

Propuesta de un Modelo de Competencia Matemática como articulador entre el currículo, la formación de profesores y el aprendizaje de los estudiantes

Horacio Solar, Bernardo García, Francisco Rojas y Arnulfo Coronado

Resumen: Este ensayo presenta resultados de investigación en torno a dos aspectos centrales de las competencias matemáticas: un proceso de conceptualización de las competencias y la propuesta de un Modelo de Competencia Matemática (MCM) para articular la organización curricular, el proceso de enseñanza y la actividad matemática de aprendizaje del estudiante. En este proceso se plantean problemas de investigación que contribuirán a consolidar las competencias matemáticas como línea de investigación y que evidencian la convergencia de la actividad investigativa del grupo Competencias Matemáticas (COMMAT) de Chile y del grupo Desarrollo Institucional Integrado (DII) de Colombia. El Modelo de Competencia Matemática (MCM) y el Modelo Teórico a Priori (MTP), derivado de este, constituyen el núcleo de esta propuesta, porque contribuyen a: *a)* transformar la organización curricular de la matemática escolar a partir de asumir como eje curricular los procesos matemáticos; *b)* resignificar la actividad matemática de aprendizaje del estudiante, articulándola con los aspectos cognitivos, afectivos y de tendencia de acción de las competencias; *c)* reorientar las prácticas de enseñanza del profesor, al explicar el proceso de cómo progresan y se movilizan las competencias matemáticas del estudiante.

Palabras clave: Modelo de Competencia Matemática, procesos matemáticos, organizaciones matemáticas, niveles de complejidad, actividad matemática de aprendizaje.

Abstract: This essay aims to present research results on two key aspects of mathematical competencies: a conceptualization process of competencies and a proposed Mathematical Competence Model (MCM) to articulate the curriculum

Fecha de recepción: 22 de mayo de 2013; fecha de aceptación: 20 de junio de 2014.

organization, teaching and the mathematics students learning activity. In this process research problems are presented that contribute to strengthen mathematical competencies as a research line and show the convergence of the research activity of the Mathematical Competencies in Chile (COMMAT) group and of the Integrated Institutional Development of Colombia (DIJ). The Mathematical Competence Model (MCM) and Theoretical Model to the Priori (MTP), a derivative thereof, constitute the core of this proposal because they contribute to: *a)* transform the curricular organization of school mathematics by taking the mathematical processes as the curricular axis; *b)* reorient the students mathematics learning activity articulating the cognitive, affective and action tendency aspects of competencies; *c)* reorient teacher's practices by explaining the process of how mathematical competencies are mobilized and progress.

Keywords: Mathematical Competence Model, mathematical process, Mathematical organizations, level of complexity, learning mathematics activity.

INTRODUCCIÓN

Cada día son más los países que están orientando el currículo escolar basados en un enfoque por competencias. De hecho, mediciones estandarizadas internacionales como PISA (OCDE, 2013) hacen que muchos desarrolladores curriculares las consideren para el establecimiento de las metas de aprendizaje matemático en la escuela. Sin embargo, su aplicación real en el aula y en la formación del profesorado aún no es clara para los maestros que deben implementarla. Por ello, este ensayo propone un Modelo de Competencia Matemática (MCM) factible de utilizar, no solo en el desarrollo curricular, sino también en la formación de profesores y en el aprendizaje de los estudiantes. El MCM se presenta como una estructura o estrategia que articula los contenidos curriculares entendidos como organizaciones matemáticas, los procesos matemáticos involucrados en el desarrollo de estos contenidos y las expectativas de aprendizaje, utilizando los niveles de complejidad para definirlos (Solar, 2009; Solar, Azcárate y Deulofeu, 2012).

Para dar cuenta de cómo se puede utilizar el MCM, mostramos tres experiencias de investigación que permiten interpretar y conocer el desarrollo de las competencias matemáticas en el nivel curricular, de formación de profesores y de aprendizaje de los estudiantes. En el nivel curricular, la investigación desarrollada por Espinoza, Barbé, Mitrovich, Solar, Rojas y Matus (2008) significó una propuesta para organizar el currículo de matemática en términos de competen-

cias matemáticas, utilizando el Modelo de Competencia Matemática (MCM) para articular contenidos con competencias. Por otra parte, el trabajo desarrollado en Solar, Espinoza, Rojas, Ortiz, González y Ulloa (2011) permitió caracterizar una estrategia de trabajo de formación permanente con profesores de educación primaria basada en un modelo didáctico suficientemente robusto para producir cambios iniciales en las concepciones de los profesores respecto a las competencias matemáticas y su desarrollo en los estudiantes. Finalmente, los trabajos de García, Coronado, Montealegre, Giraldo, Tovar, Morales y Cortés (2013), que se han enfocado en estudiar la relación entre la actividad matemática de aprendizaje del estudiante y las competencias matemáticas, han adaptado el MCM para analizar el desarrollo de competencias matemáticas en los estudiantes.

Estas investigaciones han sido desarrolladas por dos equipos de trabajo: en Chile, el grupo de investigación Competencias Matemáticas (COMMAT), integrado por académicos de la Pontificia Universidad Católica de Chile y la Universidad Católica de la Santísima Concepción y, en Colombia, el grupo Desarrollo Institucional Integrado (DII) de la Universidad de la Amazonia, que utilizan el MCM como base común para construir una idea de competencia matemática que permita desarrollar las investigaciones colaborativamente. Como grupos de investigación, entendemos que las competencias matemáticas se constituyen en procesos matemáticos, los cuales se desarrollan a largo plazo en el currículo escolar y son transversales a los contenidos matemáticos. Para dar cuenta de nuestra postura teórica al respecto y antes de pasar a exponer las investigaciones comentadas, mostramos una breve evolución del concepto de competencia matemática, así como algunas cuestiones de investigación que actualmente están siendo abordadas por la comunidad internacional.

En su conjunto, lo anteriormente referido nos permite argumentar sobre problemas de investigación propios del enfoque por competencias para el aprendizaje matemático escolar. En particular, asumimos el desarrollo de las competencias matemáticas desde una visión sociocultural; por ello, los procesos matemáticos no solo deben estar articulados con los contenidos matemáticos y los niveles de complejidad de las tareas matemáticas, sino que, especialmente, han de instalarse en contextos socioculturales escolares y extraescolares que estimulen el uso social de las matemáticas.

DESARROLLO DEL CONCEPTO DE COMPETENCIA

Antes de mostrar cómo se define el Modelo de Competencia Matemática (MCM) y cómo pueden dar cuenta los trabajos señalados de su aplicabilidad, es necesario abordar la noción de competencia matemática, cómo ha evolucionado hasta la fecha y cuáles son las discusiones actuales al respecto en las que enmarcamos este trabajo.

EVOLUCIÓN CONCEPTUAL

Los significados de *competencia* son inscritos por García, Acevedo y Jurado (2003) en dos visiones políticas distintas sobre la educación. Por una parte, la competencia se refiere a la eficacia y las demandas del mercado, en donde cobra relevancia el *saber hacer* articulado con las tendencias de la economía mundial, la globalización y los modelos neoliberales. Por otra parte, la competencia se asocia a la formación integral del sujeto, en la que el saber-hacer se instala en contextos socioculturales concretos y locales y en el sentido ético humanístico de las decisiones sobre los usos e impactos del conocimiento en el mejoramiento de las condiciones de vida de las personas y su comunidad. Como investigadores, nos adherimos a esta visión sociocultural de la competencia, ya que es la que presenta el sentido formativo que se le demanda a la escuela actual.

En un análisis de concepciones sobre competencia en el ámbito educativo internacional, Rico y Lupiáñez (2008) las relacionan con tres ideas centrales: componentes cognitivos, finalidades asignadas y contextos. El desarrollo de estas ideas ha llevado a que los componentes cognitivos converjan en contenidos, conocimientos, valores, actitudes, capacidades (analizar, razonar, comunicar...), destrezas, comprensión, aptitudes y responsabilidades. Las finalidades se entienden como acciones para las cuales se han desarrollado tales componentes; se expresan como vivir, trabajar, desarrollar capacidades, alcanzar un objetivo, aplicar conocimientos, enfrentar demandas complejas y resolver problemas. Estas finalidades ocurren en contextos sociales, educativos, académicos y profesionales que deben estimular el desarrollo de competencias del estudiante.

La competencia matemática, según Fandiño (2006), va más allá de un saber hacer en contexto; implica también un *deseo hacer*, lo que involucra aspectos afectivos como la *volición* y la *actitud*, se reconoce cuando una persona ve,

interpreta y se comporta en el mundo con un sentido matemático. Apoyados en D'Amore, Godino y Fandiño (2008), asumimos la competencia matemática como un concepto complejo y dinámico:

- Su *complejidad* asume dos componentes: *a) uso* (exógeno, externo, consciente, intencional y contextualizado), es decir, la relación entre competencia matemática y utilidad social de las matemáticas; y *b) dominio* (endógeno), es decir, los contenidos, conceptos y objetos matemáticos involucrados.
- Su *naturaleza dinámica* involucra, además de lo cognitivo, aspectos de naturaleza metacognitiva, volitiva y afectiva: implica voluntad, deseo de saber y pragmática de uso en contextos socioculturales específicos.

El carácter pragmático de la competencia permite asumir un aprendizaje situado que privilegia la acción para dar sentido a los conceptos. El sujeto que aprende matemáticas moviliza su competencia en el uso social. En esta perspectiva, conocimiento y competencia se construyen de manera simultánea, articulada y complementaria en una relación de influencia recíproca.

