

Ayudas de diseño para trabes de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas: Parte 1

Carla Yaneth Crispín Herrera, Arnulfo Luévanos Rojas, Sandra López Chavarría,
Manuel Medina Elizondo

Universidad Autónoma de Coahuila,
Instituto de Investigaciones Multidisciplinarias,
México

arnulfol_2007@hotmail.com

Resumen. En este trabajo se presentan las ayudas al diseño más utilizadas para vigas de sección rectangular con cartelas parabólicas. Las variables consideradas son: las alturas en sus dos extremos varían de forma parabólica, el ancho de la viga es constante y la altura en la parte central es constante. La viga se encuentra sometida a una carga uniformemente distribuida, que toma en cuenta las deformaciones por flexión y cortante para obtener los factores de momentos de empotramiento, los factores de transporte o arrastre y los factores de rigidez, que es la principal aportación de este trabajo de investigación. Las simplificaciones son: las alturas en sus dos extremos son iguales, por ser estas las más utilizadas por la estética en las construcciones arquitectónicas, y la altura total de la viga en la parte central se considera de 0.10 de la longitud de la viga según el código ACI (Instituto Americano del Concreto) para el control de deflexión. Además, se muestra un ejemplo numérico utilizando las ayudas de diseño, y se compara con las ecuaciones previamente descritas por los autores en un artículo anterior a este documento, y los resultados son iguales con una aproximación de tres dígitos. Por lo tanto, las ayudas de diseño proporcionan una gran herramienta de ayuda para los ingenieros estructurales por el gran ahorro de tiempo.

Palabras clave. Ayudas de diseño, trabes rectangulares, cartelas parabólicas, carga uniformemente distribuida, factores para momentos de empotramiento, factores de transporte, factores de rigidez.

Design Aids for Beams of Rectangular Cross Section with Parabolic Haunches: Part 1

Abstract. In this paper, the most used design aids for beams of rectangular section with parabolic haunches

are presented. The variables considered are: the heights at its two ends vary parabolically, the width of the beam is constant, and the height in the central part is constant. The beam is found subjected to a uniformly distributed load, which takes into account the bending and shear deformations to obtain the fixed-end moments factors, the carry-over factors and the stiffness factors, which is the main contribution of this research work. The simplifications are: the heights at its two ends are equal, as these are the most used by aesthetics in architectural constructions, and the total height of the beam in the central part is considered of 0.10 of the length of the beam according to the ACI (American Concrete Institute) code for deflection control. Also, a numerical example is shown using the design aids, and it is compared with the equations previously described by the authors in an article prior to this document, and the results are equal to a three-digit approximation. Therefore, design aids provide a great tool of help for structural engineers by the greatly time-savings.

Keywords. Design aids, rectangular berms, parabolic haunches, uniformly distributed load, fixed-end moments factors, carry-over factors, stiffness factors.

1. Introducción

Las trabes de concreto reforzado no prismáticas (trabes con cartelas en sus extremos) se diferencian de las prismáticas porque la altura de la trabe varía en tres partes diferentes, siendo la altura mayor en los extremos de la trabe y en la parte central es constante. La principal aplicación es en edificios de gran altura, puentes y viaductos que tienen trabes de gran longitud, ya que los momentos máximos en valor absoluto se presentan en los extremos de las trabes.

Las ayudas al diseño se representan por medio de tablas y gráficas que describen procedimientos con los que se pretende acortar el trabajo rutinario de los diseños estructurales. Las ayudas al diseño son el resultado de una selección de los materiales y secciones transversales disponibles, para ofrecer al diseñador solo el que se considera el más utilizado y el más reciente.

Los trabajos más importantes de algunos investigadores sobre el tema de ayudas de diseño son: Guldán, PCA (Portland Cement Association), Hibbeler presentaron ayudas de diseño para traveses rectangulares con cartelas rectas y parabólicas tomando en cuenta únicamente las deformaciones por flexión, estas se presentan por tablas [1-3]. Tena-Colunga desarrollo ayudas de diseño para traveses de sección transversal "T" e "I" con cartelas rectas tomando en cuenta las deformaciones por flexión y cortante, estas se presentan por tablas [4]. Gupta y Friel propusieron ayudas de diseño para muros de contención en voladizo o traveses en cantiliver de concreto reforzado por el método de diseño de resistencia para minimizar el proceso iterativo del diseño, estas se presentan por tablas [5].

Park *et al.* presentaron ayudas de diseño para una trabe de concreto reforzado basadas en el concepto de costo mínimo por gráficas para distintas resistencias de concreto y distintos anchos de trabe [6]. Chandrasekaran *et al.* desarrollaron ayudas de diseño para cáscaras cilíndricas de concreto reforzado bajo cargas uniformemente distribuidas [7]. Rodríguez-Gutiérrez y Aristizabal-Ochoa propusieron ayudas de diseño para zapatas rígidas simétricas de forma rectangular y trapezoidal (cimentaciones superficiales o poco profundas) para encontrar la máxima capacidad de carga axial y momento biaxial sin exceder la capacidad carga del suelo para tres tipos diferentes de distribución de presión del suelo sobre zapata: uniforme, lineal y parabólico [8].

Zofkie presento ayudas de diseño para determinar la deflexión de traveses reforzadas en parte de su longitud mediante gráficas para obtener la máxima deflexión de una trabe [9]. Sun y Lu, Taylor *et al.* desarrollaron ayudas de diseño por medio de diagramas de interacción para columnas rectangulares y circulares de concreto reforzado con diferentes proporciones y

diferentes resistencias de acero y concreto [10, 11]. Hashmi propuso ayudas de diseño para traveses de concreto reforzado para encontrar la cantidad de acero transversal y longitudinal necesaria de acuerdo a la solicitación sísmica que se plantea [12]. Varyani y Radhaji presentaron ayudas de diseño para el diseño en el estado límite de elementos de concreto reforzado (losas, traveses, columnas, zapatas, muros de contención, tanques de agua) por medio de tablas, gráficos y figuras [13]. Mohammed desarrollo ayudas de diseño para traveses de doble T de concreto pretensado con abertura en el alma asociada a la variación de su resistencia a la compresión [14].

Mishra y Gupta propusieron ayudas de diseño para traveses y columnas de acero estructural de acuerdo al código IS800: 2007 [15]. Schultz y Jesse presentaron ayudas para el diseño de esfuerzos simplificado para traveses helicoidales utilizando ecuaciones de diseño expresadas en función de sección transversal de la viga (módulo de sección en "X" e "Y") por medio de curvas ajustadas para diferentes secciones transversales [16]. Hashmi *et al.* estudiaron un enfoque para desarrollar curvas para ilustrar la relación entre las tensiones en el refuerzo de acero no cedido, el coeficiente de momento de resistencia y el porcentaje de refuerzo de tensión y compresión para secciones de concreto reforzado [17].

Otros trabajos para secciones variables (miembros no prismáticos) son: "Modelado para vigas de sección transversal "I" sometidas a una carga uniformemente distribuida con cartelas rectas" [18], y otro trabajo "Modelado para momentos de empotramiento de secciones "I" con cartelas rectas bajo carga concentrada" [19]. "Modelado de elementos mecánicos de miembros rectangulares con cartelas rectas utilizando software: Parte 1" [20], y otro trabajo "Modelado de elementos mecánicos de miembros rectangulares con cartelas rectas utilizando software: Parte 2" [21].

