es un punto fijo de f :

Puesto que $x_0 \in (x_1, x_2)$ y debido a que f es creciente en $(0, b)$ tendremos que

$$f(x_0) > f(x_1) = x_F > x_0.$$

En la figura 5 presentamos la gráfica de f^3 para dos funciones que cumplen la condición dada en la proposición 5. Igual que en la figura 3 las intersecciones de la gráfica de la función f^3 con la de la identidad representan además de los dos puntos fijos, los puntos de periodo 3 de ambas funciones.

Figura 5. Puntos de periodo tres dadas las condiciones de la proposición 5



Fuente: elaboración propia.

Corolario 2. Sea f una función tipo Zeta, si $d=1$ entonces f posee un punto de periodo 3 en el intervalo $(c, 1)$.

Demostración: ya que $d=1$ entonces $1-d=0$, luego la proposición 5 implica que f^* posee un punto de periodo 3 en $(0, 1-c)$ por tanto f posee un punto de periodo 3 en $(c, 1)$ debido a la proposición 2.

Antes de enunciar el siguiente resultado mostraremos

dos puntos en el dominio de la función tipo Zeta particularmente ubicados en el intervalo (b,c) que nos serán de mucha utilidad.

Por la continuidad de la función tipo Zeta tenemos que $f(b, x_F) = (x_F, 1)$ y $f(x_F, c) = (0, x_F)$ por lo que existen puntos $x_c \in (b, x_F)$ y $x_b \in (x_F, c)$ tales que $f(x_c) = c$ y $f(x_b) = b$, aún más, es sencillo encontrar el valor de estos dos puntos en términos de los parámetros de la función, estos son $x_c = c + bc - c^2$ y $x_b = c - bc + b^2$.

Entonces tenemos la relación $b < x_c < x_F < x_b < c$.

Una vez conocidos los puntos x_c y x_b y sus propiedades presentamos nuestro resultado más importante ya que nos brinda las condiciones necesarias y suficientes para identificar si una función tipo Zeta poseerá o no puntos de periodo 3.

Teorema 2. Dada f una función tipo Zeta entonces se tiene que

- i) Si $a \leq x_c$ o $d \geq x_b$ entonces f posee un punto de periodo 3.
- ii) Si $a > x_c$ y $d < x_b$ entonces f no posee puntos de periodo 3.

Demostración:

- i) Analicemos primero el caso en que $a \leq x_c$.
Recordando que $x_c < x_F$ y puesto que $f([0, b]) = [a, 1]$, luego existen dos puntos

$x_1, x_2 \in [0, b)$ tales que $f(x_1) = x_c$ y $f(x_2) = x_F$ donde $x_1 < x_2$ pues f es creciente en el intervalo $[0, b)$.

Así pues, tendremos que $f^3(x_1) = 0 < x_1$ y $f^3(x_2) = x_F > x_2$.

Al igual que en la demostración de la proposición 5, se define la función continua $h(x) = f^3(x) - x$ sobre el intervalo $[0, b)$ la cual cumple que $h(x_1) < 0$ y $h(x_2) > 0$, por lo que al igual que antes existe un punto $x_0 \in (x_1, x_2)$ tal que $f^3(x_0) = x_0$.

Aún más, puesto que $x_0 \in (x_1, x_2)$ y debido a que f es creciente en $(0, b)$ tendremos que $f(x_0) > f(x_1) = x_c > x_0$,

así que x_0 no es un punto fijo de f y por tanto es un punto de periodo 3 de f .

Continuemos ahora en el caso $d \geq x_b$.

Note que $d \geq x_b$ implica que $1 - d \leq 1 - x_b$ donde utilizando la función dual de f se tiene que $f^*(1 - x_b) = 1 - f(x_b) = 1 - b$.

Es decir f^* cumple las condiciones del primer caso que analizamos, luego f^* posee un punto de periodo 3, y por la proposición 2 tenemos que f tiene un punto de periodo 3.

ii) Dividiremos la demostración en 4 casos:

- Caso 1: $a \geq x_F$ y $d \leq x_F$
La demostración está dada en la proposición 4.

- Caso 2: $x_c < a < x_F$ y $d \leq x_F$
Primeramente notamos que se cumplen las desigualdades $f^3(x_c) > x_c$ y $f^3(x_b) < x_b$.
Además $f([0, b]) = [a, 1]$, por lo que existe un punto $x' \in [0, b]$ que cumple las relaciones $f(x') = x_F$ y $f^3(x') > x'$.

