

# CRITERIOS DE FALLA PARA MODELADO DE ELEMENTOS DE CONCRETO SIN REFUERZO

Gelacio Juárez-Luna<sup>1</sup> y Daniel A. Hernández García<sup>2</sup>

Recepción: 8 de agosto de 2014

Aprobación: 16 de enero de 2016

Publicación: 15 de abril de 2016

## RESUMEN

Se formulan e implantan modelos de daño con distintas normas de falla para modelar elementos estructurales en su evolución al colapso. La formulación de los modelos de daño con superficie de falla sólo tensión y sólo cortante se desarrolló a partir de un modelo de daño isotrópico igual tensión-compresión. Estos modelos constitutivos se implantaron en subrutinas programadas en Fortran. Se presentan ejemplos numéricos que validan los modelos de daño formulados para modelar elementos al colapso.

**Palabras clave:** Colapso, modelo de daño, superficie de falla, norma, ablandamiento, elementos finitos.

## ABSTRACT

Damage models with different failure norms for modeling structural elements in their evolution to collapse were formulated and implemented. The formulation of the damage models with failure surfaces only tension and only shear were developed based on the isotropic damage model equal tension-compression. These constitutive models were implanted into subroutines programed in Fortran. Numerical examples were presented, showing the validation of the formulated damage models for modeling elements to collapse.

**Keywords:** Collapse, damage model, failure surface, norm, softening, finite element.

## RESUMO

Se formulam e implementam modelos de falhas com diferentes normas de falhas para a modelagem de elementos estruturais na sua evolução ao colapso. A formulação dos modelos de falha com superfícies de falha única à tensão e só a cisalhamento foi desenvolvida com base no modelo de falha isotrópico igual tensão-compressão. Estes modelos constitutivos foram implantados em sub-rotinas programadas em Fortran. Presentam-se exemplos numéricos, mostrando a validação dos modelos de falha formulados para a modelagem de elementos em colapso.

**Palavras chave:** Colapso, modelo de falha, superfície de falha, norma, abrandamento, elementos finitos

<sup>(1)</sup> Profesor-Investigador, Universidad Autónoma Metropolitana, San Pablo No. 180, Col. Reynosa Tamaulipas, Azcapotzalco, 02200 México, D.F. Teléfono: (55) 5318-9085; Fax: (55)5318-9085; gil@azc.uam.mx

<sup>(2)</sup> Estudiante de Posgrado (Doctorado), Universidad Autónoma Metropolitana, San Pablo No. 180, Col. Reynosa Tamaulipas, Azcapotzalco, 02200 México, D.F. Teléfono: (55) 5318-9085; Fax: (55)5318-9085; ing.dalhergarcia@gmail.com

## 1. INTRODUCCIÓN

La mecánica de daño proporciona las bases para desarrollar modelos constitutivos que describen el deterioro progresivo de las propiedades mecánicas de los materiales. El daño es un proceso por el cual los materiales se rompen, debido a la degradación progresiva de sus propiedades mecánicas, i.e., el módulo de Young y el esfuerzo último del material (Luccioni 2003). Además, puede ocurrir plasticidad caracterizada por deformación permanente después de la descarga completa.

Existen otras aproximaciones para simular la degradación en materiales como el modelo de agrietamiento distribuido, el cual representa la pérdida de rigidez del material como un conjunto de grietas paralelas entre sí, distribuidas sobre el volumen de un elemento finito; sin embargo, el modelo de agrietamiento distribuido presenta problemas de atoramiento de esfuerzos y modos cinemáticos falsos que pueden proporcionar soluciones incorrectas (Rots 1985). Otro modelo para estudiar la falla en materiales es la mecánica de fractura, utilizado principalmente en materiales frágiles; este modelo tiene la limitante de necesitar grietas iniciales y técnicas de remallado que lo hacen computacionalmente costoso. El modelo de discontinuidades embebidas permite introducir discontinuidades (grietas) dentro de los elementos finitos durante el análisis, sin necesidad de modificar la malla ni de tener grietas iniciales (Juárez y Ayala 2009, Retama-Velazco y Ayala 2010); sin embargo, este modelo requiere de algoritmos tediosos para realizar la propagación de discontinuidades. Por lo anterior, en este trabajo se utiliza la mecánica de daño para estudiar el deterioro del material, que distribuye el daño en cada punto de integración de Gauss dentro del elemento; además de no requerir de grietas iniciales, ni necesitar algoritmos tediosos para propagar el daño.

La introducción del concepto de daño fue realizada por Kachanov (1958); posteriormente, Lemaitre (1971) desarrolló la teoría basada en la mecánica de medios continuos, dándole el sentido de daño con el enfoque clásico de la mecánica de fractura, utilizando bases rigurosas de termodinámica y micromecánica. Los efectos de la plasticidad también se consideran mediante modelos acoplados de daño-plasticidad como: Simo y Ju (1987 a,b), Ju (1989), Lubliner *et al.* (1989) y Luccioni *et al.* (1996), entre otros.

Juárez y Ayala (2010a, b) modelaron la falla de sólidos con elementos finitos mixtos, en los que utilizan un modelo de daño igual tensión-compresión; sin embargo, este modelo presenta problemas de traslape de volúmenes cuando se tienen elementos en compresión con una resistencia mayor a la de tensión, como es el caso del comportamiento constitutivo del concreto. Para superar el problema de traslape, Méndez-Martínez y Juárez-Luna (2012) desarrollaron e implantaron un modelo de daño con diferente umbral en tensión y compresión, el cual se validó con el modelado y comparación de elementos de concreto simple y reforzado, reportados en la literatura, sujetos a cargas hasta llevarlos al colapso. Dentro del desarrollo de modelos constitutivos dentro de la mecánica de daño, Oliver *et al.* (1990) proponen tres normas: (1) con igual degradación en tensión-compresión, 2) sólo en tensión y 3) diferente tensión-compresión, implantando sólo la segunda la cual se validó con un espécimen sujeto a tensión en el que la falla se propaga en dirección vertical; sin embargo, como se mostrará en este artículo, el modelo sólo tensión es válido únicamente cuando el daño ocurre en dirección vertical, perpendicular al esfuerzo horizontal  $\sigma_x$ , puesto que cuando el daño se propaga en otra dirección, el sólido permanece elástico debido a que el producto de la norma propuesta es pequeña. Posteriormente, Vieira (2003) propuso dos normas de daño: sólo tensión y diferentes umbrales en tensión-compresión; ambas normas se basan en una superficie con umbrales de igual tensión-compresión.

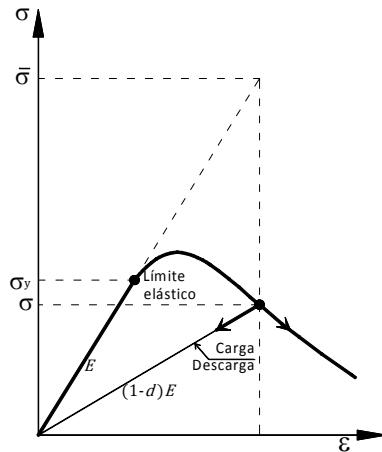
En un elemento estructural, el estado de esfuerzos depende de la carga actuante; cuando las cargas son a tensión se presentan fallas por apertura, pero cuando las cargas son a compresión, como cilindros de concreto o pruebas de arcillas, los elementos fallan por la formación de una línea de cortante. Por lo anterior, el objetivo de este artículo es la formulación, implantación y validación de normas de falla igual tensión-compresión, sólo cortante y diferente tensión-compresión para estudiar elementos estructurales sometidos a distintas acciones de carga hasta llegar al colapso. Estos modelos se implantaron en lenguaje Fortran dentro de subrutinas del programa FEAP (Taylor 2008), acrónimo de su nombre en idioma Inglés, Finite Element Analysis Program. Se presentan ejemplos numéricos que muestran la validez de las superficies de falla formuladas para predecir elementos al colapso. Los modelos implantados no presentan el problema de atoramiento de esfuerzos, como sucede con el modelo de agrietamiento distribuido, lo que garantiza una adecuada liberación de energía cuando el material falla.

