Análisis Económico, 40(103), 163–185, enero - abril de 2025, ISSN: 0185-3937, e-ISSN: 2448-6655

https://doi.org/10.24275/uam/azc/dcsh/ae/2025v40n103/Lizarazu

El impacto monetario en un modelo dinámico con previsión perfecta

The monetary impact in a dynamic model with perfect forecaste

Eddy Lizarazu Alanez*

*Profesor-investigador del Departamento de Economía de la Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, e Investigador Nacional de nivel II. Correo electrónico: elizarazu@izt.uam.mx. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8593-8967

RESUMEN

Se estudia el impacto monetario en un modelo dinámico con previsión perfecta, resolviendo numéricamente un sistema de ecuaciones en diferencias autónomas de primer orden. Las simulaciones numéricas de las funciones impulso-respuesta describen la trayectoria temporal de las principales variables endógenas. Dada la elasticidad de la demanda de dinero a la tasa de interés, dos resultados surgen del impacto monetario: (i) el dinero tiene efectos reales en el corto plazo, pero es neutral en el largo plazo; y (ii) la emisión monetaria tiene efectos reales a corto y largo plazo. Las proposiciones anteriores tienen el soporte de los cálculos computacionales utilizando softwares especializados, como Matlab y otros.

ABSTRACT

The monetary impact is studied in a dynamic model with perfect forecasting by numerically solving a system of first-order autonomous difference equations. Numerical simulations of the impulse-response functions describe the time path of the main endogenous variables. Given the elasticity of the demand for money to the interest rate, two results arise from the monetary impact: (i) money has real effects in the short term, but is neutral in the long term; and (ii) the monetary issue has real effects in the short and long term. The previous propositions are supported by computational calculations using specialized software, such as Matlab and others.

Recibido: 12/agosto de 2023
Aceptado: 26/julio/2024
Publicado: 10/enero/2025

Palabras clave:
| Modelo IS-LM dinámico | | Funciones impulso-respuesta | Impacto monetario | Previsión perfecta | Curva de Phillips |

Keywords:
| Dynamic IS-LM model | | Impulse-response functions | | Monetary impact | | Perfect forecast | | Phillips curve |

Clasificación JEL |
JEL Classification |
C02, E31, E32, E47, E58

INTRODUCCIÓN

En los últimos 20 años hemos atestiguado múltiples colaboraciones que acortan la distancia entre el análisis estándar y la macroeconomía moderna. Entre las contribuciones que esclarecen los progresos están, por ejemplo, Barro (1997), Benassy (2011), Bofinger, *et al*. (2006), Brevik y Gärtner (2007), Costa (2018), Carlin y Soskice (2005, 2006), Fane (1985), Heijdra (2017), Kerr y King (1996), King (2000), Koenig (1989), Romer (2000), Smith (1980), Snowdon y Vane (2005), Taylor (2000), Torres (2013), Walsh (2002), Wickens (2012), Willamson (2018) y Woodford (2003). La resolución de modelos lineales de expectativas racionales de la macroeconomía moderna no es dominio de todos los economistas. La calibración y la descomposición numérica de los parámetros y la manipulación de los términos de expectativas requiere de enormes cálculos computacionales. Esta tarea se relega más bien a los profesionales de instituciones oficiales y de centros de investigación; sin embargo, la resolución de estos modelos se facilita con el adiestramiento en los modelos dinámicos deterministas. Ahora es posible resolver problemas complejos en todas las ramas de la economía gracias a los diferentes programas computacionales.

El objeto de este artículo concierne al impacto monetario computacional en un modelo macroeconómico dinámico con previsión perfecta. El dinero y sus efectos en la economía es de interés en la disciplina. La reflexión es extensa, por ejemplo, Patinkin (1965) con el problema de integración del dinero a la teoría del valor; Friedman (1956, 1968) y el resurgimiento de la teoría cuantitativa y la política monetaria; el ciclo monetario de información incompleta de Lucas (1975), la posición austriaca de Hayek (1929) sobre el impacto monetario y la endogeneidad de la oferta monetaria de los postkeynesianos en manos, por ejemplo, de Davidson (1978). Con todo, en la macroeconomía estándar, el estado de arte se sintetiza en la proposición de neutralidad del dinero (a largo plazo) y sus efectos reales (a corto plazo). Este corolario se ilustra en la lógica del modelo IS-LM integrado a la curva de Phillips. A este respecto, el reconocimiento de los mecanismos dinámicos de ajuste y la incertidumbre sobre el futuro son esenciales. En particular, dos factores explican la dinámica económica: (i) las empresas toman decisiones de producción a partir de las señales de variación de los inventarios, y (ii) el ajuste de precios responde a la brecha de producción. Por otro lado, en vista de que es complicado modelar el futuro, el atajo de la hipótesis de previsión perfecta es una solución parcial.[1]