Las *competencias matemáticas* fueron concebidas como la disposición para pensar matemáticamente; el placer y la seguridad para el desarrollo de actividades intelectuales que implican el razonamiento matemático; la capacidad de argumentar y comunicar el pensamiento matemático en forma escrita y oral; la capacidad para comprender y solucionar problemas matemáticos. Ejemplo de ello es el proyecto MAT₇₄₇ propuesto por Abrantes (2001) al Ministerio de Educación de Portugal. Esta propuesta curricular introdujo la competencia matemática, considerando de manera articulada los aspectos cognitivos, procedimentales y actitudinales del sujeto que aprende matemáticas. En MAT₇₄₇, la matemática se considera parte del patrimonio cultural de la humanidad, accesible a todos. En este sentido, cada niño y adolescente debía tener la oportunidad de *a)* conocer las ideas y métodos fundamentales de las matemáticas, así como valorarlas, y *b)* utilizar las matemáticas para resolver problemas contextualizados, razonar y comunicar sus procesos y resultados.

Además, existen dos propuestas internacionales que, a más de definir el concepto de competencia, han listado cuáles son las que se consideran deseables desarrollar en los estudiantes. Por una parte, el Proyecto KOM definió ocho competencias matemáticas en el currículo danés de matemática y, por otra, el Proyecto OCDE/PISA, centrado en pruebas estandarizadas a estudiantes, ha defi-

Figura 1. Competencias matemáticas: propuestas proyecto KOM y grupo OCDE/PISA

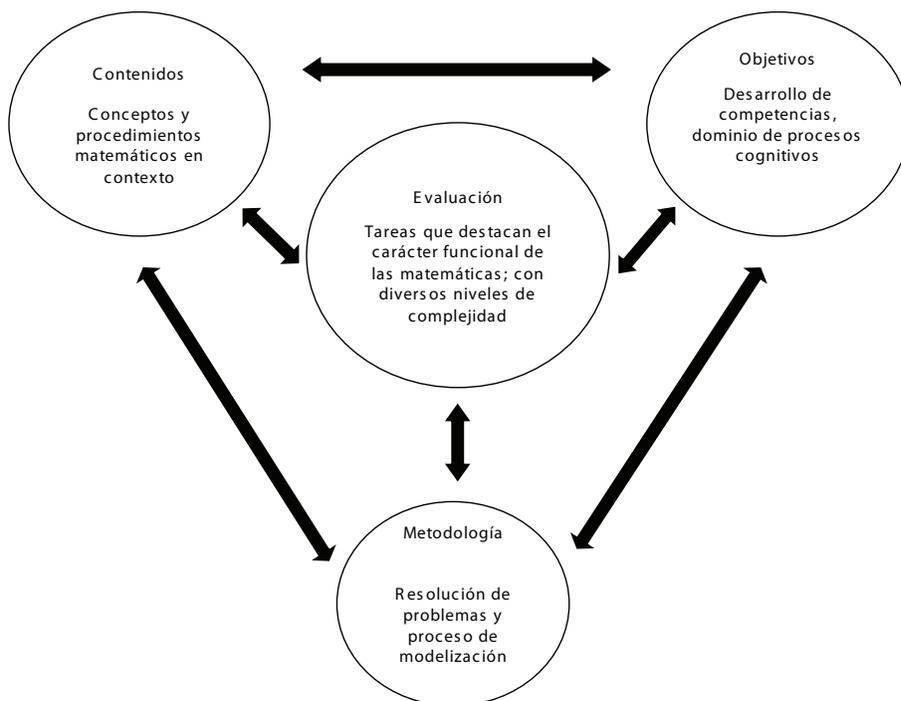
Proyecto KOM	Proyecto PISA
<p>La competencia matemática se asume como la habilidad de entender, juzgar, hacer y utilizar las matemáticas en una variedad de contextos intra y extramatemáticos en los que las matemáticas desempeñan o podrían desempeñar un papel (Niss y Højgaard, 2011).</p>	<p>La alfabetización matemática es la capacidad de un individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en una variedad de contextos. Incluye razonar matemáticamente y utilizar conceptos, procedimientos, hechos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a los individuos a reconocer el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo y a realizar los juicios bien fundados y las decisiones que necesitan los ciudadanos reflexivos, constructivos y comprometidos.</p>
<p>Competencias relacionadas con la habilidad de preguntar y responder preguntas en y con las matemáticas</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Pensar matemáticamente 2. Formular y resolver problemas matemáticos 3. Modelar matemáticamente (analizar, decodificar, construir modelos) 4. Razonar matemáticamente. 	<p>Competencias matemáticas consideradas:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Razonar y argumentar 2. Matematizar 3. Elaborar estrategias para resolver problemas 4. Representar 5. Comunicar 6. Usar lenguaje formal, técnico, simbólico y las operaciones 7. Usar herramientas matemáticas (OCDE, 2013)
<p>Competencias referidas a la habilidad para relacionarse y manejar las herramientas y el lenguaje matemático.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Representar entidades matemáticas (objetos, situaciones) 2. Manejar símbolos y formalismos matemáticos. 3. Hablar en, con y acerca de las matemáticas. 4. Hacer uso de ayudas y herramientas (incluye tecnología informática) (Niss, 2011). 	

nido siete competencias clave en su versión más reciente. La figura 1 sintetiza sus aportes.

La concepción de competencia matemática en PISA 2012 (asumida como *alfabetización matemática*) presenta un replanteamiento teórico de mayor precisión respecto a lo planteado en 2003 y 2006. En particular, en la última evaluación, la noción de competencia tiene una mayor riqueza conceptual, se utilizan más descriptores para caracterizar la alfabetización matemática y se expresa claramente la finalidad formativa de la educación matemática (Caraballo, Rico y Lupiáñez, 2013). En PISA existe un claro interés por los aspectos curriculares de la competencia matemática debido a su relación estrecha con el dominio matemático y el aspecto cognitivo de la competencia, esto se aprecia en su marco curricular (figura 2) (Rico y Lupiáñez, 2008).

En nuestras investigaciones (Solar *et al.*, 2011) se asumen estas orientaciones en el aspecto cognitivo de la competencia; no obstante, tomamos distancia

Figura 2. Marco curricular del estudio PISA (Rico y Lupiáñez, 2008, p. 240)



de las pruebas estandarizadas, pues nuestro propósito no es clasificar desempeños del estudiante. Nuestra opción teórica se instala en el trabajo de interacción en la clase como comunidad de aprendizaje y en la calidad del discurso del estudiante como participante de dicha comunidad a través de su actividad matemática (Bishop, 2005; Sfard, 2008).

Estas y otras propuestas (Rico y Lupiañez, 2008; NCTM, 2003; Goñi, 2009) comparten la concepción de competencias matemáticas reseñadas y asumen, en definitiva, los siguientes aspectos:

- a) Uso funcional, reflexivo, comprensivo y situado del conocimiento matemático con el apoyo de mediaciones didácticas tecnológicas.
- b) Saber hacer en la práctica y capacidad para comunicar y argumentar matemáticas.

RETOS Y PROBLEMAS DE INVESTIGACIÓN ACTUALES

Considerando los elementos centrales de la noción de competencia matemática recientemente descritos, ¿qué implica asumir la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para el desarrollo de competencias en los estudiantes? En una primera aproximación, sostenemos que implica asumir la complejidad de la competencia matemática en el marco de tres saberes: *saber ser*, *saber conocer* y *saber hacer* (García *et al.*, 2012, pp. 56-57). Esto es:

- Generar un clima de interacción y reconocimiento cultural en el aula para que el *saber ser* estimule la actividad matemática de aprendizaje del estudiante, es decir, generar deseo y voluntad de saber, motivación a la acción, al trabajo cooperativo y la autoformación. El *saber ser* ha de evidenciarse como desarrollo de actitud científica en el estudiante y una inclinación cultural favorable al desarrollo de competencias matemáticas. Este es un proceso de construcción individual y social: "Al centro de dicha construcción está el ser humano y no el saber en sí" (Fandiño, 2006, p. 55), implica también un "desear conocer", "desear hacer", una manifestación afectiva (Vanegas y Escobar, 2007, pp. 74-75). Como lo plantean D'Amore, Godino y Fandiño (2008): "¿Qué sería una competencia sin el deseo, la voluntad y sin el gusto de hacer uso de ella?" (p. 21).
- Esta inclinación cultural del estudiante posibilita que su *saber conocer*

se exprese como capacidad para desarrollar procesos matemáticos como: observar, describir, graficar, representar, pensar, razonar, comunicar, argumentar, proponer, demostrar, analizar y resolver problemas “usando los conocimientos” dentro y fuera de los contextos escolares. Es en este proceso “de enfrentamiento a múltiples tareas” como los seres humanos desarrollan su pensamiento matemático (Cantoral y Farfán, 2005, p. 19).

- El desarrollo de estas capacidades y procesos habilita al estudiante para un *saber hacer*, es decir, para un hacer ilustrado que implique actuación, desempeño, uso transversal de los conocimientos, capacidad para formular y resolver problemas, aplicación de su saber matemático no solo en contextos escolarizados.

Estos tres saberes están sustentados en las dimensiones por desarrollar de las competencias matemáticas: cognitiva (conocimiento de la disciplina), afectiva (disposición, voluntad y deseo de actuar) y la tendencia de acción (persistencia, continuidad, dedicación) (D'Amore *et al.*, 2008). Estas dimensiones instalan la competencia matemática en el concepto de formación, por tanto, el concepto trasciende a la instrucción. Es una visión integral y holística de las matemáticas, su didáctica, el estudiante y el profesor como sujetos centrales en el proceso de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Sus papeles se amplían y complejizan más, trascienden el aula de matemáticas: el profesor debe acompañar al estudiante para que su actividad matemática de aprendizaje movilice sus competencias y para que sea competente con las matemáticas, no solo como estudiante, sino especialmente, como ciudadano en un contexto sociocultural específico.