## 2. FORMULACIÓN DE MODELOS DE DAÑO

### 2.1. MODELO DE DAÑO ISOTRÓPICO IGUAL TENSIÓN-COMPRESIÓN (MDITC)

La variable de daño, que puede ser un escalar  $d$ , caracteriza el deterioro del material relacionando el esfuerzo  $\sigma$  con el esfuerzo efectivo, como se muestra en la Figura 1, caracterizándose mediante la siguiente ecuación:

$$s^- = (1-d)s^- \quad (1)$$



**Figura 1: Curva esfuerzo-deformación en material con ablandamiento.**

Relacionando el esfuerzo efectivo y la deformación del material mediante la ley de Hooke se obtiene:

$$s^- = E\epsilon \quad (2)$$

donde  $E$  es el módulo de Young del material. Sustituyendo la ec. (2) en la ec. (1), se tiene:

$$s^- = (1-d)E\epsilon \quad (3)$$

La notación de los esfuerzos, las deformaciones y la relación constitutiva para el caso unidimensional son tensores de orden cero, pero para sólidos en tres dimensiones (3D), se utilizan tensores de cuarto orden, manteniendo sólo con magnitud escalar la variable de daño  $d$ , tal que:

$$\sigma = (1-d)\bar{\sigma} = (1-d)\mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{C}^d : \boldsymbol{\epsilon} \quad (4)$$

En la ec. (4),  $C$  es el tensor constitutivo elástico de cuarto orden y  $C^d$  es el tensor constitutivo elástico degradado. El tensor  $C$  queda en función de  $\mu$  y  $\lambda$ , que son las llamadas constantes de Lamé, definidas como:

$$\mathbf{C} = 2m\mathbf{I} + l(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \quad (5)$$

$$\mathbf{I}_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (6)$$

$$m = \frac{E}{2(1+u)} \quad (7)$$

$$I = \frac{uE}{(1+u)(1-2u)} \quad (8)$$

En la ec. (5), el  $I$  representa un tensor unitario de segundo orden,  $I$  un tensor unitario de cuarto orden. En las ec. (7) y (8),  $v$  es la relación de Poisson.

## 2.2. ECUACIÓN CONSTITUTIVA

El propósito de las ecuaciones constitutivas es representar el comportamiento idealizado de un material, estableciendo relaciones entre los campos cinemáticos, térmicos y mecánicos; donde existe una variedad de ecuaciones obtenidas de las leyes fundamentales de la mecánica del medio continuo (Vieira 2003). La densidad de energía libre de Helmholtz por unidad de volumen  $\Psi$ , para el caso de un modelo de daño isotrópico, se define como:

$$\Psi = \Psi(d, \boldsymbol{\varepsilon}) = (1-d)\Psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (9)$$

Donde  $\Psi_0(\boldsymbol{\varepsilon})$  es la densidad de energía libre de Helmholtz de un material elástico no dañado en función del campo de las deformaciones  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Esta energía puede escribirse como:

$$\Psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (10)$$

Sustituyendo la ec. (10) en la ec. (9) se obtiene:

$$\Psi = \frac{1}{2}(1-d)\bar{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (11)$$

Los esfuerzos se obtienen derivando la ec. (9) respecto a  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , tal que:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = (1-d) \frac{\Psi_0}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = (1-d) \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} = (1-d) \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (12)$$

La cual corresponde a la ecuación constitutiva secante del modelo de daño.

## 2.3 CRITERIO DE DAÑO

Para delimitar el comportamiento elástico y el de degradación que sufren las propiedades del material, se utiliza el criterio de daño, que requiere de una norma en el espacio de los esfuerzos como:

$$\tau_\sigma = \|\boldsymbol{\sigma}\|_{C^{e^{-1}}} = \sqrt{\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C}^{e^{-1}} : \boldsymbol{\sigma}} \quad \mathbf{C}^{e^{-1}} : \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\varepsilon} \quad (13)$$

Donde los tensores de esfuerzos y deformaciones son:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Análogo a la función de daño definida en la ec. (13) se puede definir la norma en el espacio de las deformaciones como:

$$\tau_\varepsilon = \|\boldsymbol{\varepsilon}\|_C = \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}} = \sqrt{2\Psi_0} \quad (15)$$

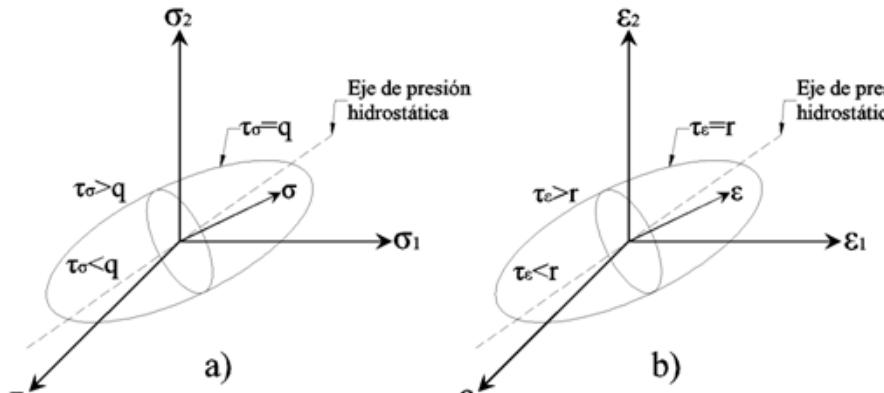
Las normas, definidas en las ecs. (13) y (15), se pueden relacionar mediante:

$$t_s = (1-d)t_e \quad (16)$$

Las funciones que delimitan la superficie de daño, en el espacio de esfuerzos y deformaciones correspondientes, mostradas en la Figura 2, que definen el límite elástico del comportamiento del material son respectivamente:

$$f(t_s, q) = t_s - q \quad (17)$$

$$f(t_e, r) = t_e - r \quad (18)$$



**Figura 2: Superficies de falla en el espacio de: a) esfuerzos y b) deformaciones.**

Donde  $q$  es una función que define el ablandamiento/endurecimiento, y  $r$  es la variable interna cuyo valor define el límite elástico. En el caso unidimensional de la ec. (18), se obtiene el valor  $r_0$  que representa el valor umbral inicial:

$$\tau_\varepsilon = \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}} \Rightarrow r_0 = \frac{\sigma_u}{\sqrt{E}} \quad (19)$$

Donde  $\sigma_u$  es la magnitud del esfuerzo último. La variable de ablandamiento/endurecimiento  $q$  se define como:

$$q(r) = (1-d)r \quad (20)$$

De las ecs. (4) y (20) se obtiene la siguiente relación de esfuerzos:

$$\sigma = \frac{q(r)}{r} \bar{\sigma} \quad (21)$$

## 2.4 REGLA DE ABLANDAMIENTO/ ENDURECIMIENTO

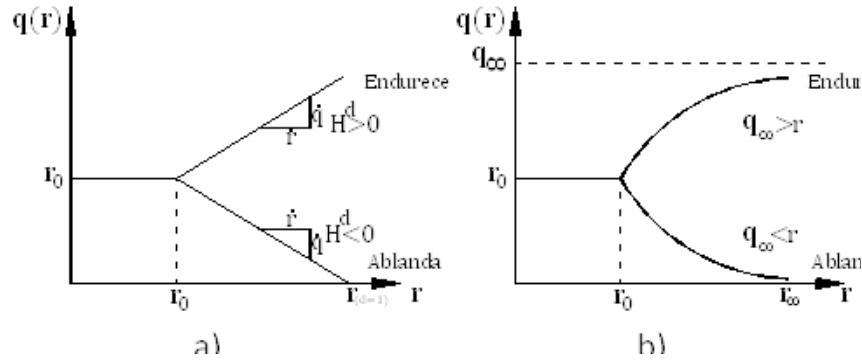
La regla de ablandamiento/endurecimiento se define por la siguiente ecuación:

$$\dot{q} = H^d(r)\dot{r}; \quad H^d(r) = q'(r) \quad q \in [0, s_y] \quad q_0 = r_0 \quad (22)$$

Donde  $H^d$  es el módulo de ablandamiento/endurecimiento continuo. En la Figura 3a, se muestra la función de endurecimiento lineal, la cual se define como:

$$q = \begin{cases} r_0 & r \leq r_0 \\ r_0 + H^d(r - r_0) & r > r_0 \end{cases} \quad (23)$$

Y en la Figura 3b, para la regla exponencial:



**Figura 3: Regla de ablandamiento/endurecimiento: a) lineal y b) exponencial.**

$$q = \begin{cases} r_0 & r \leq r_0 \\ r_0 \exp\left(-H^d\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)\right) & r > r_0 \end{cases} \quad (24)$$

Para el caso lineal, la variable de daño se expresa de la siguiente forma:

$$d = \begin{cases} 0 & r \leq r_0 \\ 1 - \frac{r_0}{r} - H^d \left( 1 - \frac{r_0}{r} \right) & r > r_0 \end{cases} \quad (25)$$

Y en el caso exponencial:

$$d = \begin{cases} 0 & r \leq r_0 \\ 1 - \frac{r_0}{r} \exp \left( -H^d \left( 1 - \frac{r_0}{r} \right) \right) & r > r_0 \end{cases} \quad (26)$$

Las leyes de evolución de la variable interna y de la variable de daño son:

$$\dot{r} = g \quad (27)$$

$$\dot{d} = \gamma \frac{\partial f(\tau_s, q)}{\partial r} \quad (28)$$

Donde  $\gamma$  es un valor escalar no negativo denominado parámetro de consistencia de daño. El intervalo de la variable interna es  $[0, \infty)$ . Si la variable de daño es cero, la variable interna  $r$  tiene el valor de  $r_0$ , y cuando el daño es igual a uno, la variable es  $r = r_\infty$ .