Ahora bien, observe que:

$$\begin{aligned} f([0, x']) &\subset (x_c, x_F] \\ \Rightarrow f^2([0, x']) &\subset f((x_c, x_F]) \subset [x_F, c) \\ \Rightarrow f^3([0, x']) &\subset f([x_F, c)) \subset (0, x_F] \end{aligned}$$

Además sabemos que f es una recta creciente en el intervalo $(0, x']$ y es una recta decreciente en los intervalos (x_c, x_F) y $[x_F, c)$ por lo cual f^3 es una recta creciente en el intervalo $[0, x']$, luego f no posee puntos de periodo 3 en $[0, x']$ pues $f^3(0) > 0$ y $f^3(x') > x'$.

Continuando, se tiene que:

$$\begin{aligned} f((x', x_c]) &\subset (x_F, 1) \\ \Rightarrow f^2((x', x_c]) &\subset [0, x_F] \\ \Rightarrow f^3((x', x_c]) &\subset (x_c, 1) \end{aligned}$$

Por lo cual f no posee puntos de periodo 3 en

$$(x', x_c].$$

Ahora, se observa que $f((x_c, x_F)) = (x_F, c)$ y consecuentemente existe un punto

$x'' \in (x_c, x_F)$ tal que $f(x'') = x_b$, aún más $f^3(x'') = 1$.

Para el intervalo (x_c, x'') tenemos que:

$$\begin{aligned} f((x_c, x'')) &= (x_b, c) \\ \Rightarrow f^2((x_c, x'')) &= (0, b) \\ \Rightarrow f^3((x_c, x'')) &\subset (x_c, 1] \end{aligned}$$

Recordando que f es una recta decreciente en los intervalos (x_c, x'') y (x_b, c) , además de una recta creciente en el intervalo $(0, b)$ entonces f no posee puntos de periodo 3 en (x_c, x'') pues tendremos que f^3 es una recta creciente en el intervalo (x_c, x'') donde $f^3(x_c) > x_c$ y $f^3(x'') > x''$.

Luego, para el intervalo (x'', x_F) se cumple:

$$\begin{aligned} f((x'', x_F)) &= (x_F, x_b) \\ \Rightarrow f^2((x'', x_F)) &= (b, x_F) \\ \Rightarrow f^3((x'', x_F)) &= (x_F, 1) \end{aligned}$$

Por lo que f no posee puntos de periodo 3 en (x'', x_F) . Prosiguiendo, f tampoco posee puntos de periodo 3 en el intervalo (x_F, x_b) pues:

$$\begin{aligned} f((x_F, x_b)) &= (b, x_F) \\ \Rightarrow f^2((x_F, x_b)) &= (x_F, 1) \\ \Rightarrow f^3((x_F, x_b)) &= (0, x_F) \end{aligned}$$

Siguiendo ahora con el intervalo (x_b, c) , evaluando en el intervalo se tiene que $f((x_b, c)) = (0, b)$ por lo cual $f^2((x_b, c)) = (a, 1)$ y por tanto existe un punto $x''' \in (x_b, c)$ tal que $f^2(x''') = c$.

Realizando las evaluaciones para el intervalo (x_b, x''') obtenemos:

$$\begin{aligned} f((x_b, x''')) &= (f(x'''), b) \\ \Rightarrow f^2((x_b, x''')) &= (c, 1) \\ \Rightarrow f^3((x_b, x''')) &\subset (0, x_F] \end{aligned}$$

Consecuentemente f no posee puntos de periodo

3 en (x_b, x''') .

Para (x''', c) se cumple:

$$\begin{aligned} f((x''', c)) &= (0, f(x''')) \subset (0, b) \\ \Rightarrow f^2((x''', c)) &\subset (x_c, c) \\ \Rightarrow f^3((x''', c)) &\subset (0, c) \end{aligned}$$

Cumpléndose pues que $f^3(x''') < x'''$, $f^3(c) < c$ y que f es una recta decreciente en los intervalos (x''', c) y (x_c, c) además de una recta creciente en el intervalo $(0, b)$ por lo que f^3 es una recta creciente en el intervalo (x''', c) ; luego f no posee puntos de periodo 3 en el intervalo (x''', c) .

Finalmente para el intervalo $(c, 1)$:

$$\begin{aligned} f((c, 1)) &\subset (0, x_F] \\ \Rightarrow f^2((c, 1)) &\subset (x_c, 1] \\ \Rightarrow f^3((c, 1)) &\subset (0, c) \end{aligned}$$

Por lo tanto f no posee puntos de periodo 3 en tal intervalo.

