

COMPORTAMIENTO ANALÍTICO-EXPERIMENTAL CORTANTE EN VIGAS DE CONCRETO FIBROREFORZADO

C. A. Juárez¹, J. M. Mendoza-Rangel¹, P. L. Valdez-Tamez¹, A. Durán-Herrera¹, J. R. González¹

RESUMEN

La presente investigación propone una comparativa analítica-experimental del comportamiento a cortante por tensión diagonal en 32 vigas de concreto reforzado, utilizando adicionalmente fibras de acero como reforzamiento. Se investigaron dos relaciones agua/cemento (a/c) = 0.55 y 0.85, además del efecto de la variación en la fracción del volumen (V_f) de las fibras (0.5, 1.0, 1.5 %) y el control (0 %). Las vigas fueron fabricadas por duplicado para cada relación (a/c), ocho pares de vigas con estribos y ocho pares de vigas sin estribos. Se ensayaron las 32 vigas bajo carga estática produciendo altos valores de esfuerzo cortante en la zona de claro a cortante. Los resultados mostraron que la resistencia experimental a cortante en las vigas fibroreforzadas, con estribos y sin estribos, es considerablemente mayor que la fuerza teórica estimada por el código del ACI-318. Adicionalmente, se evaluaron procedimientos teóricos de predicción de resistencia a cortante en vigas de concreto fibroreforzadas, mediante la comparación de tres modelos matemáticos obtenidos de la literatura (Imam, Swamy y Narayanan) y los datos experimentales de las 32 vigas ensayadas a cortante por tensión diagonal. Se encontró que los tres modelos predicen adecuadamente el efecto de la relación a/c , la V_f , la aportación del acero longitudinal y la presencia de estribos en la resistencia última a cortante. El modelo propuesto por Imam resulta ser poco conservador ya que sus valores son mayores a los obtenidos en los ensayos de las vigas, mientras que los modelos de Swamy y Narayanan predijeron valores conservadores con respecto a la resistencia última a cortante, acercándose al valor alcanzado por la resistencia a cortante experimental.

Palabras clave: concreto fibroreforzado, vigas, esfuerzo a cortante, modelo analítico, estribos, fibras de acero.

ABSTRACT

In this research work, an analytical-experimental comparison of the shear behavior under diagonal tensile stresses is presented for a set of 32 partially fiber reinforced concrete beams. Additionally to the reference ($V_f = 0\%$), three fiber volume fractions (0.5, 1.0, 1.5 %) were studied for two water/cement ratios (w/c) = 0.55 and 0.85. In total sixteen beams were casted by duplicate, 8 with stirrups and 8 without stirrups. Flexural strength results for shear reinforced and non-reinforced beams were considerably higher than the estimations from ACI 318 equations. Procedures for theoretical predictions of the shear strength were also evaluated through a comparison of three mathematical models obtained from reference literature (Imam, Swamy y Narayanan) with the obtained experimental diagonal tensile stresses. In comparison with the ultimate shear strength of the beams, results illustrate that these models adequately predict the effect of parameters as: w/c ratio, V_f , contribution of the steel bars length and presence of stirrups. In comparison with the experimental results the model proposed by Imam resulted less conservative because the predicted values were higher than the experimental values, while Swamy and Narayanan models provided conservative and more proximate values.

Keywords: fiber reinforced concrete, beams, shear strength, analytical model, stirrups, steel fibers.

RESUMO

Neste trabalho de pesquisa, uma comparação analítica-experimental do comportamento de corte sob tensões de tração diagonais é apresentado por um conjunto de 32 parcialmente reforçado com fibra de vigas de concreto. Além da referência ($V_f = 0\%$), três frações de volume de fibra (0.5, 1.0, 1.5 %) foram estudados por duas

⁽¹⁾Profesores Investigadores de Tiempo Completo, Universidad Autónoma de Nuevo León, Av. Universidad S/N, Cd. Universitaria, C.P. 66451, San Nicolás de los Garza, Nuevo León, Tel: (81) 83294000 Ext. 7220.

E-mail: cesar.juarezal@uanl.edu.mx

Artículo recibido el 7 de octubre del 2014 y aprobado el 22 de enero del 2015.

relações água / cimento (a/c) = 0.55 e 0.85. No total, dezenas de vigas foram fundidas por duplicado, 8, com estribos e 8 sem estribos. Resultados de resistência à flexão de cisalhamento armado e vigas sem reforço foram consideravelmente maiores que as estimativas de ACI 318 equações. Procedimentos para as previsões teóricas de resistência ao cisalhamento foram também avaliados através de comparação de três modelos matemáticos obtidos a partir da bibliografia de referência (Imam, Swamy y Narayanan) com as tensões de tração diagonais experimentais obtidos. Em comparação com a resistência final ao cisalhamento das vigas, os resultados mostram que esses modelos de predizer o efeito de parâmetros como: w/c razão, V_f , a contribuição do comprimento de barras de aço e na presença de estribos. Em comparação com os resultados experimentais do modelo proposto por Imam resultou menos conservadora, porque os valores previstos foram superiores aos valores experimentais, enquanto os modelos Swamy e Narayanan desde valores conservadores e mais próximas.

Palavras-chave: concreto reforçado com fibras, vigas, força de cisalhamento, modelo analítico, estribos, fibras de aço.

1. INTRODUCCIÓN

Las estructuras de concreto reforzado son muy efectivas para la construcción debido a su versatilidad y al casi nulo mantenimiento, lo que lo hace sin duda, el material de construcción más usado en la actualidad. También, es conocido que el concreto tiene la capacidad de ser reforzado no solo con las varillas de acero, sino también que el uso de fibras de acero resulta ser una alternativa de refuerzo adecuada para el concreto, incrementando su rigidez, tenacidad, resistencia a cortante y al agrietamiento diagonal (Khuntia, et al., 2001, Swamy, et al., 1993).

En general, los elementos de concreto reforzado son diseñados para resistir cargas externas que les producen esfuerzos y deformaciones de diferentes tipos, estos diseños están usualmente basados en los reglamentos de construcción y en la literatura técnica que presenta procedimientos bien definidos de dimensionamiento y reforzamiento. La experiencia ha demostrado que estos procedimientos han sido adecuados para la mayoría de las estructuras. Sin embargo, cuando el refuerzo del concreto no es solo con la varilla de acero convencional, estos procedimientos y teorías deberían considerar la aportación de este reforzamiento adicional.

La mayoría de la literatura técnica presenta de manera escasa procedimientos de diseño para estructuras de concreto que son reforzadas con fibras de acero, en contraste, existe suficiente investigación que permite suponer que las fibras de acero aportan ductilidad e incrementan la resistencia mecánica a tensión del concreto (Juárez, et al., 2007). Entonces, considerando la principal aportación que tienen las fibras de acero, resulta conveniente orientar los estudios hacia el comportamiento bajo esfuerzo cortante en vigas de concreto fibroreforzado; este esfuerzo también es conocido como un esfuerzo de tensión diagonal en la zona de los apoyos. (Park, et al., 1990).

