

# Recursos para el cálculo visual de integrales

Félix Martínez de la Rosa

**Resumen:** La visualización es uno de los mejores recursos que tenemos los profesores de matemáticas para facilitar la enseñanza y el aprendizaje de un tema. En este trabajo mostramos algunos métodos visuales de integración en el que se utilizan la simetría de las funciones y las funciones inversas, y se recupera el concepto de subtangente para la computación visual de áreas.

*Palabras clave:* cálculo, integral, visualización, simetrías, subtangentes.

**Abstract:** Visualization is one of the best resources we mathematic teachers have to facilitate teaching and learning of a subject. In this paper we show some visual methods of integration in which the symmetry of functions and the inverse functions are used, and it recovers the concept of subtangent for the visual computing of areas.

*Keywords:* calculus, integral, symmetries, visualization, subtangents.

## INTRODUCCIÓN

En el estudio de los procesos de pensamiento matemático, la visualización ha sido un área de desarrollo creciente en las últimas décadas. Muchas de estas investigaciones apuntan al razonamiento visual como un recurso alternativo y poderoso para los estudiantes a la hora de hacer matemáticas (Zimmermann y Cunningham, 1991; Arcavi, 2003; Hitt, 2003; Presmeg, 2006). En el conocido libro de Guzmán (1996), se da una acertada definición de lo que se entiende por visualización en matemáticas:

Las ideas, conceptos y métodos de la matemática presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geoméricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación

Fecha de recepción: 28 de febrero de 2013; fecha de aceptación: 30 de noviembre de 2013.

y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de problemas. Esta forma de actuar con atención explícita a las posibles representaciones concretas en cuanto desvelan las relaciones abstractas que al matemático interesan constituye lo que denominamos visualización en matemáticas. (p. 15)

Trabajar con imágenes y gráficas mejora la comprensión de conceptos abstractos y facilita la resolución de problemas. En Hitt (2003), se hace la siguiente anotación:

La visualización matemática de un problema desempeña un papel importante, y tiene que ver con entender un enunciado mediante la puesta en juego de diferentes representaciones de la situación en cuestión y ello nos permite realizar una acción que posiblemente puede conducir hacia la solución del problema.

Es claro que la visualización de conceptos y resultados es uno de los mejores recursos didácticos que tenemos los profesores de matemáticas para facilitar el proceso de enseñanza y aprendizaje de una materia. Sin embargo, existe una cierta resistencia por parte de estudiantes y profesores a visualizar en matemáticas (Eisenberg y Dreyfus, 1990; Hitt, 2003). Por ejemplo, en el reciente artículo de Martínez (2012), se reflexiona acerca de cómo en la enseñanza de las representaciones gráficas de polinomios se destacan más los aspectos algebraicos que los visuales, lo que lleva a la aparición de esquemas conceptuales inadecuados que propician la aparición de errores de concepto.

Si queremos lograr que nuestros alumnos aprendan matemáticas, es muy recomendable, siempre que sea posible, fomentar la visualización. El conocimiento de un concepto quedará asentado en un alumno si es capaz de lograr articular diferentes representaciones de este y recurrir a ellas para resolver un problema.

En lo que se refiere al cálculo integral, la enseñanza prima la obtención de primitivas y su uso para el cálculo de integrales definidas. Pero si no acompañamos esta práctica de un registro visual adecuado, se pueden cometer errores.

Un ejemplo muy conocido es creer que la integral  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$  puede resolverse calculando una primitiva y sustituyendo los límites de integración.

En este artículo se recogen algunos métodos de integración basados en la visualización. Naturalmente, estos no constituyen un formulario para resolver integrales (que son muy necesarios), pero a cambio, ofrecen una motivación muy superior a la que se logra con una fórmula abstracta. En ellos se emplean como recurso la simetría de una gráfica y la función inversa, y se recupera el concepto de subtangente para el cálculo visual de áreas.