- Caso 3: $a \geq x_F$ y $x_F < d < x_b$

Comencemos notando que $1 - x_b < 1 - d < 1 - x_F$ y $1 - a \leq 1 - x_F$ donde se sabe que $1 - x_F$ es el punto fijo de f^* .

Además, se verifica que $f^*(1 - x_b) = 1 - f(x_b) = 1 - b$; con lo cual f^* está satisfaciendo las condiciones del caso anterior, de esta manera f^* no posee puntos de periodo 3 y por la proposición 2 tampoco f tiene puntos de periodo 3.

- Caso 4: $x_c < a < x_F$ y $x_F < d < x_b$

Iniciemos notando que se satisfacen las desigualdades $f^3(b) > b$ y $f^3(c) < c$.

Además $f^3(0) > 0$, esto pues:

$$\begin{aligned} f(0) &= a \in (x_c, x_F) \\ \Rightarrow f^2(0) &= f(a) \in (x_F, c) \\ \Rightarrow f^3(0) &= f^2(a) \in (0, x_F) \end{aligned}$$

De manera semejante se tiene que $f^3(1) < 1$, esto pues se cumple:

$$\begin{aligned} f(1) &= d \in (x_F, x_b) \\ \Rightarrow f^2(1) &= f(d) \in (b, x_F) \\ \Rightarrow f^3(1) &= f^2(d) \in (x_F, 1) \end{aligned}$$

Seguidamente $f(0, b) = (a, 1)$ por lo que existe $x' \in (0, b)$ con $f(x') = x_F$.

De manera análoga al caso 2 se puede mostrar que f no posee puntos de periodo 3 en el intervalo $(0, x']$ y para el intervalo (x', b) tampoco los hay pues $f((x', b)) \subset (x_F, 1)$ con lo cual $f^2((x', b)) \subset (0, x_b)$ y $f^3((x', b)) \subset (b, 1)$.

Evaluando el intervalo (b, x_c) obtenemos $f((b, x_c)) = (c, 1)$ y por tanto $f^2((b, x_c)) = (0, d)$, por lo cual se tiene la existencia de un punto $x'' \in (b, x_c)$ tal que $f^2(x'') = b$.

Así, tendremos que:

$$\begin{aligned} f((b, x'')) &= (f(x''), 1) \subset (c, 1) \\ \Rightarrow f^2((b, x'')) &= (b, d) \subset (b, x_b) \\ \Rightarrow f^3((b, x'')) &\subset (b, 1) \end{aligned}$$

Y debido a que f es una recta decreciente en los intervalos (b, x'') y (b, x_b) y una recta creciente en el intervalo $(c, 1)$ tendremos que f^3 es una recta creciente en el intervalo (b, x'') , lo cual, aunado con el hecho de que $f^3(b) > b$ y $f^3(x'') > x''$, indica que f no posee puntos de periodo 3 en el intervalo (b, x'') .

Para (x'', x_c) tendremos que $f((x'', x_c)) = (c, f(x'')) \subset (c, 1)$ de lo cual se sigue que $f^2((x'', x_c)) = (0, b)$ y $f^3((x'', c)) = (a, 1) \subset (x_F, 1)$ y con lo cual f no posee

puntos de periodo 3 en tal intervalo.

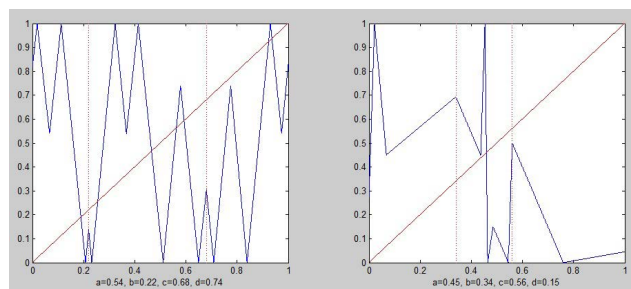
En el intervalo (x_c, x_F) no existen puntos de periodo 3, la demostración es equivalente a la mostrada en el caso 2. Hemos mostrado que f no posee puntos de periodo 3 en $(0, x_F)$ para las condiciones $x_c < a < x_F$ y $x_F < d < x_b$.

Continuando, es claro que, $1 - x_b < 1 - d < 1 - x_F$, $1 - x_F < 1 - a < 1 - x_c$, donde $1 - x_F$ es el punto fijo de f^* y se cumplen las igualdades $f^*(1 - x_b) = 1 - f(x_b) = 1 - b$ y $f^*(1 - x_c) = 1 - f(x_c) = 1 - c$.