El comportamiento de un elemento de concreto reforzado sujeto a esfuerzo cortante por tensión diagonal es más complejo de lo que se puede suponer, ya que la distribución de esfuerzos cambia apreciablemente en el momento en que aparecen agrietamientos. La posición en que se forman estas grietas no puede predecirse con exactitud, ya que existen variaciones de homogeneidad en el material que afectan localmente a la resistencia del concreto. Debido entonces a la complejidad del problema, los métodos utilizados en la actualidad para dimensionar elementos de concreto sujetos a fuerza cortante, se basan en el conocimiento experimental de su comportamiento. Los estudios experimentales se han concretado principalmente en la determinación de la resistencia del concreto al agrietamiento diagonal y de la contribución del refuerzo transversal (estribos) a la resistencia del elemento. Sin embargo, existen estudios que sugieren el uso de fibras de acero como un potencial refuerzo para la matriz de concreto (Shin et al., 1994).

El esfuerzo cortante tiene una falla súbita si el refuerzo transversal en el concreto (estribos) no es el suficiente, y se presenta usualmente con una carga inferior a la carga de falla por flexión. Por lo tanto, en el caso de utilizar fibras de acero como refuerzo alternativo a cortante que evite la falla frágil e incremente su resistencia última, resultará pertinente presentar procedimientos teóricos para predecir esta resistencia y al hacer una comparativa con datos experimentales permitirá conocer la aportación de las fibras y contar con una posible ayuda confiable de diseño.

Se han realizado investigaciones para estudiar el efecto de fibras de acero en el comportamiento a tensión de vigas de concreto de alta resistencia, proponiendo ecuaciones empíricas para predecir la resistencia de estas vigas. Se encontró que al aumentar la cantidad de fibras se incrementaba también la rigidez y ductilidad (Ashour et al., 1992). Además, se ha estudiado la efectividad de las fibras de acero en el incremento de la resistencia a cortante

de vigas sección T. Se estudió la posibilidad de utilizar fibras y refuerzo transversal (estribos) actuando en forma compuesta, y claramente se observó que las fibras controlan la deflexión, además de las deformaciones y rotaciones producidas por las cargas de corte (Swamy *et al.*, 1985). Otros estudios que se han realizado para vigas de concreto fibroreforzado, han tomado en cuenta los efectos de las cargas cíclicas (Kwak *et al.*, 1991) y el corte directo (Valle *et al.*, 1993), lo que demuestra el interés de la comunidad científica, en este tipo de comportamiento de elementos estructurales reforzados con fibras de acero.

La presente investigación tuvo como objetivo producir una experimentación científica propia que valide algunos procedimientos teóricos de predicción de resistencia a cortante en vigas de concreto fibroreforzadas. Lo cual se logró mediante la comparación de tres modelos matemáticos obtenidos de la literatura y datos experimentales de vigas ensayadas a cortante por tensión diagonal, investigación realizada en las instalaciones del Instituto de Ingeniería Civil de la UANL.

2. MATERIALES Y MEZCLAS DE CONCRETO

Se utilizó cemento Portland tipo CPC 30R que cumple con la norma NMX-C-414-ONNCCE, agregado grueso de caliza con tamaño máximo 12.7 mm, peso volumétrico seco suelto de 1517 kg/m³ y 4.75 mm para el agregado fino con pesos volumétrico seco suelto de 1710 kg/m³, la granulometría cumple con la norma ASTM C33. El acero de refuerzo longitudinal fueron tres varillas No. 5 (16 mm) $f_y = 420$ MPa y para los estribos se usó alambrón No. 2 (6.4 mm), $f_y = 275$ MPa (ASTM A615). Se utilizaron fibras de acero de 25 mm de longitud y 1 mm de espesor en promedio, del tipo "Deformed Slit Sheet" según el ASTM A820.

2.1 PROPORCIONAMIENTO DE LAS MEZCLAS

En la tabla 1 se muestran las diferentes mezclas de concreto estudiadas especificadas en kg/m³. Se realizaron un total de ocho mezclas, cuatro para la relación $a/c = 0.55$ y otras cuatro para la relación $a/c = 0.85$. En ambos casos, las variables fueron el volumen de fibras en la matriz de concreto y el refuerzo transversal a cortante mediante estribos. Las vigas fueron fabricadas por duplicado para cada mezcla y cada variable.

Tabla 1: Proporcionamientos del concreto fibroreforzado en kg/m³

Materiales	% fibras			
	0	0.5	1.0	1.5
$a/c = 0.55$				
	Mezcla 1	Mezcla 2	Mezcla 3	Mezcla 4
Agua	184	184	184	184
Cemento	334	334	334	334
Ag. Fino	689	684	679	674
Ag. Grueso	1136	1128	1120	1112
Fibra	0	39	78	117
Aire Atrapado %	2.5	2.5	2.5	2.5
$a/c = 0.85$				
	Mezcla 5	Mezcla 6	Mezcla 7	Mezcla 8
Agua	193	193	193	193
Cemento	227	227	227	227
Ag. Fino	968	961	956	948
Ag. Grueso	919	913	906	900
Fibra	0	39	78	117
Aire Atrapado %	2.50	2.50	2.50	2.50

2.2 MEZCLADO, COLADO Y CURADO

Las mezclas fueron realizadas en una revolvedora convencional con capacidad de 90 L. Se homogenizaron los agregados finos y gruesos con su agua de absorción, después se agregó el cemento y el agua de reacción mezclando durante un minuto, se dejó reposar un minuto y posteriormente se mezcló durante otro minuto. Cuando se requirieron las fibras, éstas fueron adicionadas aleatoriamente durante el segundo tiempo de mezclado. Después de realizado el mezclado, se midió la consistencia mediante la prueba de revenimiento de acuerdo a la norma ASTM C143, sólo para las mezclas sin fibra. La resistencia a la compresión fue verificada mediante cilindros de concreto fibroreforzado de 100 mm de diámetro por 200 mm de altura fabricados por triplicado y curados de forma estándar según la norma ASTM C192. Fueron ensayados a los 7, 14 y 28 días de acuerdo al método de ensaye ASTM C39. Adicionalmente, se obtuvo la resistencia a la tensión indirecta por triplicado, utilizando cilindros de concreto fibroreforzado curados a los 28 días de edad de acuerdo a la norma ASTM C496, las dimensiones de los especímenes fueron iguales que los cilindros utilizados para determinar la compresión. Por otra parte, el concreto de las vigas se vació en cimbras metálicas compactándose con vibrador eléctrico interno que permitió homogenizar las fibras dentro de la mezcla de concreto, sin observarse aglomeración de las mismas. Todas las vigas fueron curadas con lámina de agua en sus cimbras hasta cumplir siete días de edad, posteriormente se curaron con membrana base agua hasta el momento de su ensaye. Todas las vigas fueron ensayadas al cumplir 28 días de edad.

3. PROGRAMA EXPERIMENTAL

3.1 FABRICACIÓN DE LAS VIGAS DE CONCRETO FIBROREFORZADO

La presente investigación consistió en la fabricación de 32 vigas de concreto reforzado de 2000 x 150 x 250 mm. De la cuales, 16 vigas tienen una relación agua/cemento (a/c) = 0.85, para obtener una resistencia a la compresión de aproximadamente $f'_c = 18.9$ MPa y otras 16 vigas fueron diseñadas con relación $a/c = 0.55$ para una resistencia a la compresión de aproximadamente $f'_c = 36.7$ MPa. Las vigas fueron fabricadas por duplicado, por cada relación (a/c) ocho pares de vigas tienen estribos y ocho pares de vigas no tienen estribos. Para evaluar el efecto de las fibras como refuerzo a cortante en la matriz de concreto, se agregaron fibras de acero de 25 mm de longitud y 1 mm de espesor en promedio. Se fabricaron las vigas por duplicado, con los siguientes porcentajes con respecto al volumen total de la mezcla: 0.5 %, 1.0 %, 1.5 % y 0 % como control. El arreglo del acero de refuerzo de la viga y los puntos de aplicación de las cargas durante el ensaye se pueden observar en la figura 1. La ubicación de las cargas para los ensayos se determinó de acuerdo a la literatura (Park, et al., 1990), lo que permitió producir altas fuerzas cortantes en los extremos de las vigas.