### ANÁLISIS VISUAL DE LA EXISTENCIA DE PRIMITIVAS

En los cursos de bachillerato y de Cálculo, se utiliza el recurso de la observación de una gráfica para deducir propiedades de ella (extremos, puntos de inflexión, crecimiento, etc.) independientemente de la expresión analítica. Empleando la observación de una gráfica, nunca podremos calcular la primitiva (o antiderivada) de la función correspondiente, porque para ello se necesita saber su expresión exacta. Lo que sí podemos es analizar si esa primitiva existe o no. Veamos las siguientes gráficas:

Figura 1

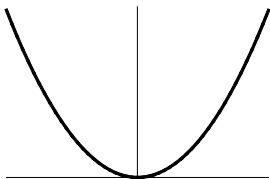


Figura 2

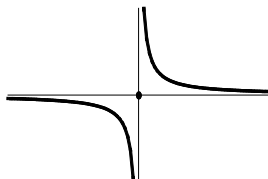
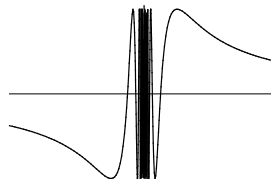


Figura 3



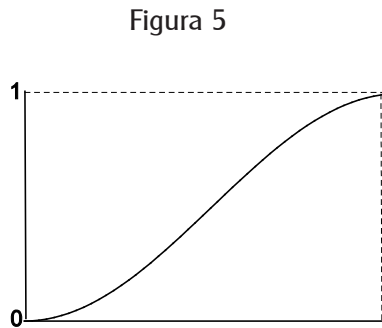
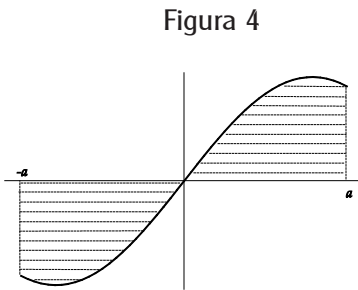
Por el teorema fundamental del cálculo integral, sabemos que si una función es continua, entonces tiene antiderivada, como es el caso de la figura 1. Las funciones correspondientes a las otras figuras son discontinuas. Desde un punto de vista visual se tiene que:

Si en la gráfica de una función no se aprecian discontinuidades evitables de salto o de salto infinito, entonces podría existir una antiderivada.

Por tanto, la función de la figura 2 no tiene primitiva. Las funciones cuyas gráficas son como la figura 3 nunca son de mucho interés para los alumnos, salvo por el hecho de que presentan un comportamiento errático en un punto. Pero son precisamente las funciones que tienen este tipo de discontinuidad las únicas no continuas que podrían tener antiderivada. Un análisis detallado de esto puede verse en Martínez (2009).

### CÁLCULO DE INTEGRALES DEFINIDAS VISUALIZANDO SIMETRÍAS

Un recurso para resolver ciertas integrales definidas consiste en apreciar la simetría de la gráfica de la función que se integra. Por ejemplo, si una función  $f(x)$  es continua en un intervalo  $[-a,a]$  y se verifica que  $f(x) = -f(-x)$  es impar, entonces  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ . Las gráficas de las funciones impares son simétricas respecto del origen (figura 4). Hay otras gráficas de funciones en las que se observa una simetría del mismo tipo que las impares, aunque no lo sean. Por ejemplo en la gráfica de la función  $\text{sen}^2 x$  en el intervalo  $[0,\pi/2]$  se percibe una simetría de este tipo respecto del punto medio del intervalo (figura 5).