Es decir f^* no posee puntos de periodo 3 para el intervalo $(0, 1 - x_F)$ por lo ya demostrado anteriormente en este caso para la función f , lo cual por la proposición 2 nos conduce a que f no tiene puntos de periodo 3 en el intervalo $(x_F, 1)$.

En la figura 6 podemos apreciar dos gráficas, la del lado izquierdo muestra que la gráfica de f^3 para una función que cumple las hipótesis de la parte i) del teorema 2 si posee puntos de periodo 3 pues hay intersecciones (contando el punto fijo) con la gráfica de la función identidad, en cambio la figura del lado derecho muestra que la gráfica de f^3 de una función que cumple las hipótesis de la parte ii) del teorema no presenta intersecciones con la gráfica de la función identidad (además del punto fijo) por lo que no posee puntos de periodo 3.

Figura 6. Representación de la presencia o ausencia de puntos de periodo tres según las condiciones del teorema 2



Fuente: elaboración propia.

RESULTADOS

Para los ejemplos que a continuación mostramos, se generó una aplicación computacional que permite la generación de modelos inéditos de funciones caóticas. Las funciones evaluadas están limitadas por la capacidad computacional,² referente a componentes irracionales.

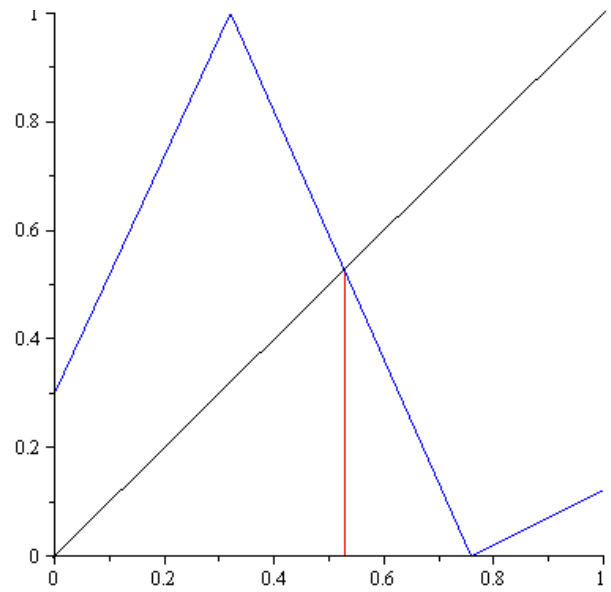
Funciones tipo Zeta

A continuación, basados en los resultados teóricos obtenidos presentamos algunos ejemplos de funciones tipo Zeta $-f_{a,b,c,d}-$ con valores particulares en los parámetros cuya dinámica es caótica en el sentido Li-Yorke, y de manera computacional pretendemos ilustrar la sensibilidad a condiciones iniciales (correspondiente a la definición de Devaney).

En la figura 7, tenemos en color azul, la gráfica de la función $f_{0.3,0.32,0.76,0.12}$ — las condiciones del teorema 2 se verifican— a su vez, la línea vertical en color rojo ilustra la evaluación del punto fijo $19/36$. Mientras que en la figura 8 evaluamos la función en el punto $19.00001/36$, pero la órbita es totalmente diferente a la del punto fijo: el sistema presenta sensibilidad a condiciones iniciales.

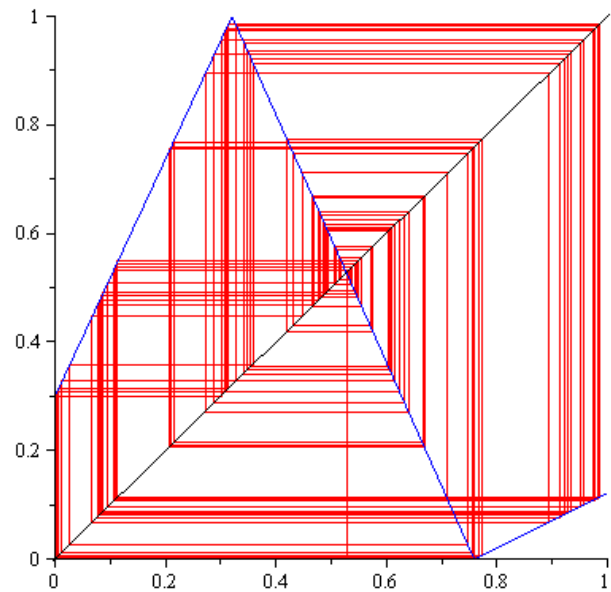
A su vez, en las figuras 9 y 10 identificamos un punto que en la segunda evaluación se obtiene un punto fijo —un punto preperiódico—, pero en la figura 11 se observa que una pequeña modificación en la condición inicial genera órbitas diferentes.