Los principales trabajos sobre el tema de vigas de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas son: "Un modelo matemático para vigas rectangulares de sección transversal variable de forma parabólica simétrica para una carga uniformemente distribuida", pero este trabajo considera las deformaciones por flexión [22]. "Elementos mecánicos de miembros

rectangulares no prismáticos para cartelas parabólicas simétricas sometidos a una carga uniformemente distribuida”, pero este trabajo no considera las deformaciones por cortante [23]. “Modelado para traves de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas: Parte 1”, este trabajo considera las deformaciones por flexión y cortante [24]. “Modelado para traves de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas: Parte 2”, este trabajo toma en cuenta las deformaciones por flexión y cortante [25].

Por lo tanto, la revisión de la literatura muestra claramente que no existe una relación cercana con el tema de ayudas de diseño para traves de sección rectangular con cartelas parabólicas bajo una carga uniformemente distribuida para obtener los factores de momentos de empotramiento, factores de transporte y factores de rigidez que es abordado en este documento.

Este trabajo presenta las ayudas de diseño para traves de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas bajo una carga uniformemente distribuida para obtener los factores de momentos de empotramiento, los factores de transporte y los factores de rigidez, que es el aporte de esta investigación. Las ayudas de diseño se desarrollan utilizando las ecuaciones descritas anteriormente [24].

Las simplificaciones realizadas son las siguientes: u (altura de las cartelas parabólicas en el lado izquierdo) = s (altura de las cartelas parabólicas en el lado derecho) porque esta es la más utilizada por las formas arquitectónicas (estética), h (altura de la viga en la parte central) = $0.1L$ (longitud de la viga) que propone el código del ACI (American Concrete Institute) [26] para controlar las deflexiones.

También, un ejemplo se presenta para mostrar la simplicidad y efectividad de las ayudas de diseño propuestas en este documento para traves de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas sometidas a una carga uniformemente distribuida.

2. Ayudas de diseño

La Figura 1 muestra una viga isométrica de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas en cada extremo, donde “ a ” es la

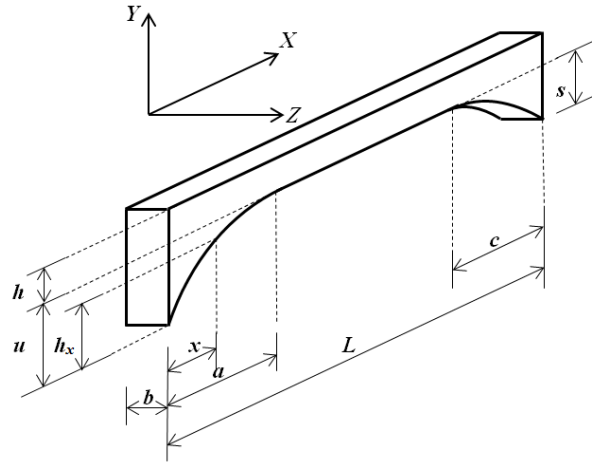


Fig. 1. Trabe isométrica de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas

longitud horizontal de la cartela parabólica en el lado izquierdo, “ b ” es el ancho de la viga (constante) y “ c ” es la longitud horizontal de la cartela parabólica en el lado derecho.

Las ayudas de diseño para elementos de sección rectangular con cartelas parabólicas consisten en obtener los factores de momentos de empotramiento para una carga uniformemente distribuida, los factores de transporte y factores de rigidez mediante diagramas simplificados a partir de las ecuaciones propuestas por Velázquez-Santillán *et al.* [24].

Las simplificaciones realizadas son las siguientes: $u = s$ porque esta es la más utilizada por las formas arquitectónicas (estética), $h = 0.1L$ que propone el código del ACI para controlar las deflexiones.

2.1. Factores de momentos de empotramiento

Las ecuaciones de momentos de empotramiento para carga uniformemente distribuida se obtienen a partir de las ecuaciones (13 y 14) [24]:

$$M_{AB} = \frac{f_{22}\theta_A - f_{12}\theta_B}{f_{12}^2 - f_{11}f_{22}}, \quad (1)$$

$$M_{BA} = \frac{f_{12}\theta_A - f_{11}\theta_B}{f_{12}^2 - f_{11}f_{22}}, \quad (2)$$

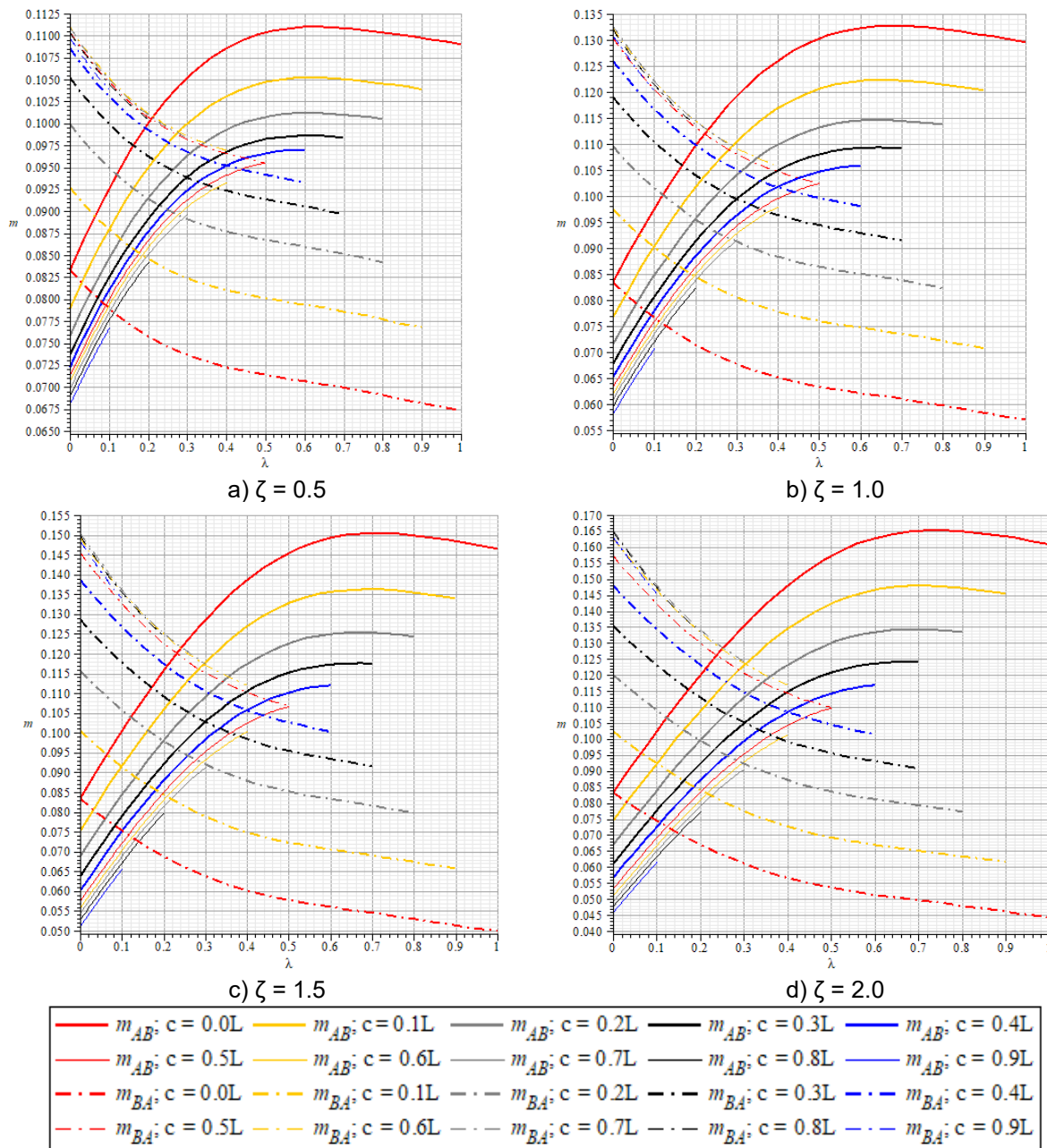


Fig. 2. Factores de momentos de empotramiento para carga uniformemente distribuida

donde: " M_{AB} " y " M_{BA} " son los momentos de empotramiento en sus respectivos apoyos; " f_{11} ", " f_{22} " y " f_{12} " son los coeficientes de flexibilidades; " Θ_A " y " Θ_B " son las rotaciones en cada apoyo. Las ecuaciones para obtener " f_{11} ", " f_{22} " y " f_{12} " se

muestran en las ecuaciones (10, 11 y 12) respectivamente [24]. Las ecuaciones para encontrar " Θ_A " y " Θ_B " se presentan en las ecuaciones (5 y 6) respectivamente [24]. Sustituyendo las ecuaciones de los coeficientes de

