

# DISEÑO RACIONAL A CORTANTE DE TRABES ACARTELADAS DE CONCRETO REFORZADO

Hans I. Archundia Aranda<sup>1</sup> y Arturo Tena Colunga<sup>1</sup>

## RESUMEN

A Mörsch (1909) se le atribuye la primera fórmula desarrollada a partir de la teoría de vigas para cuantificar la demanda de cortante en traves acarteladas de concreto reforzado (TACR). Su ecuación es la base de varios métodos seccionales que ignoran la interacción flexión-cortante. Las TACR también se pueden diseñar con campos de esfuerzo y modelos de armadura. Estas técnicas permiten diseñar tramos de elemento en los que se toma en cuenta dicha interacción. Dilger y Langohr (1997) desarrollaron un método de diseño por secciones para traves de sección variable sustentado en un modelo de armadura. Con base en sus resultados, concluyeron que los métodos afines a la teoría de vigas son inseguros. En este trabajo se presenta un método de diseño a cortante para TACR basado en campos de esfuerzo y modelos de armadura, que demuestra que los métodos basados en la teoría de vigas también son seguros. La propuesta incorpora definiciones racionales para la sección crítica por cortante, la esbeltez y las regiones B-D.

**Palabras clave:** cortante, cartelas, campos de esfuerzo, modelos de armadura, modelo de puntales y tensores, esbeltez, regiones B-D.

## ABSTRACT

Several equations to estimate the shear force in reinforced concrete haunched beams (RCHB) have been proposed after Mörsch (1909). Some of these equations agree with the classical beam theory while others rely on stress fields and truss models (strut-and-tie models). In contrast with the shear-design approaches based upon stress fields and truss models, the shear design supported on the beam theory is not capable to explain the shear-flexure interaction. Dilger and Langohr (1997) proposed a sectional shear method for prestressed RCHB supported on a truss model. They concluded that the beam theory is unsafe for nonprismatic elements. A sectional shear design method for RCHB supported on stress fields and truss models is proposed in this paper. It is confirmed with the proposed method that shear designs made with the sectional beam theory approach are also safe. The proposed design method is based upon rational definitions for the shear critical section, the beam slenderness and B-D regions.

**Keywords:** shear, haunched beams, tapered, stress fields, truss models, strut and tie models, beam slenderness, B-D regions.

## RESUMO

Atribuímos a Mörsch (1909) a primeira fórmula desenvolvida a partir da teoria de vigas para quantificar a demanda de cortes em vigas acarteladas de concreto armado (TACR). Sua equação é base de vários métodos seccionais que ignoram a interação flexão-cortante. As TACR também podem ser projetadas com campos de tensão e modelos de armadura. Estas técnicas permitem projetar frações de elementos no qual tomamos em conta essa interação. Dilger e Langohr (1997) desenvolveram um método de projeto por seções para vigas de seção variável suportado por um modelo de armadura. Com base em seus resultados, concluíram que os métodos relacionados com a teoria de vigas são inseguros. Neste trabalho apresentamos um método de projeto de corte para TACR baseado em campos de atuação e modelos de armadura, que demonstra que os métodos baseados na teoria de vigas também são seguros. A proposta incorpora definições racionais para a seção crítica por cortante, a esbelteza e as regiões B-D.

**Palavras chave:** cortante, quartelas, campos de atuação, modelos de armadura, modelo de pontais e tensores, esbelteza, regiões B-D.

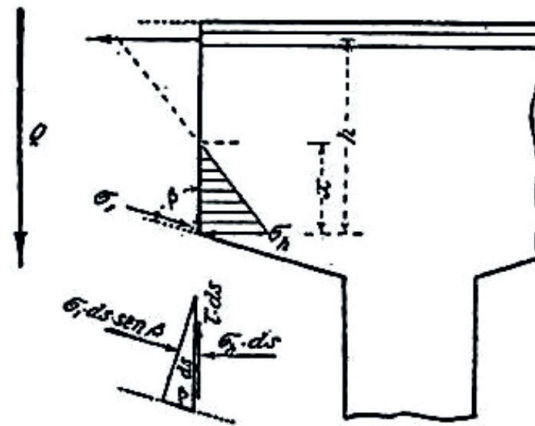
<sup>(1)</sup> Profesores. Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco. Departamento de Materiales. Av. San Pablo No.180, Col. Reynosa Tamaulipas, C.P. 02200, México D.F.

E-mail: archundia\_aranda@yahoo.com.mx; atc@correo.azc.uam.mx

Artículo recibido el 6 de marzo del 2014 y aprobado el 3 de agosto del 2014.

## 1. INTRODUCCIÓN

Las trabes acarteladas de concreto reforzado (TACR) se distinguen de las prismáticas porque tienen una variación suave del peralte en toda o parte de su longitud. Aunque esto implica dificultades constructivas, la variación juiciosa del peralte proporciona beneficios estructurales. Por ejemplo, Mörsch (1909) demostró que al aumentar gradualmente el peralte de una trabe continua en la proximidad de los apoyos, mejora la resistencia a cortante debido a (Fig. 1): i) el incremento de la sección transversal y, ii) la capacidad del bloque de concreto inclinado de resistir cortante.



**Fig. 1: Análisis del bloque compresión inclinado de la cartela (Mörsch 1952).**

En México existen edificios de mediana altura que tienen TACR (Fig. 2a). También hay puentes y viaductos con estos elementos (Fig. 2b). A pesar de ello, la normatividad vigente en México no tiene recomendaciones específicas para su diseño (NTCC-04), y tampoco existen en el reglamento de construcción extranjero más usado en el país (ACI-318-11). En el reglamento canadiense (CSA-04) se proporciona una instrucción general para el diseño a cortante de TACR que, a juicio de los autores, no garantiza un diseño racional.



**a) Edificios**



**b) Puentes y viaductos**

**Fig. 2: Trabes acarteladas de concreto reforzado en México.**

Para el diseño por cortante de TACR, algunos autores recomiendan métodos seccionales desarrollados a partir de la teoría de vigas, pero adaptados al criterio del reglamento ACI-318 para trabes de sección constante, según el cual la contribución del concreto se incluye en el cálculo de la resistencia (Park y Paulay 1975, Ferguson *et al.*, 1988, MacGregor 1997, Nilson 1999). Por otra parte, Nielsen (1999) también propone un método seccional, pero obtenido a partir de campos de esfuerzo que ignoran la contribución del concreto. Todos estos autores consideran que el agrietamiento diagonal de las TACR es similar al de las trabes de sección constante. Sin embargo, la evidencia experimental muestra

que el agrietamiento diagonal de las TACR es más extendido que el de las prismáticas (Mörsch 1952, Debaiky y El-Niema 1982, Stefanou 1983, El-Niema 1988, MacLeod y Houmsi 1994, Tena-Colunga *et al.*, 2008, Rombach y Nghiep 2011, Pérez Caldentey *et al.*, 2012, Archundia-Aranda *et al.*, 2013).

Existen otras opciones para el diseño a cortante de TACR. Por ejemplo, en Alemania los reglamentos de construcción tradicionalmente incluyen recomendaciones específicas para TACR (Maurial 2007), así como en los reglamentos suizos (por ejemplo, Grob y Thürlimann 1976). Esto explica por qué el reglamento de construcción unificado de Europa tiene recomendaciones específicas para TACR (Eurocode 2 1992 y 2004). Lo mismo se puede decir del reglamento modelo del Comité Euro-Internacional para el Concreto (CEB-FIP 1990), donde se presentó un modelo de armadura cualitativo para travesas acarteladas (Fig. 3). Esta situación difiere a la del reglamento ACI-318, pues ni en su apéndice A, ni en la literatura donde se difunde el método de puntales y tensores que adoptó desde el año 2002, se dispone de un ejemplo o guía de diseño para TACR (Subcommittee 445-1, 2002 y PCA Notes 2008).

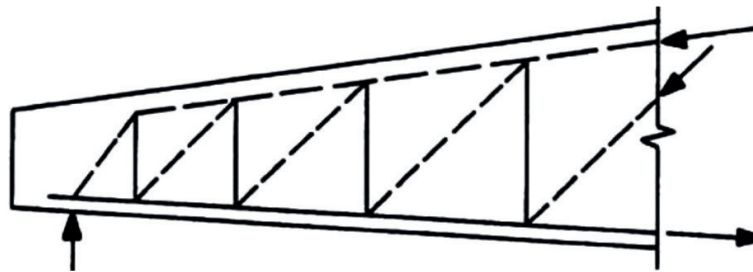


Fig. 3: Modelo de armadura para travesas acarteladas recomendado en el CEB-FIP (1990).

## 2. MODELOS DE ARMADURA Y CONTRIBUCIÓN DEL CONCRETO

La bondad de los modelos de armadura (puntales y tensores) para el diseño de travesas de sección constante está bien documentada (Marti 1985/a/b, Schlaich *et al.*, 1987, MacGregor 1997, Alcocer 1998, Nielsen 1999). Los primeros modelos de armadura fueron propuestos de manera independiente por Ritter (1899) y Mörsch (1909). A estos modelos se les conoce como armadura clásica, y consideran que el agrietamiento diagonal tiene una inclinación  $\theta = 45^\circ$  a cierta distancia de las cargas y reacciones. En general, un diseño por cortante con la armadura clásica no es económico, ya que: i) la inclinación supuesta  $\theta = 45^\circ$  es conservadora y, ii) Mörsch privilegió la seguridad estructural sobre la economía y desestimó la contribución del concreto, en lo que llamó “seguridad total al desgarramiento” (Mörsch 1952).

Con el desarrollo de la teoría de la plasticidad del concreto se generalizó el modelo de armadura, lo que permitió justificar ángulos de agrietamiento diferentes a  $\theta = 45^\circ$  e incluir la interacción flexión-cortante en el análisis (Nielsen *et al.*, 1978, Thürlimann 1979). Con ello se le dio una mejor explicación al mecanismo resistente a cortante, y se obtuvieron mejores predicciones al comparar contra resultados experimentales. Este modelo se desarrolló en Europa, y se le conoce como armadura plástica de ángulo variable.

Para corregir el conservadurismo de la armadura clásica, el Instituto Americano del Concreto (ACI) adoptó un diseño por secciones que desacopla la interacción flexión-cortante. El método utiliza una ecuación desarrollada a partir de la armadura clásica (contribución del acero de refuerzo transversal), y se complementa con la resistencia a tensión diagonal del concreto (contribución del concreto). Los argumentos que justifican a la contribución del concreto son (Committee 326, 1962a/b, Committee 426, 1973): i) una viga de concreto reforzado sin refuerzo transversal resiste cierto nivel de fuerza cortante antes de fallar y, ii) el refuerzo por cortante sólo es efectivo después del agrietamiento diagonal. Es importante señalar que incluir la contribución del concreto en el diseño por cortante es una práctica estadounidense que se le puede atribuir a Talbot (1909).

A pesar de que la contribución del concreto se usa sin cuestionamientos, la realidad es que no existe acuerdo sobre el mecanismo resistente que la justifica. Por ejemplo, la propuesta original del reglamento ACI-318 para vigas esbeltas privilegia la resistencia que aporta el bloque en compresión no agrietado (Committee 326 1962 a/b, Committee 426 1973). Varios investigadores defienden la importancia del bloque comprimido en la resistencia a cortante (Kotsovos 1988, Kim y White 1991, Zararis y Papadakis 2001, Tureyen y Frosch 2003).

Por otra parte, existen investigadores convencidos de que la fricción en la entrecara del agrietamiento diagonal es la fuente de la resistencia a cortante (Vecchio y Collins 1986, Reineck 1991, Muttoni y Fernández Ruiz 2008). En general, sus propuestas hacen uso de la resistencia a tensión del concreto, aun cuando algunos investigadores sostienen que es inseguro usarla (Braestrup 1981, Muttoni *et al.*, 1997). Otros investigadores prefieren dejar al criterio y responsabilidad del ingeniero el uso de la contribución del concreto (Schlaich *et al.*, 1987 y Nielsen 1999). Es evidente que existe una variedad de opiniones sobre la contribución del concreto, por lo que preferir alguna en especial depende de la formación de cada ingeniero, o de la confianza que se tenga en los investigadores que las emiten.

### 3. CRITERIO DE DISEÑO ADOPTADO

La primera fórmula de diseño por cortante para TACR se le atribuye a Mörsch (1909), y cuantifica la demanda de esfuerzo cortante en cualquier sección de la cartela ( $v_{TA}$ ). Esta fórmula se muestra en la Ecuación 1, donde  $V$  es el cortante estático en la sección,  $M$  el momento flexionante,  $d$  el peralte efectivo,  $b$  el ancho y  $\alpha$  el ángulo de acartelamiento. El signo negativo del numerador aplica cuando el diagrama de momento y el peralte de la cartela crecen en la misma dirección, que es el trabajo óptimo de la cartela (Fig. 4). El canto acartelado debe trabajar en compresión para aprovechar al máximo las ventajas de la geometría (Mörsch 1952). La Ecuación 1 es representativa de la teoría de vigas.