Figura 7. Primeros 40 elementos de la órbita del punto $\frac{19}{36}$



Fuente: elaboración propia.

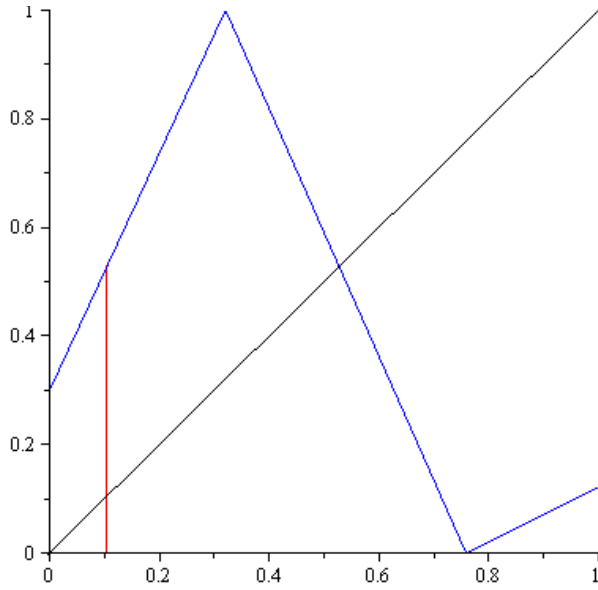
Figura 8. Primeros 100 elementos de la órbita del punto $\frac{19.00001}{36}$



Fuente: elaboración propia.

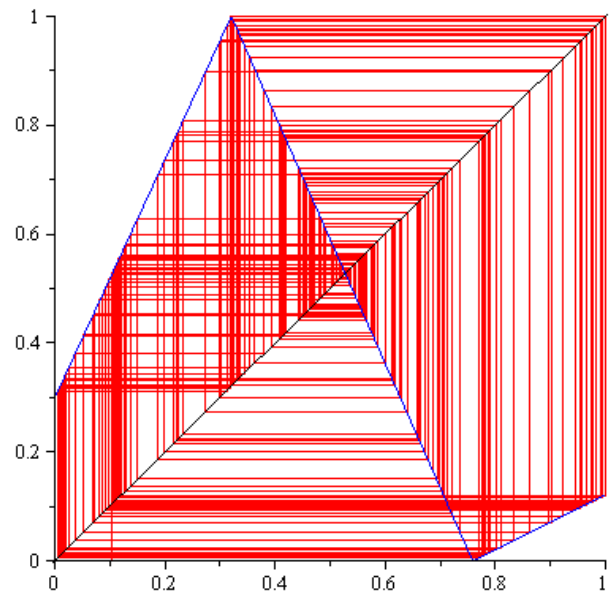
² Se utilizó una computadora portátil Toshiba con procesador Intel Core i7-2630QM a 2.0 GHz y para llevar a cabo la programación y los experimentos se utilizó MATLAB R2014a y Maple 13.

Figura 9. Evaluación del punto $\frac{164}{1575}$



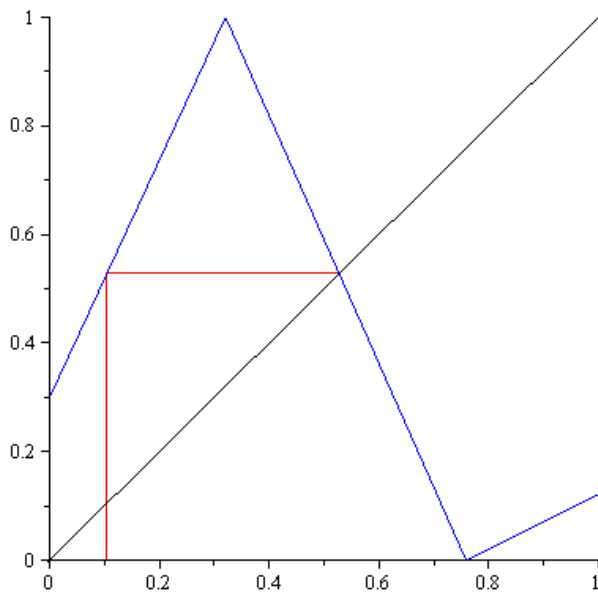
Fuente: elaboración propia.