Asumir estas dimensiones de la competencia matemática, por una parte, y asumir las implicaciones que tiene para el desarrollo de estas en los estudiantes, por otra, nos introduce en otros problemas de investigación, para los cuales esperamos que el Modelo de Competencia Matemática (MCM) sirva de articulador y marco de comprensión. Desde la dimensión cognitiva hay un replanteamiento curricular de fondo: la función de los contenidos. Se ha de superar la visión tradicional y hegemónica de los contenidos en el aprendizaje para instalar en el centro de la acción curricular y didáctica los procesos matemáticos. Estos son un componente esencial de las competencias, están en su base y con ellos el estudiante despliega sus capacidades para avanzar, de manera progresiva, hacia el desarrollo de una competencia matemática como expectativa de aprendizaje a mediano y largo plazo (Rico y Lupiáñez, 2008). Desde la dimensión afectiva,

se vuelven relevantes los aspectos actitudinales del estudiante y el uso social que este hace de la competencia matemática: es indispensable consolidar una actitud cultural del estudiante favorable al aprendizaje de las matemáticas. Ello implica abordar preguntas tales como ¿Qué hacer en la clase para que aprender matemáticas sea socialmente útil a nuestros estudiantes? ¿Cómo transformar las tareas matemáticas en propuestas significativas de trabajo en la cotidianidad del estudiante? Además, es importante comprender “cómo los significados de las matemáticas escolares y las competencias que ellas pretenden promover se constituyen en un campo de práctica social” (Valero y Skovmose, 2012, p. XII) que articule las tareas matemáticas y la actividad matemática de aprendizaje con problemas específicos de contextos escolares y extraescolares, y cómo situar en el centro de la clase de matemáticas “la necesidad de compartir y desarrollar el significado matemático” (Bishop, 2005, p. 23).

En las experiencias investigativas que mostraremos más adelante sobre el desarrollo de competencias matemáticas, hemos visto que estos y otros aspectos tienen una incidencia decisiva en el proceso de aprendizaje matemático, por ello, los asumimos como problemas específicos de investigación en la línea de trabajo que estamos construyendo.

MODELO DE COMPETENCIA MATEMÁTICA (MCM)

La noción que asumimos de competencia matemática, expuesta anteriormente, nos ha permitido construir un modelo teórico-práctico cuyo propósito sea favorecer la comprensión del desarrollo de competencias matemáticas en las dimensiones siguientes: estudio del currículo, la formación de profesores y el aprendizaje de los estudiantes (Espinoza *et al.*, 2008; Solar, 2009; Solar, Azcárate y Deulofeu, 2012). A partir de una revisión exhaustiva de la literatura especializada respecto al desarrollo de competencias matemáticas, hemos podido desprender dos ideas claves: *a)* no hay consenso explícito en la noción de competencia matemática y *b)* no se observa un modelo que explique los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas basado en un enfoque por competencias. Estos hechos generaron la formación del grupo Competencias Matemáticas (COMMAT), cuyo foco de estudio inicial fue elaborar un modelo didáctico para el desarrollo de las competencias. Uno de los criterios iniciales en la construcción de este modelo fue considerar el aspecto relevante y diferenciador de las competencias: organizar la matemática escolar no solo por contenidos tales como álgebra, geometría

o aritmética, sino también destacar los *procesos matemáticos* involucrados, tales como la modelización, resolución de problemas, argumentación, razonamiento y comunicación. Dichos procesos tienen dos características que los diferencian de los contenidos matemáticos (Solar, 2009):

- Son transversales a los objetos matemáticos: procesos tales como la modelización y la argumentación matemática se desarrollan en diferentes áreas de la matemática, tales como geometría, álgebra, estadística, etcétera.
- Se desarrollan a largo plazo en el currículo escolar de manera cíclica en cada nivel educativo.

De esta manera, se caracterizaron las competencias matemáticas a través de los procesos matemáticos, ya que, si bien procesos tales como demostrar, argumentar o representar han sido habituales en los currículos tradicionales de matemáticas, estos no han tenido un papel tan visible en comparación con los contenidos. Pese a que actualmente existen propuestas curriculares que destacan los procesos matemáticos (MINEDUC, 2012; Ministry of Education, 2005; NCTM, 2003), hay una carencia de proyectos curriculares que describan qué tipo de relaciones existen entre los contenidos y dichos procesos, y planteen, por ejemplo, cuáles se desarrollan a partir de un contenido matemático específico.

Por otra parte, y de manera transversal, la perspectiva funcional de las matemáticas se consideró como un criterio basal para la elaboración de este modelo didáctico. Esta perspectiva se sustenta en la alfabetización matemática (OCDE, 2013), ya que esta busca promover el desarrollo de competencias en el aula de matemáticas.

A partir de estos criterios, se generó el Modelo de Competencia Matemática (MCM), que contempla tres grandes dimensiones: competencia matemática caracterizada a través de la noción de procesos, contenidos matemáticos y niveles de complejidad. A continuación se describe cómo se entiende cada una de estas dimensiones y cómo se articulan.

En la primera dimensión asociada a la competencia matemática, se caracterizan los procesos matemáticos tales como la modelización, resolución de problemas, representación y argumentación. Estos procesos permiten organizar y articular el currículo de Matemáticas mediante cuatro aspectos clave: *integración, relevancia, transversalidad y afinidad*.

1. *Integración de procesos*: las competencias matemáticas integran en ella una serie de *procesos matemáticos específicos*. Por ejemplo, Maaß (2006) propone que la modelización puede ser especificada mediante etapas tales como simplificar el problema a un modelo real, matematizar, trabajar el modelo matemático, interpretar el modelo matemático y validar la solución. Esta secuencia, que es propia de la modelización, puede entenderse como procesos de la competencia de modelización.
2. *Relevancia matemática*: una competencia que organice el currículo debe ser relevante para las matemáticas. Ello se puede determinar en que los propios procesos que integran la competencia emerjan en las tareas matemáticas. Tradicionalmente, la resolución de problemas ha sido considerada en los currículos de matemáticas, en cambio, la argumentación matemática solo ha tenido relevancia recientemente.
3. *Transversalidad*: las competencias se caracterizan por ser transversales a los contenidos matemáticos. Esto permite abordar su desarrollo a lo largo de la implementación del currículo escolar. Además, esta característica de transversalidad permite establecer relaciones y conexiones entre contenidos matemáticos. Por ejemplo, la competencia de representación es muy útil para establecer vínculos entre distintos tipos de problemas con los procedimientos que resuelven los cálculos asociados (ciertas representaciones de situaciones de reparto promueven el surgimiento de procedimientos de cálculo de cocientes por sustracciones sucesivas).
4. *Afinidad*: la evidencia recogida sugiere que la transversalidad recién definida es condicionada por relaciones de afinidad entre competencias y objetos matemáticos. De hecho, hemos observado que algunos procesos competenciales tienen distintos niveles de afinidad con el conocimiento matemático puesto en juego. Por ejemplo, en Solar *et al.* (2012), se utiliza la estructura argumentativa de Toulmin (1958) para analizar la argumentación en el aula de matemáticas en el contexto de interpretación de gráficas. En vista del tipo de tareas del objeto matemático tales como leer, interpretar y construir gráficos, se hizo necesario incorporar procesos que no habían sido necesarios previamente, como el de interpretación, con lo que se modificó la estructura argumentativa inicialmente propuesta.

La segunda dimensión del Modelo de Competencia Matemática (MCM) se asocia a los contenidos matemáticos. Pese a que estos no se constituyen como el elemento estructurante del MCM, se hace evidentemente necesario articularlos

con los procesos matemáticos específicos. Para ello, se exploró el enfoque epistemológico en didáctica de las Matemáticas, construido a partir de la teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1997), que actúa como núcleo generador del paradigma, y de los aportes de Yves Chevallard (transposición didáctica; teoría antropológica de lo didáctico). En particular, se utilizaron las bases de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) (Chevallard, 1999), en la que los contenidos matemáticos se estructuran en términos de organizaciones matemáticas, las cuales permiten establecer un núcleo de relaciones entre contenidos, desatomizándolos, permitiendo así una articulación con las competencias matemáticas.¹ Una organización matemática está constituida por cuatro dimensiones: tareas matemáticas, técnicas, tecnología y teoría. El desarrollo de una tarea permite el surgimiento de nuevas técnicas que generan nuevos problemas y en su fundamentación apelan a nuevos resultados tecnológicos que, a su vez, permiten desarrollar técnicas ya establecidas, así como abordar y plantear nuevas cuestiones (Chevallard, 1997). La utilización de la TAD ha servido para caracterizar los contenidos matemáticos fundamentalmente por dos razones. En primer lugar, las tareas matemáticas permiten ser articuladas con los procesos matemáticos para el desarrollo de una competencia matemática específica en el aula. Esto se materializa, por ejemplo, en la planificación de una clase donde las expectativas de aprendizaje a corto plazo están en términos de tareas matemáticas y las expectativas de aprendizaje a largo plazo, en términos de procesos matemáticos de una competencia. Una segunda razón se relaciona con la noción de variable didáctica proveniente de la teoría de situaciones de Brousseau, en la que la complejidad de las técnicas que utiliza un resolutor depende de las condiciones de realización –o valores de la variable– de una tarea matemática. Este criterio se considera en la tercera dimensión del MCM que se describe a continuación.