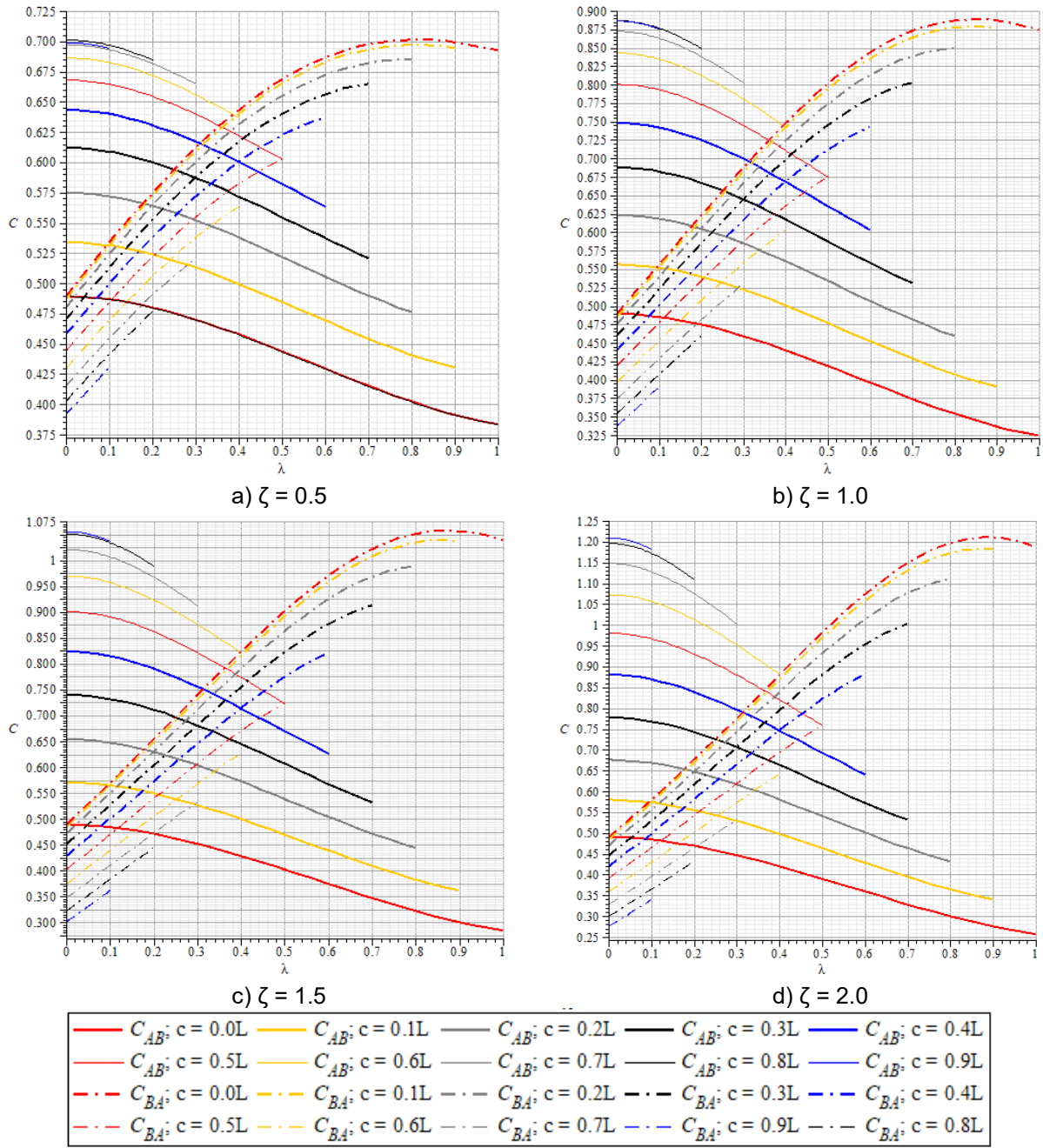


Fig. 3. Factores de transporte

flexibilidades y las rotaciones en las ecuaciones (1) y (2) se obtienen los factores de momentos de empotramiento como sigue:

$$M_{AB} = m_{AB}wL^2, \quad (3)$$

$$M_{BA} = m_{BA}wL^2, \quad (4)$$

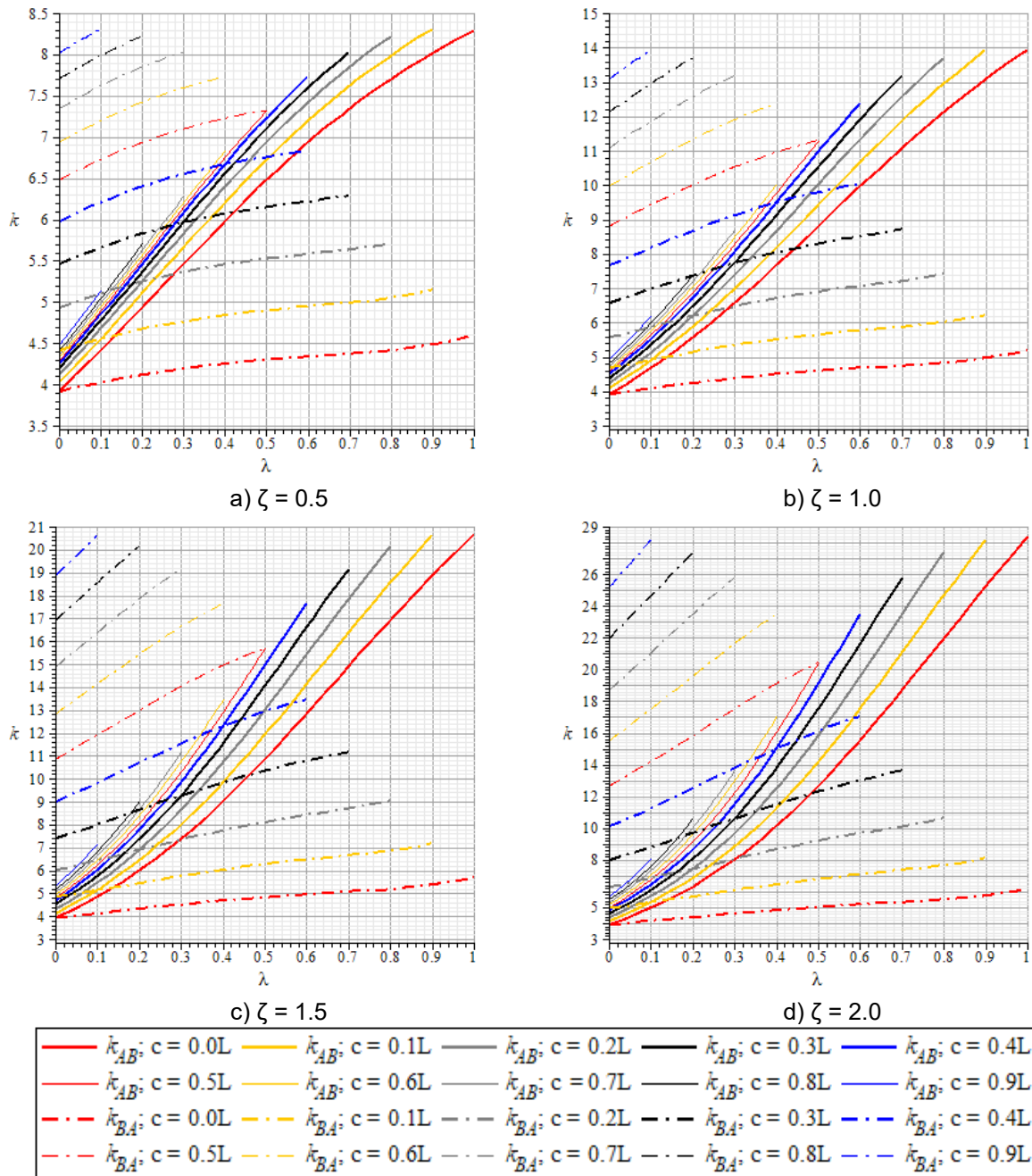


Fig. 4. Factores de rigidez

donde: “ m_{AB} ” y “ m_{BA} ” son los factores de momentos de empotramiento, “ w ” es la carga uniformemente distribuida y “ L ” es la longitud de la trabe. Los factores de momentos de empotramiento “ m_{AB} ” y

“ m_{BA} ” se presentan en función de E (módulo de elasticidad), G (módulo de cortante), ν (coeficiente de Poisson), a (longitud horizontal de la cartela parabólica izquierda), b (ancho de la viga), c

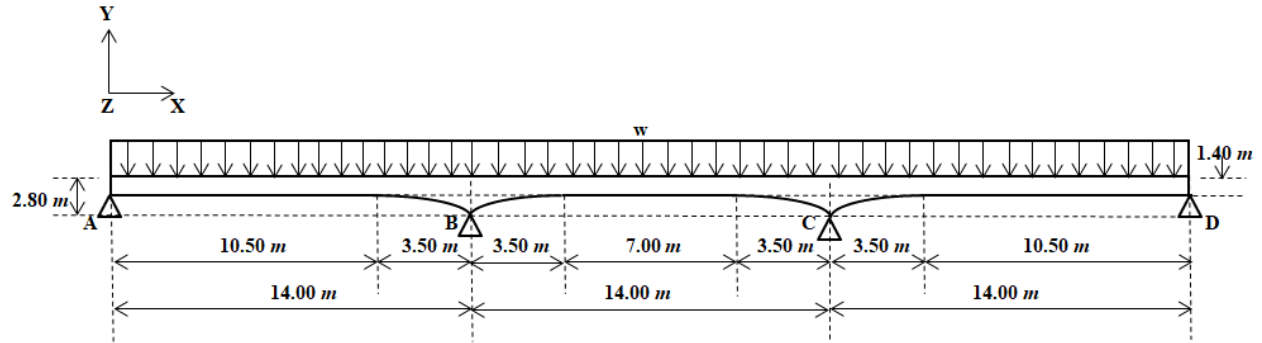


Fig. 5. Trabe continua de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas

(longitud horizontal de la cartela parabólica derecha), L (longitud de la trabe), u (altura de la cartela parabólica izquierda), s (altura de la cartela parabólica derecha), h (altura de la trabe en la parte central).

Las ayudas de diseño para factores de momentos de empotramiento se obtienen a partir de las ecuaciones (3 y 4) tomando en cuenta $u = s = \zeta h$ (ζ toma valores de 0.5, 1.0, 1.5, 2.0); $a = \lambda L$ (λ toma cualquier valor de 0 a 1); $c = \kappa L$ (κ toma valores de 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9); $h = 0.1L$; $v = 0.20$ para concreto [24]. Para $c = 0L$ se considera $u = \zeta h$; $s = 0$.

Las ayudas de diseño para factores de momento de empotramiento se obtienen de la siguiente manera:

1. El material y las propiedades geométricas de la viga se definen ($c = \kappa L$, $h = 0.1L$, $v = 0.20$, $u = s = \zeta h$, $a = \lambda L$), y para $c = 0L$ se considera $u = \zeta h$ y $s = 0$.
2. Sustituyendo cada valor de κ en la ecuación (13) para obtener m_{AB} y en la ecuación (14) para obtener m_{BA} [24]. Estas gráficas se muestran en función de λ .
3. Las ecuaciones simplificadas se obtienen utilizando el software Derive.
4. Ahora, las gráficas se obtienen usando el software Maple.

Los diagramas simplificados se muestran en función de λ en la Figura 2.

2.2. Factores de transporte

Las ecuaciones para los factores de transporte se obtienen a partir de las ecuaciones (18 y 19) [24]:

$$C_{AB} = \frac{f_{12}}{f_{22}}, \quad (5)$$

$$C_{BA} = \frac{f_{12}}{f_{11}}, \quad (6)$$

donde: " C_{AB} " y " C_{BA} " son los factores de transporte.

Sustituyendo las ecuaciones de los coeficientes de flexibilidades en las ecuaciones (5) y (6) se obtienen los factores de transporte.

Las ayudas de diseño para factores de transporte se obtienen a partir de las ecuaciones (5) y (6) tomando en cuenta $u = s = \zeta h = 0.5L, 1.0L, 1.5L, 2.0L$; $a = \lambda L$; $c = \kappa L = 0.0L, 0.1L, 0.2L, 0.3L, 0.4L, 0.5L, 0.6L, 0.7L, 0.8L, 0.9L$; $h = 0.1L$; $v = 0.20$ para concreto [24]. Para $c = 0L$ se considera $u = \zeta h$; $s = 0$.

El procedimiento para encontrar las ayudas de diseño para los factores de transporte es el mismo que se usa para los factores de momentos de empotramiento.

Los diagramas simplificados se muestran en función de λ en la Figura 3.

2.3. Factores de rigidez

Las ecuaciones para los factores de rigidez se obtienen a partir de las ecuaciones (24 y 25) [24]:

$$k_{AB} = \frac{12Lf_{22}}{bh^3E(f_{11}f_{22} - f_{12}^2)}, \quad (7)$$

$$k_{BA} = \frac{12Lf_{11}}{bh^3E(f_{11}f_{22} - f_{12}^2)}, \quad (8)$$

donde: " k_{AB} " y " k_{BA} " son los factores de rigidez.

Sustituyendo las ecuaciones de los coeficientes de flexibilidades en las ecuaciones (7) y (8) se obtienen los factores de rigidez.

Las ecuaciones para las rigideces absolutas se obtienen a partir de las ecuaciones (22 y 23) [24]:

$$K_{AB} = \frac{k_{AB}EI}{L}, \quad (9)$$

$$K_{BA} = \frac{k_{BA}EI}{L}, \quad (10)$$

donde: " I " es el momento de inercia en la parte central de la trabe.