Figura 11. Primeros 200 elementos de la órbita del punto $\frac{164}{1575.0001}$



Fuente: elaboración propia.

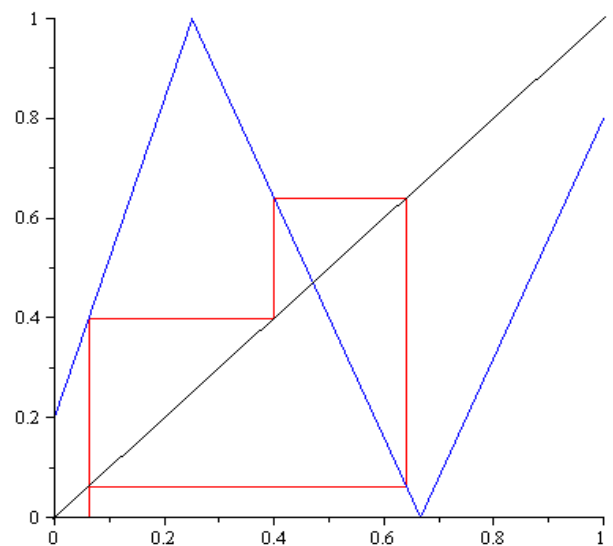
Figura 10. Primeros 200 elementos de la órbita del punto $\frac{164}{1575}$



Fuente: elaboración propia.

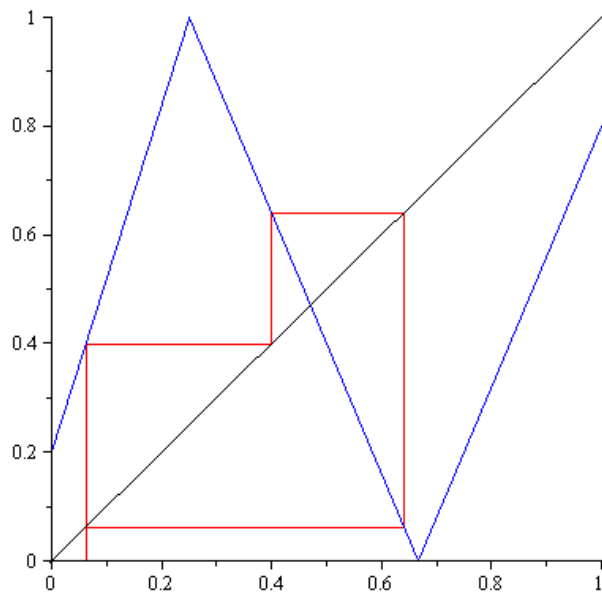
En la figura 12, tenemos la gráfica de la función $f_{(1/5),(1/4),(2/3),(4/5)}$ —las condiciones del teorema 2 se verifican— y se ilustra la evaluación de un punto de periodo 3; observemos que en la figuras 13 y 14 se ha modificado la condición inicial y por tanto la órbita para los primeros puntos parece ser la misma que la figura 12; sin embargo cuando se muestran más puntos de la órbita, se aprecia la sensibilidad a condiciones iniciales.

Figura 12. Primeros 300 elementos de la órbita del punto $\frac{136}{2179}$



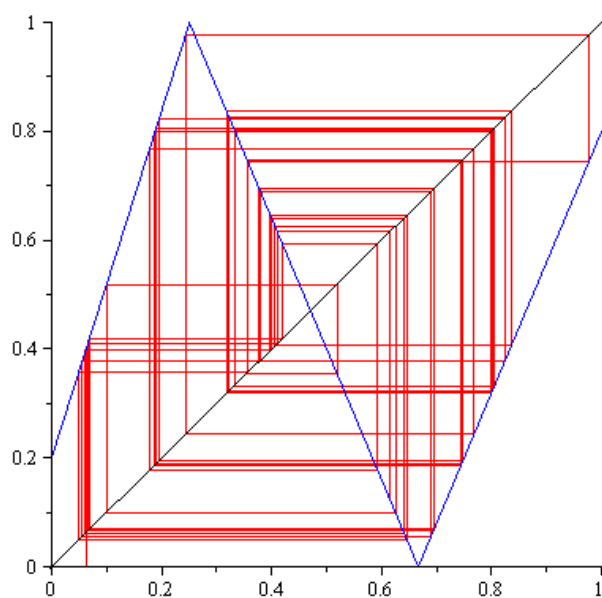
Fuente: elaboración propia.