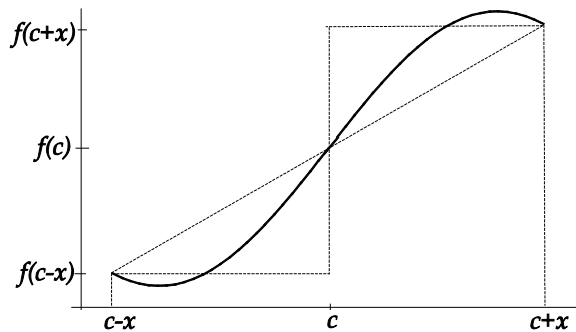
La siguiente definición se encuentra en Nelsen, 1995:

La gráfica de una función  $f(x)$  es simétrica respecto del punto  $(c, f(c))$  cuando

$$\frac{f(c - x) + f(c + x)}{2} = f(c)$$

Es decir, si se toman puntos situados simétricamente a ambos lados de  $c$ , sus imágenes están situadas simétricamente a ambos lados de  $f(c)$ , por tanto  $f(c)$  es el punto medio entre  $f(c-x)$  y  $f(c+x)$  (figura 6).

Figura 6



La condición para que la gráfica de una función  $f(x)$  continua en  $[a,b]$  sea simétrica respecto del punto medio del intervalo  $\frac{a+b}{2}$ , es:

$$f\left(\frac{a+b}{2}-x\right)+f\left(\frac{a+b}{2}+x\right)=2f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Tomando  $\frac{a+b}{2}-x=t$ , y renombrando la  $t$  como  $x$ , tenemos:

$$f(x)+f(a+b-x)=2f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

O lo que es lo mismo:

$$f(x)+f(a+b-x) \text{ es constante.}$$

Este tipo de funciones verifican el siguiente resultado (Nelsen, 1995):

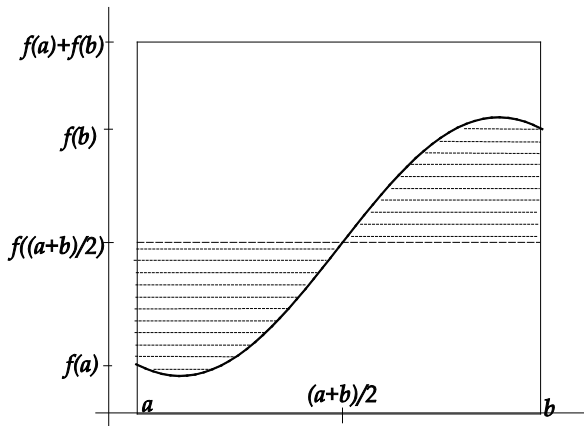
Si  $f(x)$  es continua en el intervalo  $[a,b]$  y  $f(x) + f(a + b - x)$  es constante entonces  $\int_a^b f(x)dx$  es el producto de  $(b - a)$  por la mitad de la constante.

La prueba analítica se obtiene empleando la condición de la función para escribir:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx - \int_a^b f(a+b-x)dx$$

Haciendo el cambio  $a + b - x = u$ , y puesto que  $\int_a^b f(a+b-x)dx = \int_a^b f(u)du$  se tiene el resultado. Pero si nos fijamos en la figura 7, es posible obtener una prueba visual quizás más instructiva que la anterior para el caso de funciones no negativas.

Figura 7  $\int_a^b f(x)dx = (b - a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$



La integral buscada coincide con el valor del área situada entre la gráfica y el eje x. Como las zonas rayadas de la figura 7 son iguales por la simetría, el área es la misma que la del rectángulo de base  $b - a$  y de altura el valor de la función en el punto medio del intervalo.

*Ejemplo 1.* Calcular visualmente  $\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 x \, dx$  (figura 5).

Paso 1. Observando la figura 5 percibimos la simetría.

Paso 2. Verificamos que se cumple la condición de que  $f(x) + f(a + b - x)$  es constante, porque  $\text{sen}^2 x + \text{sen}^2 (\pi/2 - x) = \text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$ .

Paso 3. El resultado final,  $\pi/4$ , es el producto de la longitud del intervalo por la mitad de la constante.

*Ejemplo 2.* Calcular visualmente el área bajo la función  $y = \frac{1}{4 + 2^x}$  en el intervalo  $[0,4]$  usando la figura 8.