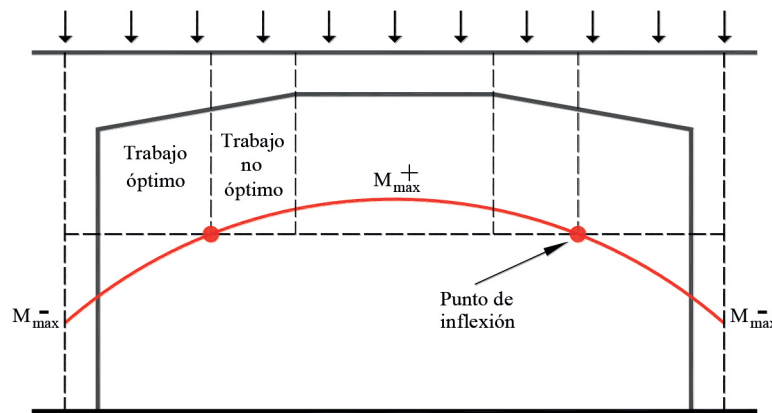


Fig. 4: Interacción peralte-diagrama de momento.

$$v_{TA} = \frac{V \pm \frac{|M|}{d} \tan \alpha}{bd} \quad (1)$$

Tradicionalmente, en las propuestas de diseño para TACR basadas en la teoría de vigas, se ha focalizado el efecto del acartelamiento en la contribución del concreto (Regan y Yu 1973, Debaiky y El-Niema 1982, Stefanou 1983, El-Niema 1988, MacLeod y Houmsi 1994, Tena-Colunga *et al.*, 2008, Nghiep 2009). Por otra parte, en las propuestas que usan campos de esfuerzo o modelos de armadura plástica, el acero de refuerzo transversal se diseña para resistir toda la demanda de cortante (Marti 1985 a, Muttoni *et al.*, 1997).

Ante este panorama, es importante decidir cómo hacer el diseño por cortante en TACR, es decir: optar por uno seccional o uno de elemento completo y, además, considerar o no la contribución del concreto. Para la elaboración de este trabajo se decidió: i) diseñar el acero de refuerzo transversal con ecuaciones desarrolladas a partir de campos de esfuerzo y modelos de armadura y, ii) complementar la resistencia con una contribución de concreto sustentada en un modelo de armadura realista. Se optó por modelos de armadura, pues al ser una solución del límite inferior de la teoría

de la plasticidad, se obtienen diseños conservadores. También, porque su aceptación como herramienta de diseño está creciendo, por lo que serán incorporados en la próxima versión de las Normas Técnicas Complementarias para el Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto (González 2013).

Finalmente, el efecto del acartelamiento se involucró explícitamente en la contribución del acero de refuerzo transversal y en la contribución del concreto. Como se demuestra más adelante, el acartelamiento influye tanto en el estado no agrietado como en el agrietado.

#### 4. IDENTIFICACIÓN DE REGIONES B-D

De acuerdo con Schlaich *et al.*, (1987), el diseño de un elemento de concreto reforzado debe ser función de una clasificación que depende de la uniformidad de las trayectorias de los esfuerzos principales elásticos (Fig. 5a). En las regiones donde las trayectorias son regulares, es válida la teoría de vigas y se llaman regiones B (Bernoulli). Las regiones donde las trayectorias son irregulares son regiones D (disturbio/discontinuidad). Las regiones D tienen una extensión de un peralte efectivo a cada lado de una irregularidad geométrica (cambio de sección, huecos) o de carga (apoyos, carga puntual). Toda región B está delimitada por regiones D, y existen elementos sin regiones B, como lo son las trabes peraltadas y muros que trabajan a cortante. Es común que las ecuaciones de diseño para vigas del cuerpo principal de los reglamentos de construcción apliquen sólo en regiones B.

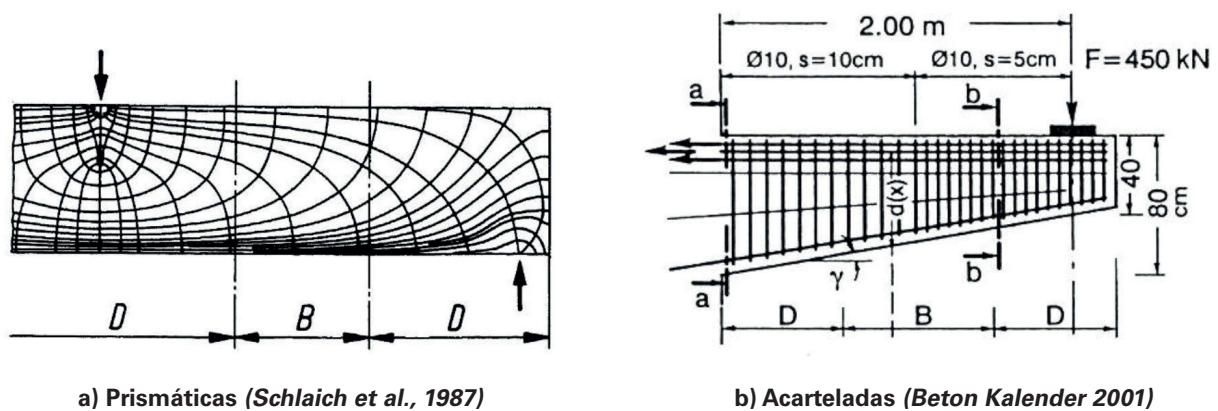


Fig. 5: Regiones B-D en trabes de concreto reforzado.

Es importante identificar correctamente las regiones B-D para aplicar métodos de análisis o diseño especializados para una u otra región. En el caso de las trabes acartelas, se debe investigar si el peralte variable no impide la formación de una región B. En el manual *Beton Kalender* (2001) se presentó una clasificación de regiones B-D para TACR, donde la extensión de las regiones D es igual al peralte efectivo máximo de la cartela (Fig. 5b). Esta propuesta difiere de las instrucciones genéricas de Schlaich *et al.*, (1987) mostradas en la Fig. 6.

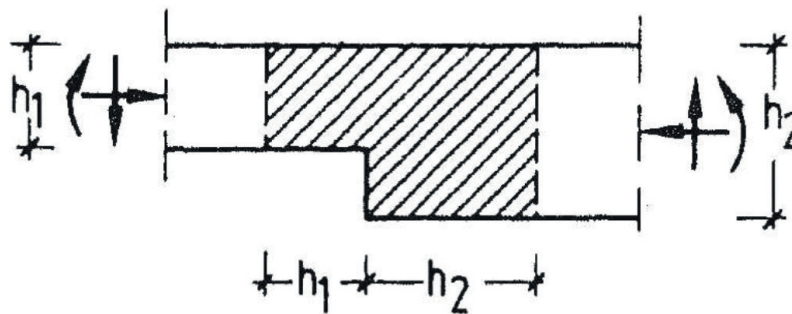
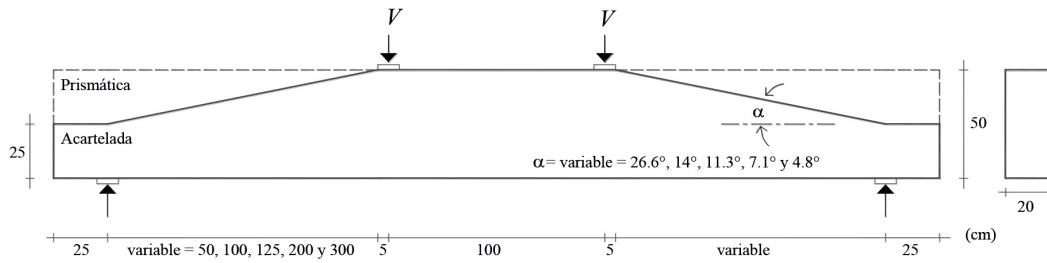


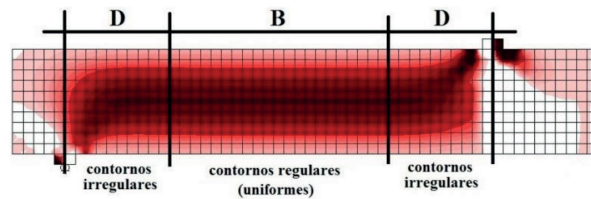
Fig. 6: Región D en trabes de sección variable según Schlaich *et al.*, (1987).



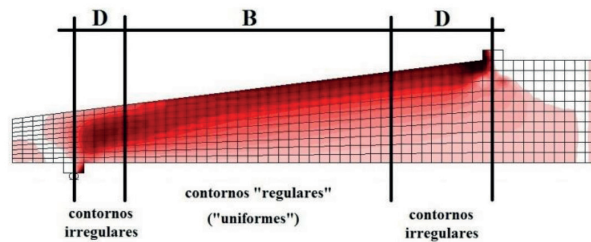


**Fig. 7: Geometría de los modelos de elemento finito usados en este estudio.**

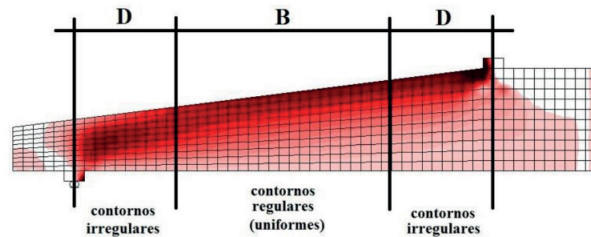
Para clasificar las cartelas en regiones B-D se hicieron análisis con elementos finitos elásticos en un programa de cómputo comercial. En el estudio se incluyeron traveses prismáticos y acartelados comparables (Fig.7). La geometría de los modelos cubre razonablemente: i) las proporciones observadas o recomendadas para traveses acartelados de puentes y edificios y, ii) el Valle de Kani (Fig. 17a). Para facilitar las comparaciones, el peralte de las traveses prismáticas es del mismo tamaño del peralte máximo de las cartelas, por lo que sólo se varió la longitud del claro de cortante para cubrir el Valle de Kani ( $2 \leq a/d_{max} \leq 6$ ). Las cartelas se dispusieron para que el canto acartelado trabajara en compresión, y que el diagrama de momentos y el peralte crecieran en el mismo sentido. Los modelos de elemento finito se calibraron con soluciones conocidas de la Mecánica de Materiales, en particular, en las traveses acarteladas se utilizaron las ecuaciones de Oden y Ripperger (1981).



**a) Trabe prismática (según Schlaich *et al.*, 1987).**



**b) Trabe acartelada (según Schlaich *et al.*, 1987).**



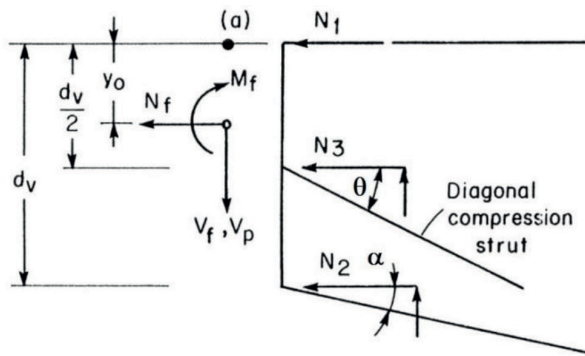
**c) Trabe acartelada (según el Beton Kalender 2001).**

**Fig. 8: Identificación de las regiones B-D en traveses acartelados (contornos de esfuerzo cortante).**

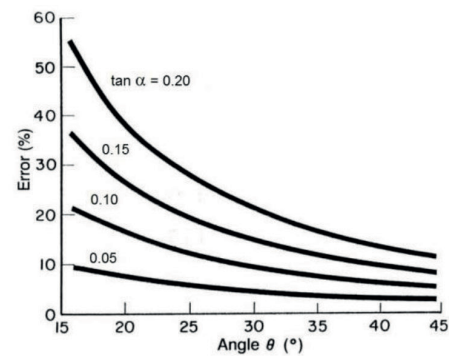
Como se comentó con anterioridad, la identificación de las regiones B-D depende de las trayectorias de los esfuerzos principales elásticos. Sin embargo, para la condición de carga y apoyo de los modelos estudiados, se observó que los contornos de esfuerzo cortante son una mejor herramienta para hacer dicha clasificación (Fig. 8). Al final, los contornos de esfuerzo cortante respaldaron la clasificación de las regiones B-D propuesta en el *Beton Kalender* (2001). Los detalles de esta clasificación se presentan en Archundia (2013).

## 5. LA PROPUESTA DE DILGER Y LANGOHR

Dilger y Langohr (1997) desarrollaron ecuaciones a partir de un modelo de armadura plástica para revisar las trabes acarteladas reforzadas del Puente Confederación (Fig. 9a). Su mayor aportación fue demostrar que el agrietamiento diagonal disminuye la resistencia a cortante que aporta el bloque de compresión inclinado.



a) Modelo de armadura



b) Comparación contra la teoría de vigas

Fig. 9: Solución de Dilger y Langohr (1997). Modificada.