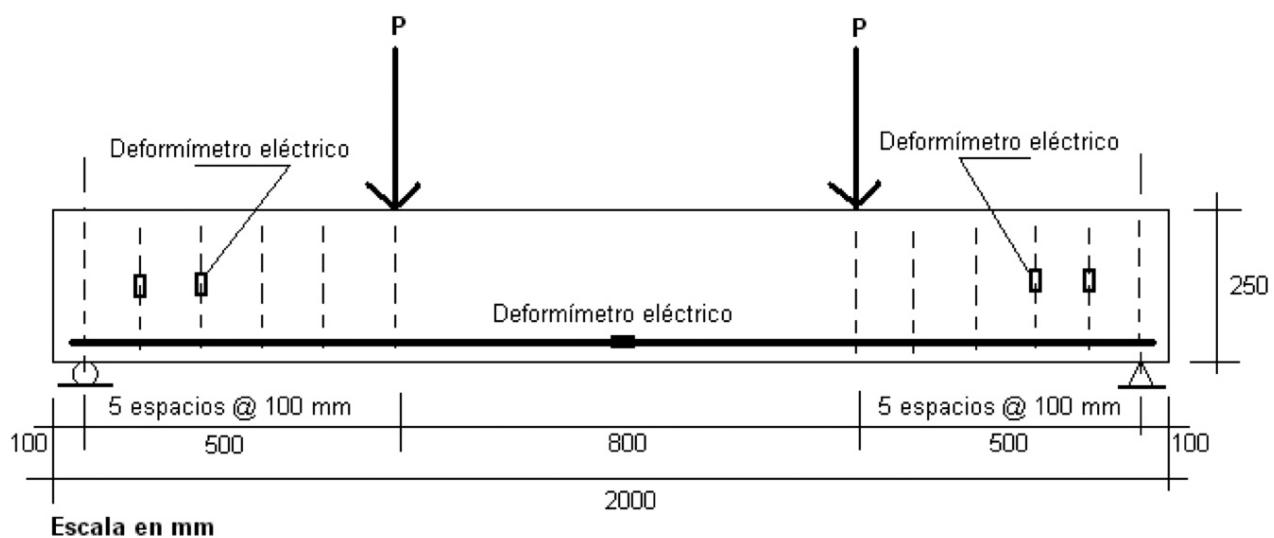


Fig. 1: Arreglo del refuerzo y ubicación de cargas concentradas para producir máximos esfuerzos cortantes por tensión diagonal en las vigas de concreto fibroreforzado.

En la Tabla 2 se establece la designación utilizada en este estudio para las 32 vigas fabricadas, así como la cantidad de refuerzo para cortante (área de estribos) y el porcentaje de fibras usado.

Tabla 2: Identificación de las vigas de concreto fibroreforzado.

Designación	Área estribos mm ²	% de fibras	Designación	Área estribos mm ²	% de fibras
A-CE-0.0-01	63.34	0.00	B-CE-0.0-01	63.34	0.00
A-CE-0.0-02	63.34	0.00	B-CE-0.0-02	63.34	0.00
A-CE-0.5-03	63.34	0.50	B-CE-0.5-03	63.34	0.50
A-CE-0.5-04	63.34	0.50	B-CE-0.5-04	63.34	0.50
A-CE-1.0-05	63.34	1.00	B-CE-1.0-05	63.34	1.00
A-CE-1.0-06	63.34	1.00	B-CE-1.0-06	63.34	1.00
A-CE-1.5-07	63.34	1.50	B-CE-1.5-07	63.34	1.50
A-CE-1.5-08	63.34	1.50	B-CE-1.5-08	63.34	1.50
A-SE-0.0-09	0	0.00	B-SE-0.0-09	0	0.00
A-SE-0.0-10	0	0.00	B-SE-0.0-10	0	0.00
A-SE-0.5-11	0	0.50	B-SE-0.5-11	0	0.50
A-SE-0.5-12	0	0.50	B-SE-0.5-12	0	0.50
A-SE-1.0-13	0	1.00	B-SE-1.0-13	0	1.00
A-SE-1.0-14	0	1.00	B-SE-1.0-14	0	1.00
A-SE-1.5-15	0	1.50	B-SE-1.5-15	0	1.50
A-SE-1.5-16	0	1.50	B-SE-1.5-16	0	1.50

Nomenclatura:

Letra: identifica la relación a/c, A (a/c=0.55); B (a/c=0.85).

CE: con estribos.

SE: sin estribos.

0.0: el porcentaje del volumen de fibra.

01: es el número de viga.

4. MÉTODO ANALÍTICO PARA CONCRETO SIN FIBRAS

4.1 MODELO PROPUESTO POR EL COMITÉ 318 DEL INSTITUTO AMERICANO DEL CONCRETO (ACI 318, 2011)

La resistencia nominal a cortante para cualquier sección de una viga de concreto reforzado, se obtiene de acuerdo a la siguiente Ecuación:

$$V_n = V_c + V_s \quad (1)$$

Para vigas sujetas únicamente a cortante por tensión diagonal, la resistencia al cortante que proporciona el concreto es la siguiente:

$$V_c = \left(0.16\lambda\sqrt{f'_c} + 17\rho_w \frac{V_u d}{M_u} \right) b_w d \quad (2)$$

$$V_c \leq \left(0.29\lambda\sqrt{f'_c} \right) b_w d \quad (3)$$

$$\frac{V_u d}{M_u} \leq 1.0 \quad (4)$$

$$\rho_w = \frac{A_s}{b_w d} \quad (5)$$

Adicionalmente, la resistencia al cortante que proporcionan los estribos se obtiene de la siguiente manera:

$$V_s = \frac{A_v f_y d}{s} \quad (6)$$

Nomenclatura:

b_w = Ancho del alma (mm).

d = Peralte efectivo de la viga (mm).

f'_c = Esfuerzo de diseño a la compresión especificada a los 28 días. (N/mm²).

f_y = Esfuerzo a la fluencia de los estribos (N/mm²).

s = Separación entre estribos (mm).

A_s = Área del acero longitudinal (mm²).

A_v = Área de los estribos (mm²).

M_u = Momento factorizado (kN-mm).

V_c = Resistencia a cortante proporcionada por el concreto (kN).

V_n = Resistencia nominal a cortante teórica (kN).

V_s = Resistencia a cortante proporcionada por los estribos (kN).

V_u = Fuerza cortante factorizada (kN).

ρ_w = Relación del refuerzo longitudinal en el alma.

λ = Factor de la densidad del concreto = 1.0 para concreto de peso normal.