## 2.5. CONDICIÓN DE CARGA Y DESCARGA

Para obtener el multiplicador de daño  $\gamma$ , se utilizan las condiciones de carga y descarga, conocidas como las condiciones de Kuhn-Tucker:

$$g \geq 0; \quad f(t_s, q) \leq 0; \quad g f(t_s, q) = 0 \quad (29)$$

Y la condición de consistencia:

$$g \dot{f}(t_s, q) = 0 \quad (30)$$

Las ecuaciones (29) y (30) determinan la condición de carga o descarga que presente el material:

- Si se cumple que  $f(t_s, q) < 0$  el material se encuentra en la condición elástica, por lo tanto  $t_s - q < 0$  en un tiempo  $t_s$ , de lo que se sabe que  $t_s < q$ , con lo cual se determina que  $g = \dot{r} = 0$  y que  $g f(t_s, q) = 0$ .
- Si por el contrario, se cumple que  $f(t_s, q) = 0$  el material se encuentra en su intervalo inelástico, por lo tanto  $t_s - q = 0$  en un tiempo  $t_s$ ; de lo anterior se puede saber que  $t_s = q$  lo que determina que  $g = \dot{r} \geq 0$  requiriendo que  $g \dot{f}(t_s, q) = 0$ .

## 2.6. MÓDULO TANGENTE

El operador que relaciona la evolución de los esfuerzos y deformaciones se denomina módulo tangente  $C^T$ , tal que:

$$\dot{\sigma} = \mathbf{C}^T : \dot{\epsilon} \quad (31)$$

Derivando la ec. (4), se obtiene:

$$\dot{\sigma} = (1-d)\mathbf{C} : \dot{\epsilon} - d\mathbf{C} : \epsilon \quad (32)$$

Diferenciando  $\mathbf{t}_e$ , definido en la ec. (15) y considerando la ec. (23), se obtiene:

$$\tau_\varepsilon = \sqrt{\mathbf{C} : \mathbf{C}} \Rightarrow \dot{\tau}_\varepsilon = \dot{r} = \frac{1}{\tau_\varepsilon} \bar{\sigma} : \epsilon \quad (33)$$

De la ec. (25) se obtiene la derivada de la variable de daño:

$$\dot{d} = \left( \frac{q(r) - q'(r)r}{r^3} \right) \dot{r} \quad (34)$$

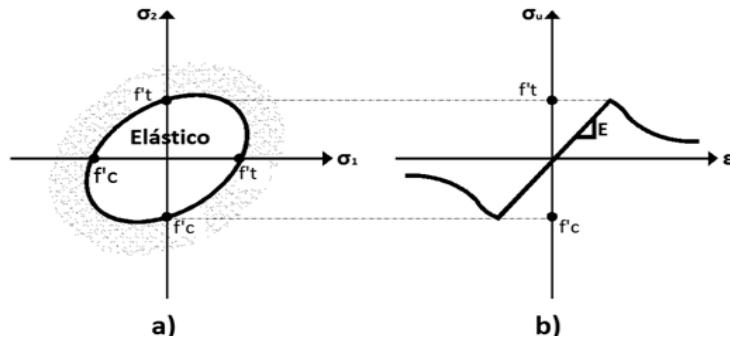
Finalmente se obtiene el tensor constitutivo tangente sustituyendo la ec. (34) en la ec. (32):

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= (1-d)\mathbf{C} - \left( \frac{q(r) - q'(r)r}{r^3} \right) (\mathbf{C} : \epsilon \otimes \epsilon : \mathbf{C}) \\ &\Downarrow \\ \mathbf{C}^T &= (1-d)\mathbf{C} - \left( \frac{q(r) - q'(r)r}{r^3} \right) (\bar{\sigma} \otimes \bar{\sigma}) \end{aligned} \quad (35)$$

En la Figura 4 se muestra la superficie de daño que contiene el estado de esfuerzos elásticos del MDITC, el cual se resume con las ecuaciones de la Tabla 1.

**Tabla 1: Ecuaciones para el MDITC**

a) $y(\epsilon, r) = (1 - d(r))y_0$	Energía libre de Helmholtz
b) $d(r) = 1 - \frac{q}{r}; q \in [0, 1] \subset [1]$	Variable de daño
c) $\sigma = \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} = (1 - d)C : \epsilon$	Ecuación constitutiva
d) $\dot{r} = g \begin{cases} r \in [1, \infty] \\ r_0 = r _{t=0} = \frac{s_y}{\sqrt{E}} \end{cases}$	Ley de evolución de daño
e) $f(\tau_\sigma, q) = \tau_\sigma - q = \sqrt{\sigma : C^{e^{-1}} : \sigma} - q; \begin{cases} q \in [0, r_0] \\ q _{t=0} = r_0 \end{cases}$	Criterio de daño
f) $\dot{q} = H^d(r)\dot{r}; H^d(r) = q'(r) \leq 0$	Regla de endurecimiento
g) $f < 0; g \geq 0; gf = 0$	Condiciones de carga y descarga
h) $g\dot{f} = 0 \quad \dot{U} f = 0$	Condición de consistencia

**Figura 4: Modelo de daño igual tensión-compresión: a) superficie de daño en 2D y b) curva esfuerzo-deformación unidimensional.**

## 2.7. MODELO DE DAÑO ISOTRÓPICO SÓLO TENSIÓN (MDST)

La formulación del modelo de daño sólo tensión (MDST) se basa en el MDITC, la diferencia principal entre ambos modelos de daño es la definición de la norma, para lo cual se revisaron las propuestas siguientes, realizadas por otros autores:

- Oliver *et al.* (1990) proponen para un modelo en sólo tensión la norma siguiente:

$$\tau_\sigma = \sqrt{\sigma^+ : C^{e^{-1}} : \sigma^+} \quad (36)$$

Donde  $\sigma^+$  es el tensor de esfuerzos principales sólo positivos ( $\sigma_n \geq 0$ ) ; sin embargo, al implantar esta norma por Hernández-García (2012) se demostró que no se modela apropiadamente la degradación del material, por lo que se concluyó que esta norma no es adecuada para esta superficie de falla.

- Vieira (2003) usa el tensor de esfuerzos principales y el de deformaciones cartesianas para proponer la norma siguiente:

$$\begin{aligned}\tau_\sigma &= \sqrt{\sigma^+ : \mathbf{C}^{\sigma^{-1}} : \sigma} & \mathbf{C}^{\sigma^{-1}} : \sigma = \boldsymbol{\epsilon} \\ \tau_\epsilon &= \sqrt{\boldsymbol{\epsilon}^+ : \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}} & \boldsymbol{\epsilon}^+ : \mathbf{C} = \sigma^+\end{aligned}\quad (37)$$

siendo:

$$\sigma^+ = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\epsilon}^+ = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix}\quad (38)$$

Donde  $\boldsymbol{\epsilon}^+$  es el tensor de deformaciones principales sólo positivas ( $\epsilon_n \geq 0$ ), y los tensores  $\sigma$  y  $\boldsymbol{\epsilon}$  son los tensores de esfuerzos y deformaciones cartesianas, respectivamente, definidas en la ec. (14). Es de interés mencionar que las normas propuestas en la ec. (36) por Oliver et al. (1990) y en la ec. (37) por Vieira (2003) no fueron implantadas ni validadas en los trabajos reportados por estos autores; Hernández-García (2012) implantó y realizó simulaciones de elementos a la falla utilizando estas normas, encontrando que la primera no presenta apropiadamente la degradación de los materiales, mientras que con la propuesta dada por Vieira (2003) se obtuvo una degradación adecuada, por lo que se validó el uso de esta norma para el modelo de daño, misma que se presenta en este artículo.