Con base en su trabajo, Dilger y Langohr (1997) concluyeron que el diseño por cortante en TACR que se sustenta en la teoría de vigas es inseguro. Su postura fue respaldada con la Ecuación 2, la cual mide el “error” de un diseño seccional hecho con la teoría de vigas, respecto a uno seccional hecho con una armadura plástica. En la Ecuación 2,  $\theta$  es el ángulo del agrietamiento diagonal y  $\alpha$  el ángulo de acartelamiento. La evaluación de la Ecuación 2 con valores típicos se muestra en la Fig. 9b. La aseveración de Dilger y Langohr (1997) es preocupante; sin embargo, como se demuestra en secciones siguientes, algunas consideraciones erróneas los condujeron a ese juicio equivocado.

$$\text{Error} = \frac{1}{1 - \left( \frac{\tan \alpha}{2 \tan \theta} \right)} \quad (2)$$

## 6. CONTRIBUCIÓN DEL ACERO DE REFUERZO TRANSVERSAL

En la Fig. 10 se presenta un modelo de armadura plástica para una trabe acartelada, donde  $M$  y  $V$  son, respectivamente, las demandas de momento y cortante en una sección de interés. Estas demandas se descomponen en las fuerzas indicadas al otro lado del corte ( $T$ ,  $C$  y  $V_{ef}$ ). Los elementos de armadura que trabajan en compresión están representados con línea discontinua. El modelo se construyó para que la cartela trabaje de manera óptima (Fig. 4), y sólo es válido en un campo de compresión diagonal con inclinación constante  $\theta$ , es decir, una región B. Para satisfacer las hipótesis del modelo de armadura plástica, el equilibrio se estudió en la sección donde el peralte efectivo es dividido, en dos partes iguales, por el puntal que cruza diagonalmente cada tablero de armadura. De esta forma, las componentes ortogonales del campo de compresión diagonal actúan en  $d/2$  como se muestra en la Fig. 10. En dicha figura se identifican las fuerzas longitudinales que resisten la demanda de momento, y las que se generan por cortante: la tensión de la cuerda horizontal ( $T$ ), y la componente horizontal de la cuerda inclinada comprimida ( $C$ ). El valor de la componente vertical de la cuerda inclinada es  $C \tan \alpha$ , y participa en el mecanismo resistente a cortante.

El puntal inclinado que cruza el tablero de armadura también se descompone en dos fuerzas ortogonales:

a) Una componente vertical ( $V_{ef}$ ), que es la demanda de cortante contra la que se debe diseñar el acero de refuerzo transversal. En traves de sección constante esta fuerza tiene el mismo valor del cortante, por lo que suele identificarse con la letra "V". Sin embargo, en traves acarteladas esto no sucede, por lo que es común llamarla cortante efectivo ( $V_{ef}$ ). Este término fue usado por Park y Paulay (1975) en su análisis de traves acarteladas.

b) Una componente horizontal con valor  $V_{ef} / \tan \theta$ .

Del equilibrio del sistema de fuerzas mostrado en la Fig. 10, se obtienen las Ecuaciones 3 a 5.

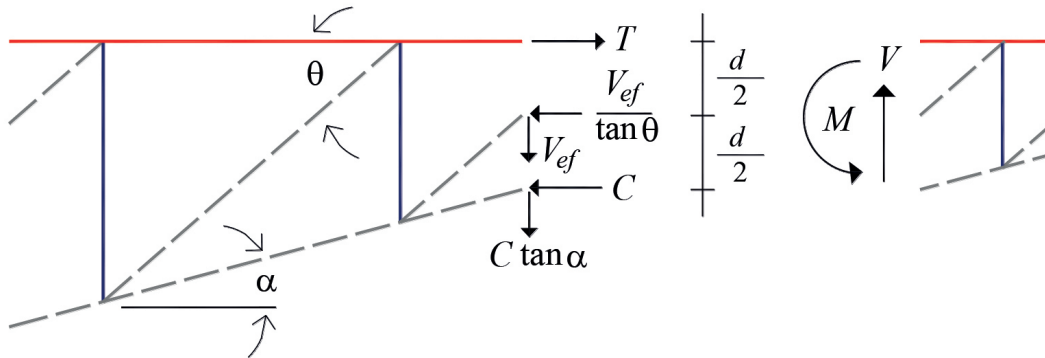


Fig. 10: Modelo de armadura plástica para la región B de una trabe acartelada.

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ T - \frac{V_{ef}}{\tan \theta} - C &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ V - V_{ef} - C \tan \alpha &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \sum M_T &= 0 \\ M - \frac{V_{ef}}{\tan \theta} \left( \frac{d}{2} \right) - C(d) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Se puede demostrar que la solución de las Ecuaciones 3 a 5 conduce a la demanda de cortante efectivo mostrada en la Ecuación 6. Esta solución también se obtiene con la propuesta de Dilger y Langohr (1997) cuando se eliminan los términos que incluyen el preesfuerzo y carga axial. De acuerdo con la Ecuación 6, la demanda de cortante efectivo es mayor de la que predice la teoría de vigas (Ec. 7). La solución completa incluye la demanda en las cuerdas de tensión y compresión (Ecs. 8 y 9, respectivamente). Dilger y Langohr (1997) presentaron fórmulas parecidas a las Ecuaciones 8 y 9 pero, en ausencia de preesfuerzo y carga axial, ambas son idénticas a la Ecuación 9. Finalmente, si en las Ecuaciones 6, 8 y 9 el ángulo de acartelamiento es nulo, se obtiene la solución para traves de sección constante (por ejemplo, MacGregor 1997).



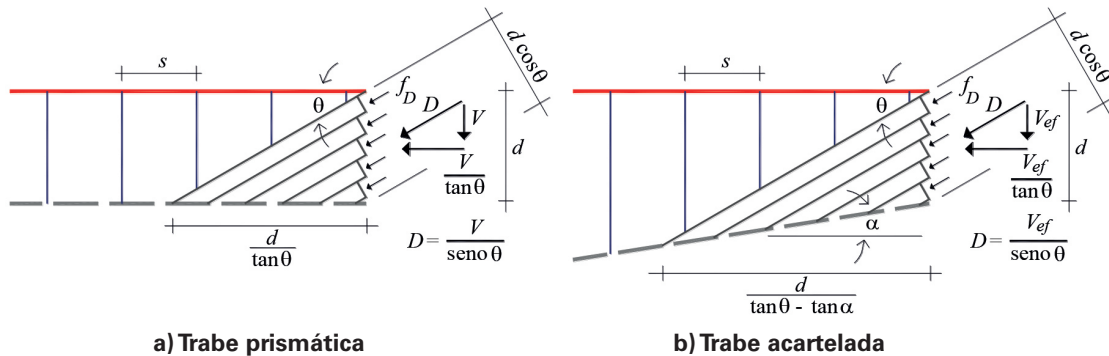
$$V_{ef} = \frac{V - \frac{M}{d} \tan \alpha}{1 - \frac{\tan \alpha}{2 \tan \theta}} \quad (6)$$

$$V_{ef} = V - \frac{M}{d} \tan \alpha \quad (7)$$

$$T = \frac{M}{d} + \frac{V - \frac{M}{d} \tan \alpha}{2 \tan \theta - \tan \alpha} \quad (8)$$

$$C = \frac{M}{d} - \frac{V - \frac{M}{d} \tan \alpha}{2 \tan \theta - \tan \alpha} \quad (9)$$

En un diseño con modelos de armadura no sólo importa conocer la demanda, sino también cómo se distribuye en el elemento. Esto es importante, pues una de las principales discrepancias entre las propuestas de diseño para TACR, es la extensión en la que se colocan los estribos. Con base en los campos de esfuerzo que se desarrollan en la región B, el agrietamiento diagonal de una trabe con sección constante tiene la proyección horizontal mostrada en la Fig. 11a. Dentro de esta longitud se deben distribuir uniformemente los estribos que resisten la demanda de cortante. Si se aplica el mismo principio en trabes acarteladas, la proyección horizontal del agrietamiento diagonal es la mostrada en la Fig. 11b. Estos campos de esfuerzo explican por qué que el agrietamiento diagonal de las TACR es más extenso que el de las prismáticas. La situación ya había sido advertida geoméricamente por Regan y Yu (1973). Posteriormente, MacLeod y Houmsi (1994) y Tena-Colunga *et al.*, (2008) atendieron esta particularidad de forma diferente a la mostrada en la Fig. 11b. Por comparación, en algunas propuestas de diseño para TACR se considera una extensión del agrietamiento diagonal similar al de las trabes de sección constante. Por ejemplo, está implícita en los libros de texto mencionados con anterioridad, y explícita en algunos trabajos experimentales (Debaiky y El-Niema 1982, El-Niema 1988) y analíticos (Dilger y Langohr 1997).



**Fig. 11: Campo de compresión diagonal en la región B.**

$$V_{sTA} \geq V_{ef} = \frac{A_v f_{yw} d}{s(\tan \theta - \tan \alpha)} \quad (10)$$

$$V_{ef} = \frac{V \pm \frac{|M|}{d} \tan \alpha}{1 - \frac{\tan \alpha}{2 \tan \theta}} \quad (11)$$

Con base en el desarrollo presentado, se propone diseñar el acero de refuerzo transversal de la región B de las TACR ( $V_{sTA}$ ) con las Ecuaciones 10 y 11, donde la mayoría de los términos ya han sido descritos, salvo  $A_v$  que es el área de las ramas de los estribos,  $f_{yw}$  su esfuerzo de fluencia y  $s$  la separación entre ellos. Vale la pena enfatizar que: i) un diseño riguroso con modelos de armadura exige que el acero de refuerzo transversal ( $V_{sTA}$ ) resista toda la demanda de cortante que, en este caso, es el cortante efectivo ( $V_{ef}$ ) y, ii) en la Ecuación 11 el signo negativo del numerador aplica cuando el peralte y el diagrama de momentos crecen en la misma dirección (Fig. 4).

$$f_D = \frac{V}{bd \sin \theta \cos \theta} = \frac{V}{bd} [\tan \theta + \cot \theta] \quad (12)$$

$$f_D = \frac{V_{ef}}{bd \sin \theta \cos \theta} = \frac{V_{ef}}{bd} [\tan \theta + \cot \theta] \quad (13)$$

Es común comparar el nivel de esfuerzo en el campo de compresión diagonal ( $f_D$ ) contra la resistencia efectiva del concreto ( $v f'_c$ ). La demanda en el campo de compresión diagonal se conoce al resolver los sistemas mostrados en la Fig. 11, al hacerlo se obtienen las Ecuaciones 12 (trabe prismática) y 13 (trabe acartelada), donde  $b$  es el ancho del elemento. Dilger y Langohr (1997) presentaron una fórmula más compleja que la Ecuación 13, pero tiene un error algebraico pues omitieron el peralte efectivo en su desarrollo. El valor del factor de eficiencia ( $v$ ) depende de muchas particularidades; en general, en las recomendaciones de diseño se sitúa en el intervalo  $0.6 \leq v \leq 0.85$ . Sin embargo, en Archundia (2013) se demuestra que la falla por cortante puede estar asociada a factores de eficiencia menores a  $v = 0.6$ .

## 7. NIVEL DE SEGURIDAD A CORTANTE DE LA TEORÍA DE VIGAS

Dilger y Langohr (1997) cuestionaron el nivel de seguridad del diseño a cortante que ofrece la teoría de vigas (Ec. 2 y Fig. 9b). Sin embargo, su juicio se sustenta en una comparación incompleta, pues el error que cuantificaron sólo aplica al cálculo del cortante efectivo. Una comparación justa también debe incluir la extensión del agrietamiento diagonal. De esta forma se combinan aspectos de la demanda y de la resistencia. La comparación que se propone en este trabajo involucra los tres casos siguientes:

- Caso 1: Cortante efectivo según la teoría de vigas, con una extensión del agrietamiento diagonal igual al de las trabes prismáticas (Ec. 14). Este caso representa las recomendaciones disponibles en los libros de texto.

$$V_{ef} = V \pm \frac{|M|}{d} \tan \alpha = \frac{A_v f_{yw} d}{s \tan \theta} \quad (14)$$

• Caso 2: Cortante efectivo obtenido de un modelo de armadura, con una extensión del agrietamiento diagonal igual al de las trabes prismáticas (Ec. 15). Este caso representa el método de Dilger y Langohr (1997).

$$V_{ef} = \frac{V \pm \frac{|M|}{d} \tan \alpha}{1 - \frac{\tan \alpha}{2 \tan \theta}} = \frac{A_v f_{yw} d}{s \tan \theta} \quad (15)$$

• Caso 3: Cortante efectivo obtenido de un modelo de armadura, con una extensión del agrietamiento realista (Ec. 16). Este caso representa el método recomendado en este trabajo.