5. MÉTODOS ANALÍTICOS PARA CONCRETO FIBROREFORZADO

5.1 MODELO DE IMAM (Dupont *et al.*, 2003)

Este modelo que predice la resistencia última a cortante en vigas de concreto fibroreforzado sin estribos, está basado en el formulado por Bazant y Sun (Bazant *et. al.*, 1987) y separa la aportación del concreto, los estribos y las fibras en tres términos.

$$V_u = 0.6\psi^3\sqrt{\omega} \left(\sqrt{f_{cm}} + 275 \frac{\sqrt{\omega}}{\left(\frac{a}{d} \right)^5} \right) bd \quad (7)$$

$$\psi = 1 + \left[\frac{\left(\frac{5.08}{d_a} \right)^{1/2}}{\left(\frac{1+d}{25d_a} \right)^{1/2}} \right] \quad (8)$$

$$\omega = \rho(1 + 4F) \quad (9)$$

$$\rho = \frac{A_s}{bd} \quad (10)$$

$$F = \left[\frac{L_f}{D_f} \right] V_f d_f \quad (11)$$

Finalmente, la aportación de los estribos es calculada con la siguiente fórmula y se suma a la Ecuación 7:

$$V_w = \left(\frac{A_{sw}}{s} \right) 0.9 d f_{yw} \quad (12)$$

Nomenclatura:

- a = Claro de cortante (mm).
- b = Ancho de la viga (mm).
- d = Peralte efectivo de la viga (mm).
- d_a = Tamaño máximo del agregado grueso (mm).
- d_f = Coeficiente de eficiencia. (1 para fibras en gancho y 0.5 para fibras rectas).
- f_{cm} = Resistencia a la compresión del concreto fibroreforzado. (N/mm²).
- f_{yw} = Esfuerzo en los estribos (N/mm²).
- s = Separación entre estribos (mm).
- A_s = Área del refuerzo longitudinal (mm²).
- A_{sw} = Área de los estribos (mm²).
- D_f = Diámetro de la fibra (mm).
- F = Factor de la aportación de las fibras.
- L_f = Longitud de la fibra (mm).
- V_f = Fracción de volumen de fibras.
- V_w = Resistencia al cortante proporcionada por los estribos (kN).
- V_u = Resistencia última a cortante teórica (kN).
- ρ = Relación del refuerzo longitudinal.
- ω = Relación del refuerzo longitudinal y del refuerzo de las fibras.
- ψ = Factor del efecto por el tamaño.

5.2 MODELO DE SWAMY (Swamy *et al.*, 1974)

Este modelo se caracteriza por ser un método simple y considera que en una viga de concreto fibroreforzado sin estribos la determinación del cortante último teórico se puede realizar de la siguiente manera:

$$V_u = (0.41 \sigma_{ut}) bd \quad (13)$$

El planteamiento del modelo de Swamy se diseñó para determinar el esfuerzo último a tensión del concreto fibroreforzado en flexión, con la intención de no tener que hacer tantos ensayos en laboratorio para determinar el resultado, por lo que el modelo propone sea obtenido con la siguiente ecuación:

$$\sigma_{ut} = 0.97 \sigma_m (1 - V_f) + 3.41 V_f \left(\frac{L_f}{D_f} \right) \quad (14)$$

$$\sigma_m = 0.62\sqrt{f_{cm}} \quad (15)$$

En el caso de la existencia de estribos en la viga, la aportación a la resistencia última a cortante obtenida de la ecuación (13) se calcula con la siguiente ecuación:

$$V_w = \left(\frac{A_{sw}}{s} \right) df_{ywm} \quad (16)$$

Nomenclatura:

- b = Ancho de la viga (mm).
- d = Peralte efectivo de la viga (mm).
- f_{cm} = Resistencia a compresión del concreto fibroreforzado (N/mm²).
- f_{ywm} = Esfuerzo en los estribos (N/mm²).
- s = Separación entre estribos (mm).
- A_{sw} = Área de los estribos (mm²).
- D_f = Diámetro de la fibra (mm).
- L_f = Longitud de la fibra (mm).
- V_f = Fracción de volumen de fibras.
- V_w = Resistencia al cortante proporcionada por los estribos (kN).
- V_u = Resistencia última a cortante teórica (kN).
- σ_m = Resistencia a tensión del concreto fibroreforzado (N/mm²).
- σ_{ut} = Esfuerzo último a tensión del concreto fibroreforzado sujeto a flexión (N/mm²).

5.3 MODELO DE NARAYANAN (Narayanan et al., 1987)

Este modelo considera tres términos para el cálculo de la resistencia última a cortante teórica, el primer término toma en cuenta la aportación de la fibra reforzando al concreto, el segundo término considerará la acción de “dovel” que proporciona el refuerzo longitudinal y finalmente el último término propone la aportación de la resistencia a la extracción de las fibras en el agrietamiento diagonal. De esta manera, el modelo propuesto es el siguiente:

$$V_u = e \left[A' f_{spfc} + B' \rho \frac{d}{a} \right] + V_b \quad (17)$$

$$e = 1.0 \quad \text{cuando} \quad \frac{a}{d} > 2.8 \quad (18)$$

$$e = 2.8 \frac{d}{a} \quad \text{cuando} \quad \frac{a}{d} \leq 2.8 \quad (19)$$

$$f_{spfc} = \frac{f_{cuf}}{A} + B + C \sqrt{F} \quad (20)$$

$$A = 20 - \sqrt{F} \quad (21)$$

Los factores identificados que influyen en la resistencia del concreto fibroreforzado, son la fracción de volumen de fibra, la relación de aspecto y la interface que existe entre la fibra y la matriz. La siguiente ecuación considera estos tres factores:

$$F = \left(\frac{L}{D} \right) \rho_f d_f \quad (22)$$

$$\rho = \frac{A_s}{bd} \quad (23)$$

$$V_b = 0.41(\tau)F \quad (24)$$

Nomenclatura:

a = Claro de cortante (mm).

b = Ancho de la viga (mm).

d = Peralte efectivo de la viga (mm).

d_f = Factor de adherencia según el tipo de fibra = 0.5 circulares; 0.75 onduladas; 1 indentada.

e = Factor adimensional que toma en cuenta la acción del efecto de arco.

f_{cm} = Resistencia a compresión del concreto fibroreforzado (N/mm²).

f_{spk} = Resistencia a tensión diametral del concreto fibroreforzado (N/mm²).

A = Constante adimensional.

A' = Constante adimensional = 0.24

A_s = Área del refuerzo longitudinal (mm²).

B = Constante = 0.7 N/mm²

B' = Constante = 80 N/mm²

C = Constante = 1 N/mm²

F = Factor de la fibra.

V_b = Fuerza de extracción de la fibra en el agrietamiento (kN).

V_u = Resistencia última a cortante teórica (kN).

ρ_f = Fracción de volumen de fibras.

ρ = Relación del refuerzo longitudinal.

τ = Esfuerzo de adherencia última = 4.15 N/mm²

6. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

6.1 EFECTO DEL REFORZAMIENTO CON FIBRAS EN VIGAS DE CONCRETO REFORZADO, CON ESTRIBOS

En la Tabla 3 se presentan los resultados de la resistencia nominal a cortante que se obtiene mediante el método del ACI 318-11 con las ecuaciones 1, 2 y 6. La resistencia nominal a cortante es usada en el diseño a cortante de vigas de concreto reforzado e incluye la resistencia proporcionada por el concreto, por el refuerzo longitudinal y los estribos. Este modelo no considera la aportación de las fibras como refuerzo de la matriz cementante.