Figura 8

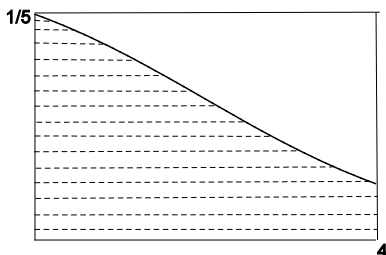
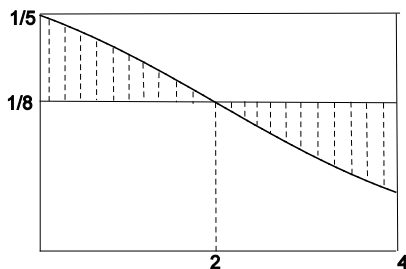


Figura 9



Observando la figura 8 percibimos la simetría. Comprobamos que es cierto pues  $\frac{1}{4 + 2^x} + \frac{1}{4 + 2^{4-x}} = \frac{1}{4}$ . Finalmente, el área, como se aprecia en la figura 9, es  $1/2$ .

**NOTA**

Hay muchos ejemplos de funciones como las anteriores. Para  $f(x)$  y  $g(x)$  continuas en  $[0, b]$ , las funciones del tipo  $f(x) = \frac{g(x)}{g(x) + g(b - x)}$ , con denominador

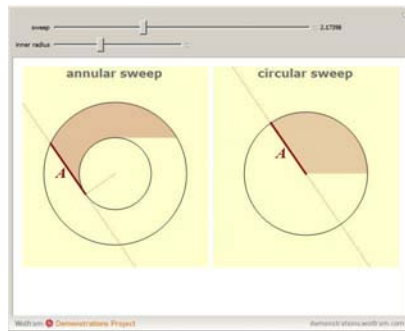
no nulo, cumplen la condición  $f(x) + f(b - x) = 1$ , por tanto  $\int_0^b f(x) \, dx = \frac{b}{2}$ .

Análogamente,  $\int_0^{\pi/2} \frac{g(\cos x)}{g(\cos x) + g(\sin x)} dx = \frac{\pi}{4}$  si  $g$  es continua en  $[0,1]$  y el denominador es no nulo.

## CÁLCULO VISUAL DE ÁREAS MEDIANTE LA SUBTANGENTE

En 1959 Mamikon Mnatsankian ideó una manera de obtener el área de un anillo circular de una manera dinámica. Se toma el segmento de longitud  $A$ , tangente a la circunferencia interior (figura 10). Moviéndolo alrededor de esta, se “barre” el anillo circular. Se traslada cada segmento, paralelamente a sí mismo, de modo que los puntos de tangencia se conviertan en un punto común. Así, cuando los segmentos se mueven alrededor de la circunferencia interior, los segmentos trasladados “barren” el área de la circunferencia de radio  $A$ . Por tanto, el área del anillo circular coincide con el de la circunferencia de radio  $A$ .

Figura 10



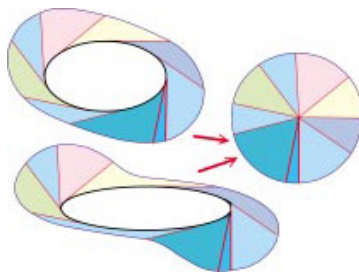
La imagen anterior ha sido obtenida de: <http://demonstrations.wolfram.com/MamikonsProofOfThePythagoreanTheorem/>

Reemplazando el círculo interior por una elipse o una curva convexa, se obtiene el mismo resultado. Es el denominado teorema de Mamikon para anillos ovales (véanse Apostol, 2000, y la figura 11):



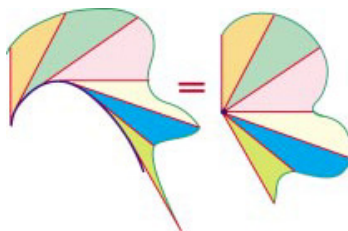
Todos los anillos ovales barridos por un segmento de longitud constante  $A$ , con un extremo tangente a una curva plana cerrada suave, tienen igual área, independientemente de la forma de la curva dada. Su valor es  $\pi A^2$ .