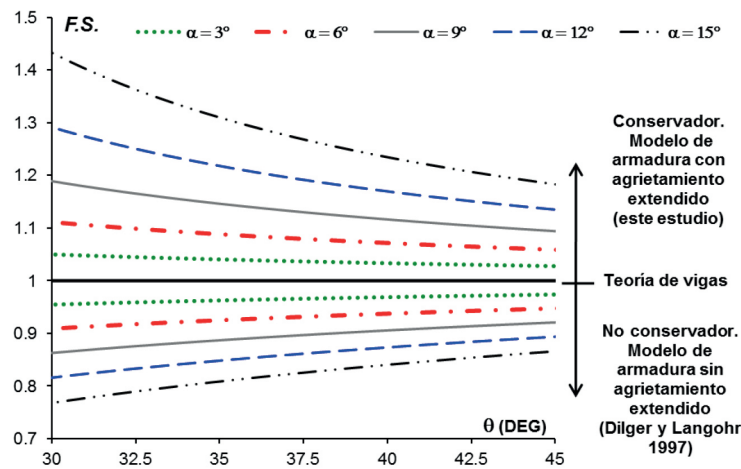
$$V_{ef} = \frac{V \pm \frac{|M|}{d} \tan \alpha}{1 - \frac{\tan \alpha}{2 \tan \theta}} = \frac{A_v f_{yw} d}{s(\tan \theta - \tan \alpha)} \quad (16)$$

De los tres casos, el de la teoría de vigas es el de mayor difusión debido a los libros de texto y es el que Dilger y Langohr (1997) cuestionaron. Por lo tanto, a un diseño hecho con este criterio se le asigna un factor de seguridad unitario ( $F.S. = 1$ ). Esta situación está representada en la Ecuación 17, la cual se obtiene de una manipulación sencilla de la Ecuación 14. Un arreglo conveniente de las Ecuaciones 15 y 16 permite comparar directamente el nivel de seguridad que ofrece el diseño por cortante con la teoría de vigas, contra la propuesta de Dilger y Langohr (1997) y la de los autores (Ecuaciones 18 y 19, respectivamente).

$$F.S. = \frac{V \pm \frac{M}{d} \tan \alpha}{\frac{A_v f_{yw} d}{s \tan \theta}} = 1 \quad (17)$$

$$F.S. = \frac{V \pm \frac{M}{d} \tan \alpha}{\frac{A_v f_{yw} d}{s \tan \theta}} = 1 - \frac{\tan \alpha}{2 \tan \theta} \quad (18)$$

$$F.S. = \frac{V \pm \frac{M}{d} \tan \alpha}{\frac{A_v f_{yw} d}{s \tan \theta}} = \frac{1 - \frac{\tan \alpha}{2 \tan \theta}}{1 - \frac{\tan \alpha}{\tan \theta}} \quad (19)$$



**Fig. 12: Comparación del nivel de seguridad a cortante en TACR que ofrece la teoría de vigas sin incluir la contribución del concreto.**

La Ecuación 18 es el recíproco de la Ecuación 2, y es consistente con el juicio equivocado de Dilger y Langohr (1997) comentado con anterioridad. En la Fig. 12 se muestran los factores de seguridad que se obtienen con la Ecuación 19 con valores típicos de  $\alpha$  y  $\theta$ . Son de interés los que se obtienen con  $\theta = 45^\circ$ , pues es el ángulo implícito en los métodos de diseño para traves prismáticas y acarteladas basados en la teoría de vigas, y es la solución menos favorable al comparar contra el modelo de armadura plástica. De acuerdo con los resultados obtenidos, el diseño de TACR sustentado en la teoría de vigas es seguro ( $F.S. \geq 1$ ), aun cuando omite una extensión realista del agrietamiento diagonal, e ignora la interacción flexión-cortante que toma en cuenta un modelo de comportamiento mecánico específico para cortante.

$$\phi_{FS} = 1 - (0.35 \tan \alpha) \quad (20)$$

Las comparaciones mostradas en la Fig. 12 no incluyen la contribución del concreto cuando se toma en cuenta en el diseño, por lo que también se debe investigar el nivel de seguridad que ofrece la teoría de vigas en esta situación. Se ha observado experimentalmente que el nivel de daño por cortante en las TACR es proporcional al ángulo de acartelamiento (Tena-Colunga *et al.*, 2008 y Archundia-Aranda *et al.*, 2013), por lo que se puede suponer que la contribución del concreto se degrada con esa proporción. Con esta hipótesis, se cuantificó el factor de seguridad de un diseño con contribución del concreto multiplicando la Ecuación 19 por el factor de reducción  $\phi_{FS}$  mostrado en la Ecuación 20. En Archundia (2013) se explica cómo se desarrolló  $\phi_{FS}$  a partir de los resultados experimentales reportados en Tena-Colunga *et al.*, (2008), y el límite impuesto por el Committee 426 (1973) a la resistencia del concreto en traves prismáticas. En la Fig. 13 se muestran los factores de seguridad obtenidos. Como se esperaba, un diseño basado en la teoría de vigas que toma en cuenta la resistencia del concreto también es seguro, aunque en menor medida a la de un diseño donde la resistencia se le ha confiado exclusivamente al acero de refuerzo transversal (Fig. 12).

## 8. DISEÑO BASADO EN LA SECCIÓN CRÍTICA

El concepto de la sección crítica por cortante en traves prismáticas fue introducido por el Committee 326 (1962 a/b) y adoptado por el reglamento ACI-318. Posteriormente, Regan y Yu (1973) lo aplicaron al diseño de TACR. Stefanou (1983) retomó el trabajo de Regan y Yu, y propuso diseñar TACR suponiendo que la sección crítica pertenece a una trabe prismática. Este enfoque fue mejorado por MacLeod y Houmsi (1994), quienes propusieron el formato mostrado en la Ecuación 21, donde  $V_{TA}$  es la resistencia a cortante de la cartela,  $V$  la demanda de cortante,  $V_p$  la resistencia a cortante de la sección crítica suponiendo que es parte de una trabe prismática,  $M_{cr}$  la demanda de momento en la sección crítica,  $d_{cr}$  el peralte efectivo de la sección crítica, y  $\alpha$  el ángulo de acartelamiento. El signo positivo aplica cuando el peralte y el diagrama de momentos crecen en la misma dirección.

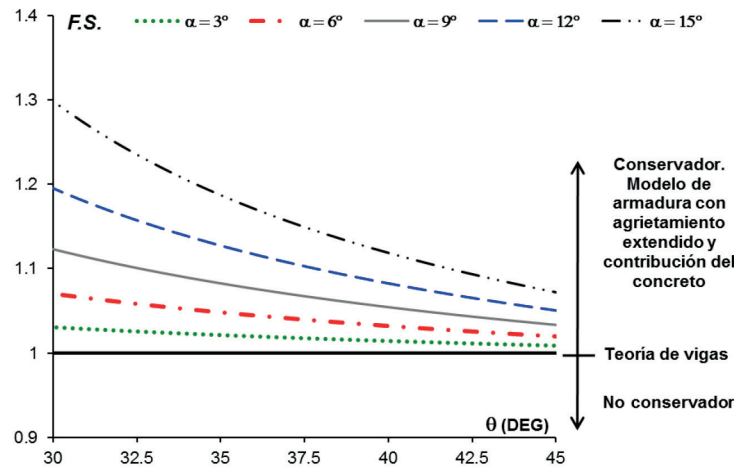


Fig. 13: Comparación del nivel de seguridad a cortante en TACR que ofrece la teoría de vigas cuando se incluye la contribución del concreto.

$$V_{TA} = \left[ V_p \pm \frac{|M_{cr}|}{d_{cr}} \tan \alpha \right] \geq V \quad (21)$$

$$V_{TA} = \left[ V_{sTA} \pm \frac{|M_{cr}|}{d_{cr}} \tan \alpha \right] \geq V \quad (22)$$

$$V_{sTA} = \frac{A_v f_{yw} d_{cr}}{s(\tan \theta - \tan \alpha)} \left( 1 - \frac{\tan \alpha}{2 \tan \theta} \right) \quad (23)$$

Si las Ecuaciones 10 y 11 se arreglan para satisfacer el formato de la Ecuación 21, se obtienen las Ecuaciones 22 y 23. En la Ecuación 22,  $V$  es la mayor demanda de cortante en la cartela que resulta del análisis estructural o de un mecanismo de colapso. Se hace notar que el concepto de cortante efectivo ( $V_{ef}$ ) ya no aplica en este formato, pues el efecto del acartelamiento se ha pasado a la resistencia. En efecto, la aplicación de las Ecuaciones 22 y 23 requiere conocer el valor y ubicación de la sección crítica de la cartela.

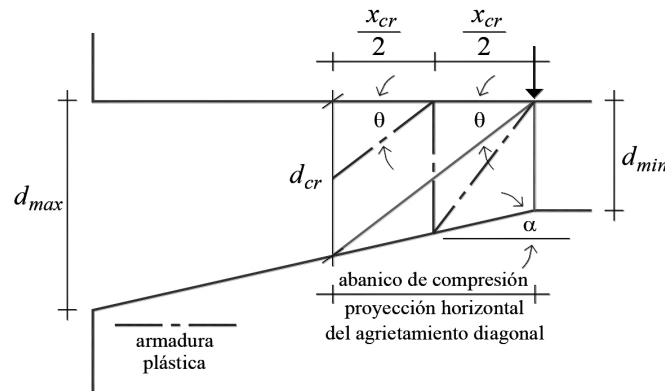


Fig. 14: Ubicación de la sección crítica en una TACR con refuerzo transversal.



Existen propuestas para calcular el peralte crítico en TACR; sin embargo, pertenecen a métodos semiempíricos en los que el efecto del acartelamiento se focaliza en la contribución del concreto. Puesto que un peralte crítico con estas características es incompatible con la propuesta de este trabajo, se optó por desarrollar una definición que fuera consistente con la mecánica del concreto: primero se analizó el caso de las trabes prismáticas con refuerzo transversal, y después la solución se implantó en trabes acarteladas. La definición que se obtuvo se sustenta en campos de esfuerzo, modelos de armadura, esbeltez y regiones B-D.

El peralte crítico ( $d_{cr}$ ) está ubicado a una distancia crítica ( $x_{cr}$ ) medida desde el peralte menor de la cartela (Fig. 14). Esta distancia es la extensión de la región D plástica, generada por el campo de esfuerzo en forma de abanico que produce una carga concentrada, real o equivalente, en esta zona de discontinuidad geométrica. El valor de ambos parámetros se obtiene con las Ecuaciones 24 y 25. La sección crítica está referenciada al peralte menor, pues en su cercanía se inicia el agrietamiento diagonal (Tena-Colunga et al. 2008 y Archundia-Aranda et al., 2013). Se introdujo el término “región D plástica”, para hacer una distinción con la región D definida por Schlaich et al., (1987) que, rigurosamente, es una región elástica.

$$x_{cr} = \frac{d_{min}}{\tan \theta - \tan \alpha} \quad (24)$$

$$d_{cr} = \frac{d_{min}}{1 - \frac{\tan \alpha}{\tan \theta}} \quad (25)$$

$$d_{cr} = \frac{d_{min}}{1 - \frac{\tan \alpha}{\tan \theta}} \leq d_{max} \left( 1 - \frac{\tan \alpha}{\tan \theta} \right) \quad (26)$$

Archundia et al., (2005) acotaron el valor del peralte crítico semiempírico para evitar valores irreales; por ejemplo, a los que conduce la recomendación de MacLeod y Houmsi (1994). En este trabajo se limita el valor del peralte crítico para garantizar que pertenezca a la región B plástica. Para ello, es condición suficiente que su valor no exceda el del peralte donde está la frontera de las regiones B y D en el otro extremo de la cartela ( $d_{cr-max}$ , Fig. 15). Esta cota se obtiene por geometría, y su valor se muestra en la Ecuación 26.