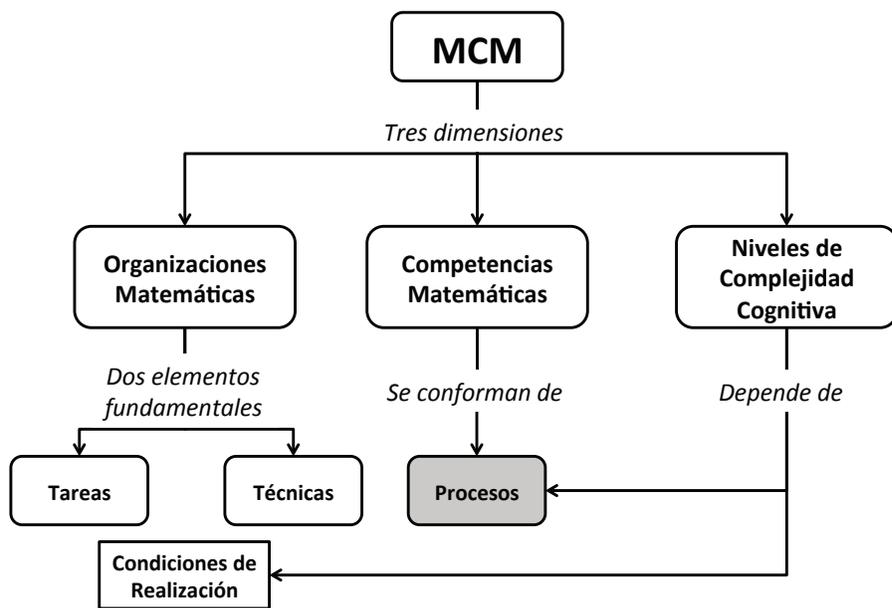
Finalmente, al intentar establecer el modelo de manera sistémica, fue necesario una tercera dimensión que permitiera caracterizar el avance en el desarrollo de las competencias, articuladas a su vez con los contenidos. A medida que transcurre y avanza la actividad matemática escolar, el desarrollo de las com-

¹ Desde la TAD existen posturas que plantean que el enfoque por competencias apunta a los conocimientos procedimentales, separándolo de los conceptuales (Gascón, 2011). Esta dicotomía, basada en un epistemología dualista, es para Gascón una tendencia en investigaciones de corte cognitivo. El MCM tiene una serie de características que hacen que no comparta esta epistemología dualista: las competencias se desarrollan en un objeto matemático y sus procesos están en relación con dicho objeto, evitando así procesos matemáticos que son independientes de los contenidos, los que a su vez se han caracterizado como organizaciones matemáticas para no separar los conocimientos conceptuales de los procedimentales.

petencias matemáticas debería progresar en los estudiantes y, al estudiar dicho avance, surgen preguntas tales como: ¿cómo se progresa en una competencia?, ¿cuáles son los criterios que determinan el avance en los estudiantes en una competencia matemática? Para abordar estas preguntas, se consideró como premisa que: por medio del tipo de actividades matemáticas que se plantean a un resolutor se puede caracterizar el desarrollo de una determinada competencia. Dicho avance se determinó en términos del Nivel de Complejidad Cognitiva de la actividad, término que se adaptó de los grupos de competencia de PISA (OCDE, 2006) basados en los trabajos desarrollados por De Lange (1995), nombre que destaca de mejor manera su significado asociado a las demandas cognitivas que una tarea exige a un resolutor. Sin embargo, en PISA se define cada nivel de complejidad (reproducción, conexión, reflexión) sin que se presenten criterios comunes que permitan identificar de qué elementos depende la complejidad. En cambio, en el MCM los niveles de complejidad de una actividad sí se determinan con elementos comunes, ya que dichos niveles están en función de las tareas matemáticas y sus condiciones de realización (variables didácticas), y de los procesos específicos que conforman una competencia matemática (Rojas y Solar, 2011).

Mediante la organización de estas tres dimensiones, el MCM permite al docente planificar la enseñanza en secuencias didácticas que permitan la articulación de dos expectativas de aprendizaje centrales: el estudiante desarrolla actividad matemática al enfrentarse a tareas que le exigen procesos cognitivos de niveles de complejidad creciente, y el estudiante desarrolla procesos matemáticos que evidencian la movilización de capacidades específicas, procesos volitivos y tendencias de acción conscientes. Estas capacidades están asociadas al aprendizaje de un objeto matemático específico y, por tanto, a las expectativas de aprendizaje a corto plazo (objetivos específicos) que se han planificado para las tareas. El progresivo logro de estas expectativas es el que conduce a las expectativas de aprendizaje a largo plazo: las competencias. En otras palabras, las competencias matemáticas se desarrollan en el largo plazo y esto solo es posible a partir del desarrollo de los procesos matemáticos que están en su base. En la figura 3 se puede apreciar la relación entre los componentes del Modelo de Competencia Matemática, cuyo elemento central son los procesos matemáticos que permiten organizar y articular el currículo de Matemáticas mediante los cuatro aspectos clave ya mencionados: *integración, relevancia, transversalidad y afinidad*.

Figura 3. Modelo de Competencia Matemática



COMPETENCIAS MATEMÁTICAS EN EL CURRÍCULO, FORMACIÓN DE PROFESORES Y APRENDIZAJE

Para organizar las diferentes investigaciones que hemos realizado en la línea de las competencias matemáticas que proponemos aquí, se ha optado por utilizar el sistema didáctico, que en sus tres componentes –saber, maestro y estudiante– permite organizar esta línea de investigación: currículo, formación de profesores y aprendizaje. En este contexto, el MCM se ha utilizado para estudiar diferentes problemáticas con distintos niveles de intensidad en cada uno de estos ámbitos. A continuación, se ahondará en cómo se articula y operacionaliza el MCM en cada uno de ellos y qué información relevante es capaz de aportar.

COMPETENCIAS MATEMÁTICAS EN EL CURRÍCULO

En el estudio dirigido por Espinoza *et al.* (2008), se caracterizaron el marco curricular chileno y los programas de estudio de primero y segundo año de educación primaria (6-8 años), correspondientes al subsector de matemáticas en función del Modelo de Competencia Matemática (MCM). En dicho estudio, se lograron identificar cuatro competencias matemáticas (resolución de problemas; representación; razonamiento y argumentación, y cálculo y manipulación de expresiones) que caracterizan las tareas matemáticas asociadas.

A partir de este trabajo, la investigación buscó elaborar un instrumento que relacionara cada tarea con la competencia matemática que se considera que desarrolla. Este instrumento, “matriz de competencia”, permitió definir el nivel de complejidad de las tareas matemáticas (reproducción, conexión, reflexión) mediante el estudio de las variables didácticas involucradas en ellas y sus condiciones de realización. La figura 4 muestra un esquema de cómo se estructuró dicho instrumento.

Este estudio fue el primero en ahondar en el marco curricular chileno del área de matemáticas desde un punto de vista competencial. Teniendo este

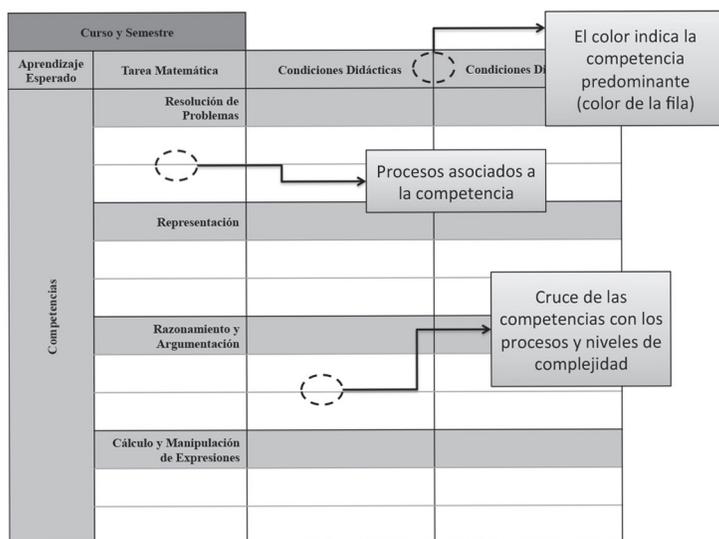


Figura 4. Matriz de competencias (Espinoza *et al.*, 2008)

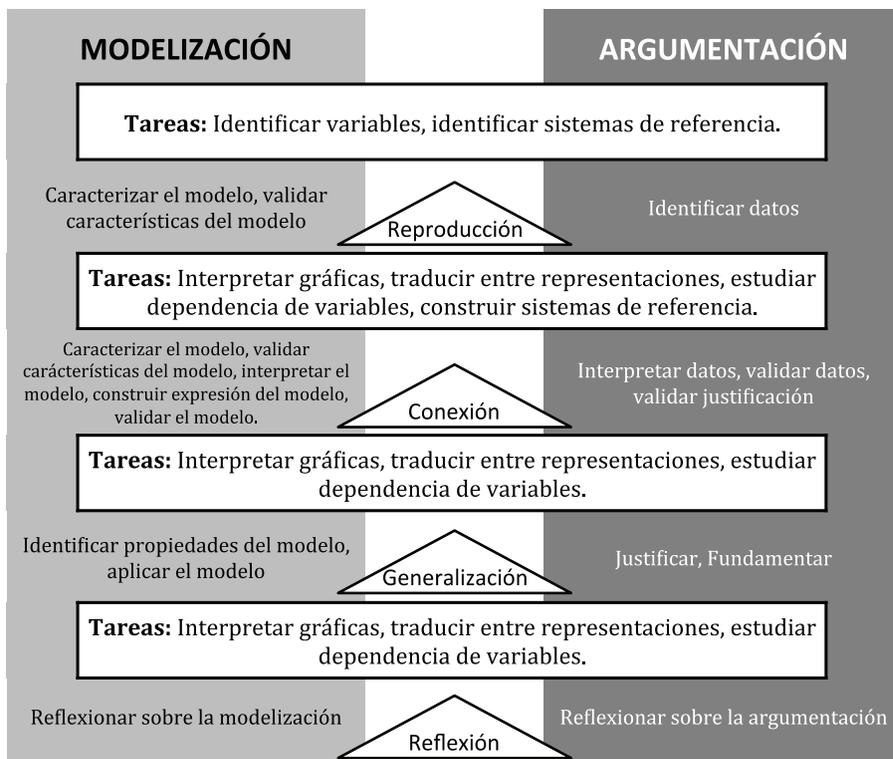


Figura 5. Competencias de modelización y argumentación (Solar, 2009)

trabajo como base, en otras investigaciones se abordaron temas matemáticos específicos. Por ejemplo, en Solar (2009), el MCM se utilizó para estudiar un proceso de enseñanza sobre interpretación de gráficas para introducir el concepto de función en la finalización de la educación básica chilena (13 y 14 años), caracterizando las competencias de modelización y argumentación, asociadas a dicho tema matemático. En la figura 5, se presentan las competencias de modelización y argumentación con sus respectivos procesos, las tareas matemáticas y el nivel de complejidad en relación con la articulación de tareas y procesos que conforman una competencia.