Figura 11



El caso de curvas no cerradas y segmentos tangentes de longitud variable se ilustra en la figura 12.

Figura 12

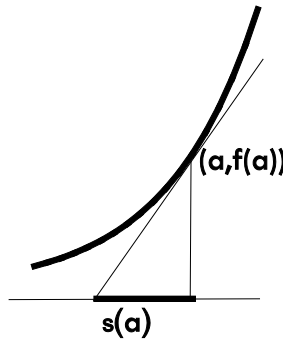


La parte izquierda se denomina *tangent sweep* (barrido de tangentes): es la región determinada por segmentos de longitud variable, tangentes por uno de sus extremos a una curva. La parte derecha se denomina *tangent cluster* (racimo de tangentes): es la región obtenida al trasladar esos segmentos, paralelamente a sí mismos, de modo que los puntos de tangencia se conviertan en un punto común. El teorema de Mamikon, cuya demostración está en Apostol (2002a), dice lo siguiente:

El área de una *tangent sweep* es igual al de su correspondiente *tangent cluster*, independientemente de la silueta de la curva de partida.

Como herramienta para calcular áreas de recintos utilizando la idea anterior, se necesita el concepto de subtangente. Dada una curva  $y = f(x)$ , la ecuación de la recta tangente en  $(a, f(a))$  es  $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ . Supongamos que  $f'(a) \neq 0$ . Haciendo  $y = 0$ , se obtiene el punto por el que la tangente corta al eje  $x$ :  $(a - s(a), 0)$ , donde  $s(a) = \frac{f(a)}{f'(a)}$  es la denominada subtangente (véase la figura 13).

Figura 13



Este concepto, bastante olvidado en la enseñanza actual, es el que permite obtener las *tangent sweep* y calcular las áreas de una forma visual. Esto se ilustra a continuación con tres ejemplos.

**CÁLCULO VISUAL DEL ÁREA BAJO LA EXPONENCIAL  $y = e^{\frac{x}{b}}$ ,  $b > 0$  ENTRE  $-\infty$  Y  $x$**

En la figura 14 se observa la *tangent sweep* correspondiente a esta función, cuya área es  $S$ . La subtangente de la exponencial es constante y vale  $b$ . Esto permite que podamos colocar el *tangent cluster* como se ve en la figura 15.

Figura 14

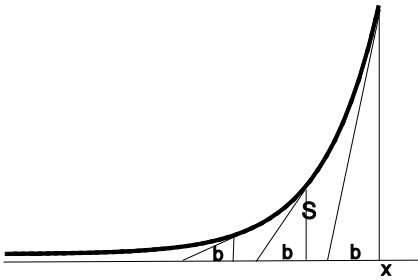
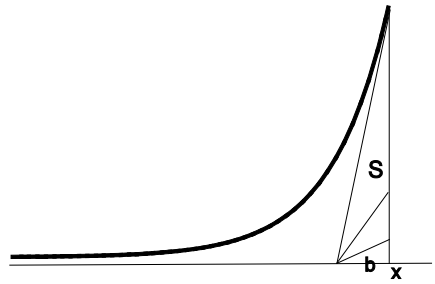


Figura 15



Por tanto, el área buscada es dos veces la del triángulo de la figura 15, de base  $b$  y de altura  $e^{\frac{x}{b}}$ .

CÁLCULO VISUAL DEL ÁREA BAJO LA PARÁBOLA  $y = x^2$  ENTRE 0 Y  $x$

Observemos las tres figuras que siguen:

Figura 16

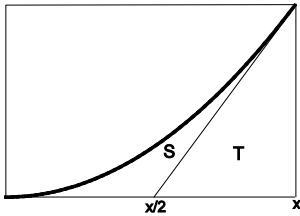


Figura 17

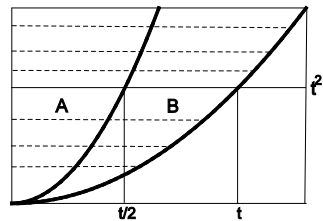
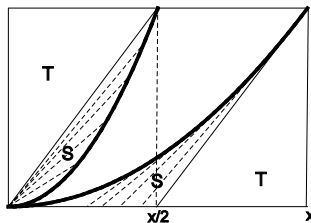


Figura 18



Denominemos R al área del rectángulo de base  $x$  y altura  $x^2$ . En la figura 16 vemos que el área buscada vale  $S + T$ . Ambas partes están divididas por la tangente, donde  $x/2$  es el valor de la subtangente.