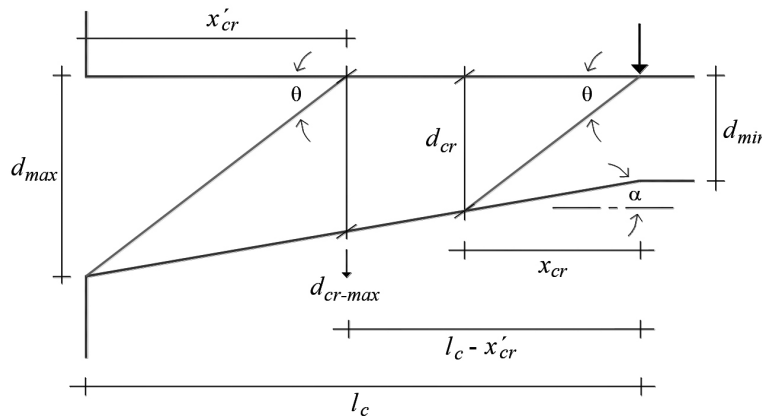


Fig. 15: Cota superior para el peralte crítico.

$$l_c \geq (x_{cr} + x'_{cr}) = \left( \frac{d_{min}}{\tan \theta - \tan \alpha} + \frac{d_{max}}{\tan \theta} \right) \quad (27)$$

$$a \geq \frac{d}{\tan \theta} + \frac{d}{\tan \theta} = \frac{2d}{\tan \theta} \quad (28)$$

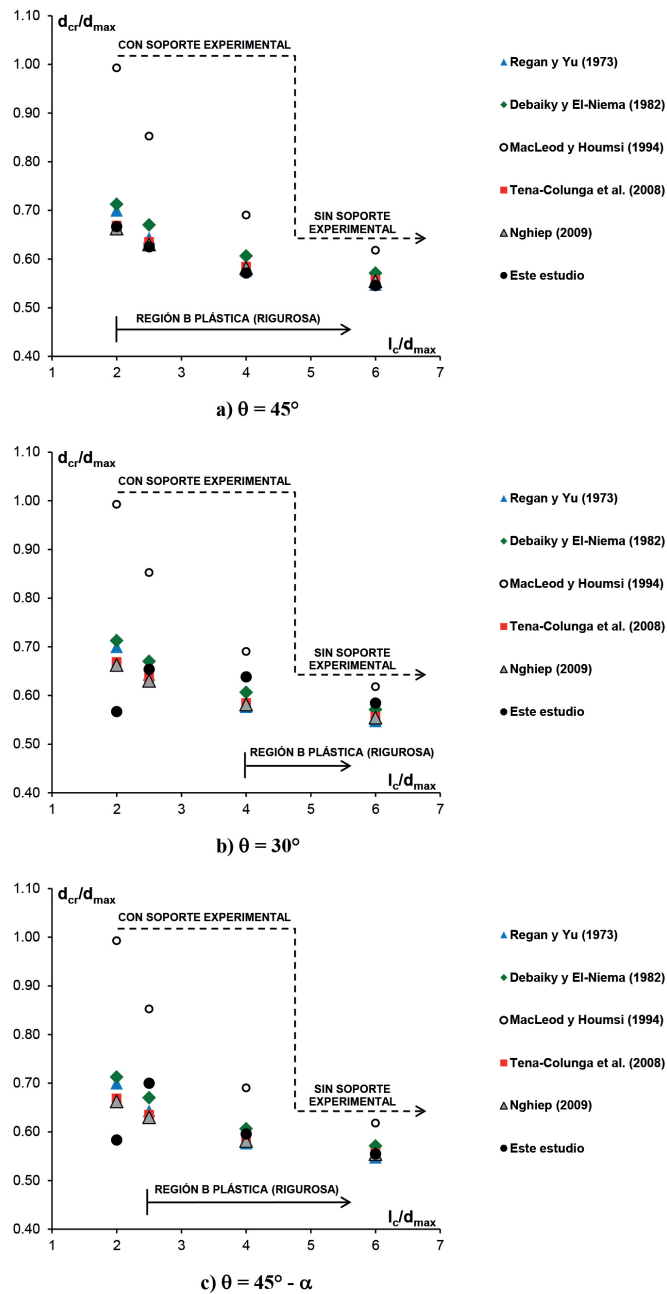


Fig. 16: Comparación del peralte crítico.

La Fig. 15 permite identificar el requisito geométrico que garantiza la esbeltez de una cartela con refuerzo transversal. Para que una cartela con estribos sea esbelta, debe alojar una región B plástica, lo que sucede sólo si su longitud es mayor o igual a la suma de la proyección horizontal de los abanicos de compresión de cada extremo. Este requisito está expresado en la Ecuación 27, y tiene implicaciones de importancia. Por ejemplo, cuando  $\tan \alpha = 0$  se tiene una trabe prismática pues  $d_{\max} = d_{\min} = d$ , y se justifica el cambio de variable  $l_c = a$ . En esta situación, la Ecuación 27 se reduce a la Ecuación 28, demostrando que la esbeltez de las trabes prismáticas con refuerzo transversal, no sólo depende de la relación  $a/d$  (por ejemplo: Committee, 445 1998), sino también de la inclinación del campo de compresión diagonal que se desarrolla en el claro de cortante. Estrictamente, la relación  $a/d$  debe limitarse a trabes prismáticas sin estribos (Kani 1964), por lo que las Ecuaciones 27 y 28 proporcionan un punto de vista diferente para entender la resistencia a cortante de las trabes de concreto reforzado, que puede servir para elaborar guías de análisis y diseño más apegadas a la mecánica del concreto (Archundia 2013).

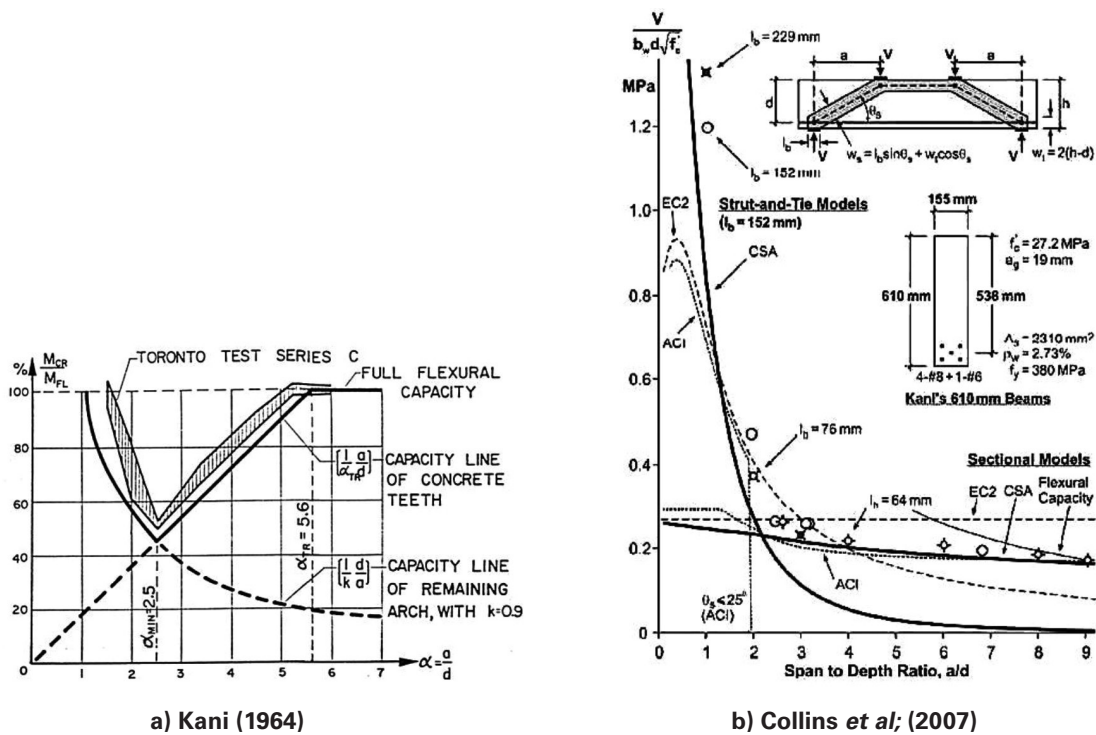


Fig. 17: Comportamiento de vigas prismáticas sin estribos en función de  $a/d$ .

En la Fig. 16 se compara el peralte crítico calculado con la Ecuación 26 contra propuestas previas. En el ejercicio se utilizó la geometría de los modelos con los que se identificó la región B elástica (Fig.7). Para facilitar las comparaciones, el peralte crítico ( $d_{cr}$ ) se normalizó con el peralte máximo de la cartela ( $d_{\max}$ ), y se graficó contra el cociente  $l_c / d_{\max}$ , que es equivalente al cociente  $a/d$  de las trabes prismáticas. Esta normalización es sólo geométrica, y no clasifica a las trabes en cortas o esbeltas. En el ejercicio se omitió el elemento con la relación  $l_c / d_{\max} = 1$ , pues no permite el desarrollo de una región B.

La sección crítica propuesta depende de la inclinación del campo de compresión diagonal. Para fines de diseño, se puede utilizar cualquier ángulo que satisfaga el intervalo  $26.6^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ . Para efectos de revisión, son de interés los ángulos  $\theta = 45^\circ$ ,  $\theta = 30^\circ$  y  $\theta = 45^\circ - \alpha$ . Los dos primeros son típicos en el diseño de trabes con modelos de armadura; de hecho,  $\theta = 45^\circ$  está implícito en el reglamento ACI-318. El último es una recomendación sustentada en datos experimentales en TACR con y sin estribos (Tena-Colunga et al., 2008). Las comparaciones mostradas en la figura 16 respaldan la sección crítica que se propone, y permiten recomendar los ángulos  $\theta = 45^\circ$  y  $\theta = 45^\circ - \alpha$  para favorecer la formación de la región B plástica en la cartela.

## 9. CONTRIBUCIÓN DEL CONCRETO

La contribución del concreto también se justificó con un modelo de armadura. Para ello, se investigó el origen de esta resistencia, sus ventajas y limitantes, las interpretaciones que se le han dado, los modelos mecánicos y semiempíricos que la explican, así como su correlación con las regiones B-D y la sección crítica. Por restricción de espacio sólo se presentan los resultados esenciales de esta investigación (Archundia 2013).

Kani (1964) estudió la resistencia a cortante en traveses prismáticos sin refuerzo transversal, simplemente apoyados, y sometidos a cargas puntuales. Identificó dos mecanismos resistentes que llamó de “arco” y de “viga”, y demostró que su influencia depende de la relación  $a/d$ . La gráfica mostrada en la Fig. 17a fue construida a partir de resultados experimentales, y con ella Kani determinó que en  $a/d = 2.5$  está la frontera que divide el predominio de los mecanismos de arco y de viga. En el intervalo  $1 \leq a/d \leq 2.5$  el mecanismo dominante es el de arco, en  $2.5 < a/d < 5.6$  gobierna el de viga, y cuando  $a/d \geq 5.6$  la falla no es por cortante, sino por flexión.

La Fig. 17b es de Collins *et al.*, (2007), y en ella se comparan los resultados de Kani (1964) contra la resistencia que predice el modelo de armadura de puntal directo y los métodos seccionales. Las predicciones se hicieron usando las recomendaciones de los reglamentos de Estados Unidos, Europa y Canadá (ACI, EC2 y CSA, respectivamente). Se observa que la frontera que separa la aplicación de ambos métodos de diseño yace en el intervalo  $2 \leq a/d \leq 2.5$ , y usualmente  $a/d = 2$ . Esto confirma los resultados de Kani (1964), pues el modelo de puntal directo está relacionado con el mecanismo de arco (región D), y los métodos seccionales con el de viga (región B).

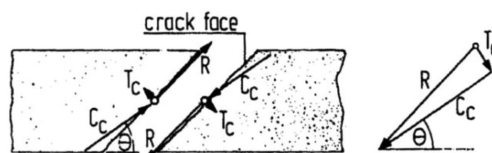
A partir de la Fig. 17, se puede correlacionar el mecanismo de viga con las restricciones originales del método de diseño a cortante del reglamento ACI-318 (Committee 326, 1962b):

1. En traveses en las que  $a > 2d$ , el método no es válido dentro de una distancia  $d$  medida desde cualquier extremo del claro de cortante.
2. Si  $0.75d \leq a \leq 2d$ , el método solamente es válido en la sección ubicada a la mitad del claro de cortante.
3. Cuando  $a \leq 0.75d$ , el método no se puede aplicar.

Estas limitantes restringen la contribución del concreto a secciones alejadas por lo menos una distancia de un peralte efectivo de los apoyos, o cargas concentradas, y la hace exclusiva de las regiones B definidas por Schlaich *et al.*, (1987). Con esta base se analizaron varios modelos de armadura para traveses prismáticos sin refuerzo transversal. El modelo seleccionado es el propuesto por Schlaich *et al.*, (1987). Los otros modelos estudiados tienen inconsistencias, o son más complejos (Reineck 1991, Al-Nahlawi y Wight 1992, Nielsen 1999, Muttoni y Fernández Ruiz 2008).



a) Armadura con tensores de concreto.



$T_c$  = resultante of the tension field  
 $C_c$  = resultante of the compression field  
 $R$  = force of the aggregate interlock

b) Fuerzas en la entrecara del agrietamiento diagonal.

Fig. 18: Explicación de Schlaich *et al.*, (1987) para la contribución del concreto.