## 2.8. MÓDULO TANGENTE

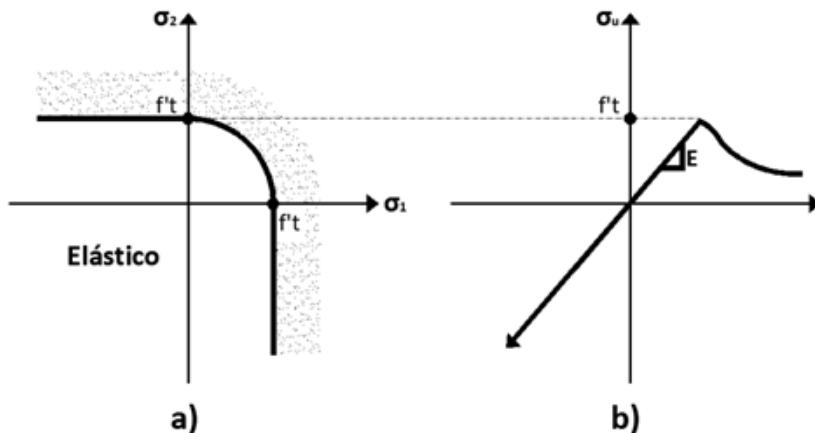
Diferenciando la norma  $\tau_\epsilon$ , definida en la ec. (37), con respecto al tiempo y considerando la ec. (18) se obtiene:

$$\tau_\epsilon = \sqrt{\boldsymbol{\epsilon}^+ : \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}} \Rightarrow \dot{\tau}_\epsilon = \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1}{2\tau_\epsilon} \sigma^+ : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}\quad (39)$$

Sustituyendo la ec. (39) en las ecs. (32) y (34) se obtiene el módulo tensor tangente:

$$\begin{aligned}\dot{\sigma} &= (1-d)\mathbf{C} - \left( \frac{q(r) - q'(r)r}{2r^3} \right) (\mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}^+ \otimes \boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{C}) \\ &\quad \Downarrow \\ \mathbf{C}^T &= (1-d)\mathbf{C} - \left( \frac{q(r) - q'(r)r}{2r^3} \right) (\bar{\sigma}^+ \otimes \bar{\sigma})\end{aligned}\quad (40)$$

El MDST con la superficie mostrada en la Figura 5 se resume en las ecuaciones dadas en la Tabla 2. La norma propuesta por Vieira (2003) sólo es válida para algunos estados de deformación, pues sólo se alcanza la superficie de falla cuando las deformaciones máximas ocurren en dirección horizontal  $X$  ( $e_x > e_y, e_x > e_z$ ), lo cual se confirma revisando la norma propuesta,  $t_s = \sqrt{\sigma^+ \cdot C^{e^{-1}} \cdot \sigma} = \sqrt{\sigma^+ \cdot \varepsilon}$ , donde se utiliza un tensor de esfuerzos principales sólo positivos ( $s_n \geq 0$ ) y un tensor de deformaciones cartesianas  $\varepsilon$ ; sin embargo, un tensor de esfuerzos principales se ordena de 1 a 3 siendo de mayor a menor en magnitudes. Puesto que el esfuerzo principal uno siempre es el mayor ( $s_1 > s_2 > s_3$ ), considerando un problema donde la deformación máxima sea  $e_x$ , la norma sería  $t_s = \sqrt{s_1^+ \cdot e_x}$ , con la cual se obtienen resultados congruentes comparados con resultados experimentales. Contrario a esto, si la deformación máxima es  $e_y$  ó  $e_z$  los resultados ya no son consistentes, pues las normas serían  $t_s = \sqrt{s_2^+ \cdot e_y}$  ó  $t_s = \sqrt{s_3^+ \cdot e_z}$ , esto se debe a que  $e_x < e_y$  ó  $e_z$ , y el esfuerzo  $\sigma_1$  siempre es mayor, al calcular la norma donde se realiza el producto de  $s_1 \cdot e_x$ , los valores serían muy pequeños por lo que no se alcanza la superficie de daño. En consecuencia, se requiere de una carga mayor para alcanzar la superficie de falla, obteniéndose resultados incongruentes con pruebas experimentales o numéricas.



**Figura 5: Modelo de daño solo tensión: a) superficie de daño y b) curva esfuerzo-deformación.**

**Tabla 2: Ecuaciones para el MDST**

a) $y(\boldsymbol{\epsilon}, r) = (1 - d(r))y_0$	Energía libre de Helmholtz
b) $d(r) = 1 - \frac{q}{r}; q \in [0, 1]$	Variable de daño
c) $\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = (1 - d)C : \boldsymbol{\epsilon}$	Ecuación constitutiva
d) $\dot{r} = g \begin{cases} r \in [r_0, \infty] \\ r_0 = r _{t=0} = \frac{s_u}{\sqrt{E}} \end{cases}$	Ley de evolución de daño
e) $f(\tau_\sigma, q) = \tau_\sigma - q = \sqrt{\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C}^{e^{-1}} : \boldsymbol{\sigma}} - q; \begin{cases} q \in [0, r_0] \\ q _{t=0} = r_0 \end{cases}$	Criterio de daño
f) $\dot{q} = H^d(r)\dot{r}; H^d(r) = q'(r) \leq 0$	Regla de endurecimiento
g) $f < 0; g \geq 0; gf = 0$	Condiciones de carga y descarga
h) $gf = 0 \Leftrightarrow f = 0$	Condición de consistencia

En la ec. (41)a se muestra el producto de vectores consistentes y en la (41)b los casos en que se obtienen resultados inadecuados, por lo que este modelo sólo es válido cuando las deformaciones que ocurren en el material sean mayores en la dirección horizontal X.

$$\begin{aligned} a) \quad \boldsymbol{\sigma}^+ : \boldsymbol{\epsilon} &= \sigma_1^+ \epsilon_x \max + \sigma_2^+ \epsilon_y + \sigma_3^+ \epsilon_y \\ b) \quad \boldsymbol{\sigma}^+ : \boldsymbol{\epsilon} &= \begin{cases} \sigma_1^+ \epsilon_x + \sigma_2^+ \epsilon_y \max + \sigma_3^+ \epsilon_y \\ \sigma_1^+ \epsilon_x + \sigma_2^+ \epsilon_y + \sigma_3^+ \epsilon_y \max \end{cases} \end{aligned} \quad (41)$$

## 2.9. MODELO DE DAÑO ISOTRÓPICO SÓLO CORTANTE (MDSC)

Para la formulación del modelo de daño sólo cortante (MDSC) se partió del MDITC, en el que se propone una norma que considere principalmente los esfuerzos a cortante, análoga al criterio de Tresca, la norma propuesta para este modelo de daño es:

$$\begin{aligned} \tau_\sigma &= \sqrt{\boldsymbol{\sigma}_c : \mathbf{C}^{e^{-1}} : \boldsymbol{\sigma}} \quad \mathbf{C}^{e^{-1}} : \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\epsilon} \\ \tau_\epsilon &= \sqrt{\boldsymbol{\epsilon}_c : \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}} \quad \boldsymbol{\epsilon}_c : \mathbf{C} = \boldsymbol{\sigma}_c \end{aligned} \quad (42)$$

Tal que:

$$\boldsymbol{\sigma}_c = \begin{bmatrix} 0 & \tau_c \max_{x-y} & \tau_c \max_{z-x} \\ \tau_c \max_{x-y} & 0 & \tau_c \max_{y-z} \\ \tau_c \max_{z-x} & \tau_c \max_{y-z} & 0 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\epsilon}_c = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_c \max_{x-y} & \gamma_c \max_{z-x} \\ \gamma_c \max_{x-y} & 0 & \gamma_c \max_{y-z} \\ \gamma_c \max_{z-x} & \gamma_c \max_{y-z} & 0 \end{bmatrix} \quad (43)$$

Donde  $\tau_c \max_{n-m}$  y  $\gamma_c \max_{n-m}$  son los esfuerzos y deformaciones por cortante máximos respectivamente, calculados como:

$$\begin{aligned} \tau_c \max_{x-y} &= \sqrt{\frac{+s_y^2 + t_{xy}^2}{4}} \quad \text{o} \quad \tau_c \max_{x-y} = \frac{s_1 - s_3}{2} \\ \tau_c \max_{y-z} &= \sqrt{\frac{+s_z^2 + t_{yz}^2}{4}} \quad \text{o} \quad \tau_c \max_{y-z} = \frac{s_1 - s_3}{2} \\ \tau_c \max_{z-x} &= \sqrt{\frac{+s_x^2 + t_{zx}^2}{4}} \quad \text{o} \quad \tau_c \max_{z-x} = \frac{s_1 - s_3}{2} \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} g_c \max_{x-y} &= \sqrt{\frac{+e_y^2 + g_{xy}^2}{4}} \quad \text{o} \quad g_c \max_{x-y} = \frac{e_1 - e_3}{2} \\ g_c \max_{y-z} &= \sqrt{\frac{+e_z^2 + g_{yz}^2}{4}} \quad \text{o} \quad g_c \max_{y-z} = \frac{e_1 - e_3}{2} \\ g_c \max_{z-x} &= \sqrt{\frac{+e_x^2 + g_{zx}^2}{4}} \quad \text{o} \quad g_c \max_{z-x} = \frac{e_1 - e_3}{2} \end{aligned} \quad (45)$$