Las ayudas de diseño para factores de rigidez se obtienen a partir de las ecuaciones (7) y (8) tomando en cuenta $u = s = \zeta h = 0.5L, 1.0L, 1.5L, 2.0L$; $a = \lambda L$; $c = \kappa L = 0.0L, 0.1L, 0.2L, 0.3L, 0.4L, 0.5L, 0.6L, 0.7L, 0.8L, 0.9L$; $h = 0.1L$; $v = 0.20$ para concreto [24]. Para $c = 0L$ se considera $u = \zeta h$; $s = 0$.

El procedimiento para encontrar las ayudas de diseño para los factores de rigidez es el mismo que se usa para los factores de momentos de empotramiento.

Los diagramas simplificados se muestran en función de λ en la Figura 4.

3. Aplicación de las ayudas de diseño

La Figura 5 muestra una trabe continua sobre cuatro apoyos de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas en los apoyos internos. Los datos constantes para toda la trabe son: $v = 0.20$ para concreto, $G = 5E/12$, $w = 30 \text{ kN/m}$, $b = 0.70 \text{ m}$.

La Figura 6 presenta las tres trabes separadas y los momentos de empotramiento en sus extremos para carga uniformemente distribuida. Los momentos finales se obtienen usando las ayudas de diseño propuestas en este documento, y la solución se obtiene por los métodos matriciales.

Nota: la distancia horizontal de las cartelas se consideran de 3.5 m , porque generalmente los puntos de inflexión se ubican a $1/4$ de la longitud de la trabe a partir de los apoyos.

Los datos de la trabe A-B son: $a = 0.00 \text{ m}$; $c = 3.50 \text{ m}$; $h = 1.40 \text{ m}$; $u = 0.00 \text{ m}$; $s = 1.40 \text{ m}$; $L = 14.00 \text{ m}$; $w = 30 \text{ kN/m}$. Para usar las ayudas de

diseño, estas se invierten en los apoyos porque las cartelas se ubican en el lado derecho y en las gráficas se localizan en el lado izquierdo. Las gráficas que se deben de son: Figura 2(b) para los factores de momentos de empotramiento, Figura 3(b) para los factores de transporte, Figura 4(b) para los factores de rigidez.

Ahora, para usar las ayudas de diseño, los valores invertidos son: $\lambda = a/L = 0.25$; $\kappa = c/L = 0$; $\zeta = u/h = 1.00$; $s = 0$. Las gráficas mostradas en la Figura 2(b) se usan para obtener los factores de momentos de empotramiento en ambos extremos ($\zeta = 1.00$), y los factores de momentos de empotramiento invertidos en los apoyos son: $m_{AB} = 0.069$ ($c = 0.0L$) y $m_{BA} = 0.115$ ($c = 0.0L$), y los momentos de empotramiento son: $M_{FAB} = 405.72 \text{ kN-m}$ y $M_{FBA} = 676.20 \text{ kN-m}$. Las gráficas mostradas en la Figura 3(b) se usan para obtener los factores de transporte en ambos extremos ($\zeta = 1.00$), y los factores de transporte invertidos en los apoyos son: $C_{AB} = 0.656$ ($c = 0.0L$) y $C_{BA} = 0.468$ ($c = 0.0L$). Las gráficas mostradas en la Figura 4(b) se usan para obtener los factores de rigidez en ambos extremos ($\zeta = 1.00$), y los factores de rigidez invertidos en los apoyos son: $k_{AB} = 4.31$ ($c = 0.0L$) y $k_{BA} = 6.05$ ($c = 0.0L$), y las rigideces absolutas son: $K_{AB} = 4.31EI/L$ y $K_{BA} = 6.05EI/L$.

Los datos de la trabe B-C son: $a = 3.50 \text{ m}$; $c = 3.50 \text{ m}$; $h = 1.40 \text{ m}$; $u = 1.40 \text{ m}$; $s = 1.40 \text{ m}$; $L = 14.00 \text{ m}$; $w = 30 \text{ kN/m}$. Ahora, para usar las ayudas de diseño, los valores son: $\lambda = a/L = 0.25$; $\kappa = c/L = 0.25$; $\zeta = u/h = s/h = 1.00$. Las gráficas mostradas en la Figura 2(b) se usan para obtener los factores de momentos de empotramiento en ambos extremos para $\lambda = 0.25$, $\kappa = 0.20$ y $\zeta = 1.00$ ($m_{BC} = 0.100$ y $m_{CB} = 0.094$), y para $\lambda = 0.25$, $\kappa = 0.30$ y $\zeta = 1.00$ ($m_{BC} = 0.096$ y $m_{CB} = 0.102$). Ahora, por interpolación para $\kappa = 0.25$ se obtienen los factores de momentos de empotramiento en ambos extremos, y sus valores son: $m_{BC} = 0.098$ y $m_{CB} = 0.098$, y los momentos de empotramiento son: $M_{FBC} = 576.24 \text{ kN-m}$ y $M_{FCB} = 576.24 \text{ kN-m}$. Las gráficas mostradas en la Figura 3(b) se usan para obtener los factores de transporte en ambos extremos para $\lambda = 0.25$, $\kappa = 0.20$ y $\zeta = 1.00$ ($C_{BC} = 0.595$ y $C_{CB} = 0.636$), y para $\lambda = 0.25$, $\kappa = 0.30$ y $\zeta = 1.00$ ($C_{BC} = 0.656$ y $C_{CB} = 0.615$), por interpolación para $\kappa = 0.25$ se obtienen los factores de transporte en ambos extremos, y sus valores son: $C_{BC} = 0.626$ y $C_{CB} = 0.626$.

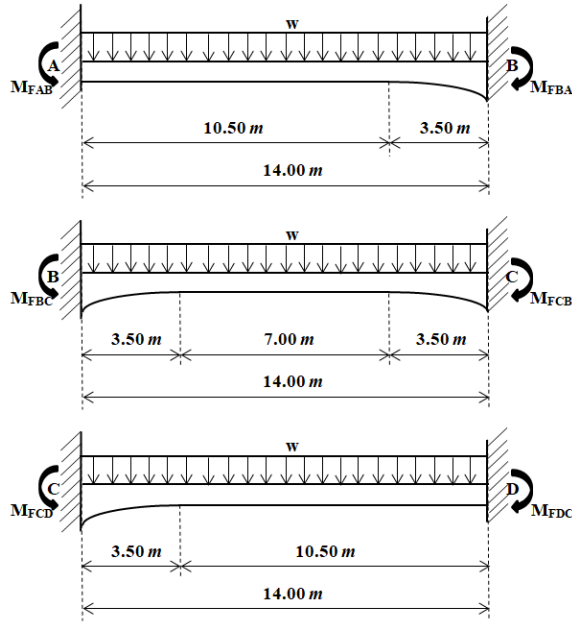


Fig. 6. Tres traveses individuales

Las gráficas mostradas en la Figura 4(b) se usan para obtener los factores de rigidez en ambos extremos para $\lambda = 0.25$, $\kappa = 0.20$ y $\zeta = 1.00$ ($k_{BC} = 6.76$ y $k_{CB} = 6.30$), y para $\lambda = 0.25$, $\kappa = 0.30$ y $\zeta = 1.00$ ($k_{BC} = 7.10$ y $k_{CB} = 7.56$), por interpolación para $\kappa = 0.25$ se obtienen los factores de rigidez en ambos extremos, y sus valores son: $k_{BC} = 6.93$ y $k_{CB} = 6.93$, y las rigideces absolutas son: $K_{BC} = 6.93EI/L$ y $K_{CB} = 6.93EI/L$.