La caracterización de cada competencia descrita se utilizó para analizar una secuencia de enseñanza en términos de identificar las tareas matemáticas, los procesos asociados a cada competencia y el nivel de complejidad en función de las tareas matemáticas y procesos involucrados. En la competencia de mode-

lización, los ocho procesos en su conjunto se entienden como la construcción del modelo: *caracterizar el modelo* es un proceso que da cuenta de identificar las propiedades del modelo real; el proceso de *interpretar el modelo* comprende acciones tanto hacia el modelo como hacia su expresión (gráfica, tabla); las acciones de construcción se asocian al proceso de *construcción de la expresión del modelo*; el proceso de *identificar propiedades del modelo* se enfoca en las propiedades del modelo matemático; el proceso de *aplicar el modelo* implica utilizar de manera explícita el modelo matemático y la expresión correspondiente a la situación problemática. Hay dos procesos asociados a la validación: *validar características del modelo* y *validar el modelo*. Finalmente, el proceso de *reflexionar sobre la modelización* consiste en acciones críticas sobre el modelo, sobre las fases de modelización y la aplicación de la solución a la situación problemática.

En la competencia de argumentación, los tres primeros procesos –*identificar datos*, *interpretar datos* y *validar datos*– se sustentan en los datos. Los datos no se refieren únicamente a los enunciados por probar, también se refieren a datos matemáticos con los que se cuenta para desarrollar la argumentación. El proceso de *validar datos* se refiere a confirmar la identificación o interpretación de los datos. También se asocia este proceso a valoraciones negativas (*refutar*) sobre estas acciones. *Validar justificación* corresponde a un proceso distinto, ya que se enfoca en aspectos diferentes de los procesos anteriores. En efecto, el proceso de *justificar* corresponde a explicar el razonamiento que se lleva a cabo para identificar o interpretar datos que contemplan tanto las valoraciones positivas como negativas (*refutar*). El proceso de *fundamentar* apoya la justificación, son datos que son socialmente aceptados y que no requieren una validez. En teoría, los fundamentos deberían emerger en una secuencia argumentativa. Se ha agregado un proceso que tiene la función de caracterizar las acciones de *reflexión sobre la argumentación*. Este proceso contempla tanto reflexionar sobre la información tratada como reflexionar sobre la secuencia de argumentación.

COMPETENCIAS MATEMÁTICAS EN LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO

En las experiencias anteriores, se ha evidenciado la viabilidad del Modelo de Competencia Matemática (MCM) en la interpretación del currículo. En el desarrollo de esta línea de investigación, se nos presentó como necesario estudiar de qué manera el profesor desarrolla un proceso de comprensión de las competen-

cias matemáticas que trabaja con sus estudiantes. De este modo, se plantearon nuevas preguntas relativas a los posibles aportes que significaba el MCM para el docente y cómo impacta esto en su práctica, considerando las condiciones que se requirieron para desarrollar actividades que apunten a altos niveles de aprendizaje. En Solar *et al.* (2011) se trabajaron estos aspectos, en particular, desarrollar, implementar y evaluar una metodología de trabajo docente (MTD) en torno al MCM que promoviera en el profesor la reflexión didáctica necesaria para impactar en las prácticas de aula. Dicha metodología se llevó a cabo mediante un ciclo de formación continua con profesores que, más que avanzar linealmente por fases, supuso un trabajo en espiral, en el que la ejecución de cada fase permitió volver a mirar y profundizar en las fases anteriores. Las fases consideradas fueron las siguientes (Solar *et al.*, 2011, p. 48):

- Estudio de una temática matemático-didáctica específica, que incluye la puesta en práctica en aula de algunas propuestas de enseñanza elaboradas expresamente para su análisis y reflexión en términos de la experiencia vivida por algunos profesores al implementarlas.
- Elaboración propia de una secuencia de enseñanza en torno a un contenido matemático afín a las situaciones anteriores y que sea coherente con los principios didácticos que propone esta metodología.
- Implementación de dicha secuencia de enseñanza con apoyo y seguimiento en el aula y con retroalimentación inmediata por parte del equipo investigador que acompaña al docente en sus clases.
- Análisis y reflexión colectiva sobre las distintas experiencias vividas, determinando sus fortalezas y debilidades y, en función de ello, ajustar y mejorar tanto la secuencia de enseñanza como su gestión en el aula.

La metodología de trabajo docente (MTD) para estudiar el MCM se materializó en un seminario, en cuyas sesiones participó un grupo de ocho profesoras de primero y segundo grado de educación primaria (7 a 9 años) pertenecientes a establecimientos educacionales de la ciudad de Concepción, Chile, y alrededores. El trabajo con las docentes se desarrolló en dos grandes fases. La primera consistió en un seminario de ocho sesiones. En las primeras cuatro sesiones se estudió el MCM a través de diferentes actividades de análisis (casos clínicos,² pla-

² Los "casos clínicos" corresponden a una metodología de estudio de caso: episodios de clase en los que se muestran situaciones de enseñanza-aprendizaje diseñadas expresamente para su análisis por parte de las profesoras del seminario y episodios de clase de los propios profesores participantes.

nificación, secuencias de actividades, etc.), mientras que en las siguientes cuatro sesiones, las profesoras trabajaron en el diseño y discusión de una secuencia didáctica en torno a los problemas aditivos y técnicas de cálculo propias de los niveles en que se desempeñaban (1^o y 2^o básico). En esta fase se promovió en las profesoras una reflexión teórica-empírica del MCM.

La segunda fase del trabajo con las docentes consistió en la implementación de la secuencia didáctica diseñada (basada en el MCM) y su reflexión tanto antes como después de dicha implementación. Para un estudio en profundidad de este proceso, en esta segunda fase se seleccionaron tres casos de estudio, es decir, tres docentes a las cuales se les realizó un acompañamiento exhaustivo en la implementación de las secuencias didácticas diseñadas, a fin de analizar en profundidad la práctica y averiguar cómo impactó en ellas el trabajo en la MTB mediado por el MCM como modelo didáctico. Para estudiar dicho impacto, se caracterizó el cambio de las profesoras en dos dimensiones: la reflexión como producto del estudio del MCM, y su desempeño en aula antes y durante de la implementación de la secuencia didáctica. En ambos casos, los estudios se realizaron con las tres profesoras de manera de profundizar en los niveles de análisis.

Para el estudio del cambio en la reflexión docente, se definieron niveles de reflexión con base en los criterios propuestos por Van Es y Sherin (2010). Estos niveles obedecen al tipo de análisis que un docente realiza de su práctica, a la relevancia de los actores involucrados en la acción y al foco de análisis. A partir de esto, en Solar *et al.* (2011), definimos tres niveles que varían en función de la presencia de causalidad en las intervenciones de los docentes. La figura 6 esquematiza los niveles definidos.

En la investigación, se pudo apreciar que el nivel de reflexión de las profesoras antes de participar en el seminario era esencialmente descriptivo y, en la medida en que participaban en las diferentes instancias del seminario, su nivel

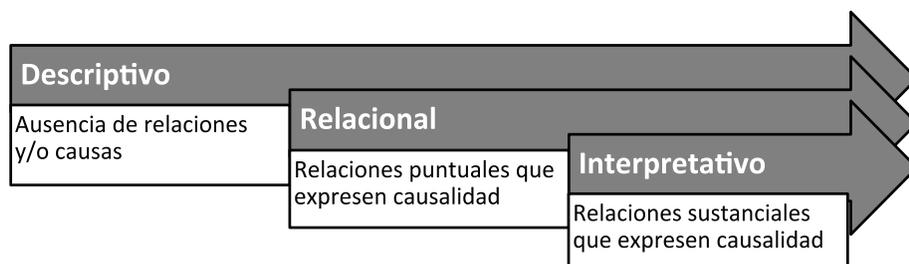


Figura 6. Niveles de reflexión docente (Solar *et al.*, 2011)

de reflexión aumentaba hasta obtener un nivel interpretativo (Solar *et al.*, 2011). Un caso de este cambio en la reflexión es el de la profesora de primer grado de primaria Valentina que, en una entrevista previa al inicio del seminario, ante la tarea de indicar los criterios que se utilizan para organizar la enseñanza, señala que:

Valentina: Hay que tener claro el objetivo y desde ahí ver lo que tienen que aprender, el cierre, los recursos, que las actividades sean progresivas...

Valentina señala el objetivo, los momentos y recursos que responden a una caracterización más bien pedagógica de la enseñanza y sin ahondar en las causas de carácter matemático de dichos elementos. Por ello, definimos su nivel de reflexión en esta tarea como descriptivo.

En cambio, ya en la etapa final del seminario, frente a la tarea de identificar el propósito de la planificación, ella identifica procesos competenciales como parte del objetivo de la clase. Además, y de manera espontánea, propone una modificación de las condiciones didácticas de la clase para darle mayor consistencia interna. Es decir, Valentina va más allá tanto de lo solicitado como de lo que se observa en la planificación.