En la Fig. 18a se muestra el modelo de armadura de Schlaich *et al.*, (1987). El modelo representa la región B de una trabe con estribos agrietada diagonalmente, donde el ángulo de inclinación inicial de las grietas ( $\alpha$ ) es mayor al del mecanismo de armadura plástica ( $\theta$ ). Con el aumento de la carga, las grietas iniciales se extienden con una inclinación que disminuye gradualmente, hasta alcanzar el ángulo  $\theta$  que activa la armadura plástica. De acuerdo con Schlaich *et al.*, (1987), durante este proceso la resistencia a cortante es aportada exclusivamente por la trabazón del agregado en la entrecara de la grieta (Fig. 18b). Este mecanismo está representado con una fuerza tangencial a la grieta ( $R$ ) que, por conveniencia, Schlaich y colaboradores descompusieron en una de compresión ( $C_c$ ) con inclinación  $\theta$ , y en otra de tensión ( $T_c$ ) perpendicular. Estas fuerzas son las que justifican la armadura con tensores de concreto mostrada en la Fig. 18a. Con esto, Schlaich *et al.*, (1987) explicaron por qué los estribos son efectivos sólo después del agrietamiento por tensión diagonal.

Conceptualmente, la contribución del concreto no es la resistencia última de una trabe esbelta sin estribos, aunque en algunos casos pueden coincidir. Por lo tanto, lo que sucede entre el agrietamiento por tensión diagonal y: i) el colapso de una trabe sin estribos o, ii) la formación de la armadura plástica en una trabe con refuerzo transversal, no afecta el cálculo y explicación de la contribución del concreto. Esto conduce a la idea de que, los mecanismos de armadura que explican la contribución del concreto y la contribución del acero de refuerzo, son independientes, secuenciales, y unidos por un mecanismo de transición que se comenta más adelante.

La armadura con tensores de concreto de Schlaich *et al.*, (1987), limitada al intervalo elástico, representa razonablemente el estado de esfuerzos de una trabe esbelta antes del agrietamiento por tensión diagonal. Por lo tanto, la solución de esta armadura elástica se puede relacionar con la contribución del concreto. En la Fig. 19 se muestra una armadura elástica para la región B de una trabe acartelada. Las demandas en la sección de análisis son el momento ( $M_{agr}$ ) y el cortante ( $V_{agr}$ ) justo antes del agrietamiento por tensión diagonal, y se descomponen en las fuerzas mostradas en el lado opuesto del corte ( $T_{agr}$ ,  $C_{agr}$  y  $V_{cef}$ ). Al cortante efectivo ( $V_{cef}$ ) se le agregó el subíndice “c” para relacionarlo con la resistencia del concreto. El ángulo de inclinación de los elementos que representan los campos de esfuerzo elástico es  $\theta_E$ , y no necesariamente tiene el valor de  $\theta$ . La sección de análisis corresponde a la ruptura completa del tensor de concreto debido al agrietamiento por tensión diagonal. Este agrietamiento inicia donde el tensor divide en dos partes iguales el peralte efectivo de la trabe, que corresponde al primer agrietamiento diagonal. Finalmente, las demandas en el modelo de armadura elástica son las indicadas en las ecuaciones 29 a 31.

$$V_{cef} = \frac{V_{agr} - \frac{M_{agr}}{d} \tan \alpha}{1 + \frac{\tan \alpha}{2 \tan \theta_E}} \quad (29)$$

$$T_{agr} = \frac{M_{agr}}{d} - \frac{V_{agr} - \frac{M_{agr}}{d} \tan \alpha}{2 \tan \theta_E - \tan \alpha} \quad (30)$$

$$C_{agr} = \frac{M_{agr}}{d} + \frac{V_{agr} - \frac{M_{agr}}{d} \tan \alpha}{2 \tan \theta_E - \tan \alpha} \quad (31)$$

El denominador de la Ecuación 29 es diferente al de la Ecuación 6, lo que confirma la independencia entre los mecanismos de la contribución del acero de refuerzo y de la contribución del concreto. La comparación de las Ecuaciones 30 y 31 contra las Ecuaciones 8 y 9, también muestra tendencias diferentes en la demanda de las cuerdas longitudinales antes y después del agrietamiento diagonal, lo que se aprecia mejor cuando  $\tan \alpha = 0$ . Esto le da otra ventaja a los modelos de armadura sobre la teoría de vigas para el estudio a cortante, pues la última no distingue la demanda en las cuerdas en



función del agrietamiento ( $T = C = M/d$ ). De acuerdo con la armadura elástica, la demanda en el bloque de compresión es mayor, y en el acero de refuerzo longitudinal menor, de lo que predice la teoría de vigas y la armadura plástica. El resultado sugiere que, al presentarse la falla por tensión diagonal, la carga asociada con la contribución del concreto es transferida súbitamente a otro mecanismo donde el bloque de compresión no agrietado tiene importancia relevante. Este es el mecanismo de transición comentado con anterioridad, y debe desaparecer, gradualmente, al mismo tiempo que el agrietamiento diagonal se extiende para favorecer la formación de la armadura plástica.

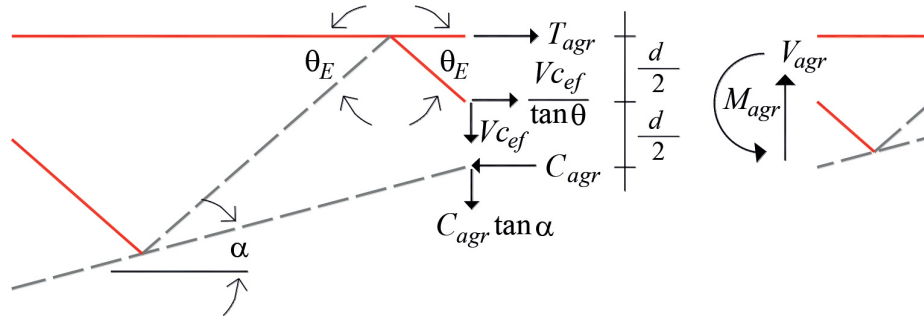


Fig. 19: Modelo de armadura elástica para la región B de una trabe acartelada.

El modelo de armadura elástica apoya la fórmula del reglamento ACI-318 con la que se cuantifica la contribución del concreto (Ec. 32). La fórmula es semiempírica, y en su desarrollo se tomó en cuenta la importancia que tiene el bloque de compresión no agrietado (Committee 326 1962 a/b). Por otro lado, la solución de las armaduras plástica y elástica puede explicar por qué los métodos de diseño afines a la teoría modificada de los campos de compresión, cambian constantemente el criterio con el que se cuantifica la demanda de tensión para el cálculo de la contribución del concreto en traveses con y sin estribos (Collins y Mitchell 1986, Collins *et al.*, 1996, Bentz *et al.*, 2006).

$$V_c = 0.53 \sqrt{f'_c} b d; \quad (\text{kg, cm}) \quad (32)$$

Por conveniencia, al diagrama de cortante se le resta la contribución del concreto para identificar las secciones, que en realidad son tramos de elemento (Ferguson *et al.*, 1988), donde se requiere acero de refuerzo transversal. Esto obliga un cambio de formato en la Ecuación 29, es decir, convertir una ecuación que cuantifica demanda, en una que calcule resistencia. Este cambio también fue requerido para obtener la fórmula que determina la contribución del acero de refuerzo con la sección crítica.

La contribución del concreto ( $V_{cTA}$ ) que se propone en este trabajo tiene su origen en las Ecuaciones 29 y 32. Al combinarlas racionalmente se obtiene la Ecuación 33, donde el signo positivo del cociente  $|M_{agr}|/d$  aplica cuando el peralte y el momento crecen en la misma dirección (Fig. 4). Para usar la Ecuación 33, se debe conocer el valor del momento asociado al agrietamiento diagonal ( $M_{agr}$ ), así como el ángulo de inclinación ( $\theta_E$ ) del campo de esfuerzos elásticos.

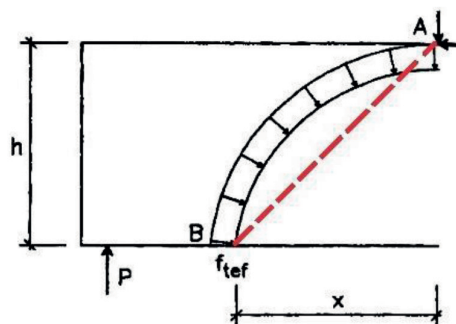


Fig. 20: Bloque de esfuerzo equivalente asociado al agrietamiento diagonal (Nielsen 1999). Modificada.

$$V_{cTA} = 0.53\sqrt{f'_c} bd \left[ 1 + \frac{\tan \alpha}{2 \tan \theta_E} \right] \pm \frac{|M_{agr}|}{d} \tan \alpha \quad (33)$$

De acuerdo con Nielsen (1999), el momento asociado al agrietamiento diagonal se puede calcular con el bloque equivalente curvo mostrado en la Fig. 20, o de manera más sencilla, con un bloque recto alineado con la línea que une los extremos A y B de la grieta teórica. Si en lugar del peralte total ( $h$ ) los cálculos se hacen de forma más correcta con el peralte efectivo ( $d$ ), el momento de agrietamiento diagonal se calcula con la Ecuación 34, donde  $f_{tef}$  es la resistencia efectiva a tensión del concreto,  $b$  el ancho de la sección transversal, y  $L_{AB} = \sqrt{(x^2 + d^2)}$  es la distancia entre los extremos A y B.

$$M_{agr} = 0.5 f_{tef} b L_{AB}^2 \quad (34)$$

De la mecánica de materiales, se sabe que los esfuerzos principales elásticos alrededor del eje neutro tienen una inclinación de 45 grados. Si se acepta la hipótesis de que la grieta por tensión diagonal tiene esa inclinación ( $\theta_E = 45^\circ$ ), entonces su proyección horizontal es igual al peralte efectivo ( $x = d$ ), por lo que  $L_{AB} = 1.41d$ . La sustitución de estos valores en la Ecuación 34 conduce a la Ecuación 35.

$$M_{agr} = f_{tef} b d^2 \quad (35)$$

$$f_{tef} = 0.6 f_t = 1.07 \sqrt{f'_c} \quad (36)$$

$$M_{agr} = 1.07 \sqrt{f'_c} b d^2 \quad (37)$$

Nielsen (1999) recomienda calcular la resistencia efectiva a tensión del concreto ( $f_{tef}$ ), afectando la resistencia índice ( $f$ ) con varios factores de eficiencia ( $v$ ). De ellos, sólo se tomó en cuenta el factor  $v = 0.6$ , pues es análogo al que se usa en la construcción del bloque equivalente a compresión del reglamento ACI-318. El resto de los factores de eficiencia que propone Nielsen son cuestionables. Por ejemplo, uno disminuye 50 % de la resistencia, a tensión o compresión, debido al micro-agrietamiento. La resistencia a tensión del concreto se supuso igual a la que se obtiene en la prueba brasileña. De acuerdo con el reglamento ACI-318, ésta es  $f_t = 1.78 \sqrt{f'_c}$  cuando las unidades son kg y cm. Al tomar en cuenta el factor de eficiencia  $v = 0.6$ , la resistencia efectiva a tensión es la mostrada en la Ecuación 36; cuando se sustituye este valor en la Ecuación 35 se obtiene la Ecuación 37.

La sustitución de la Ecuación 37 en la Ecuación 33 conduce a las Ecuaciones 38 y 39. Ambas fórmulas cuantifican la contribución del concreto en cualquier sección que pertenezca a la región B de una trabe acartelada. La Ecuación 38 aplica cuando el peralte y el momento crecen en la misma dirección, y la Ecuación 39 cuando crecen en sentido contrario. Alternativamente, puede usarse la Ecuación 40, que es la versión simplificada y conservadora que omite el efecto de armadura. En la Ecuación 40 el signo positivo dentro del paréntesis aplica cuando el peralte y el momento crecen en la misma dirección. Las Ecuaciones 38 a 40 deben ser sustituidas con valores en kg y cm.

$$V_{cTA} = 0.53 \sqrt{f'_c} b d [1 + 2.5 \tan \alpha] \geq V \quad (38)$$

$$V_{cTA} = 0.53\sqrt{f'_c} bd[1 - 1.5 \tan \alpha] \geq V \quad (39)$$

$$V_{cTA} = 0.53\sqrt{f'_c} bd[1 \pm 2 \tan \alpha] \geq V \quad (40)$$

Las Ecuaciones 38 a 40 funcionan en un diseño sección por sección; sin embargo, el diseño puede simplificarse si se conoce el valor del peralte crítico elástico. En Archundia (2013) se demuestra que, a partir del “detalle” de armadura elástica mostrado en la figura 21, la distancia crítica elástica ( $x_{crE}$ ) y el peralte crítico elástico ( $d_{crE}$ ) se calculan con las Ecuaciones 41 y 42, respectivamente. Por consistencia, en estas ecuaciones también  $\theta_E = 45^\circ$ . Se hace énfasis de que es un detalle de armadura elástica, porque aún no se ha publicado un modelo genérico para traveses sin estribos como lo es la armadura plástica para traveses con refuerzo transversal.