Los datos de la trabe C-D son: $a = 3.50$ m; $c = 0.00$ m; $h = 1.40$ m; $u = 1.40$ m; $s = 0.00$ m; $L = 14.00$ m; $w = 30$ kN/m. Ahora, para usar las ayudas de diseño, los valores son: $\lambda = a/L = 0.25$; $\kappa = c/L = 0$; $\zeta = u/h = 1.00$; $s = 0$. Las gráficas mostradas en la Figura 2(b) se usan para obtener los factores de momentos de empotramiento en ambos extremos ($\zeta = 1.00$), y los factores de momentos de empotramiento en los apoyos son: $m_{CD} = 0.115$ ($c = 0.0L$) y $m_{DC} = 0.069$ ($c = 0.0L$), y los momentos de empotramiento son: $M_{FCD} = 676.20$ kN-m y $M_{FDC} = 405.72$ kN-m.

Las gráficas mostradas en la Figura 3(b) se usan para obtener los factores de transporte en ambos extremos ($\zeta = 1.00$), y los factores de transporte en los apoyos son: $C_{CD} = 0.468$ ($c = 0.0L$) y $C_{DC} = 0.656$ ($c = 0.0L$). Las gráficas mostradas en la Figura 4(b) se usan para obtener

los factores de rigidez en ambos extremos ($\zeta = 1.00$), y los factores de rigidez en los apoyos son: $k_{CD} = 6.05$ ($c = 0.0L$) y $k_{DC} = 4.31$ ($c = 0.0L$), y las rigideces absolutas son: $K_{CD} = 6.05EI/L$ y $K_{DC} = 4.31EI/L$.

La matriz de rigidez para la trabe "A-B" es:

$$K_{AB} = \begin{bmatrix} k_{11}^{AB} & k_{12}^{AB} \\ k_{21}^{AB} & k_{22}^{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.31 & 2.83 \\ 2.83 & 6.05 \end{bmatrix} \frac{EI}{L},$$

donde:

$$k_{11}^{AB} = K_{AB}; k_{22}^{AB} = K_{BA}; k_{12}^{AB} = C_{AB}K_{AB}; k_{21}^{AB} = C_{BA}K_{BA}; k_{12}^{AB} = k_{21}^{AB}.$$

La matriz de rigidez para la trabe "B-C" es:

$$K_{BC} = \begin{bmatrix} k_{11}^{BC} & k_{12}^{BC} \\ k_{21}^{BC} & k_{22}^{BC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.93 & 4.55 \\ 4.55 & 6.93 \end{bmatrix} \frac{EI}{L},$$

donde:

$$k_{11}^{BC} = K_{BC}; k_{22}^{BC} = K_{CB}; k_{12}^{BC} = C_{BC}K_{BC}; k_{21}^{BC} = C_{CB}K_{CB}; k_{12}^{BC} = k_{21}^{BC}.$$

La matriz de rigidez para la trabe "C-D" es:

$$K_{CD} = \begin{bmatrix} k_{11}^{CD} & k_{12}^{CD} \\ k_{21}^{CD} & k_{22}^{CD} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.05 & 2.83 \\ 2.83 & 4.31 \end{bmatrix} \frac{EI}{L},$$

donde:

$$k_{11}^{CD} = K_{CD}; k_{22}^{CD} = K_{DC}; k_{12}^{CD} = C_{CD}K_{CD}; k_{21}^{CD} = C_{DC}K_{DC}; k_{12}^{CD} = k_{21}^{CD}.$$

La matriz general de rigidez " K_G " para la trabe continua es:

$$K_G = \begin{bmatrix} k_{11}^{AB} & k_{12}^{AB} & 0 & 0 \\ k_{21}^{AB} & k_{22}^{AB} + k_{11}^{BC} & k_{12}^{BC} & 0 \\ 0 & k_{21}^{BC} & k_{22}^{BC} + k_{11}^{CD} & k_{12}^{CD} \\ 0 & 0 & k_{21}^{CD} & k_{22}^{CD} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.31 & 2.83 & 0 & 0 \\ 2.83 & 12.98 & 4.55 & 0 \\ 0 & 4.55 & 12.98 & 2.83 \\ 0 & 0 & 2.83 & 4.31 \end{bmatrix} \frac{EI}{L}.$$

Los momentos de empotramiento para las trabes (etapa 1) son:

$$\begin{bmatrix} M_{AB} \\ M_{BA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +405.72 \\ -676.20 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} M_{BC} \\ M_{CB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +576.24 \\ -576.24 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} M_{CD} \\ M_{DC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +676.20 \\ -405.72 \end{bmatrix}.$$

El vector de los momentos efectivos que actúan sobre la trabe continua es:

$$\begin{bmatrix} M_A \\ M_B \\ M_C \\ M_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -405.72 \\ +676.20 - 576.24 \\ +576.24 - 676.20 \\ +405.72 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -405.72 \\ +99.96 \\ -99.96 \\ +405.72 \end{bmatrix}.$$

La ecuación de Fuerza-desplazamiento es:

$$[P] = [K][d]$$

donde: $[P]$ es el vector de los momentos efectivos que actúan sobre la trabe continua, $[K]$ es la matriz general de rigidez, $[d]$ es el vector de desplazamientos o rotaciones:

$$\begin{bmatrix} -405.72 \\ +99.96 \\ -99.96 \\ +405.72 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.31 & 2.83 & 0 & 0 \\ 2.83 & 12.98 & 4.55 & 0 \\ 0 & 4.55 & 12.98 & 2.83 \\ 0 & 0 & 2.83 & 4.31 \end{bmatrix} \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \\ \theta_D \end{bmatrix}.$$

La solución del sistema es:

$$\begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \\ \theta_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -130.7391 \\ +55.7475 \\ -55.7475 \\ +130.7391 \end{bmatrix} \frac{L}{EI}.$$

Los momentos de empotramiento para las trabes (etapa 2) son:

$$\begin{bmatrix} M_{AB} \\ M_{BA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^{AB} & k_{12}^{AB} \\ k_{21}^{AB} & k_{22}^{AB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} M_{AB} \\ M_{BA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.31 & 2.83 \\ 2.83 & 6.05 \end{bmatrix} \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} -130.7391 \\ +55.7475 \end{bmatrix} \frac{L}{EI} = \begin{bmatrix} -405.72 \\ -32.72 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} M_{BC} \\ M_{CB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^{BC} & k_{12}^{BC} \\ k_{21}^{BC} & k_{22}^{BC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} M_{BC} \\ M_{CB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.93 & 4.55 \\ 4.55 & 6.93 \end{bmatrix} \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} +55.7475 \\ -55.7475 \end{bmatrix} \frac{L}{EI} = \begin{bmatrix} +132.68 \\ -132.68 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} M_{CD} \\ M_{DC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^{CD} & k_{12}^{CD} \\ k_{21}^{CD} & k_{22}^{CD} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_C \\ \theta_D \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} M_{CD} \\ M_{DC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.05 & 2.83 \\ 2.83 & 4.31 \end{bmatrix} \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} -55.7475 \\ +130.7391 \end{bmatrix} \frac{L}{EI} = \begin{bmatrix} +32.72 \\ +405.72 \end{bmatrix}.$$

Los momentos que resultan de la suma de la etapa 1 y 2 (momentos finales que actúan sobre los extremos de cada trabe) son:

$$\begin{bmatrix} M_{AB} \\ M_{BA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +405.72 \\ -676.20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -405.72 \\ -32.72 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -708.92 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} M_{BC} \\ M_{CB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +576.24 \\ -576.24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +132.68 \\ -132.68 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +708.92 \\ -708.92 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} M_{CD} \\ M_{DC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +676.20 \\ -405.72 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +32.72 \\ +405.72 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +708.92 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Por lo tanto, estos momentos finales son los momentos para el diseño de las trabes.