Valentina: Según mi opinión, [respecto a] cómo están en el desarrollo del problema, a lo mejor ellos ya manejan la técnica del trasvasije. En vez del cálculo, yo les habría puesto un problema más para ver si ellos realmente entienden lo que están haciendo, [si] están comprendiendo, están siguiendo los pasos, están aplicando la modelización, están haciendo el esquema y todo [eso]. [Yo supongo que] ellos ya manejan esta técnica. [Mo acá [con ese supuesto problema] estoy preguntando, estoy haciendo el cierre de manera reflexiva, les estoy preguntando cómo resolvieron, para qué sirvieron los esquemas, cómo resolvieron el problema. [De esta manera] entonces, ellos me van a explicar cómo lo resolvieron, cómo realizaron el cálculo, si tiene ahí tantas fichas, 500, 657 y el otro tiene 99, cómo realizaron ese cálculo, entonces se supone que ahí me van a explicar qué técnica utilizaron ellos. Entonces, yo no les habría hecho estos cálculos, les habría hecho un problema más.

Así, con estos análisis, se pudieron estudiar las trayectorias reflexivas de cada uno de los casos en los que las tres profesoras evidenciaron cambios, el

Foco de Problematicación	Está asociado con tareas en que se promueve una problematización de la actividad matemática escolar mediante la activación de los conocimientos previos, es decir, está asociado a la formulación de situaciones que provoquen un conocimiento matemático nuevo y una evolución de las técnicas.
Foco de Articulación	Está centrado en promover la articulación entre los conocimientos previos con el conocimiento matemático nuevo.
Foco de Finalidad	Se entiende como la intención y sentido de la actividad matemática, y consiste en entender la problematización de la actividad matemática, los procesos competenciales y la gestión del error.
Foco de Argumentación	Está asociado a que los estudiantes comuniquen, justifiquen y contrasten sus procedimientos e ideas matemáticas.
Foco de Socialización	Está asociado a la promoción de la argumentación colectiva de los procedimientos e ideas matemáticas.

Figura 7. Focos de desempeño docente (Solar *et al.*, 2011)

cual se caracterizó por pasar de un nivel descriptivo con una caracterización pedagógica de los episodios de análisis, al comenzar el seminario, a niveles interpretativos a medida que avanzaban en las diferentes instancias reflexivas.

Ahora bien, para estudiar el cambio en el desempeño docente de las tres profesoras, se discutió cuáles serían los temas paradigmáticos en que deberían situarse dichos cambios, lo que se concretó en cinco focos que se pueden apreciar en la figura 7.

En las siguientes viñetas, se puede apreciar el cambio de desempeño de la profesora antes mencionada, Valentina. La primera viñeta corresponde a una clase registrada antes de comenzar el seminario, específicamente a un momento de inicio de la clase en la que los docentes suelen activar los conocimientos previos de los estudiantes respecto a la clase anterior.

Valentina: ¿Qué estuvimos realizando ayer en la clase de matemáticas?

Mónica: Aprendimos sobre los números.

Javier: Aprendimos a contar.

Ante la pregunta de la profesora Valentina, Mónica y Javier responden con ideas amplias y de forma breve, además de haber una ausencia en la explicación de los razonamientos. Con base en los indicadores de desempeño propuestos, se considera un bajo nivel de logro en los focos de problematización, articulación y argumentación.

Por otra parte, una vez concluido el seminario, en una clase en que se está implementando la secuencia didáctica diseñada por la docente, se aprecia un cambio en el nivel de desempeño de la profesora Valentina respecto al episodio anterior. Al igual que la clase anterior, correspondiente a un momento de inicio, en el siguiente extracto correspondiente a sumar mediante trasvasije, se puede observar que los estudiantes sí son capaces de dar explicaciones más elaboradas.

Valentina: ¿Qué estuvimos realizando ayer en la clase de matemáticas?

Pablo: Una nueva forma de operación matemática... [cuando] un número termina en nueve.

Valentina: ¿Y quién lo puede explicar? (en la pizarra Pablo explica mediante un ejemplo: $19 + 5 = 20 + 4 = 24$).

Como se aprecia en el extracto anterior, ante la pregunta de Valentina, Pablo resalta la relación entre los números, especificando los procedimientos realizados y Valentina le solicita que explique, lo que permitió que Pablo argumentara sus procedimientos, lo cual fue considerado como una mejora en el logro de los focos de problematización, articulación y argumentación.

De las experiencias vividas por las profesoras para promover el desarrollo de competencias matemáticas en el aula, se pudieron establecer explicaciones del cambio en el desempeño desde sus reflexiones. Aunque no es inmediato que a mayor nivel de reflexión, mejor desempeño, tanto los procesos reflexivos como los desempeños de las docentes dieron pistas de que las profesoras que tuvieron más cambios en su desempeño son también las que mostraron cambios importantes en sus niveles de reflexión. Para nosotros, esto implicó que la metodología de trabajo docente (MTD) impactó en algún grado en el desempeño de las profesoras, en particular por medio de las instancias de reflexión que se promovieron en los seminarios.

Como conclusión de este estudio, llegamos a que la comprensión de un modelo didáctico como el Modelo de Competencia Matemática (MCM) pasa porque los profesores vivencien instancias reflexivas ricas, tales como comprender

la importancia de las condiciones de realización de una tarea matemática, así como el tipo de preguntas para promover procesos competenciales en los estudiantes. Asimismo, los casos clínicos, y en particular el hecho de poder analizar la propia práctica, permitieron a los profesores visualizar qué cambió en sus prácticas. Las múltiples relaciones que se dieron entre reflexión y desempeño permitieron establecer que es sustancial que un modelo didáctico, en nuestro caso el MCM, sea estudiado con un diseño acorde para el desarrollo profesional docente; y viceversa, que un diseño de formación docente debe ser mediado por un modelo didáctico robusto.

COMPETENCIAS MATEMÁTICAS Y APRENDIZAJE

Una de las bases de nuestra línea de investigación es que el desarrollo de la competencia matemática depende de los procesos de aprendizaje y de cómo están constituidos. En el proyecto de investigación “Desarrollo de Competencias Matemáticas en estudiantes de educación básica y media del departamento del Caquetá” (2009) elaborado por el grupo de investigación Desarrollo Institucional Integrado (DII) (Colombia), se centró el trabajo en caracterizar las competencias matemáticas del estudiante y contribuir a establecer la calidad de su participación y su discurso (calidad del aprendizaje) en el proceso de resolver problemas y tareas matemáticas contextualizadas.

Para ello, se formuló, previo al trabajo de aula, un *Modelo Teórico a Priori* (MTP), que tiene como referente el Modelo de Competencia Matemática (MCM) antes expuesto. Este modelo se asumió como una estructura para organizar, describir, explicar y articular los componentes de la competencia matemática con la actividad matemática de aprendizaje, los objetivos de las tareas y las formas de evaluación. Su propósito es articular la perspectiva curricular con la perspectiva didáctica, es decir, contribuye a planificar el desarrollo del proceso de movilización de las competencias matemáticas cuando el estudiante resuelve tareas y desarrolla procesos cognitivos, afectivos y de tendencia de acción con complejidad creciente. El MTP contribuye de esta manera a la articulación de las expectativas de aprendizaje a corto plazo (los objetivos de las tareas) con las expectativas de aprendizaje a largo plazo (las competencias). En la figura 8 se presentan los elementos del modelo.

La valoración de la actividad matemática de aprendizaje, que se desprende de la tarea matemática, se considera el aspecto más complejo del modelo. Su

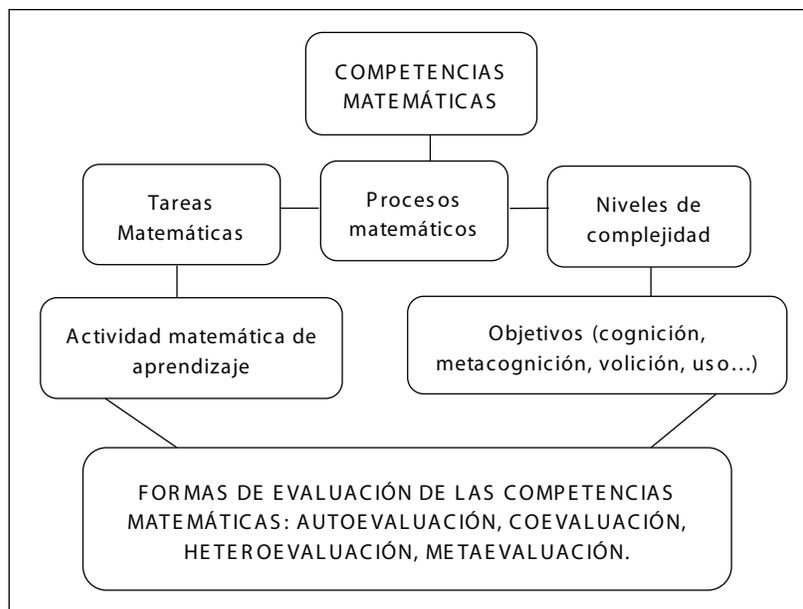


Figura 8. Propuesta de elementos del Modelo Teórico a Priori (adaptado de Solar, 2009)

complejidad radica en dos ejes: *a)* la concepción y estructura de las competencias matemáticas (aspectos cognitivos, volitivos, metacognitivos, actitudinales y de uso social de la competencia), que se asumen como objetos de evaluación, y *b)* el tipo o los tipos de evaluación (en un enfoque por competencias, la evaluación no se agota en la clásica heteroevaluación del profesor, centrada en lo cognitivo). Por ello, se abordó este problema desde dos perspectivas:

- La evaluación de lo cognitivo, focalizada en los niveles de complejidad de la competencia matemática propuestos por Mogen Niss (2002) y aplicados en las pruebas PISA (OCDE, 2006). Esto implica caracterizar la calidad de los procesos matemáticos desarrollados por el estudiante, la calidad de su discurso y comunicación en clase evidenciando resultados, así como su disposición, voluntad, persistencia y deseo de hacer uso social de las competencias matemáticas. Esta concepción de evaluación de la competencia difiere de la opción de las pruebas masivas (PISA, TIMSS, LLECE, entre otras), pues no se agotan en lo cognitivo ni clasifican al estudiante.