La magnitud de  $r_0$  se obtiene análoga al de la falla a tensión como en la ec. (19):

$$t_e = \sqrt{e_c : C : e} \Rightarrow r_0 = \frac{t_u}{\sqrt{m}} \quad (46)$$

$$t_u = \frac{s_u}{2} \Rightarrow r_0 = \frac{s_u}{2\sqrt{m}}$$

## 2. 10. MÓDULO TANGENTE

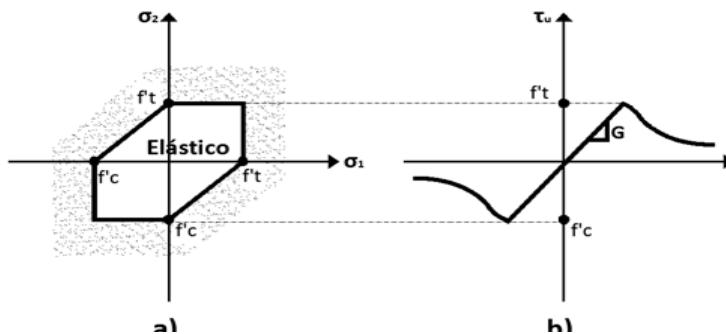
Diferenciando la norma  $\mathbf{t}_e$ , definida en la ec. (42) y considerando la ec. (18):

$$\tau_e = \sqrt{\mathbf{e}_c : \mathbf{C} : \mathbf{e}} \Rightarrow \dot{\tau}_e = \dot{r} = \frac{1}{2\tau_e} \mathbf{e}_c : \dot{\mathbf{e}} \quad (47)$$

El módulo tensor tangente se obtiene sustituyendo la ec. (47) en las ec. (34) y (32):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} &= (1-d)\mathbf{C} - \left( \frac{q(r) - q'(r)r}{2r^3} \right) (\mathbf{C} : \mathbf{e}_c \otimes \mathbf{e} : \mathbf{C}) \\ &\Downarrow \\ \mathbf{C}^T &= (1-d)\mathbf{C} - \left( \frac{q(r) - q'(r)r}{2r^3} \right) (\bar{\mathbf{e}}_c \otimes \bar{\mathbf{e}}) \end{aligned} \quad (48)$$

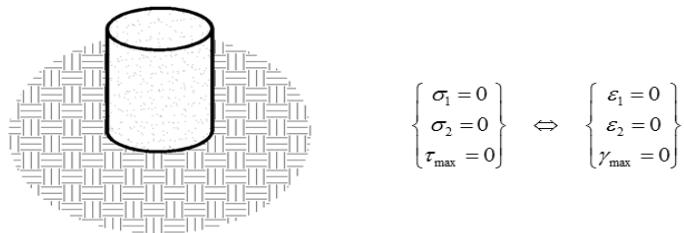
El MDSC se resume con las ecuaciones de la Tabla 3 con el umbral de daño mostrado en la Figura 6. Cabe mencionar que este modelo de daño sólo es válido para elementos sujetos a cortante puro, donde las deformaciones por cortante y esfuerzos cortantes son mayores una vez que se inicia el incremento de carga, esto quiere decir  $\mathbf{g}_{nn} > \mathbf{e}_{nn}$  y  $\mathbf{t}_{nn} > \mathbf{s}_{nn}$ . Por ejemplo, para un cilindro de concreto ensayado a compresión, en el que se espera alcanzar un esfuerzo a compresión último  $\sigma_{cu}$ , la falla que se presenta no es precisamente en compresión, sino que ocurre a cortante. Aunque el MDSC se puede emplear en elementos donde la concentración de esfuerzos es de cortante, no puede emplearse para sólidos en los que el esfuerzo inicial es a compresión y las deformaciones por cortante son casi nulas, impidiendo al modelo de daño alcanzar la superficie de falla, como se muestra en la Figura 7. Para este tipo de problemas se utilizó el MDITC, donde los esfuerzos analizados son a tensión y compresión simulando esta prueba con resultados consistentes como se mostrará en los ejemplos de aplicación.



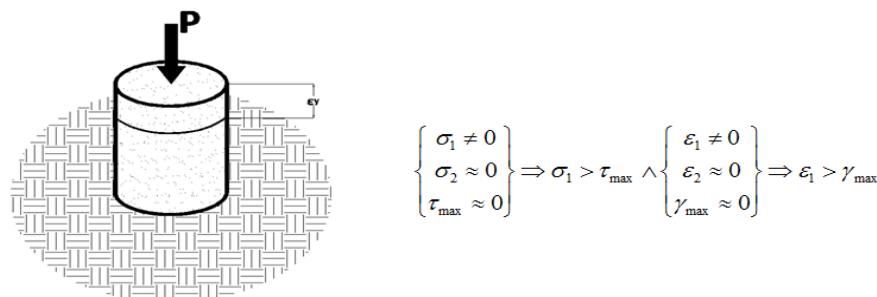
**Figura 6: Modelo de daño solo cortante: a) superficie de daño y b) curva esfuerzo-deformación.**

**Tabla 3: Ecuaciones para el MDSC**

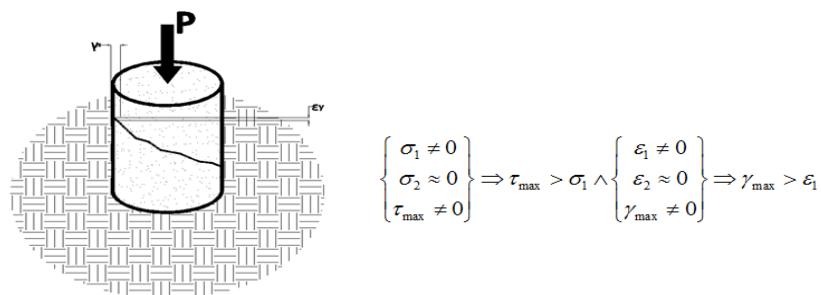
a) $y(\epsilon, r) = (1 - d(r))y_0$	Energía libre de Helmholtz
b) $d(r) = 1 - \frac{q}{r}; q \in [0, 1] \in [-1]$	Variable de daño
c) $\sigma = \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} = (1 - d)C : \epsilon$	Ecuación constitutiva
d) $\dot{r} = g \left\{ \begin{array}{l} r \in [r_0, \infty] \\ r_0 = r _{t=0} = \frac{s_u}{2\sqrt{G}} \end{array} \right\}$	Ley de evolución de daño
e) $f(\tau_\sigma, q) = \tau_\sigma - q = \sqrt{\sigma : C^{e-1} : \sigma} - q; \left\{ \begin{array}{l} q \in [0, r_0] \\ q _{t=0} = r_0 \end{array} \right\}$	Criterio de daño
f) $\dot{q} = H^d(r)\dot{r}; H^d(r) = q'(r) \leq 0$	Regla de endurecimiento
g) $f < 0; g \geq 0; gf = 0$	Condiciones de carga y descarga
h) $q\dot{f} = 0 \Leftrightarrow f = 0$	Condición de consistencia



a) Cilindro antes de aplicación de carga



b) Inicio de aplicación de carga



c) Inicio de falla por cortante

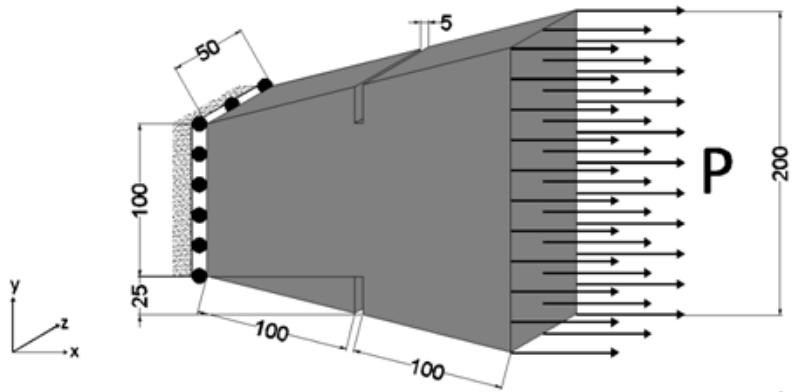
Figura 7: Prueba de compresión en cilindro de concreto.