4. Resultados

Las Figuras 2, 3 y 4 (ver Apéndice) muestran los factores de momentos de empotramiento (m_{AB} y m_{BA}), los factores de transporte (C_{AB} y C_{BA}), los factores de rigidez (k_{AB} y k_{BA}) en función de " λ ".

La Figura 2 muestra las gráficas para los factores de momentos de empotramiento (m_{AB} y m_{BA}) sometida a una carga uniformemente distribuida. Las gráficas muestran lo siguiente:

- 1.- Cuando la sección transversal es constante, las Figuras 2(a), 2(b), 2(c) y 2(d) se usan en $\lambda = 0$, $c = 0.0L$ para obtener $m_{AB} = 0.083$ y $m_{BA} = 0.083$.
- 2.- Cuando la trabe es simétrica, los valores son iguales en m_{AB} y m_{BA} para cualquier altura de las cartelas parabólicas.
- 3.- Los valores máximos de los factores de momentos de empotramiento (m_{AB}) se presentan para la Figura 2(a) ($\lambda = 0.62$, $c =$

0.0L y $\zeta = 0.5$) de 0.111, para la Figura 2(b) ($\lambda = 0.68$, $c = 0.0L$ y $\zeta = 1.0$) de 0.133, para la Figura 2(c) ($\lambda = 0.73$, $c = 0.0L$ y $\zeta = 1.5$) de 0.151, y para la Figura 2(d) ($\lambda = 0.75$, $c = 0.0L$ y $\zeta = 2.0$) de 0.166.

- 4.- Los valores máximos de los factores de momentos de empotramiento (mBA) se presentan para la Figura 2(a) ($\lambda = 0.0$, $c = 0.6L$ y $\zeta = 0.5$) de 0.111, para la Figura 2(b) ($\lambda = 0.0$, $c = 0.7L$ y $\zeta = 1.0$) de 0.133, para la Figura 2(c) ($\lambda = 0.0$, $c = 0.7L$ y $\zeta = 1.5$) de 0.151, y para la Figura 2(d) ($\lambda = 0.0$, $c = 0.8L$ y $\zeta = 2.0$) de 0.166.
- 5.- Cuando los valores de κ aumentan, los factores de momentos de empotramiento (mAB) en $\lambda = 0$ disminuyen, y los factores de momentos de empotramiento (mBA) en $\lambda = 0$ aumentan hasta $c = 0.6L$ y posteriormente disminuyen para todas las figuras 2.

La Figura 3 muestra las gráficas para los factores de transporte (C_{AB} y C_{BA}). Las gráficas muestran lo siguiente:

- 1.- Cuando la sección transversal es constante, las Figuras 3(a), 3(b), 3(c) y 3(d) se usan en $\lambda = 0$, $c = 0.0L$ para obtener $CAB = 0.49$ y $CBA = 0.49$.
- 2.- Cuando la trabe es simétrica, los valores son iguales en CAB y CBA para cualquier altura de las cartelas parabólicas.
- 3.- Los valores máximos de los factores de transporte (CAB) se presentan para la Figura 3(a) ($\lambda = 0.0$, $\kappa = 0.8$ y $\zeta = 0.5$) de 0.700, para la Figura 3(b) ($\lambda = 0.0$, $\kappa = 0.8$ y $\zeta = 1.0$) de 0.885, para la Figura 3(c) ($\lambda = 0.0$, $\kappa = 0.9$ y $\zeta = 1.5$) de 1.060, y para la Figura 3(d) ($\lambda = 0.0$, $\kappa = 0.9$ y $\zeta = 2.0$) de 1.210.
- 4.- Los valores máximos de los factores de transporte (CBA) se presentan para la Figura 3(a) ($\lambda = 0.8$, $\kappa = 0.0$ y $\zeta = 0.5$) de 0.700, para la Figura 3(b) ($\lambda = 0.85$, $\kappa = 0.0$ y $\zeta = 1.0$) de 0.885, para la Figura 3(c) ($\lambda = 0.85$, $\kappa = 0.0$ y $\zeta = 1.5$) de 0.152, y para la Figura 3(d) ($\lambda = 0.88$, $\kappa = 0.0$ y $\zeta = 2.0$) de 1.210.
- 5.- Cuando los valores de κ aumentan, los factores de transporte (CAB) en $\lambda = 0$ aumentan menos en las figuras 3(a) y 3(b) que

aumentan hasta $\kappa = 0.8$ y posteriormente disminuyen, y los factores de transporte (CBA) en $\lambda = 0$ disminuyen.

La Figura 4 muestra las gráficas para los factores de rigidez (k_{AB} y k_{BA}). Las gráficas muestran lo siguiente:

- 1.- Cuando la sección transversal es constante, las Figuras 4(a), 4(b), 4(c) y 4(d) se usan en $\lambda = 0$, $c = 0.0L$ para obtener $kAB = 3.90$ y $kBA = 3.90$.
- 2.- Cuando la trabe es simétrica, los valores son iguales en kAB y kBA para cualquier altura de las cartelas parabólicas.
- 3.- Los valores máximos de los factores de rigidez (kAB) se presentan para la Figura 4(a) ($\lambda = 0.9$, $\kappa = 0.1$ y $\zeta = 0.5$) de 8.62, para la Figura 4(b) ($\lambda = 0.9$, $\kappa = 0.1$ y $\zeta = 1.0$) de 14.00, para la Figura 4(c) ($\lambda = 0.9$, $\kappa = 0.1$ y $\zeta = 1.5$) de 20.60, y para la Figura 4(d) ($\lambda = 1.0$, $\kappa = 0.0$ y $\zeta = 2.0$) de 28.40.
- 4.- Los valores máximos de los factores de rigidez (kBA) se presentan para la Figura 4(a) ($\lambda = 0.1$, $\kappa = 0.9$ y $\zeta = 0.5$) de 8.62, para la Figura 4(b) ($\lambda = 0.1$, $\kappa = 0.9$ y $\zeta = 1.0$) de 14.00, para la Figura 4(c) ($\lambda = 0.1$, $\kappa = 0.9$ y $\zeta = 1.5$) de 20.60, y para la Figura 4(d) ($\lambda = 0.1$, $\kappa = 0.9$ y $\zeta = 2.0$) de 28.20.
- 5.- Cuando los valores de κ aumentan, los factores de rigidez (kAB) en $\lambda = 0$ aumentan, y los factores de rigidez (kBA) en $\lambda = 0$ aumentan.

Ahora, los factores para momentos de empotramiento, los factores de transporte y los factores de rigidez del ejemplo numérico por ayudas de diseño se comparó con las ecuaciones de Velázquez-Santillán *et al.* [24].

Estos valores son los mismos con una aproximación de 3 dígitos.

Por lo tanto, el grado de rapidez para obtener estos factores por medio de las ayudas de diseño no se compara con las ecuaciones, porque las 6 ecuaciones son muy complejas y se debe de usar algún software para obtener los valores.

5. Conclusiones

Este trabajo presenta las ayudas de diseño más utilizadas para traveses de sección transversal rectangular con variación parabólica en la altura de la trabe en sus extremos bajo una carga uniformemente distribuida que toma en cuenta las deformaciones por flexión y cortante para obtener los factores de momentos de empotramiento, factores de transporte y factores de rigidez.