Figura 13. Primeros 6 elementos de la órbita de $\frac{136}{2179.000001}$



Fuente: elaboración propia.

Figura 14. Primeros 300 elementos de la órbita del punto $\frac{136}{2179.000001}$



Fuente: elaboración propia.

Aplicación a generación de números pseudoaleatorios

Consideremos una función tipo Zeta con parámetros

$$a = \frac{1}{2}, b = \frac{2}{5}; c = \frac{5}{8} \text{ y } d = \frac{2}{3}$$

Los siguientes son puntos de periodo tres:

$$\frac{3287}{3524}, \frac{305}{881}, \frac{482}{881}, \frac{22975}{24871}, \frac{10375}{24871}, \frac{13210}{24871}$$

Si consideramos como punto inicial al número $\frac{1}{451}$, se obtiene la secuencia que aparece en la tabla 1.

Tabla 1. Secuencia generada por el punto inicial $1/451$

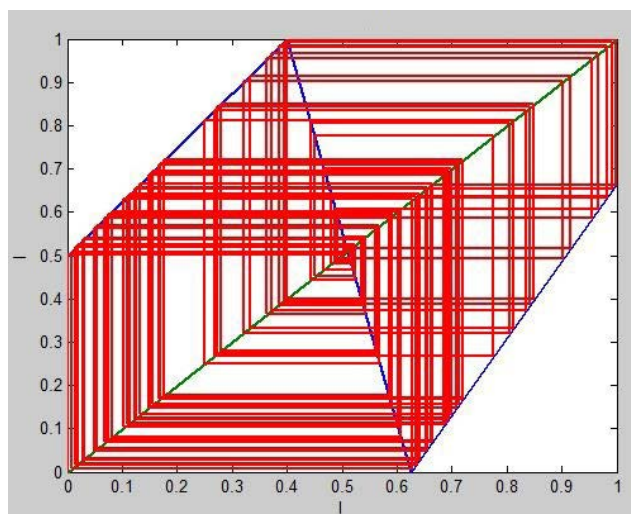
0.00221	0.50277	0.54323	0.36338	0.95423	0.58531	0.17639
0.72049	0.16976	0.71220	0.15503	0.69379	0.12230	0.65288
0.04956	0.56195	0.28017	0.85022	0.40039	0.99822	0.66351
0.06847	0.58559	0.17513	0.71892	0.16697	0.70871	0.14883
0.68603	0.10851	0.63563	0.01891	0.52364	0.45047	0.77566
0.26785	0.83481	0.37300	0.96625	0.60667	0.08143	0.60179
0.10313	0.62891	0.00696	0.50871	0.51684	0.48069	0.64134
0.02906	0.53633	0.39408	0.99260	0.65352	0.05070	0.56338
0.27385	0.84231	0.38634	0.98293	0.63632	0.02013	0.52516
0.44369	0.80579	0.32141	0.90176	0.49202	0.59097	0.15120
0.68900	0.11379	0.64224	0.03065	0.53831	0.38525	0.98157
0.63390	0.01582	0.51978	0.46762	0.69944	0.13235	0.66543
0.07189	0.58986	0.15616	0.69520	0.12480	0.65600	0.05512
0.56890	0.24931	0.81164	0.33182	0.91477	0.51515	0.48818
0.60807	0.07522					

Fuente: elaboración propia.

Cabe señalar que los números presentados aquí han sido truncados, no redondeados, para facilitar la lectura.

La gráfica de la secuencia generada se presenta en la figura 15.

Figura 15. Secuencia asociada al punto inicial $1/451$



Fuente: elaboración propia.

En la tabla 2 se presentan los resultados de las pruebas de aleatoriedad (Coss Bu, 2003) a la secuencia.

Tabla 2. Resultados de las pruebas de aleatoriedad para la secuencia 1

Pruebas de aleatoriedad	
Promedios	SI
Frecuencias	NO
Kolmogorov-Smirnov	SI
Varianza	NO
Distancias	SI
Series	NO
Póker	SI
Corridas	NO

Fuente: elaboración propia.