## 2. 11. EJEMPLOS DE APLICACIÓN

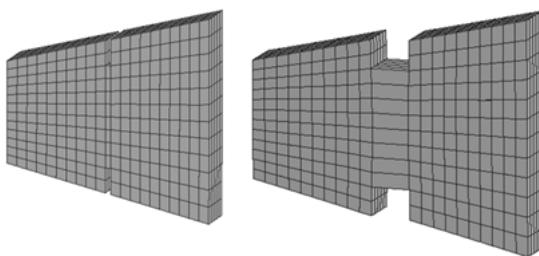
En esta sección se muestran algunos ejemplos de aplicación, en los que se validan los MDST, MDSC y MDITC, los cuales se comparan con otras formulaciones numéricas y/o resultados experimentales reportados en la literatura. Todos los ejemplos realizados se someten a cargas de falla las cuales se indujeron mediante desplazamientos prescritos, para evitar problemas numéricos asociados al ablandamiento del material.

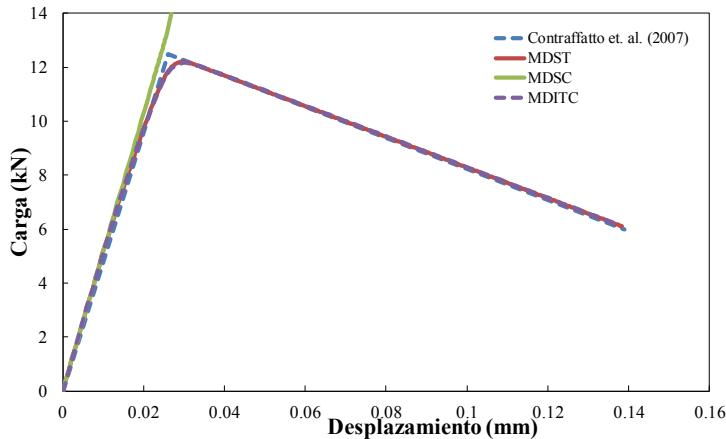
## 2. 12. ESPÉCIMEN DE CONCRETO DE SECCIÓN VARIABLE CON DOS RANURAS

Un espécimen con sección variable en su eje transversal y dos ranuras en la parte media del eje longitudinal (superior e inferior), se somete a un estado de esfuerzos de tensión pura uniaxial, las propiedades del material son: módulo de Young  $E=16,900 \text{ MPa}$  ( $172,332.040 \text{ kgf/cm}^2$ ), relación de Poisson  $\nu=0.2$ , esfuerzo máximo de tensión  $\sigma_u=2.400 \text{ MPa}$  ( $24.473 \text{ kgf/cm}^2$ ) y densidad de energía de fractura  $G_f=0.3 \text{ J/m}^2$  ( $3.059 \times 10^{-4} \text{ kgf-cm/cm}^2$ ).

**Figura 8: Viga de sección variable con dos ranuras en el centro.**

Este ejemplo se eligió para validar el modelo con la solución de un problema numérico realizado por Contraffatto *et al.* (2007), quienes utilizaron elementos finitos con discontinuidad de interiores; la geometría y condiciones de frontera de la sección variable se muestran en la Figura 8, donde se observa que se restringió el desplazamiento horizontal en el área transversal más pequeña, mientras que en la sección opuesta se ejerce una fuerza que provoca esfuerzos de tensión en el sólido, con la cual se espera una falla de modo I, por apertura, en la zona próxima a las dos ranuras. En la Figura 9 se muestra una malla estructurada de hexaedros para la simulación en 3D, que consta de 1240 elementos finitos; como se esperaba, la concentración de esfuerzos se presenta en la parte ranurada de la sección y se presenta la falla tipo I. En la Figura 10 se muestra que las curvas de carga contra desplazamiento obtenidos con el MDST, MDITC y los reportados por Contraffatto *et al.* (2007) son consistentes; sin embargo, la curva obtenida con el MDSC permanece en su intervalo elástico puesto que no se presentan deformaciones por cortante en el material, por lo que la norma no alcanza la superficie de falla.

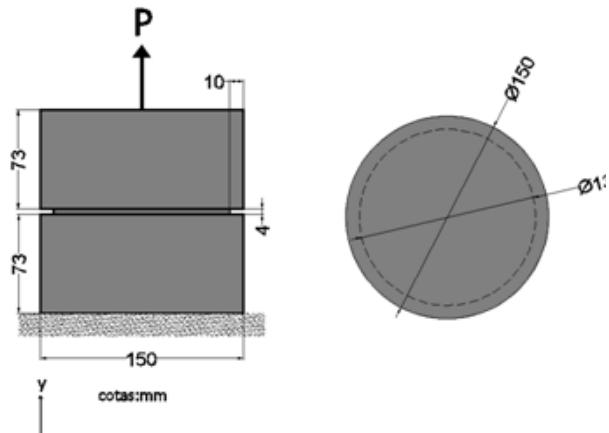
**Figura 9: Mallas de elementos finitos antes y después del daño,  
utilizada en el análisis 3D con el MDST.**



**Figura 10: Carga contra desplazamiento de espécimen de sección variable.**

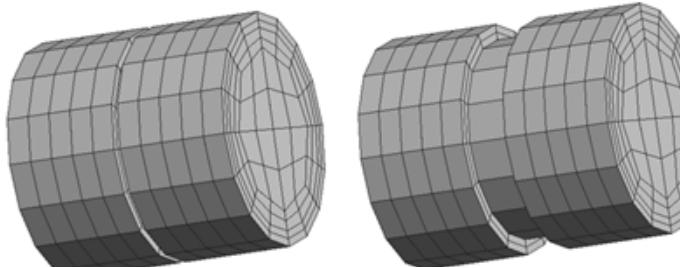
## 2. CILINDRO DE CONCRETO SIMPLE EN TENSIÓN PURA

En este ejemplo se estudia un cilindro de concreto simple que tiene una ranura perimetral en el centro del eje longitudinal, sometido a carga de tensión pura uniaxial con la geometría y condiciones de frontera mostradas en la Figura 11, el cual se tomó de los especímenes ensayados a tensión por Barragán (2002). Las propiedades del material son: módulo de Young  $E=30.500 \text{ GPa}$  ( $3,109.072 \text{ kgf/cm}^2$ ), relación de Poisson  $\nu=0.2$ , esfuerzo máximo de tensión  $\sigma_u=1.790 \text{ MPa}$  ( $18.253 \text{ kgf/cm}^2$ ) y densidad de energía de fractura  $G_f=100 \text{ N/m}$  ( $0.102 \text{ kgf/cm}$ ).

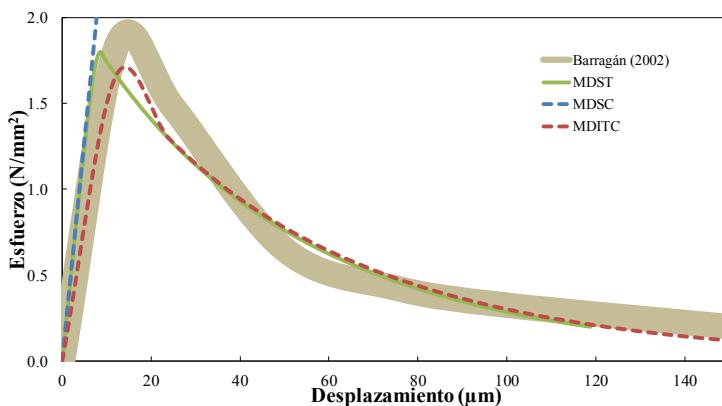


**Figura 11: Cilindro de concreto simple (adaptada de Blanco 2006).**

Para el modelado en 3D se estructuró una malla de hexaedros de 848 elementos finitos mostrados en la Figura 12, donde se observa la malla antes y después de generarse el daño. En la Figura 13 se muestran las curvas esfuerzo contra desplazamiento, donde se observa que los resultados numéricos obtenidos con los MDST y MDITC son congruentes con los resultados experimentales reportados por Barragán (2002); sin embargo, al igual que el ejemplo anterior, la curva calculada con el MDSC permanece en su intervalo elástico al no existir deformaciones por cortante en el material, por lo que no se alcanza la superficie de falla.