Los coeficientes de momentos de empotramiento (m_{AB} y m_{BA}) toman en cuenta $u = s = \zeta h$ ($\zeta = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$); $a = \lambda L$ ($\lambda = 0$ a 1); $c = \kappa L$ ($\kappa = 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$); $h = 0.1L$; $v = 0.20$ para concreto. Para $c = 0L$ se considera $u = \zeta h$; $s = 0$.

Los coeficientes para momentos de empotramiento, factores de transporte y factores de rigidez (ayudas de diseño) presentadas en este trabajo reducen el problema para diseñar una trabe de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas en sus extremos, estas son precisas y eficientes.

El propósito de este documento es brindar a los ingenieros en el ejercicio profesional, alguna forma de reducir el tiempo de diseño requerido para los proyectos, sin dejar de cumplir con el código ACI (American Concrete Institute) [26]. Aquí, la carga uniformemente distribuida podría ser la carga viva y la carga muerta para la construcción de edificios.

Un ejemplo numérico se muestra para demostrar la validez, la aplicabilidad, la sencillez y efectividad de las ayudas de diseño propuestas en el análisis de traveses de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas sometidas a una carga uniformemente distribuida.

Los estudios futuros se pueden realizar sobre los coeficientes de traveses para los siguientes casos: desarrollar las gráficas para los factores de momentos de empotramiento para carga uniformemente distribuida, factores de transporte y factores de rigidez para otras secciones transversales como "T" o "I", y para cartelas rectas o parabólicas.

Agradecimientos

La investigación descrita en este trabajo fue financiada por el Instituto de Investigaciones

Multidisciplinarias de la Facultad de Contaduría y Administración de la Universidad Autónoma de Coahuila. Los autores también agradecen a los revisores y al editor por los comentarios y sugerencias para mejorar la presentación. El estudiante de doctorado Carla Yaneth Crispín Herrera (CVU 883189) agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico.

Referencias

1. **Guldan, R. (1956).** Estructuras aporticadas y vigas continuas. El ateneo.
2. **Portland Cement Association (1958).** Handbook of frame constants: Beam factors and moment coefficients for members of variable section. Portland Cement Association.
3. **Hibbeler, R.C. (2006).** Structural analysis. Prentice-Hall, Inc.
4. **Tena-Colunga, A. (2007).** Análisis de estructuras con métodos matriciales. Limusa.
5. **Gupta, M.M., Friel, L.L. (1977).** Design aids for cantilever retaining walls. Journal of the Structural Division, Vol. 103, No. 5, pp.1113–1126.
6. **Park, D., Ahn, J., Lee, Ch. (1999).** Design aids for a reinforced concrete beam with minimum cost concept. Architectural Research, Vol. 1, No. 1, pp. 55–61.
7. **Chandrasekaran, S., Gupta, S.K., Carannante, F. (2009).** Design aids for fixed support reinforced concrete cylindrical shells under uniformly distributed loads. International Journal of Engineering, Science and Technology, Vol.1, No. 1, pp. 148–171. DOI: 10.4314/ijest.v1i1.58074.
8. **Aristizabal-Ochoa, J.D., Rodríguez-Gutiérrez, J.A. (2013).** Rigid spread footings resting on soil subjected to axial load and biaxial bending II: Design aids. International Journal of Geomechanics, Vol. 13, No. 2, pp. 109–119. DOI: 10.1061/(ASCE)GM.1943-5622.0000210
9. **Zofkie, R. (2012).** Design aids for determining deflection of beams reinforced along part of their length. Structures Congress 2012,

American Society of Civil Engineers. DOI: 10.1061/978078 4412367.187.

10. **Sun, B-J., Lu, Z-T. (1992).** Design aids for reinforced concrete columns. *Journal of Structural Engineering*, Vol. 118, No. 11. DOI: 10.1061/(ASCE)07339445(1992)118:11(2986)
11. **Taylor, A., Hamilton III, T., Nanni, A. (2015).** The reinforced concrete design handbook. a companion to ACI 318-14. American Concrete Institute, Vol. 3: Design Aids.
12. **Hashmi, A.K. (2016).** Design aid for seismic strengthening of reinforced concrete beams. *The Indian Concrete Journal*, Vol. 90, No. 4, pp. 93–100.
13. **Varyani, U.H., Radhaji, A. (2005).** Design aids for limit state design of reinforced concrete members. Khanna Publishers.
14. **Mohammed, H.A. (2019).** Design aids for prestressed concrete double tee beam with web opening associated with the variation of its compressive strength. *International Journal of Recent Technology and Engineering (IJRTE)*, Vol. 8, No. 3, pp. 8509–8520. DOI: 10.35940/ijrte.E1981.098319.
15. **Mishra, P., Gupta, M.K. (2019).** Design aids for beam-column design as per IS800:2007. *International Research Journal of Engineering and Technology (IRJET)*, Vol 6, No. 6, pp. 2870–2876.
16. **Schultz, J.A., Jesse, J.D. (2020).** Simplified stress design of helicoidal hss beams. *Journal of Architectural Engineering*, Vol. 26, No. 1. DOI: 10.1061/(ASCE)AE.1943-5568.0000381.
17. **Hashmi, A.K., Ibrahim, S.M., Jameel, M., Madan, A. (2018).** Development of analysis curves for reinforced concrete beam sections based on simple approach of mechanics. *Indian Concrete Journal*, Vol. 92, No. 6, pp. 57–63.
18. **Luévanos-Rojas, A. (2015).** Modelado para vigas de sección transversal “I” sometidas a una carga uniformemente distribuida con cartelas rectas. *Ingeniería Mecánica Tecnología y Desarrollo*, Vol. 5, No. 2, pp. 281–292.
19. **Luévanos-Soto, I., Luévanos-Rojas, A. (2017).** Modeling for fixed-end moments of I-sections with straight haunches under concentrated load. *Steel and Composite Structures*, Vol. 23, No. 5, pp. 597–610. DOI: 10.12989/scs.2017.23.5.597.
20. **Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M. (2016).** Modeling for mechanical elements of rectangular members with straight haunches using software: Part 1. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, Vol. 12, No. 3, pp. 973–985. DOI: 10.24507/ijicic.12.03.959.
21. **Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M. (2016).** Modeling for mechanical elements of rectangular members with straight haunches using software: Part 2. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, Vol. 12, No. 4, pp. 1027–1041. DOI: 10.24507/ijicic.12.04.1027.
22. **Luévanos-Rojas, A. (2012).** A mathematical model for rectangular beams of variable cross section of symmetrical parabolic shape for uniformly distributed load. *Far East Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 80, No. 2, pp. 197–230.
23. **Luévanos-Rojas, A. (2013).** Mechanical elements of rectangular nonprismatic members for symmetrical parabolic haunches subjected to a uniformly distributed load. *Journal Architectural Engineering Technology*, Vol. 2, No. 2, pp. 1–8. DOI: 10.4172/2168-9717.1000111.
24. **Velázquez-Santillán, F., Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M. (2019).** Modelado para trabes de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas: Parte 1. *Computación y Sistemas*, Vol. 23, No. 2, pp. 557–568. DOI: 10.13053/CyS-23-2-2872.
25. **Sandoval-Rivas, R., Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M. (2019).** Modelado para trabes de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas: Parte 2. *Computación y Sistemas*, Vol. 23, No. 3, pp. 1115–1124. DOI: 10.13053/CyS-23-3-2873.
26. **ACI 318S-19 (American Concrete Institute) (2019).** Building code requirements for structural concrete, including the comments on the standards. Committee 318.

*Article received on 09/10/2020; accepted on 05/07/2021.
Corresponding author is Arnulfo Luévanos Rojas.*