En la Tabla 4 se presentan los resultados de la resistencia experimental a cortante de las vigas de concreto fibroreforzado con estribos, se obtienen los promedios para cada par de vigas ensayadas en el laboratorio.

El efecto en la resistencia última a cortante proporcionado por el reforzamiento con las fibras de acero es evidente al comparar la Tabla 3 y 4, sin embargo, resulta conveniente hacer una relación directa entre la resistencia obtenida experimentalmente y la resistencia analítica. En la figura 2a se presentan de manera gráfica estos valores, que se obtuvieron al dividir la columna 3 de la tabla 4 entre la resistencia nominal a cortante (Ec. 1) para la relación a/c A y la figura 2b muestra los valores que se obtuvieron al dividir la columna 6 de la Tabla 4 entre la resistencia nominal a cortante (Ec. 1) para la relación a/c B.

**Tabla 3: Resistencia nominal a cortante en vigas de concreto sin fibras con estribos
Ecuación 1 y sin estribos Ecuación 2, para las dos relaciones a/c.**

Relación a/c	f'c MPa	Vc (Ec. 2) kN	Fy MPa	Vs kN	Vn (ec.1) kN
A - 0.55	36.7	40.1	275	37.6	77.7
B - 0.85	18.9	31.2	275	37.6	68.8

**Tabla 4: Resistencia experimental a cortante en vigas de concreto fibroreforzado
con estribos, para las dos relaciones a/c.**

Designación	V _u _{exp} kN	Promedio kN	Designación	V _u _{exp} kN	Promedio kN
A-CE-0.0-01	87.9	89.5	B-CE-0.0-01	65.6	64.7
A-CE-0.0-02	91.1		B-CE-0.0-02	63.8	
A-CE-0.5-03	87.2	90.1	B-CE-0.5-03	85.2	80.1
A-CE-0.5-04	92.9		B-CE-0.5-04	74.9	
A-CE-1.0-05	98.1	94.3	B-CE-1.0-05	93.3	91.9
A-CE-1.0-06	90.4		B-CE-1.0-06	90.4	
A-CE-1.5-07	97.8	97.8	B-CE-1.5-07	100.7	99.4
A-CE-1.5-08	97.8		B-CE-1.5-08	98.1	

Para las vigas del tipo A (relación a/c = 0.55) la fibra incrementa aproximadamente un 26 % de la resistencia a cortante en comparación con la resistencia nominal para $V_f = 1.5\%$. En el caso de las vigas del tipo B (relación a/c=0.85) la aportación de las fibras es más significativa el incremento fue de aproximadamente un 44 % para $V_f = 1.5\%$. Estos porcentajes deben considerarse como indicativos debido a la naturaleza del modelo analítico utilizado. Sin embargo, es factible mencionar que el comportamiento presentado en ambos tipos de vigas, puede ser debido a que las fibras permitieron reducir el ancho de las grietas por tensión diagonal, propiciando una redistribución de esfuerzos en los estribos haciéndolo más eficiente.

La efectividad del reforzamiento con fibras combinado con el uso de estribos ya fue reportado encontrando una mejora en la resistencia última a cortante y en la ductilidad (Sarhat et al., 2006). El uso de V_f de 1.0 y 1.5 % resultó

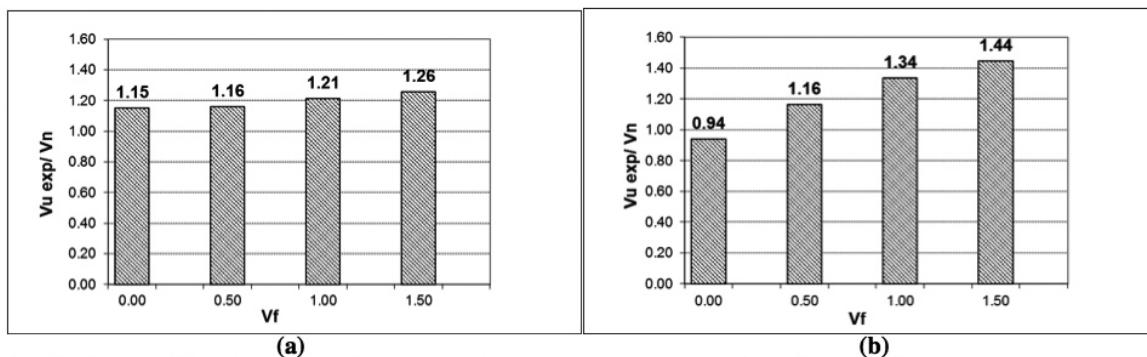


Fig. 2: Aportación del reforzamiento con fibras comparando la resistencia experimental a cortante de las vigas de concreto fibroreforzado con estribos obtenida de la tabla 4 vs la resistencia nominal a cortante obtenida de la Tabla 3. (a) Relación a/c = 0.55. (b) Relación a/c = 0.85.

más efectivo que incrementar la relación a/c. En la Tabla 4 se observa inclusive que las vigas del tipo B alcanzan una resistencia experimental a cortante similar a las vigas del tipo A, aun cuando estas últimas tienen una relación a/c menor, sólo en las vigas control (sin fibras) se presenta el efecto de la resistencia del concreto. Lo anterior permite suponer que para este estudio en particular, el uso de volúmenes altos de fibras ($> 1\%$) la relación a/c no parece tener un efecto significativo.

Tabla 5: Resistencia experimental a cortante en vigas de concreto fibroreforzado sin estribos, para las dos relaciones a/c.

Designación	Vu_{exp} kN	Promedio kN	Designación	Vu_{exp} kN	Promedio kN
A-SE-0.0-09	62.0	51.7	B-SE-0.0-09	46.1	49.9
A-SE-0.0-10	41.3		B-SE-0.0-10	53.7	
A-SE-0.5-11	70.1	66.1	B-SE-0.5-11	49.1	54.9
A-SE-0.5-12	62.0		B-SE-0.5-12	60.7	
A-SE-1.0-13	76.2	71.7	B-SE-1.0-13	66.3	61.6
A-SE-1.0-14	67.1		B-SE-1.0-14	56.8	
A-SE-1.5-15	87.8	80.1	B-SE-1.5-15	54.2	60.5
A-SE-1.5-16	72.3		B-SE-1.5-16	66.7	

6.2 EFECTO DEL REFORZAMIENTO CON FIBRAS EN VIGAS DE CONCRETO REFORZADO, SIN ESTRIBOS

En la Tabla 5 se presentan los resultados de la resistencia experimental a cortante de las vigas de concreto fibroreforzado sin estribos, se obtienen los promedios para cada par de vigas ensayadas en el laboratorio.

En la figura 3 se muestra el comportamiento experimental para las vigas fibroreforzadas sin estribos, se comparan los valores de las columnas 3 y 6 de la Tabla 5 con la resistencia nominal a cortante proporcionada por el concreto (Ec. 2) para ambas relaciones a/c. Se observa que la resistencia experimental a cortante con $V_f = 1.5\%$ se incrementó un 21 % y 55 % en comparación con la resistencia experimental a cortante sin fibras para relaciones a/c de 0.85 y 0.55 respectivamente. De igual manera, con respecto a la resistencia nominal a cortante que proporciona el concreto sin considerar los estribos según la tabla 3, el incremento fue considerable ya que para las vigas con $V_f = 1.5\%$ el incremento fue aproximadamente el doble para ambas relaciones a/c. La aportación de las fibras en el incremento de la resistencia última a cortante con respecto a la resistencia nominal, resultó ser considerablemente mayor en comparación con los resultados obtenidos para las vigas fibroreforzadas con estribos.