Se asumieron como foco de la evaluación los procesos de interacción en el aula entre estudiante y profesor, y entre estudiante y estudiante, concebido como un proceso de comunicación y de negociación cultural para compartir y desarrollar significado matemático (Bishop, 2005). Se eligió el siguiente instrumento (cuadro 1) como apoyo al proceso de evaluación (Mora y Rosich, 2011):

Competencias	Objetivos	Actividad	Tipo de respuesta (reproducción)	Según la solución (conexión)	Estrategias de solución (Reflexión)

Cuadro 1. Evaluación del aspecto cognitivo de la competencia (Mora y Rosich, 2010)

Este instrumento fue una ayuda al maestro para organizar, describir y explicar la complejidad creciente de los procesos cognitivos del estudiante y su articulación con los componentes de la competencia.

- La evaluación de los aspectos actitudinales, metacognitivos, volitivos y de uso social de la competencia se apoya en el enfoque socioformativo de Tobón, Pimienta y García (2010) y en su propuesta de secuencia didáctica. Se adapta su propuesta de instrumento de la siguiente manera (cuadro 2):

ACTIVIDADES	Evaluación de lo volitivo, afectivo, actitudinal y de uso social de la competencia				METACOGNICIÓN
Actividad del docente	Actividad matemática de aprendizaje	Objetivos	Criterios	Indicadores	Autorregulación (planifica, controla, evalúa, autoevalúa, coevalúa)

Cuadro 2. Instrumento de valoración cualitativa de las competencias matemáticas (Tobón *et al*, 2010)

Este instrumento fue muy útil para argumentar las interacciones profesor-estudiante y estudiante-estudiante al evaluar la competencia matemática, pues requiere que el estudiante ejerza la autocrítica (autoevaluación) de su actividad matemática y de la calidad de sus procesos (metacognición), además, que valore

la calidad de los procesos de sus compañeros (coevaluación) y que su actividad matemática de aprendizaje sea objeto de valoración (heteroevaluación).

El grupo de investigación DII implementó un proceso de intervención didáctica con estudiantes de educación básica y media en el que las competencias matemáticas que se caracterizan con apoyo del modelo son: plantear y resolver problemas; pensar y razonar; representar; modelar, y comunicar. Estas competencias están asociadas al aprendizaje de algunos objetos matemáticos, como la mediana, la razón y la proporción, la función lineal, la función cuadrática, el triángulo y la circunferencia.

A modo de ejemplificación del trabajo del grupo DII, se presenta una síntesis de resultados relativos a la caracterización de la competencia matemática *representar* con el objeto matemático *función lineal*. Este proceso se realizó con cuatro estudiantes campesinos de 15 años de edad en promedio y que cursan 10º grado en una escuela rural en el municipio de Puerto Rico (Caquetá, Colombia), quienes abordaron el desarrollo de los procesos matemáticos *codificación*, *decodificación* y *traducción*, asociados al aspecto cognitivo de la competencia matemática *representar*. En el aspecto afectivo de la competencia matemática, se caracterizó la *disposición* del estudiante y, en el de tendencia a la acción, se valoró su *persistencia*. La primera tarea matemática se llamó “Medicando el ganado”, centrada en decodificar la siguiente dosificación de una droga veterinaria: “bovinos, equinos o camélidos 3 a 4 ml/110kg p.v. (peso vivo)”, situación muy relacionada con la función lineal y la actividad ganadera que desarrollan los estudiantes en sus fincas familiares.

Los estudiantes interpretaron la información y la expresaron en otros registros de representación semiótica, evidenciando preferencia por las representaciones icónicas y tabulares. Se evidenció su comprensión sobre variación y cambio, la identificación de variables y su representación utilizando símbolos más de uso social que matemáticos.

Por ejemplo, en Sánchez y Martínez (2013), se explica que el estudiante rotulado como E2 señala con los dedos la presentación comercial del producto según el tamaño, “de 10 es así, de 20 es más grandecito, de 100 es por ahí, así (señala con las dos manos) y el de 500 pues un poquito más grandecito” (p. 68). Luego, para ser más explícito, recurre a la representación icónica de la figura 9.

En esta misma actividad, el estudiante rotulado como E4 también recurre a la representación icónica. En ella, la dosis de droga por aplicar, además de reproducir los datos entregados de acuerdo con el tipo de animal, está representada en el tamaño de la jeringa utilizada (véase la figura 10).



Figura 9. Ejemplo 1, representación icónica

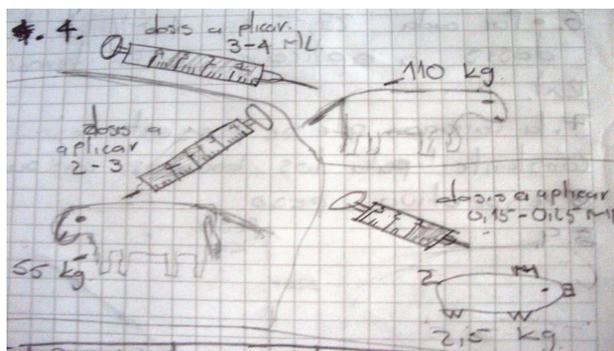


Figura 10. Ejemplo 2, representación icónica

Con base en esta representación, el estudiante, en su deseo de brindar mayor información, elabora una representación tabular (véase la figura 11).

En la actividad matemática de aprendizaje, los estudiantes demostraron interés, dedicación y voluntad de mantenerse hasta resolver el problema. Además, se observaron elementos de tendencia de acción, afectivos y de disposición y persistencia favorables a la movilización de procesos y capacidades. Los errores frecuentes no los desanimaron, fueron capaces de identificar su fuente, su valor pedagógico y persistieron en enfrentar el problema y resolverlo, ya que valoraron su pertinencia, significatividad y utilidad matemática, social y cultural.

En la figura 12, se presenta un ejemplo de aplicación del instrumento presentado en el cuadro 3 para caracterizar los aspectos volitivos, afectivos, de tendencia de acción y metacognitivos de la competencia *representar*.

	Via intravenosa lenta, intramuscular, subcutánea.	0005 ADMINISTRACIÓN
ANIMALES	Roedores, Gernopos, Conejidos.	3-4 ML/ 110 kg de P.V.
	Cerrios, Ovinos, Porcinos.	2-3 ML/ 55 kg de P.V.
	Caninos Lechones	0,15 - 0,25 ML/ 2,5 kg de P.V.

Figura 11. Ejemplo 3, representación tabular

Como puede apreciarse, esta evaluación caracteriza la actividad matemática de aprendizaje centrada especialmente en la competencia del estudiante para comprender, participar, proponer, argumentar, usar y comunicar sus procesos y resultados en torno a la tarea. Los aspectos que se valoran están estrechamente articulados con la caracterización del aspecto cognitivo de la competencia *representar* y el objeto matemático *función lineal*, evidenciando la complementariedad entre ellos y la transversalidad de los procesos matemáticos asociados.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

No hay una única concepción de competencia matemática, tampoco es lo deseable. La riqueza polisémica y conceptual enriquece la investigación desde diferentes enfoques en educación matemática. Además, presenta aspectos y componentes de la competencia que podrían constituirse en puntos de convergencia. Pueden mencionarse al menos tres: *a)* un componente cognitivo: contenidos, conocimientos, capacidades, destrezas; *b)* unas finalidades o propósitos: las competencias matemáticas para vivir/trabajar, comunicar/interactuar, comprender/desarrollar capacidades, usar/aplicar, intervenir/resolver problemas contextualizados; *c)* unos contextos en los que la competencia se moviliza: sociales, escolares (prácticas educativas), académico profesional (docencia e investigación). Por otra parte, los aspectos y componentes que diferentes autores consideran en la competencia expresan dos tendencias: *a)* una, instalada en

Figura 12. Caracterización cualitativa de la competencia matemática *representar*

Actividades	Evaluación de lo volitivo, afectivo, actitudinal y de uso social de la competencia	Metacognición
Actividad del docente	Actividad matemática de aprendizaje	Autorregulación
<ul style="list-style-type: none"> Proponer el problema "medicando el ganado" para promover la argumentación y la comunicación sobre el proceso matemático de descodificación y el uso de nuevas representaciones semióticas del objeto matemático función lineal. 	<ul style="list-style-type: none"> Discusión en clase para la inmersión en el problema. Comunicación y negociación del significado matemático compartido de la tarea. Descodificación y uso de nuevas representaciones semióticas. Sustentación en clase de sus resultados. 	<ul style="list-style-type: none"> Autoevalúan la calidad de su actividad matemática de aprendizaje y de sus resultados. Evidencian continuidad y compromiso. Valoran sus dificultades y las comunican. Valoran la importancia del objeto matemático y su utilidad social.
Objetivos	Criterios	Indicadores
<ul style="list-style-type: none"> Descodificar, comunicar y usar las soluciones a la tarea con nuevas representaciones semióticas que se expresen como variación y cambio. 	<p>Los estudiantes:</p> <ul style="list-style-type: none"> Participan en la discusión de la tarea. Argumentan y usan la descodificación y representaciones hechas. Validan en clase sus soluciones y las usan en sus contextos ganaderos. 	<ul style="list-style-type: none"> Tienen disposición para el trabajo en grupo. Comprenden la utilidad de la descodificación. Comparten el significado social y matemático de la tarea y de su actividad de aprendizaje. Argumentan sus conclusiones y las sustentan en clase.

la formación, concibe componentes cognitivos, sociales, culturales, pragmáticos, afectivos, volitivos, éticos y políticos en las competencias matemáticas, y *b*) otra representada por las pruebas estandarizadas nacionales e internacionales (PISA, TIMSS, LLECE, etc.). Si bien estas reconocen aspectos pragmáticos y sociales en las competencias matemáticas, la evaluación se centra en lo cognitivo y en el desempeño individual del estudiante.