En la figura 17 se han dibujado las parábolas  $x^2$  y  $(2x)^2$ . Se observa que a cada altura  $t^2$  le corresponde un segmento que va del eje  $y$  hasta la parábola de la izquierda de longitud  $t/2$ , y otro que llega hasta la parábola de la derecha de longitud  $t$ . Por tanto, se verifica que  $A = B$ , donde A es la zona situada por encima de  $(2x)^2$  y B es la zona entre las dos parábolas.

En la figura 18, los segmentos tangentes a  $x^2$  forman la *tangent sweep*. Al trasladarlos paralelamente a sí mismos hasta que todos tengan el mismo punto en común, obtenemos el *tangent cluster*.

Finalmente, vemos que  $A = S + T = B$ , por tanto  $R = A + B + S + T = 3(S + T)$ , por lo que el área buscada es un tercio del área del rectángulo.

### CÁLCULO VISUAL DEL ÁREA BAJO LA CURVA $y = x^3$ ENTRE 0 Y $x$

Observemos las tres figuras que siguen:

Figura 19

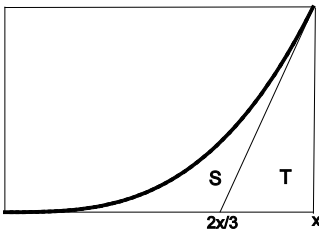


Figura 20

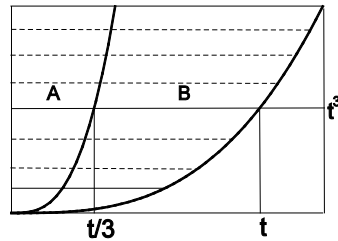
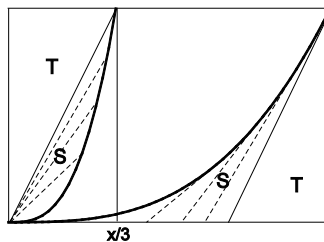


Figura 21



La subtangente de  $x^3$  es  $x/3$ , y el área buscada (figura 19) es  $S + T$ . En la figura 20 se han dibujado las curvas  $x^3$  y  $(3x)^3$ . Se observa que a cada altura  $t^3$  le corresponde un segmento que va del eje y hasta la curva de la izquierda de longitud  $t/3$ , y otro que llega hasta la curva de la derecha de longitud  $t$ . Por tanto, se verifica que  $2A = B$ , donde  $A$  es la zona situada por encima de  $(3x)^3$  y  $B$  es la zona entre las dos curvas. Finalmente, si  $R$  es el área del rectángulo, la observación de la figura 21 permite visualizar que  $R = A + B + S + T = 4(S + T)$ , por lo que el área buscada es un cuarto del área del rectángulo. De forma análoga para las curvas  $x^n$ , donde  $n$  es un número natural.