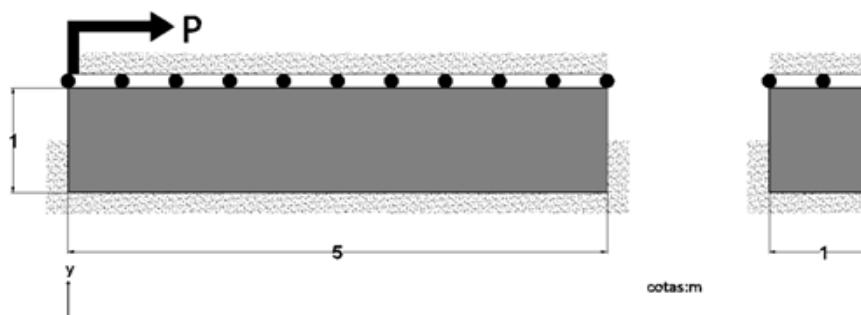
**Figura 12: Malla de elementos finitos antes y después del daño, utilizada en el análisis 3D en el MDST.**



**Figura 13: Esfuerzo contra desplazamiento de cilindro de concreto.**

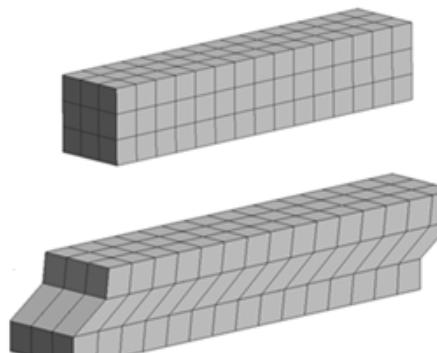
### 3. ESPÉCIMEN EN CORTANTE PURO

Un espécimen rectangular, con geometría y condiciones de frontera mostradas en la Figura 14, se somete a una carga horizontal aplicada en la parte superior. Debido a que el espécimen está restringido a la mitad de su altura, esfuerzos de cortante puro se concentran a lo largo de su eje longitudinal. Las propiedades del material son: módulo de Young  $E=26,500 \text{ kPa}$  ( $265.036 \text{ kgf/cm}^2$ ), relación de Poisson  $\nu=0.3$ , esfuerzo máximo de tensión  $\sigma_u=40 \text{ kPa}$  ( $0.408 \text{ kgf/cm}^2$ ), esfuerzo máximo a cortante  $\tau_u=20 \text{ kPa}$  ( $0.204 \text{ kgf/cm}^2$ ), módulo de rigidez a cortante  $G=10,000 \text{ kPa}$  ( $101.972 \text{ kgf-cm/cm}^2$ ) y módulo de ablandamiento discreto  $H_s=-0.100$ .

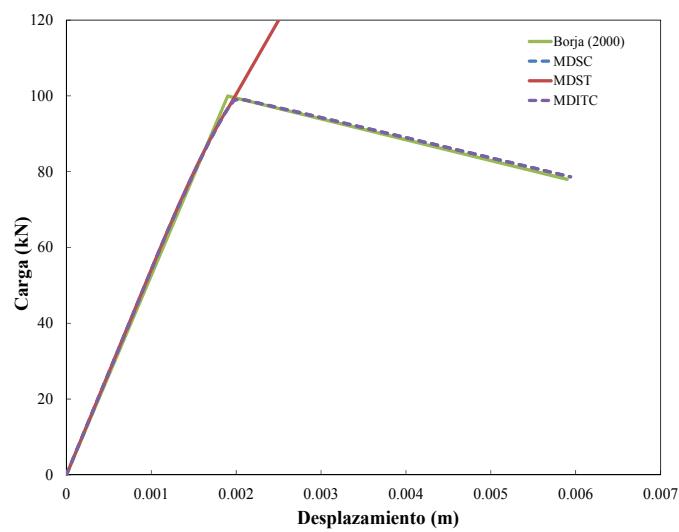


**Figura 14: Espécimen sometido a cortante puro.**

Para la simulación de este espécimen se utilizó una malla de hexaedros en 3D que se muestra en la Figuras 15. Las curvas de carga contra desplazamiento obtenidas con los tres modelos y los resultados numéricos de un modelo de discontinuidades interiores, reportada por Borja (2000), se muestran en la Figura 16, donde se observa que las curvas obtenidas con los MDITC y MDSC son congruentes. Es de interés mencionar que Borja (2000) utilizó una superficie de plasticidad con ablandamiento, por lo que en el MDSC se tomó el esfuerzo de fluencia como el esfuerzo último. El MDST no alcanza la superficie de falla porque las deformaciones por cortante son mayores en magnitud a las deformaciones cartesianas, es decir  $g_m \gg e_m$ . En consecuencia se necesitaría una fuerza mayor a la que fallaría el material para alcanzar la superficie de falla por tensión, lo cual no es congruente.



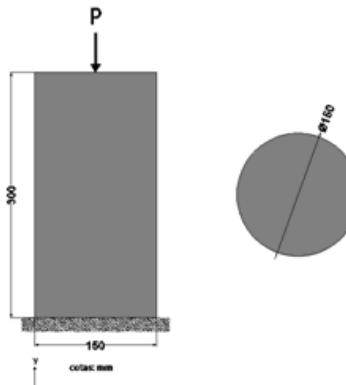
**Figura 15: Mallas antes y después del daño.**



**Figura 16: Curva carga contra desplazamiento de espécimen.**

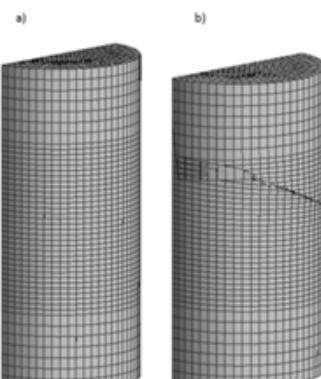
#### 4. CILINDRO DE CONCRETO EN COMPRESIÓN SIMPLE (CORTANTE INDIRECTO)

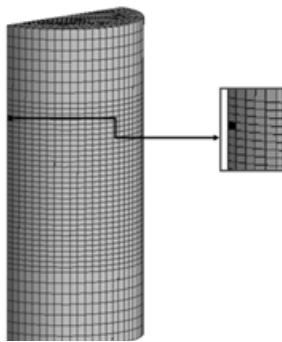
Este ejemplo consiste en una prueba a compresión simple realizada a un cilindro de concreto, como parte de pruebas de calidad del concreto utilizado para la construcción de tráves acarteladas de Urbina-Californias (2013). La geometría y condiciones de frontera del espécimen de concreto se muestran en la Figura 17.

**Figura 17: Cilindro de concreto sometido a compresión simple.**

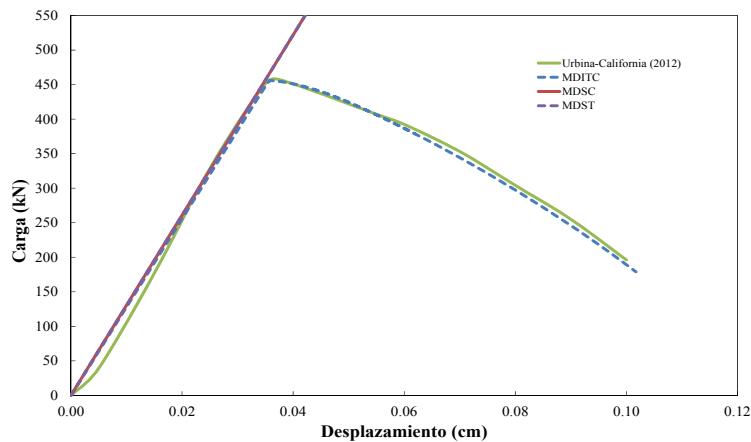
El concreto tiene un módulo de Young  $E_c=22,145.400 \text{ MPa}$  ( $225,820.234 \text{ kgf/cm}^2$ ), resistencia última a la compresión  $\sigma_{cu}=25,506 \text{ kPa}$  ( $260.089 \text{ kgf/cm}^2$ ), resistencia última a la tensión  $\sigma_{tu}=2,550.600 \text{ kPa}$  ( $26.008 \text{ kgf/cm}^2$ ), resistencia última a cortante  $\tau_u=12,753 \text{ kPa}$  ( $130.044 \text{ kgf/cm}^2$ ), relación de Poisson  $v=0.2$  y módulo de ablandamiento discreto  $H_s/E=-0.01$ .

Se utilizó una malla estructurada de hexaedros como se muestra en la Figura 18a, con un mallado más fino en la parte media del cilindro, donde se supone que se presenta la concentración de esfuerzos; se modeló solamente la mitad del cilindro considerando la simetría del modelo para reducir el tiempo de cómputo. En la Figura 20 se muestran las curvas de carga contra desplazamiento, donde se observa que sólo el MDITC presenta resultados congruentes con los experimentales reportados por Urbina-Californias (2013); mientras que los MDSC y MDST presentan un comportamiento elástico, debido a que en el material no se presentan deformaciones por cortante o en tensión que activen las respectivas superficies de falla de estas normas. Al aplicar la carga en el espécimen se tiene el mismo estado de esfuerzos en todos los puntos de integración de la malla, por lo que se disminuyó al 95% la magnitud del esfuerzo último en un elemento de la malla, como se muestra en la Figura 19, induciendo así el inicio de la falla en el modelado.