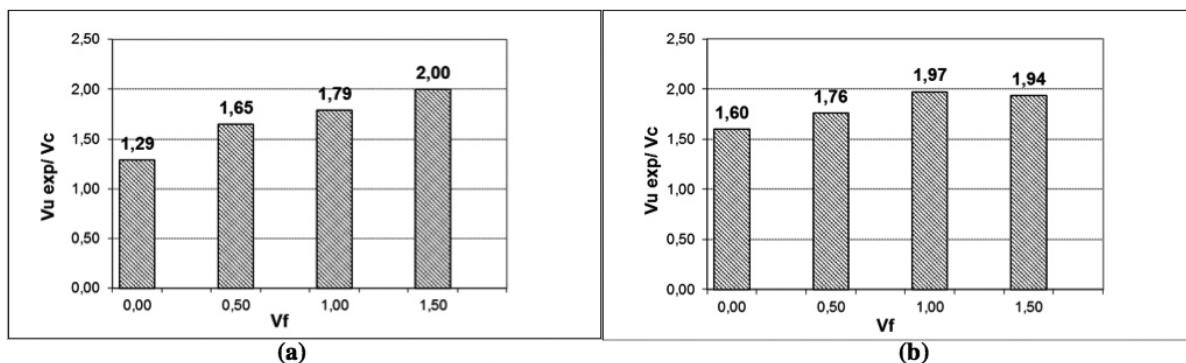


Fig. 3: Aportación del reforzamiento con fibras comparando la resistencia experimental a cortante de las vigas de concreto fibroreforzado sin estribos obtenida de la tabla 5 vs la resistencia nominal a cortante proporcionada por el concreto obtenida de la Tabla 3.
(a) Relación a/c = 0.55. (b) Relación a/c = 0.85.

Desde el punto de vista del comportamiento estructural del concreto reforzado, la presencia de las fibras de acero como refuerzo adicional tanto para las vigas con y sin estribos, permite incrementar de manera significativa la resistencia última a cortante, por lo que resulta justificable utilizar modelos analíticos que permitan predecir con certidumbre una resistencia teórica a cortante apegada a la obtenida experimentalmente, y que sea una ayuda de diseño para este tipo de elementos estructurales.

6.3 PREDICCIÓN DE LA RESISTENCIA ÚLTIMA UTILIZANDO LOS MODELOS ANALÍTICOS

Existen estudios previos que proponen modelos analíticos basados en resultados experimentales (Dinh *et al.*, 2010, Aoude *et al.*, 2012), y otros que analizan datos experimentales provenientes de varias fuentes y utilizan un número importante de modelos analíticos para hacer comparaciones, (Haisam, 2011). El fin del presente estudio fue producir una experimentación científica propia que valide los modelos analíticos seleccionados, los cuales han sido la base de muchos otros que se encuentran en la literatura y que su mérito radica en una personalización de alguna variable, sin llegar a ser una modificación sustancial al modelo original.

En la Tabla 6 se presentan los resultados experimentales de las resistencias a compresión y tensión de especímenes fibroreforzados, que fueron usados por los modelos analíticos para la predicción de la resistencia última a cortante teórica. La resistencia a compresión fue tomada como σ_c y σ_t para los modelos de Imam y Narayanan respectivamente. De igual manera, la resistencia a tensión fue considerada como σ_t para el modelo de Narayanan. Estos valores fueron obtenidos de manera estandarizada como se indicó anteriormente, por lo que conseguirlos no representa una dificultad significativa para la aplicación de los modelos estudiados.

Se puede observar en la Tabla 7 los resultados experimentales de la resistencia última a cortante comparada con resultados teóricos obtenidos de los tres modelos analíticos estudiados. El efecto de la relación a/c entre las vigas tipo A y B se puede observar tanto para los resultados experimentales como para los teóricos, ya que se incrementa la resistencia a cortante a menor relación a/c. El mejor comportamiento producido por la combinación de estribos y fibras de acero en comparación con las vigas fibroreforzadas sin estribos, también es evidenciado por los modelos analíticos.

Tabla 6: Resistencia a compresión y tensión de especímenes de concreto fibroreforzado de 28 días de edad.

Designación	Resistencia a compresión MPa	Resistencia a tensión MPa	Designación	Resistencia a compresión MPa	Resistencia a tensión MPa
A-CE-0.0-01	40.7	3.9	B-CE-0.0-01	19.20	2.7
A-CE-0.0-02	39.6	3.9	B-CE-0.0-02	18.90	2.7
A-CE-0.5-03	37.9	3.8	B-CE-0.5-03	19.20	2.7
A-CE-0.5-04	38.8	3.8	B-CE-0.5-04	17.70	2.6
A-CE-1.0-05	37.2	3.7	B-CE-1.0-05	18.00	2.6
A-CE-1.0-06	38.4	3.8	B-CE-1.0-06	17.60	2.6
A-CE-1.5-07	38.5	3.8	B-CE-1.5-07	18.20	2.6
A-CE-1.5-08	36.4	3.7	B-CE-1.5-08	19.00	2.7
A-SE-0.0-09	38.2	3.8	B-SE-0.0-09	20.80	2.8
A-SE-0.0-10	37.3	3.7	B-SE-0.0-10	21.20	2.9
A-SE-0.5-11	36.3	3.7	B-SE-0.5-11	19.00	2.7
A-SE-0.5-12	37.2	3.7	B-SE-0.5-12	20.80	2.8
A-SE-1.0-13	38.8	3.8	B-SE-1.0-13	18.20	2.6
A-SE-1.0-14	37.7	3.8	B-SE-1.0-14	18.60	2.7
A-SE-1.5-15	36.5	3.7	B-SE-1.5-15	20.70	2.8
A-SE-1.5-16	38.2	3.8	B-SE-1.5-16	21.00	2.8

Tabla 7: Relación de la resistencia a cortante experimental entre la resistencia a cortante analítica obtenida de cada modelo.