Otros cálculos de áreas pueden verse en Apostol (2000) y en Apostol y Mnatsankian (2002a y 2002b), o en la página de Internet: <http://www.its.caltech.edu/~mamikon/calculus.html>

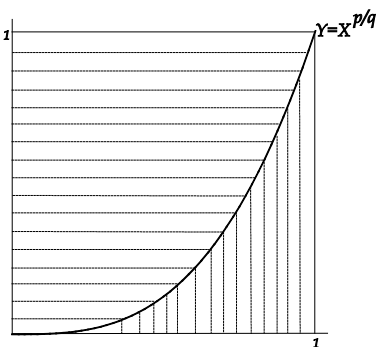
### CÁLCULO VISUAL DE INTEGRALES DEFINIDAS UTILIZANDO LA FUNCIÓN INVERSA

La inversa de una función es el último recurso que emplearemos para el cálculo visual de integrales definidas. Consideremos la siguiente integral (Nelsen, 2000, p. 62),

$$\int_0^1 (t^{q/p} + t^{p/q}) dt, \text{ para } p, q > 0.$$

El resultado es evidente si visualizamos el área limitada por la función  $y = x^{p/q}$  y el eje  $x$ , y el de su inversa  $x = y^{q/p}$  y el eje  $y$  (figura 22).

Figura 22



Una versión interactiva de la figura 22 puede verse en: <http://demonstrations.wolfram.com/VisualComputationOfAnIntegral/>

La misma idea del ejemplo anterior permite visualizar el método de integración por partes (figura 23).

Figura 23

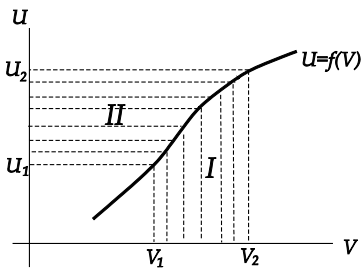
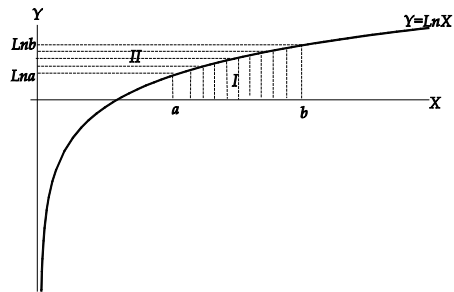


Figura 24



Observando la figura 23 vemos que el área I es  $\int_{V_1}^{V_2} U dV$ . Utilizando la inversa  $V = f^{-1}(U)$ , el área II es  $\int_{U_1}^{U_2} V dU$ . Teniendo en cuenta que Área I + Área II =  $(U_2V_2) - (U_1V_1)$ , obtenemos la fórmula:

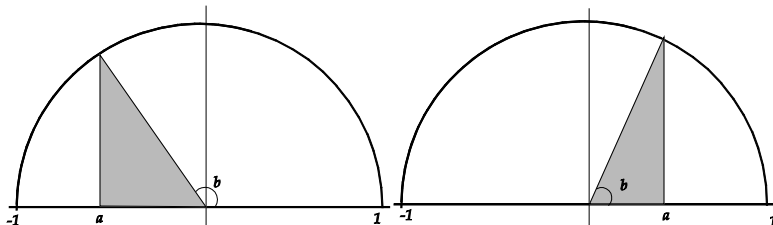
$$\int_{V_1}^{V_2} U dV = U_2V_2 - U_1V_1 - \int_{U_1}^{U_2} V dU$$

Utilizando esta misma técnica, en Nelsen (2001) se ofrece la visualización de la integral del logaritmo neperiano  $\int_a^b \ln x dx$  (figura 24). El área I es  $\int_a^b \ln x dx$ . Utilizando la inversa  $x = e^y$ , el área II es  $\int_{\ln a}^{\ln b} e^y dy$ . Por último:

$$\int_a^b \ln x dx = b \ln b - a \ln a - \int_{\ln a}^{\ln b} e^y dy = x \ln x \Big|_a^b - (b - a) = (x \ln x - x) \Big|_a^b$$

Para finalizar, veamos el cálculo visual de la integral  $\int_a^1 \sqrt{1-x^2} dx$ ,  $a \in [-1,1]$  (Chamberland, 2001). Para ello se emplea la gráfica de  $y = \sqrt{1-x^2}$  (figura 25).