**Figura 18: Malla en: a) antes y b) después del daño.**



**Figura 19: Elementos finitos con esfuerzo último reducido.**



**Figura 20: Curva carga contra desplazamiento de cilindro en compresión.**

## CONCLUSIONES

En esta investigación se realizó la formulación, implantación y validación de modelos de daño para la modelación de elementos estructurales, los cuales se validaron con modelos en 3D llegando a las siguientes conclusiones:

- a) Los resultados obtenidos con los modelos desarrollados en esta investigación son congruentes con los resultados reportados experimental y numéricamente, concluyendo que se obtiene una adecuada simulación del ablandamiento del material localizando sus zonas de degradación;
- b) Es posible asignar la energía de fractura en los modelos implantados en este trabajo, obtenida por experimentos o reportada en la literatura, siendo dependiente de los resultados numéricos;
- c) Los modelos de daño implantados no presentan atoramientos numéricos, lo cual garantiza una adecuada simulación de estructuras evolucionando al colapso; y
- d) En los cuatro ejemplos presentados en este artículo, el MDITC fue el que mostró resultados congruentes con los experimentales o numéricos reportados en la literatura. Aunque en el cilindro de concreto en compresión se presentó un aplastamiento prematuro; éste se debe a que el material tiene diferentes umbrales a tensión y compresión, lo cual puede superarse con una superficie de falla con diferentes umbrales como la desarrollada por Juárez-Luna *et al.* (2014).

Las limitantes encontradas en este trabajo son:

- El MDST no modela adecuadamente la falla cuando las deformaciones máximas ocurren en dirección vertical, lo cual no ocurre en la dirección perpendicular, con lo que se concluye que este modelo de daño sólo es válido para problemas que presenten deformaciones máximas en dirección horizontal;
- El MDSC también presentó problemas para modelar la falla cuando no existen deformaciones por cortante, necesarias para que la norma alcance la superficie de falla, con lo cual se concluye que sólo es válido para problemas donde las fuerzas externas produzcan cortante puro en los sólidos; y
- En general, no son recomendables los MDST y MDSC para el análisis del colapso en elementos estructurales, pues sus normas son dependientes de la dirección en la que se presenten las deformaciones máximas, por lo que no se alcanza la superficie de falla o se obtiene una carga última mayor.

El modelado numérico en la práctica es una herramienta que permite conocer las zonas donde se presentan concentraciones de deformaciones en elementos estructurales, donde debe reforzarse una estructura para evitar la presencia de daño. Otra de las aplicaciones es conocer la capacidad residual de las estructuras, una vez que existe daño en los elementos. En pruebas de laboratorio, el modelado numérico permite determinar las magnitudes de carga del primer agrietamiento, propagación y cargas de colapso, lo que permite un mejor diseño del espécimen. Por lo que en la aplicación de los modelos de daño para modelar estructuras en su evolución al colapso deben considerar las recomendaciones siguientes:

- El tiempo de cómputo de un modelado numérico en 2D es menor en comparación con un modelo en 3D, obteniendo resultados congruentes; sin embargo, en 3D se obtiene una mejor aproximación de la estructura en su evolución al colapso;
- Verificar la magnitud de las cargas a las que estará sometida la estructura, para la elección del modelo de daño que se adecue a las solicitudes;
- Seleccionar un tamaño óptimo de la malla de elementos finitos, la cual debe ser estructurada y refinada en la zona de concentración de deformaciones; y
- Cuando sea posible, considerar la simetría del modelo, lo cual reducirá el tiempo de cómputo.

## AGRADECIMIENTOS

El primer autor agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) por la beca otorgada para sus estudios de Maestría, el segundo autor agradece a la Universidad Autónoma Metropolitana por el patrocinio al proyecto titulado “Análisis de losas de concreto e implantación de elementos finitos con discontinuidades embebidas”.

## REFERENCIAS

- Barragan, B. (2002), “Failure and Toughness of Steel Fiber Reinforced Concrete Under Tension and Shear”, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Cataluña.
- Bazant, Z., Oh, B. (1985), “Microplane Model for Progressive Fracture of Concrete and Rock”, Journal of Engineering Mechanics, 111(4), pp. 559-582.
- Blanco, S. (2006), “Contribuciones a la Simulación Numérica del Fallo Material en Medios Tridimensionales Mediante la Metodología de Discontinuidades Fuertes de Continuo”, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Catalunya, España.
- Borja, R. (2000), “A finite Element Model for Strain Localization Analysis of Strongly Discontinuous Field Based on Standard Galerkin Approximation”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190(11-12), pp. 1529-1549.
- Hernández-García, D. (2012), “Formulación e Implantación de Modelos de Daño para la Simulación de la Evolución al Colapso en Sólidos”, Tesis de Maestría, Universidad Autónoma Metropolitana, México, D.F.
- Ju, J. (1989), “On Energy-Based Coupled Elastoplastic Damage Theories: Constitutive Modeling and Computational Aspects”, International Journal for Solids and Structures, 25(8), pp. 803-833.
- Juárez, G. (2006), “Modelado Numérico de Problemas de Fractura en Sólidos Mediante Discontinuidades Interiores”, Tesis Doctoral, Universidad Nacional Autónoma de México.
- Juárez, G., Ayala, G.A. (2009), “Variational Formulation of the Material Failure Process in Solids by Embedded Dis Continuities Model”, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 25, pp. 26-62.
- Juárez, G., Ayala, G. (2010a), “Análisis de estructuras con Elementos Finitos Mixtos”, XVII Congreso Nacional de Ingeniería Estructural, León, Guanajuato, noviembre.
- Juárez, G., Ayala, G. (2010b), “Aproximación del Proceso de Falla en Sólidos con Elementos Finitos Mixtos Usando Modelos de Daño Continuos”, Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, 26(3), pp. 225-232.
- Juárez-Luna, G., Méndez-Martínez, H., Ruiz-Sandoval, M.E. (2014), “An Isotropic Damage Model to Simulate Collapse in Reinforced Concrete Elements”, Latin American Journal of Solids and Structures, 11(13), pp. 2444-2459.
- Kachanov, L. (1958), “Time of the Rupture Process Under Creep Conditions”, IVZ Akad Nauk, S.S.R., Otd Tech Nauk, 8, pp. 26-31.
- Lemaitre, J. (1971) “Evaluation of Dissipation and Damage in Metals Submitted to Dynamic Loading”, International-Conference on Mechanical Behavior of Materials, pp. 540-549.
- Lubliner, J., Oliver, J., Oller, S., Oñate, E. (1989), “A plastic-Damage Model for Concrete”, International Journal Solids Structures, 25(3), pp. 299-326.

Luccioni, B. (2003), "Apuntes de Mecánica de Daño Continuo", primera edición, CIMNE, España.

Luccioni, B., Oller, S., Danesi, R., (1996), "Coupled Plastic-Damage Model", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 129(1-2), pp. 81-89.

Méndez-Martínez, H., Juárez-Luna, G. (2012), "Implementación de un Modelo de Daño Continuo para la Simulación al Colapso de Estructuras de Concreto", Concreto y Cemento. Investigación y Desarrollo, Instituto Mexicano del Cemento y del Concreto A.C., 3(2), pp. 19-33.

Oliver, J., Cervera, M., Oller, S., Lubliner, J. (1990), "Isotropic Damage Models and Smeared Crack Analysis of Concrete", en N. B. et al., editores SCI-C Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures, Swansea, Pineridge Press, pp. 945-957.

Retama-Velasco, J., Ayala G. (2010), "Modelado del Daño en Sólidos Mediante Formulaciones Variacionales de Discontinuidades Interiores", Revista Internacional de Métodos Numéricos para Calculo y Diseño en Ingeniería, 26(3), pp. 171-177.

Rots, J., (1985), "Computational Modeling of Concrete Fracture", Tesis Doctoral, Delft University of Technology, Países Bajos.

Simo, J., Ju, J. (1987a), "Strain- and Stress-Based Continuum Damage Models Part I: Formulation", International Journal for Solids and Structures, 23(7), pp. 821-840.

Simo, J., Ju, J. (1987b), "Strain- and Stress-Based Continuum Damage Models Part II: Computational Aspects", International Journal for Solids and Structures, 23(7), pp. 841-869.

Taylor, L.R. (2008), "A Finite Element Analysis Program (FEAP) v8.2", Department of Civil and Environmental Engineering, University of California at Berkeley, Berkeley CA.

Urbina-Californias, L. (2013), "Comportamiento a Cortante de Trabes Acarteladas Continuas de Concreto Reforzado Sujetas a Cargas Cíclicas", Tesis de Maestría, Universidad Autónoma Metropolitana, México, D.F.

Vieira, W. (2003), "A Three Dimensional Setting for Strong Discontinuities Modeling in Failure Mechanics", Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Catalunya, España.