Designación	Vu_{exp} kN	Vu_{Imam} kN	$\frac{Vu_{exp}}{Vu_{Imam}}$	Vu_{Swamy} kN	$\frac{Vu_{exp}}{Vu_{Swamy}}$	$Vu_{Narayanan}$ kN	$\frac{Vu_{exp}}{Vu_{Narayanan}}$
A-CE-0.0-01	87.9	96.3	0.9	84.8	1.0	84.4	1.0
A-CE-0.0-02	91.1	95.9	0.9	84.1	1.1	83.9	1.1
A-CE-0.5-03	87.2	108.8	0.8	91.9	0.9	93.5	0.9
A-CE-0.5-04	92.9	109.1	0.9	92.5	1.0	93.9	1.0
A-CE-1.0-05	98.1	120.8	0.8	100.4	1.0	101.6	1.0
A-CE-1.0-06	90.4	121.3	0.7	101.1	0.9	102.2	0.9
A-CE-1.5-07	97.8	132.9	0.7	110.1	0.9	110.5	0.9
A-CE-1.5-08	97.8	131.9	0.7	108.7	0.9	109.5	0.9
A-SE-0.0-09	62	61.6	1.0	49.4	1.3	49.4	1.3
A-SE-0.0-10	41.3	61.2	0.7	48.8	0.8	49.0	0.8
A-SE-0.5-11	70.1	74.2	0.9	57.0	1.2	58.8	1.2
A-SE-0.5-12	62	74.6	0.8	57.6	1.1	59.3	1.0
A-SE-1.0-13	76.2	87.6	0.9	67.5	1.1	68.5	1.1
A-SE-1.0-14	67.1	87.1	0.8	66.8	1.0	68.0	1.0
A-SE-1.5-15	87.8	98.1	0.9	74.9	1.2	75.7	1.2
A-SE-1.5-16	72.3	98.9	0.7	76.0	1.0	76.5	0.9
Media			0.8		1.0		1.0
Desviación estandar			0.10		0.13		0.14
Coeficiente de variación			12.0		13.1		13.4
B-CE-0.0-01	65.6	87.0	0.8	68.9	1.0	74.3	0.9
B-CE-0.0-02	63.8	86.9	0.7	68.6	0.9	74.2	0.9
B-CE-0.5-03	85.2	99.5	0.9	77.8	1.1	84.3	1.0
B-CE-0.5-04	74.9	98.6	0.8	76.4	1.0	83.6	0.9
B-CE-1.0-05	93.3	110.2	0.8	85.7	1.1	92.0	1.0
B-CE-1.0-06	90.4	109.9	0.8	85.3	1.1	91.8	1.0
B-CE-1.5-07	100.7	121.1	0.8	94.8	1.1	100.0	1.0
B-CE-1.5-08	98.1	121.7	0.8	95.5	1.0	100.5	1.0
B-SE-0.0-09	46.1	54.1	0.9	36.4	1.3	41.2	1.1
B-SE-0.0-10	53.7	54.3	1.0	36.8	1.5	41.4	1.3
B-SE-0.5-11	49.1	65.5	0.7	43.8	1.1	50.4	1.0
B-SE-0.5-12	60.7	66.6	0.9	45.4	1.3	51.3	1.2
B-SE-1.0-13	66.3	76.5	0.9	52.0	1.3	58.2	1.1
B-SE-1.0-14	56.8	76.8	0.7	52.4	1.1	58.4	1.0
B-SE-1.5-15	54.2	89.0	0.6	63.2	0.9	67.5	0.8
B-SE-1.5-16	66.7	89.2	0.7	63.5	1.1	67.6	1.0
Media			0.8		1.1		1.0
Desviación estandar			0.10		0.16		0.12
Coeficiente de variación			12.0		14.3		11.9

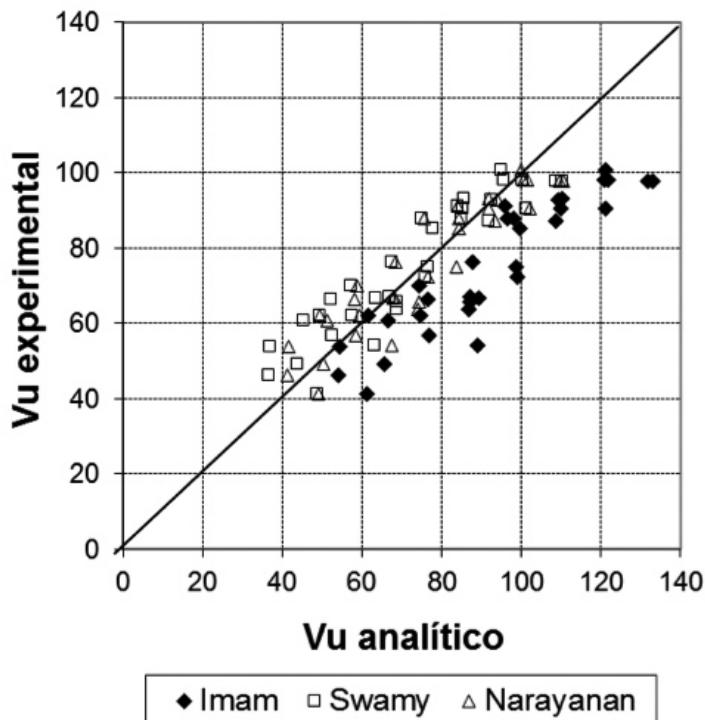


Fig. 4: Resistencia experimental a cortante vs resistencia última a cortante obtenida por los tres modelos analíticos propuestos, para vigas fibroreforzadas con ambas relaciones a/c, con estribos y sin estribos.

En la Tabla 7 se presenta una relación entre el valor experimental y el valor teórico para identificar qué tanto se sobreestima la resistencia última a cortante, siendo el modelo de Imam el que tiende a predecir valores teóricos mayores en comparación con los experimentales, ya que para todas las vigas la relación fue menor a la unidad. Por otra parte, los modelos analíticos de Swamy y Narayanan predicen valores en su mayoría mayores a la unidad, es decir, subestiman a los valores experimentales siendo esto conservador. Los tres modelos muestran valores similares a los experimentales para ambas relaciones a/c y para vigas fibroreforzadas con estribos y sin estribos. De igual manera, el efecto del volumen de la fibra también se modela adecuadamente ya que registra el incremento en la resistencia última experimental a cortante conforme se incrementa la Vf de fibra.

Los criterios conceptuales con los que se establecieron los tres modelos explican la diferencia en su predicción de los valores experimentales, mientras el modelo de Imam trata de considerar las aportaciones a la resistencia última a cortante tanto del concreto, de las fibras y de los estribos en caso de haberlos, e inclusive el efecto de tamaño. El modelo de Swamy considerablemente más simple proporciona valores más conservadores a los experimentales, y sólo el modelo de Narayanan considera la resistencia a tensión del concreto. Los tres modelos consideran el efecto de la relación de aspecto de la fibra y la variación de la Vf. Cabe mencionar, que los modelos analíticos estudiados no proporcionan datos sobre la ductilidad y patrones de agrietamiento de las vigas de concreto fibroreforzado.

En la Tabla 7 se puede observar que el modelo de Narayanan, tiene una media aritmética igual a la unidad, mientras que el modelo de Imam la media es de 0.8. La desviación estándar es adecuada para los tres modelos y el coeficiente de variación indica que las muestras son homogéneas. Analizando por separado las vigas con estribos, se tiene que la media para el modelo Swamy es de 1.0, es decir, se predicen muy bien los resultados. Sin embargo, analizando los resultados para las vigas sin estribos, el modelo de Swamy subestima los valores y el modelo de Narayanan lo hace con mayor precisión.

El comportamiento gráfico de lo discutido anteriormente se presenta en la figura 4 donde se puede observar una relación entre los resultados de la resistencia experimental última a cortante y los resultados de los modelos analíticos. Se observa que la predicción de los valores obtenidos de los modelos que se aproximan a la diagonal es igual a la experimental, en caso contrario, todos los valores por debajo de esta diagonal son poco conservadores. Tal es el caso del modelo de Imam que presenta

un grado menor de aproximación con respecto a los otros modelos analíticos propuestos por Swamy y Narayanan. Estos dos últimos modelos muestran similitud en sus resultados y se consideran conservadores ya que se encuentran sobre la diagonal.