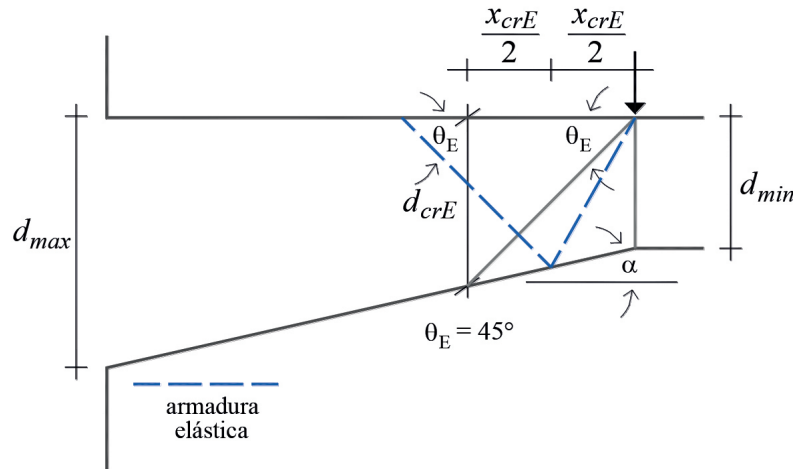


Fig. 21: Ubicación de la sección crítica elástica en una TACR.

$$x_{crE} = \frac{d_{min}}{\tan \theta_E - \tan \alpha} = \frac{d_{min}}{1 - \tan \alpha} \quad (41)$$

$$d_{crE} = \left[ \frac{d_{min}}{1 - \frac{\tan \alpha}{\tan \theta_E}} \leq d_{max} \left( 1 - \frac{\tan \alpha}{\tan \theta_E} \right) \right] = \left[ \frac{d_{min}}{1 - \tan \alpha} \leq d_{max} (1 - \tan \alpha) \right] \quad (42)$$

$$l_{cE} \geq \frac{d_{min}}{1 - \tan \alpha} + d_{max} \quad (43)$$

$$l_{cE} \geq 2d_{max} \quad (44)$$

Puesto que la contribución del concreto se justifica con un modelo de armadura, debe verificarse que la cartela pueda alojar una región B elástica. En Archundia (2013) se demuestra que esto se cumple al satisfacer la Ecuación 43, donde el subíndice “E” es para marcar la diferencia con la Ecuación 27. Opcionalmente puede usarse la Ecuación 44, la cual está fundamentada en los análisis con elementos finitos comentados con anterioridad. Como regla general: una trabe que puede alojar una región B plástica para el intervalo  $26.6^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$  (Ec. 27), también aloja una región B elástica.

## 10. VALIDACIÓN

En la literatura no existen resultados experimentales de TACR esbeltas diseñadas con modelos de armadura, por lo que la validación del método se hizo con la mejor información disponible. En el ejercicio se utilizó la versión que incluye la sección crítica por cortante, y se analizaron por separado las predicciones en las trabes con y sin refuerzo transversal. La muestra de las trabes con estribos se compone de los siguientes elementos:

- Las trabes simplemente apoyadas de Debaiky y El-Niema (1982).
- Las trabes simplemente apoyadas de El-Niema (1988).
- Las trabes simplemente apoyadas de la serie R1 de Tena-Colunga *et al.*, (2008).

La muestra de los elementos sin refuerzo transversal contiene los siguientes elementos:

- Las trabes en doble voladizo de MacLeod y Houmsi (1994).
- Las trabes simplemente apoyadas de la serie R0 de Tena-Colunga *et al.*, (2008).
- Las trabes simplemente apoyadas de Rombach y Nghiep (2011).

La validación incluye las trabes acarteladas y las prismáticas de los trabajos mencionados. El análisis de las trabes con refuerzo transversal se dividió en dos etapas: en la primera se consideró sólo la contribución del acero de refuerzo ( $V_{sTA}$ ), y en la segunda se incluyó la contribución del concreto ( $V_{sTA} + V_{cTA}$ ). En las trabes sin refuerzo transversal sólo se tomó en cuenta la contribución del concreto. En todos casos, la resistencia calculada se normalizó con la resistencia experimental ( $V_{exp}$ ).

**Tabla 1: Resumen de las predicciones en trabes con refuerzo transversal.  $\theta = 45^\circ$ .**

	Muestra completa (48 elementos)		Muestra depurada (42 elementos)	
Fuente	$V_{sTA}/V_{exp}$	$(V_{sTA} + V_{cTA})/V_{exp}$	$V_{sTA}/V_{exp}$	$(V_{sTA} + V_{cTA})/V_{exp}$
<b>Debaiky y El-Niema (1982)</b>				
Promedio	0.39	0.75	0.42	0.80
Desviación estándar	0.20	0.24	0.17	0.19
<b>El-Niema (1988)</b>				
Promedio	0.55	0.82	0.55	0.82
Desviación estándar	0.14	0.15	0.14	0.15
<b>Tena-Colunga <i>et al.</i>, (2008)</b>				
Promedio	0.35	0.71	0.36	0.71
Desviación estándar	0.04	0.03	0.04	0.03
<b>Todos</b>				
Promedio	<b>0.42</b>	<b>0.76</b>	<b>0.45</b>	<b>0.80</b>
Desviación estándar	<b>0.19</b>	<b>0.21</b>	<b>0.17</b>	<b>0.17</b>

Como el método depende del ángulo de inclinación del campo de compresión diagonal, se usaron los ángulos con los que se validó la sección crítica ( $\theta = 45^\circ$ ,  $\theta = 30^\circ$  y  $\theta = 45^\circ - \alpha$ ). La contribución del concreto en las trabes con estribos se calculó con las fórmulas del método riguroso (Ecs. 38 y 39), y en las trabes sin estribos se compararon los métodos riguroso y simplificado (Ec. 40).

Se hicieron dos evaluaciones diferentes: en la primera se incluyeron todos los elementos mencionados, y en la segunda se hizo una depuración de la muestra. La depuración consistió en eliminar: i) las trabes con estribos que no cumplieron la Ecuación 27, ii) las trabes sin estribos que no cumplieron las Ecuaciones 43 y 44 y, iii) todas las trabes con un ángulo de acartelamiento  $\alpha > 9^\circ$ . Los dos primeros requisitos atienden a la esbeltez de la cartela y al fomento de la región B; con el tercero se descartaron los elementos propensos a perder rápidamente su rigidez inicial por el daño a cortante (Tena-Colunga *et al.*, 2008, Archundia *et al.*, 2013).

**Tabla 2: Resumen de las predicciones en trabes con refuerzo transversal.  $\theta = 30^\circ$ .**

Fuente	Muestra completa (48 elementos)		Muestra depurada (23 elementos)	
	$V_{sTA}/V_{exp}$	$(V_{sTA} + V_{cTA})/V_{exp}$	$V_{sTA}/V_{exp}$	$(V_{sTA} + V_{cTA})/V_{exp}$
<b>Debaiky y El-Niema (1982)</b>				
Promedio	0.74	1.10	0.94	1.31
Desviación estándar	0.42	0.47	0.31	0.34
<b>El-Niema (1988)</b>				
Promedio	1.10	1.37	1.20	1.50
Desviación estándar	0.25	0.26	0.24	0.24
<b>Tena-Colunga <i>et al.</i>, (2008)</b>				
Promedio	0.80	1.16	N/A	N/A
Desviación estándar	0.18	0.20	N/A	N/A
<b>Todos</b>				
Promedio	<b>0.82</b>	<b>1.16</b>	<b>1.00</b>	<b>1.36</b>
Desviación estándar	<b>0.40</b>	<b>0.42</b>	<b>0.31</b>	<b>0.32</b>

En general, las predicciones en las muestras depuradas fueron mejores que en las muestras completas, notándose más en la desviación estándar que en el promedio (Tablas 1 a 5). Esto confirma que el método responde positivamente a los criterios con los que fue desarrollado, y predice la resistencia a cortante de una región B.

En las trabes con estribos las predicciones con los ángulos  $\theta = 45^\circ$  y  $\theta = 45^\circ - \alpha$  fueron conservadoras cuando se ignoró la contribución del concreto (Tablas 1 y 3). Sin embargo, mejoraron notablemente cuando se incluyó esta resistencia. Los resultados con el ángulo  $\theta = 30^\circ$  (Tabla 2) deben interpretarse con cautela, pues la dispersión fue alta cuando se ignoró la contribución del concreto, y las predicciones fueron inseguras cuando se tomó en cuenta esta resistencia.

En las trabes sin estribos los mejores resultados se obtuvieron con el método riguroso (Tablas 4 y 5). Esto justifica el mecanismo de armadura elástica; sin embargo, puede usarse con confianza la fórmula simplificada que lo ignora. En ambos casos, el promedio y la desviación son del mismo orden que las presentadas por el Committee 326 (1962b), que validan la fórmula del reglamento ACI-318 para calcular la contribución del concreto en trabes prismáticas.

## 11. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó un método de diseño por cortante para trabes acarteladas de concreto reforzado, sustentado en campos de esfuerzo y modelos de armadura. La forma en que se abordó el problema permitió cuantificar los



parámetros de diseño sin recurrir a regresiones estadísticas de datos experimentales. El método es para traves esbeltas, por lo que su aplicación está restringida a cartelas con longitud suficiente para alojar una región B; por ello también se desarrollaron ecuaciones para hacer esta discriminación. El método incluye aspectos del diseño de elementos completos y por secciones. Sólo la combinación de lo mejor de ambas formas de hacer ingeniería, permitió elaborar uno seccional basado en un modelo de comportamiento mecánico.

**Tabla 3: Resumen de las predicciones en traves con refuerzo transversal.  $\theta = 45^\circ - \alpha$**

	Muestra completa (48 elementos)		Muestra depurada (31 elementos)	
Fuente	$V_{sTA}/V_{exp}$	$(V_{sTA} + V_{cTA})/V_{exp}$	$V_{sTA}/V_{exp}$	$(V_{sTA} + V_{cTA})/V_{exp}$
<b>Debaiky y El-Niema (1982)</b>				
Promedio	0.52	0.87	0.57	0.96
Desviación estándar	0.36	0.40	0.24	0.26
<b>El-Niema (1988)</b>				
Promedio	0.75	1.02	0.75	1.03
Desviación estándar	0.19	0.19	0.20	0.21
<b>Tena-Colunga <i>et al.</i>, (2008)</b>				
Promedio	0.62	0.98	0.43	0.77
Desviación estándar	0.26	0.29	0.04	0.03
<b>Todos</b>				
Promedio	<b>0.58</b>	<b>0.92</b>	<b>0.61</b>	<b>0.97</b>
Desviación estándar	<b>0.33</b>	<b>0.36</b>	<b>0.24</b>	<b>0.24</b>

**Tabla 4: Resumen de las predicciones en traves sin refuerzo transversal. Método riguroso.**

	Muestra completa (25 elementos)	Muestra depurada (22 elementos)
Fuente	$V_{cTA}/V_{exp}$	$V_{cTA}/V_{exp}$
<b>MacLeod y Houmsi (1994)</b>		
Promedio	0.76	0.79
Desviación estándar	0.10	0.07
<b>Tena-Colunga <i>et al.</i>, (2008)</b>		
Promedio	1.14	1.11
Desviación estándar	0.09	0.08
<b>Rombach y Nghiep (2011)</b>		
Promedio	0.86	0.88
Desviación estándar	0.09	0.09
<b>Todos</b>		
Promedio	<b>0.89</b>	<b>0.90</b>
Desviación estándar	<b>0.16</b>	<b>0.14</b>

**Tabla 5: Resumen de las predicciones en trabes sin refuerzo transversal. Método simplificado.**

Fuente	Muestra completa (25 elementos)	Muestra depurada (22 elementos)
	$V_{cTA}/V_{exp}$	$V_{cTA}/V_{exp}$
<b>MacLeod y Houmsi (1994)</b>		
Promedio	0.73	0.76
Desviación estándar	0.10	0.07
<b>Tena-Colunga et al., (2008)</b>		
Promedio	1.05	1.05
Desviación estándar	0.08	0.09
<b>Rombach y Nghiep (2011)</b>		
Promedio	0.84	0.86
Desviación estándar	0.11	0.10
<b>Todos</b>		
Promedio	<b>0.85</b>	<b>0.87</b>
Desviación estándar	<b>0.15</b>	<b>0.13</b>

Se hizo una comparación paramétrica entre: i) el método recomendado, ii) la propuesta de Dilger y Langohr (1997) y, iii) el método que resulta de aplicar la teoría de vigas. El ejercicio demostró que los diseños hechos con la teoría de vigas son seguros, aun cuando no explican racionalmente el mecanismo resistente de las TACR.