CONCLUSIONES

Hemos construido una familia de sistemas caóticos en el sentido Li-Yorke y al mismo tiempo estamos sugiriendo un “proceso para generar caos” el cual lo podemos sintetizar en dos instrucciones:

- 1) Defina una función continua de la forma $f:I \rightarrow I$ con I un intervalo cerrado y acotado.
- 2) Construya la función $h=f(f(f(x))):I \rightarrow I$ y resuelva la ecuación $h(x)=x$ sujeta a $f(x) \neq x$. Si existen puntos que verifican la ecuación y la restricción entonces f tiene puntos de periodo tres y por lo tanto se tiene un sistema dinámico caótico.

La teoría que fundamenta la validez del proceso son los teoremas de Sharkovskii, del punto fijo y el trabajo de Li y Yorke. Es muy frecuente que se vuelva difícil demostrar directamente con la definición que un sistema dinámico es caótico; sin embargo, el encontrar puntos de periodo tres, tendríamos la respuesta si lo que buscamos es caos.

En este trabajo se mostró analíticamente las condiciones que deben verificar los parámetros para las funciones tipo Zeta que garantizan la existencia de caos en el sentido de Li-Yorke. En particular mostramos una familia de Z' s con puntos de periodo tres - y por tanto caóticas en el sentido mencionado-.

Si existe interés en una aplicación de los modelos construidos, se sugiere como primera opción la construcción de listas de números “pseudoaleatorios”. A continuación se enumera el procedimiento básico a seguir:

- 1) Iniciar con un número arbitrario en el intervalo unitario.
- 2) Elegir una de las funciones tipo Zeta que satisfaga las condiciones de periodo tres (el teorema de Li-Yorke garantiza que el sistema inducido es caótico).
- 3) Generar la órbita de tamaño conveniente; por ejemplo, L (L sería la cantidad de números deseados para la lista).
- 4) Con un procesador comparar si hay una repetición en la lista de tamaño L , en caso de existir repetición se desecha la lista (en este caso se tiene un punto de periodo L o preperiódico); en caso contrario se continua con el paso 5.
- 5) Aplicar las pruebas estadísticas para validar “la aleatoriedad” de la lista.

Este trabajo fue una propuesta adicional a las existentes en la literatura relativa a los sistemas dinámicos caóticos unidimensionales, así como para identificar la generación de números pseudoaleatorios como una primera aplicación.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo de la Universidad Autónoma de Aguascalientes con el proyecto **PIM18-4**.

REFERENCIAS

- Aulbach, B., y Kieninger, B. (2000). On Three Definitions of Chaos. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 1(1), 23-37.
- Coss Bu, R. (2003). *Simulación Un enfoque práctico*. México: Limusa
- De Melo, W., y Van Strien, S. (1993). *One dimensional dynamics*. Alemania: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Devaney, R. L. (1989). *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems (Segunda ed.)*. United States: Adison-Wesley Publishing Company Inc.
- Hirsch, M. W., Smale, S., y Devaney, R. L. (2004). *Differential Equations, Dynamical Systems & An Introduction to Chaos (Segunda ed.)*. USA: Elsevier
- King, J., y Mendez, H. (2015). *Sistemas dinámicos discre-*

- tos. México: Las Prensas de Ciencias.
- Li, T., y Yorke, J. (Diciembre de 1975). Period Three Implies Chaos. *The American Mathematical Monthly*, 82(10), 985-992.
- Ramírez de La Cruz, M. A. (2004). Generación de un sistema caótico mediante la aplicación del teorema de Sarkowskii y del teorema del punto fijo. (Tesis de licenciatura). Universidad Autónoma de Aguascalientes, Aguascalientes.
- Tarasova, V. V., y Tarasov, V. E. (2017). Logistic map with memory from economic model. *Chaos, Solitons and Fractals*, 95, 84-91.

NOTAS DE AUTOR

- ^a Licenciado en Matemáticas Aplicadas por la Universidad Autónoma de Aguascalientes (UAA), Maestro y Doctor en Ciencias con orientación en Matemáticas Aplicadas por el Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT); Profesor de tiempo completo en el Departamento de Matemáticas y Física en la UAA. Candidato en el Sistema Nacional de Investigadores. Sus áreas de interés son: Optimización, Modelación Matemática, Sistemas Dinámicos, Teoría de Juegos y Economía Matemática.
- ^b Licenciado en Matemáticas Aplicadas y Maestro en Ciencias con orientación en Matemáticas Aplicadas por la Universidad Autónoma de Aguascalientes (UAA); Profesor investigador asociado y Técnico académico asistente en el Departamento de Matemáticas y Física en la UAA. Sus líneas de investigación son: Topología Algebraica, Métodos Numéricos, Ecuaciones Diferenciales, Investigación de Operaciones y Simulación.