La presente investigación pretendió mostrar que la resistencia última a cortante se incrementa sustancialmente cuando se utilizan fibras de acero y que teniendo conocimiento de modelos analíticos de aplicación simple, pueden convertirse en una herramienta útil para el análisis y diseño de vigas de concreto fibroreforzadas con estribos y sin estribos. Bajo esta perspectiva se presentan a continuación las conclusiones que aplican de acuerdo a los resultados obtenidos.

7. CONCLUSIONES

1. Las fibras de acero como refuerzo adicional permiten incrementar sustancialmente la resistencia última a cortante por tensión diagonal en las vigas de concreto fibroreforzadas con estribos y sin estribos.
2. El uso de V_f de 1.0 y 1.5 % en vigas fibroreforzadas con estribos resultó más efectivo en la resistencia experimental a cortante que el incremento de la relación a/c.
3. Las vigas de concreto fibroreforzado sin estribos con $V_f = 1.5\%$ tienen una resistencia última a cortante de 54 % y 21 % mayor con respecto a las vigas control para las relaciones a/c A y B respectivamente. Además, esta resistencia última es aproximadamente el doble que la resistencia nominal a cortante que proporciona el concreto sin considerar los estribos, según la teoría especificada en el código del ACI-318.
4. El modelo de Imam resultó ser un modelo analítico poco conservador debido a que propone resistencias teóricas mayores a los experimentales.
5. Los modelos analíticos de Swamy y Narayanan predijeron valores conservadores con respecto a la resistencia última a cortante, acercándose a la resistencia a cortante experimental, esto permite suponer que pueden ser utilizados para el análisis y diseño de las vigas de concreto fibroreforzadas con y sin estribos.
6. Es recomendable utilizar resultados experimentales de las resistencias a compresión y tensión obtenidos de especímenes de concreto fibroreforzados, lo que permitirá que los modelos analíticos tengan una adecuada predicción de la resistencia última a cortante teórica.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece al Programa de Mejoramiento del Profesorado (PROMEP) de la Secretaría de Educación Pública, por su apoyo financiero a esta investigación para la compra de materiales y equipo necesarios para su desarrollo. También, se agradece a las autoridades del Instituto de Ingeniería Civil “Dr. Raymundo Rivera Villarreal” de la Facultad de Ingeniería Civil de la UANL, por su apoyo para el uso de la infraestructura necesaria para llevar a cabo las pruebas experimentales. Se agradece sinceramente a todos los estudiantes, tesis y becarios de la Facultad de Ingeniería Civil que colaboraron activamente en el proyecto y que lo enriquecieron con su participación.

REFERENCIAS

ACI 318-11, (2011), “Reglamento para las Construcciones de Concreto Estructural y Comentarios”, Instituto Mexicano del Cemento y del Concreto, ACI, pp. 13 – 14.

Ashour, S. A., Hasanain, G. S., Wafa, F. F. (1992), “Shear Behavior of High-Strength Fiber Reinforced Concrete Beams”, *ACI Structural Journal*, Vol. 89, No. 2, March-April, pp. 176 – 184.

Aoude, H., Belghiti, M., Cook, W. D., Mitchell, D. (2012), “Response of steel fiber-reinforced concrete beams with and without stirrups”, *ACI Structural Journal*, Vol. 109, No. 3, pp. 359-367.

ASTM C33, (2013), “Standard Specification for Concrete Aggregates. Annual Book of ASTM Standards, American Society of Testing Materials”.

ASTM A615, (2014), “Standard Specification for Deformed and Plain Carbon-Steel Bars for Concrete Reinforcement”.

ASTM A820, (2011), “Standard Specification for Steel Fibers for Fiber-Reinforced Concrete”.

ASTM C143, (2012), “Standard Test Method for Slump of Hydraulic-Cement Concrete”.

ASTM C-192, (2000), "Making and Curing Concrete Test Specimens in the Laboratory, Annual Book of ASTM Standards, American Society of Testing Materials".

ASTM C39, (2014), "Standard Test Method for Compressive Strength of Cylindrical Concrete Specimens".

ASTM C496, (2011), "Standard Test Method for Splitting Tensile Strength of Cylindrical Concrete Specimens".

Dinh, H. H., Parra-Montesinos, G. J., Wight, J. K. (2010), "Shear behavior of steel fiber-reinforced concrete beams without stirrup reinforcement", *ACI Structural Journal*, Vol. 107, No. 5, pp. 597-606.

Dupont, D., Vandewalle, L. (2003), "Shear Capacity of Concrete Beams Containing Longitudinal Reinforcement and Steel Fibers", *SP-216-6, RILEM*, pp. 79 – 94.

Haisam, E. Y. (2011), "Shear Stress Prediction: Steel Fiber - Reinforced Concrete Beams without Stirrups", *ACI Structural Journal*, Vol. 108, No. 3, May-June, pp. 304 – 314.

Juarez, C., Valdez, P., Durán, A., Sobolev, K. (2007), "The Diagonal Tension Behavior of Fiber Reinforced Concrete Beams", *Cement & Concrete Composites*, Vol. 29, 5, pp. 402-408.

Khuntia, M., Stojadinovic, B. (2001), "Shear Strength of Reinforced Concrete Beams without Transverse Reinforcement", *ACI Structural Journal*, Vol. 98, No. 5, September-October, pp. 648 – 656.

Kwak, K. H., Suh, J., Thomas Hsu, C. T. (1991), "Shear-Fatigue of Steel Fiber Reinforced Concrete Beams", *ACI Structural Journal*, Vol. 88, No. 2, March-April, pp. 155 – 160.

Narayanan, R., Darwish, I.Y.S. (1987), "Use of Steel Fibers as Shear Reinforcement", *ACI Structural Journal*, May – June, pp. 216 – 226.

NMX-C-414-ONNCCE-2004, (2004), "Industria de la Construcción – Cementos Hidráulicos - Especificaciones y Métodos de Prueba".

Park, P., Paulay, T. (1990), "Estructuras de Concreto Reforzado", Limusa Noriega, Nueva Edición, pp. 288 – 294.

Sarhat, S. R., Abdul-Ahad, R. B. (2006), "The Combined Use of Steel Fibers and Stirrups as Shear Reinforcement in Reinforced Concrete Beams", *SP, American Concrete Institute*, Vol. 235, pp. 269 – 282.

Shin, S. W., Oh, J. G., Ghosh, S. K. (1994), "Shear Behavior of Laboratory-Sized High Strength Concrete Beams Reinforced with Bars and Steel Fibers", *SP-142-10, American Concrete Institute*, pp. 181-200.

Swamy, R. N., Bahía, H. M. (1985), "The Effectiveness of Steel Fibers as Shear Reinforcement", *Concrete International, Design and Construction*, Vol. 7, No. 3, March, pp. 35 – 40.

Swamy, R. N., Mangat, P. S., Rao, C. V. S. K. (1974), "The Mechanics of Fiber Reinforcement of Cement Matrices", *SP, American Concrete Institute*, 44-1, pp. 1 – 28.

Swamy, R. N., Narayan, J., Roy, Chiam, T. P. (1993), "Influence of Steel Fibers on the Shear Resistance of Lightweight Concrete I – Beams", *ACI Structural Journal*, Vol.90, No. 1, January – February, pp. 103 – 114.

Valle, M., Büyüköztürk, O. (1993), "Behavior of Fiber Reinforced High-Strength Concrete under Direct Shear", *ACI Structural Journal*, Vol. 90, No. 2, March-April, pp. 122 – 133.