Proponemos que la competencia matemática debe vincularse a la noción de procesos matemáticos (representar, resolver problemas, argumentar, entre otros), dimensión del conocimiento matemático que tiene una expectativa de aprendizaje a largo plazo. Esta idea fue generadora en la construcción del Modelo de Competencia Matemática (MCM), modelo didáctico que articula contenidos (organizaciones matemáticas), competencias y sus procesos, y el progreso de las competencias (niveles de complejidad). Las competencias son organizadoras y articuladoras del currículo de matemáticas por medio de cuatro criterios: integración de procesos, relevancia matemática, transversalidad, y afinidad. Si bien el MCM ha servido en las experiencias descritas, también se ha visto que, a medida que se han ampliado las problemáticas, el modelo se ha adaptado. Por ejemplo, en el estudio de Espinoza *et al.* (2008), de carácter curricular, no se estudiaron las competencias de comunicación y modelización, en cambio, en investigaciones posteriores, como en Solar *et al.* (2011), de carácter formativo, se han considerado como las principales competencias por promover en el profesorado. Esto hace ver que, dependiendo del foco del estudio, las competencias por indagar son diferentes, y se seleccionan en función del actor y el momento de la enseñanza de que se trate.

Estos desarrollos han permitido, a partir del MCM, generar una línea de investigación (e.g. Solar, Rojas y Ortiz, 2011), centrada en tres grandes ámbitos: en el currículo, pues se propone un cuerpo de competencias para caracterizar la actividad matemática escolar; en la formación de profesorado, con experiencias que muestran de qué manera el profesor se apropia de las competencias y sus consecuencias en el aula de matemáticas, y en el aprendizaje, con experiencias que han dado evidencias de que los estudiantes pueden desarrollarse en todas las dimensiones competenciales.

Sin embargo, el desarrollo de procesos matemáticos, componente esencial de las competencias, requiere la actuación del estudiante en contextos escolares y extraescolares. Ello implica unas prácticas de enseñanza que estimulen el aprendizaje situado y la pragmática de uso. El saber-conocer del estudiante debe expresarse como capacidad para desarrollar procesos matemáticos y uti-

lizar socialmente sus competencias matemáticas, lo que hará posible que sea competente con las matemáticas no solo como estudiante, sino también como ciudadano.

El Modelo de Competencia Matemática (MCM) y el Modelo Teórico a Priori (MTP), derivado de este, constituyen el núcleo de esta propuesta porque contribuyen a: *a)* transformar la organización curricular de las matemáticas escolarizadas a partir de asumir como eje curricular los procesos matemáticos; *b)* resignificar la actividad matemática de aprendizaje del estudiante articulándola con los aspectos cognitivos, afectivos y de tendencia de acción de las competencias, y *c)* reorientar las prácticas de enseñanza del profesor, al explicar el proceso de cómo progresan y se movilizan las competencias matemáticas del estudiante.

Aunque la línea de investigación en competencias matemáticas se encuentra en proceso de consolidación, hecho que se respalda con que la noción de competencia matemática no está consensuada, se espera que, con este trabajo, otros investigadores se animen a estudiar problemáticas asociadas, o bien estudiar procesos matemáticos específicos desde un enfoque competencial, apoyados por un modelo teórico robusto.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abrantes, P. (2001), "Mathematical competence for all: Options, implications and obstacles", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 47, pp. 125-143.
- Bishop, A. J. (2005), *Aproximación sociocultural a la educación matemática*, trad. de P. I. Perry, Colombia, Universidad del Valle.
- Brousseau, G. (1997), *Theory of Didactical Situations in Mathematics*, Países Bajos, Kluwer Academic Publishers.
- Cantoral, R., y R. Farfán (2005), *Desarrollo del pensamiento matemático*, México, Trillas.
- Caraballo, R. M., L. Rico y J. L. Lupiáñez (2013), "Cambios conceptuales en el marco teórico de PISA: el caso de las matemáticas", *Profesorado, revista de currículum y formación del profesorado*, vol. 17, núm. 2, pp. 225-241.
- Chevallard, Y. (1997), "Familière et problématique, la figure du professeur", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 17, núm. 3, pp. 17-54.
- _____ (1999), "L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 19, núm. 2, pp. 221-266.

- D'Amore, B., J. Godino y M. I. Fandiño (2008), *Competencias y matemática*, Bogotá, Magisterio.
- De Lange, J. (1995), "Assessment: No change without problems", en T. A. Romberg (ed.), *Reform in school mathematics and authentic assessment*, Nueva York, SUNY Press, pp. 87-172.
- Espinoza, L., J. Barbé, D. Mitrovich, H. Solar, D. Rojas y C. Matus (2008), *Análisis de las competencias matemáticas en primer ciclo. Caracterización de los niveles de complejidad de las tareas matemáticas. Proyecto FONIDE DED0760*, Santiago, MINEDUC.
- Fandiño, M. I. (2006), *Currículo, evaluación y formación docente en matemática*, Bogotá, Editorial Magisterio.
- García, B., A. Coronado, L. Montealegre, B. Tovar, A. Ospina, S. Morales y D. Cortés (2012), *Competencias matemáticas: un estudio exploratorio en la educación básica y media*, Cali, Colombia, Feriva.
- García, B., A. Coronado, L. Montealegre, A. Giraldo, B. Tovar, S. Morales y D. Cortés (2013), *Competencias matemáticas y actividad matemática de aprendizaje*, Florencia, Colombia, Universidad de la Amazonia.
- García, G., M. Acevedo y F. Jurado (2003), *La dimensión sociocultural en el criterio de competencia: el caso de matemáticas*, Bogotá, Universidad Nacional de Colombia.
- Gascón, J. (2011), "¿Qué problema se plantea el enfoque por competencias? Un análisis desde la teoría antropológica de lo didáctico", *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, vol. 31, núm. 1, pp. 9-50.
- Goñi, J. M. (2009), *El desarrollo de la competencia matemática*, Barcelona, Graó.
- Maaß, K. (2006), "What are modelling competencies?", *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, vol. 38, núm. 2, pp. 113-142.
- MINEDUC (2012), *Bases Curriculares 2012. Matemática Educación Básica*, Santiago de Chile, Ministerio de Educación.
- Ministry of Education (2005), *The Ontario Curriculum in Secondary Mathematics*, recuperado el 23 de marzo de 2006 de <http://www.edu.gov.on.ca/eng/curriculum/secondary/math.html>.
- Mora, L., y N. Rosich (2011), "Las actividades matemáticas y su valor competencial. Un instrumento para su detección", *Revista Números*, vol. 76, pp. 69-82.
- NCTM (2003), *Principios y estándares para la educación matemática*, trad. de SAEM-THALES, Sevilla, Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
- Niss, M. (ed.) (2002), *Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM Project*, Roskilde, Roskilde University.

- Niss, M., y T. Højgaard (2011), *Competencies and Mathematical Learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*, Roskilde, Roskilde University.
- OCDE (2006), *PISA: marco de la evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura*, España, Santillana.
- _____ (2013), *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*, OECD Publishing.
- Rico, L., y J. L. Lupiáñez (2008), *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*, Madrid, Alianza Editorial.
- Rojas, F., y H. Solar (2011), *Organización de tareas matemáticas según niveles de complejidad cognitiva: una mirada desde las competencias matemáticas*, ponencia presentada en el I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática y II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática, Buenos Aires, Argentina, Tandil.
- Sánchez, A. P., y M. A. Martínez (2013), *Una caracterización de la competencia matemática representar. El caso de la función lineal*, Tesis de maestría, Universidad de la Amazonia, Florencia, Caquetá, Colombia.
- Sfard, A. (2008), *Aprendizaje de las matemáticas escolares desde un enfoque comunicacional*, Santiago de Cali, Universidad del Valle.
- Solar, H. (2009), *Competencias de modelización y argumentación en interpretación de gráficas funcionales: propuesta de un modelo de competencia aplicado a un estudio de caso*, Tesis de doctorado, Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra, Barcelona.
- Solar, H., C. Azcárate y J. Deulofeu (2012), "Competencia de argumentación en la interpretación de gráficas funcionales", *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 30, núm. 3, pp. 133-154.
- Solar, H., L. Espinoza, F. Rojas, A. Ortiz, E. González y R. Ulloa (2011), *Propuesta metodológica de trabajo docente para promover competencias matemáticas en el aula, basadas en un Modelo de Competencia Matemática (MCM). Proyecto FONIDE 511091*, Santiago de Chile, MINEDUC.
- Solar, H., F. Rojas y A. Ortiz (2011), *Competencias matemáticas: una línea de investigación*, ponencia presentada en el XIII CIAEM - Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Recife, Brasil.
- Tobón, S., J. Pimienta y J. A. García (2010), *Secuencias didácticas: aprendizaje y evaluación de competencias*, México, Pearson Educación.

Horacio Solar, Bernardo García, Francisco Rojas y Arnulfo Coronado

Toulmin, S. (1958), *The uses of argument*, Cambridge, Inglaterra, Cambridge University Press.

Valero, P., y O. Skovmose (2012), *Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas*, Bogotá, Universidad de los Andes.

Van Es, E. A., y M. G. Sherin (2010), "The influence of video clubs on teachers' thinking and practice", *Journal of Mathematics Teacher Education*, vol. 13, núm. 2, pp. 155-176.

Vanegas, Y., y P. Escobar (2007), "Hacia un currículo basado en competencias: el caso de Colombia", *Revista de Didáctica de las matemáticas UNO*, vol. 46.

DATOS DE LOS AUTORES

Horacio Solar

Pontificia Universidad Católica de Chile
hsolar@uc.cl

Bernardo García

Universidad de la Amazonia, Florencia, Caquetá, Colombia
bgarciaquiroya@hotmail.com

Francisco Rojas

Pontificia Universidad Católica de Chile
frojass@uc.cl

Arnulfo Coronado

Universidad de la Amazonia, Florencia, Caquetá, Colombia
arcoronado_123@yahoo.es