La validación del método permite recomendarlo para trabajos de diseño y revisión. El diseño se puede hacer con un campo de compresión diagonal que satisfaga el intervalo  $26.6^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ ; sin embargo, en elementos que van a trabajar en sistemas sismorresistentes se recomiendan los ángulos  $\theta = 45^\circ$  y  $\theta = 45^\circ - \alpha$  (Archundia 2013). Estos últimos también se deben usar en la revisión de elementos existentes. Hasta lograr un mejor entendimiento de la falla dúctil en TACR, se recomienda limitar el ángulo de acartelamiento al intervalo  $3^\circ \leq \alpha \leq 9^\circ$ . Esto tiene la intención de evitar una súbita degradación de la rigidez de la cartela debido al agrietamiento diagonal.

Finalmente, todo diseño por cortante debe cumplir reglas de detallado. En Tena-Colunga et al., (2008) se presenta uno para la zona del vértice de la cartela; también se deben consultar las recomendaciones de Park y Paulay (1975) y González y Robles (2006). Sin embargo, se deben tener cuidados especiales para que la distribución de estribos fomente el ángulo  $\theta$  supuesto en el diseño. En Archundia (2013) se proporcionan recomendaciones específicas que intentan satisfacer este punto.

## REFERENCIAS

- ACI-318-02 (2002), "Building code requirements for structural concrete (ACI-318-02) and commentary (ACI-318R-02)" ACI Committee 318, *American Concrete Institute*, E.U.A.
- ACI-318-11 (2011), "Building code requirements for structural concrete (ACI-318-11) and commentary (ACI-318R-11)", ACI Committee 318, *American Concrete Institute*, E.U.A.
- Alcocer, S (1998), "Algunas tendencias del concreto estructural", *XI Congreso Nacional de Ingeniería Estructural*, Monterrey, Nuevo León, noviembre. Memorias, Vol. I., pp. 3-32.
- Al-Nahlawi, K. A. y J. K. Wight (1992), "Beams analysis using concrete tensile strength in truss models", *ACI Structural Journal*, Vol. 89, No. 3, pp. 284-289.
- Archundia, H. I., A. Tena y O. M. González (2005), "Estudio experimental del cortante estático de trabes acarteladas de concreto reforzado", *Reporte de Investigación 453*, Dirección de Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma Metropolitana – Azcapotzalco, junio. ISBN 970-31-0491-6, pp. 204.

- Archundia-Aranda, H. I., A. Tena-Colunga y A. Grande Vega (2013), "Behavior of reinforced concrete haunched beams subjected to cyclic shear loading", *Engineering Structures*, Vol. 49, pp. 27-42.
- Archundia-Aranda, H. I. (2013), "Recomendaciones de diseño a cortante para trabes acarteladas de concreto reforzado", *Tesis Doctoral*, Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, noviembre. [Consultado en 6 de junio de 2014] Disponible en <http://132.248.9.195/ptd2013/noviembre/0705159/Index.html> pp. 650.
- Bentz, E. C., F. J. Vecchio y M. P. Collins (2006), "Simplified compression field theory for calculating shear strength of reinforced concrete elements", *ACI Structural Journal*, Vol. 103, No. 4, pp. 614-624.
- Beton Kalender (2001), "Taschenbuch für Beton, Stahlbeton und spannbetonbau sowie die verwandten Fächer BK 2", Ernst and Sohn, Alemania.
- Braestrup, M. W. (1981), "Structural concrete as a plastic material", *IABSE Reports*, Vol. 34, International Association of Bridge and Structural Engineering, pp. 3-16.
- CEB-FIP (1990), "CEB-FIP model code 1990-Design code", Comité Euro-International du Béton, Thomas Telford, Siuza.
- Collins, M. P. y D. Mitchell (1986), "A rational approach to shear design - The 1984 Canadian Code Provisions", *ACI Structural Journal*, Vol. 83, No. 6, pp. 925-933.
- Collins, M. P., D. Mitchell, P. Adebar y F. J. Vecchio (1996), "A general shear design method", *ACI Structural Journal*, Vol. 93, No. 1, pp. 36-45.
- Collins, M. P., E. C. Bentz, E. G. Sherwood y L. Xie (2007), "An adequate theory for the shear strength of reinforced concrete structures", *Morley Symposium on Concrete Plasticity and its Application*, University of Cambridge, Inglaterra.
- Committee 326 (1962/a), "Shear and diagonal tension. Part 1: General principles", Report of ACI-ASCE Committee 326, *ACI Journal Proceedings*, Vol. 59, No. 1, pp. 1-30.
- Committee 326 (1962/b), "Shear and diagonal tension. Part 2: Beams and frames", Report of ACI-ASCE Committee 326, *ACI Journal Proceedings*, Vol. 59, No. 2, pp. 277-334.
- Committee 426 (1973), "The shear strength of reinforced concrete members", Joint ASCE-ACI Task Committee 426, *ASCE Journal of Structural Engineering*, Vol. 99, No. 6, pp. 1091-1187.
- Committee 445 (1998), "Recent approaches to shear design of structural concrete", ASCE-ACI Committee 445, *ASCE Journal of Structural Engineering*, Vol. 124, No. 12, pp. 1375-1417.
- CSA-04 (2004), "Design of concrete structures" CSA Standards A.23.3-04", *Canadian Standards Association*, Canada.
- Debaiky, S. Y. y E. I. El-Niema (1982), "Behavior and strength of reinforced concrete haunched beams in shear", *ACI Journal Proceedings*, Vol. 79, No. 3, pp. 184-194.
- Dilger, W. H. y P. Langohr (1997), "Shear design of haunched concrete box girders of the Confederation Bridge", *Canadian Journal of Civil Engineering*, Vol. 24, No. 6, pp. 898-907.
- El-Niema (1988), "Investigation of concrete haunched T-beams under shear", *ASCE Journal of Structural Engineering*, Vol. 114, No. 4, pp. 917-930.

- Eurocode 2 (1992), “*Design of concrete structures. Part 1: General rules and rules for buildings*”, British Standards Institution, Gran Bretaña.
- Eurocode 2 (2004), “*Design of concrete structures. Part 1: General rules and rules for buildings*”, British Standards Institution, Gran Bretaña.
- Ferguson, P. M., J. E. Breen y J. O. Jirsa (1988), “*Reinforced concrete fundamentals*”, fifth edition, John Wiley and Sons, E.U.A.
- González, O. M. y F. Robles (2006), “*Aspectos fundamentales del concreto reforzado*”, cuarta edición, Limusa, México.
- González, O. M. (2013), Comunicación personal.
- Grob, J. y B. Thürlimann P. (1976), “Ultimate strength and design of reinforced concrete beams under bending and shear”, *IABSE Publications*, Vol. 36, pp. 105-120.
- Kani, G. N. J. (1964), “The riddle of shear failure and its solution”, *ACI Journal Proceedings*, Vol. 61, No. 4, pp. 441-468.
- Kim, W. y R. N. White (1991), “Initiation of shear cracking in reinforced concrete beams with no web reinforcement”, *ACI Structural Journal*, Vol. 88, No. 3, pp. 301-308.
- Kotsovos, M. D. (1988), “Compressive force path concept: Basis for ultimate limit state reinforced concrete design”, *ACI Structural Journal*, Vol. 85, No. 1, pp. 68-75.
- MacLeod, I. A. y A. Houmsi (1994), “Shear strength of haunched beams without shear reinforcement”, *ACI Structural Journal*, Vol. 91, No. 1, pp. 79-89.
- MacGregor, J. G. (1997), “*Reinforced concrete - mechanics and design*”, third edition, Pearson-Prentice Hall, E.U.A.
- Marti, P. (1985a), “Basic tools of reinforced concrete beam design”, *ACI Journal*, Vol. 82, No. 1, pp. 46-56.
- Marti, P. (1985b), “Truss models in detailing”, *Concrete International*, Vol. 7, No. 12, pp. 66-73.
- Maurial, A. (2007), Comunicación personal.
- Mörsch, E. (1909), “*Concrete-steel construction (Der Eisenbetonbau)*”, traducción autorizada de la tercera edición en Alemán de 1908, The Engineering Publishing News Company, Londres.
- Mörsch, E. (1952), “*Teoría y práctica del hormigón armado*”, Tomo II, Gili, Argentina.
- Muttoni, A., J. Schwartz y B. Thürlimann (1997), “*Design of concrete structures with stress fields*”, Birkhäuser, Suiza.
- Muttoni, A. y M. Fernández Ruiz (2008), “Shear strength of members without transverse reinforcement as function of critical shear crack width”, *ACI Structural Journal*, Vol. 105, No. 2, pp. 163-172.
- Nghiep, V. H. (2009), “Shear Design of straight and haunched concrete beams without stirrups”, *Tesis Doctoral*, Technischen Universität, Hamburg-Harburg, Alemania, mayo, pp. 257.
- Nielsen, M. P., M. W. Braestrup y F. Bach (1978), “Rational analysis of shear in reinforced concrete beams”, *IABSE Proceedings 15/78*, Vol. 2, International Association of Bridge and Structural Engineering, pp. 1-16.
- Nielsen, M. P. (1999), “*Limit analysis and concrete plasticity*”, second edition, CRC Press, E.U.A.

- Nilson, A. H. (1999), “*Diseño de estructuras de concreto*”, duodécima edición, McGraw-Hill, Colombia.
- NTCC-04 (2004), “Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto”, Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, *Gaceta Oficial del Distrito Federal*, octubre, México.
- Oden, J. T. y E. A. Ripperger (1981), “*Mechanics of elastic structures*”, second edition, Hemisphere Publishing Corporation, E.U.A.
- Park, R. y T. Paulay (1975), “*Reinforced concrete structures*”, John Wiley and Sons, E.U.A.
- PCA Notes (2008), “Notes on ACI-318-08 building code requirements for structural concrete – with design applications”, *Portland Cement Association*, Editores: Mahmoud E. Kamara, Lawrence C. Novak y Basile G. Rabbat.
- Pérez Caldentey, A, P. Padilla, A. Muttoni y M. Fernández Ruiz (2012), “Effect of load distribution and variable depth on shear resistance of slender beams without stirrups”, *ACI Structural Journal*, Vol. 109, No. 5, pp. 595-603.
- Regan, P. E. y C. W. Yu (1973), “*Limit state design of structural concrete*”, Chatto and Windus, Gran Bretaña.
- Reineck, K. H. (1991), “Ultimate shear force of structural concrete members without transverse reinforcement derived from a mechanical model”, *ACI Structural Journal*, Vol. 88, No. 5, pp. 592-602.
- Ritter, W. (1899), “Die bauweise Hennebique”, *Schweizerische Bauzeitung*, Vol. 33, pp. 41-43, 49-52, 59-61.
- Rombach, G. y V. H. Nghiep (2011), “Versuche zur querkrafttragfähigkeit von gevouteten stahlbetonbalken ohne querkraftbewehrung”, *Beton und Stahlbetonbau*, Vol. 106, No. 1, pp. 11-20.
- Schlaich, J., K. Schäfer y M. Jennewein (1987), “Toward a consistent design of structural concrete”, *PCI Journal*, Vol. 32, No. 3, pp. 74-150.
- Subcommittee 445-1 (2002), “Examples for the design of structural concrete with strut-and-tie models”, *ACI Structural Journal Special Publication*, No. 208, Editor Karl-Heinz Reineck.
- Stefanou, G. D. (1983), “Shear resistance of reinforced concrete beams with non-prismatic sections”, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 18, No. 3, pp. 643-667.
- Talbot, A. N. (1909), “Test of reinforced concrete beams: resistance to web stress – series of 1907 and 1908”, Bulletin No. 29, *Engineering Experimental Station*, University of Illinois, enero, pp. 85.
- Tena-Colunga, A, H. I. Archundia-Aranda y O. M. González-Cuevas (2008), “Behavior of reinforced concrete haunched beams subjected to static shear loading”, *Engineering Structures*, Vol. 30, No. 2, pp. 478-492.
- Thürlimann, B. (1979), “Plastic analysis of reinforced concrete beams”, *IABSE Reports*, Vol. 28, International Association of Bridge and Structural Engineering, pp. 71-90.
- Tureyen, A. K. y R. J. Frosch (2003), “Concrete shear strength: Another perspective”, *ACI Structural Journal*, Vol. 100, No. 5, pp. 609-615.
- Vecchio, F. J. y M. P. Collins (1986), “The modified compression-field theory for reinforced concrete elements subjected to shear”, *ACI Structural Journal*, Vol. 83, No. 2, pp. 219-231.
- Zararis, P. D. y G. Ch. Papadakis (2001), “Diagonal shear failure and size effect in RC beams without web reinforcement”, *ASCE Journal of Structural Engineering*, Vol. 127, No. 7, pp. 733-742.