Figura 25



Una versión interactiva de esta figura puede verse en: <http://demonstrations.wolfram.com/VisualComputationOfAnIntegralIII/>

Si  $a \in [-1,0]$ , en la figura 25 izquierda, vemos que  $\int_a^1 \sqrt{1-x^2} dx$  es igual al área del sector circular,  $\frac{b}{2}$ , más el del triángulo,  $\frac{(-a)\sqrt{1-a^2}}{2}$ . Utilizando la inversa del coseno se obtiene:

$$\int_a^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{b}{2} + \frac{(-a)\sqrt{1-a^2}}{2} = \frac{\arccos a}{2} - \frac{a\sqrt{1-a^2}}{2}$$

Análogamente, si  $a \in [0,1]$ , en la figura 25 derecha vemos que  $\int_a^1 \sqrt{1-x^2} dx$  es igual al área del sector circular menos el del triángulo, por tanto:

$$\int_a^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{b}{2} - \frac{a\sqrt{1-a^2}}{2} = \frac{\arccos a}{2} - \frac{a\sqrt{1-a^2}}{2}$$

## CONCLUSIÓN

El cálculo de integrales requiere la utilización de los métodos algebraicos de obtención de primitivas. Pero si complementamos estas enseñanzas con los procesos imaginativos descritos en este artículo, conseguiremos que los alumnos

se motiven, ayudándolos a lograr una intuición de lo abstracto, y haremos que el proceso de enseñanza y aprendizaje sea más fluido e intuitivo.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Apostol, T. (2000), "A visual approach to Calculus problems", *Engineering & Science*, núm. 3, pp. 23-31.
- Apostol, T., y Mamikon A. Mnatsankian (2002a), "Subtangents. An aid to visual Calculus", *Amer. Math. Monthly*, vol. 109, núm. 6, pp. 523-533.
- (2002b), "Tangents and subtangents used to calculate areas", *Amer. Math. Monthly*, vol. 109, núm. 10, pp. 900-907.
- Arcavi, A. (2003), "The role of visual representations in the learning of mathematics", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 52, núm. 3, pp. 215-24.
- Chamberland, M. (2001), "Proof without Words: Look Ma, No Substitution!", *Mathematics Magazine*, vol. 74, núm. 1, p. 55.
- Eisenberg T., y T. Dreyfus (1990), "On the Reluctance to Visualize in Mathematics", en W. Zimmermann y S. Cunningham (eds.), *Visualization in Teaching and Mathematics*, Estados Unidos, MAA Series.
- Guzmán, Miguel (1996), *El rincón de la pizarra: ensayos de visualización en análisis matemático*, Madrid, España, Pirámide.
- Hitt, F. (2003), "Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología", *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, vol. X, núm. 2, pp. 213-223.
- Martínez, F. (2009), "Derivadas y antiderivadas", *Números*, núm. 70, pp. 67-74, [http://www.sinewton.org/numeros/numeros/81/Articulos\\_03.pdf](http://www.sinewton.org/numeros/numeros/81/Articulos_03.pdf).
- (2012), "Errores en el producto, evaluación y gráficas de polinomios", *Números*, núm. 81, pp. 25-31, [http://www.sinewton.org/numeros/numeros/81/Articulos\\_03.pdf](http://www.sinewton.org/numeros/numeros/81/Articulos_03.pdf).
- Nelsen, R. (1995), "Symmetry and integration", *The College Mathematics Journal*, vol. 26, núm. 1, pp. 39-41.
- (2000), *Proofs without words II*, Estados Unidos, The Mathematical Association of America.
- (2001), "Mathematics without words: integrating the natural logarithm", *The College Mathematics Journal*, vol. 32, núm. 5, p. 368.



Presmeg, N. C. (2006), "Research on visualization in learning and teaching mathematics", en Sense Publishers (ed.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, pp. 205-235.

Zimmerman, W., y S. Cunningham (eds.) (1991), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, Estados Unidos, The Mathematical Association of America (Notes 19).

#### **DATOS DEL AUTOR**

**Félix Martínez de la Rosa**

Universidad de Cádiz, Cádiz, España

felix.martinez@uca.es