El modelo dinámico de este artículo es estudiado por Argandoña, *et al*. (1996) en tiempo continuo. Igualmente, Bongers, *et al*. (2017) analiza este mismo modelo dinámico en tiempo discreto; sin embargo, en ningún caso se utiliza el marco de un sistema de ecuaciones en diferencias de primer orden. Esta carencia es atendida en el presente artículo al proporcionar una reflexión adecuada y soportada por la simulación computacional. La contribución de Bongers, *et al*. (2017) mediante el uso de Excel es valiosa; sin embargo, como se ejemplifica en Cahill y Kosicki (2000), Pablo-Romero *et al*., (2017) y Strulik (2004), el programa Excel es insuficiente, sobre todo si se consideran los avances informáticos y las necesidades particulares de los economistas. Por otra parte, el software *Matlab* es altamente recomendable porque facilita la simulación de las funciones impulso-respuesta, aunado a sus gráficas.[2] Por conveniencia, las simulaciones de este artículo descansan en los valores y resultados numéricos de Bongers *et al*. (2017). Sin embargo, este trabajo se diferencia de Bongers *et al*. (2017) en dos sentidos: (i) se contemplan no solo cambios en el circulante monetario sino también cambios exógenos en la emisión de dinero; y (ii) se consideran variantes numéricas en la sensibilidad de la demanda de dinero a la tasa de interés, lo que da lugar a valores propios de números complejos conjugados y/o una raíz unitaria. El primero requiere de cálculos para transformar el sistema polar de los vectores propios de los números imaginarios a la esfera de los números reales y el segundo concierne a la histéresis. Estos casos no se contemplan en Bongers *et al*., (2017) debido a que sus valores propios son números reales inferiores a la unidad.

La simulación computacional de este artículo muestra que el dinero tiene efectos específicos en la economía dependiendo del disturbio monetario. Una alteración en la masa monetaria a largo plazo se explica en términos de la proposición de neutralidad monetaria, sobre todo si el cambio es de una sola vez. Sin embargo, en el largo plazo, una variación de la tasa de emisión del dinero está acompañada de efectos reales, de modo que, el dinero no es súper neutral. Esta última aseveración no es intuitiva, aun cuando es reconocida en la literatura. La simulación computacional es idónea en la medida en que permite ilustrar los efectos de largo alcance sobre las variables endógenas del sistema dinámico: en largo plazo, el dinero es 'neutral', pero no 'súper neutral'.

Este artículo está organizado como sigue: en la primera sección se presenta el modelo macroeconómico dinámico con previsión perfecta. En este apartado se da una explicación concisa de las diferentes ecuaciones para

1. Una economía determinista con previsión perfecta es análoga a una economía estocástica bajo la hipótesis de expectativas racionales.
2. Por ejemplo, Etter (2015) y Alfonso y Vasconcelos (2016) son dos excelentes libros de introducción a *Matlab*. Además, cualquier lector puede solicitar al autor de este artículo se le proporcionen los ficheros de *Matlab* para calcular el impacto monetario.

establecer sus características; además, se proporciona una explicación intuitiva de la dinámica subyacente que conduce a la adopción de herramientas disponibles de un sistema de ecuaciones en diferencias de primer orden. En la segunda sección se cuantifican las funciones impulso-respuesta de dos economías hipotéticas (monetarista y keynesiana) aunado a dos escenarios diferentes dependiendo de cambios en el nivel de la oferta monetaria y/o cambios en la tasa de emisión de dinero; además, se ilustra el sistema dinámico discreto keynesiano con una raíz unitaria. Por último, se vierten algunos comentarios de conclusión.

I. EL MODELO MACROECONÓMICO DINÁMICO

La estructura algebraica incluye cinco ecuaciones estructurales. Las variables en estas ecuaciones se miden en un horizonte de tiempo discreto, por ejemplo, x_t denota el valor x, asociado al período de tiempo t. Existe interés en los períodos de tiempo $t \geq 1$, dado que se asume que la economía se encuentra en un estado de reposo en el período previo (es decir, $t=0$). En particular, si en el período $t=1$se produce algún disturbio exógeno, se desea estudiar la evolución de las variables endógenas a lo largo del tiempo $(t=1,2,3,\cdots)$,[3] esto es, desde la situación inicial hasta alcanzar un nuevo equilibrio, bajo el supuesto de estabilidad dinámica.

La estructura de ecuaciones

Los modelos macroeconómicos dinámicos incluyen identidades, funciones de comportamiento, condiciones de equilibrio y ecuaciones de movimiento. El modelo estudiado no es la excepción dado que sus ecuaciones aplican a cualquier período $t \geq 1$.

$$y_t^d = g_t - \alpha\,(i_t - \Delta p_t^e), \quad \alpha > 0 \tag{1}$$

$$m_t - p_t = \beta y_t - \gamma i_t, \quad \beta, \gamma > 0 \tag{2}$$

$$\Delta_t = \varphi\,(y_t^d - y_t), \quad \varphi > 0 \tag{3}$$

$$\Delta p_t = \upsilon\,(y_t - \bar{y}_t) + z_t, \quad \upsilon > 0 \tag{4}$$

$$\Delta p_t^e = \Delta p_t \tag{5}$$

El Cuadro 1 describe el significado de las distintas variables.

Cuadro 1
Simbología de las variables

g_t:	*log* del gasto agregado autónomo en el período t	$\bar{y}_t$:	*log* del producto natural en el período t
i_t:	tasa de interés real para el período t	z_t:	tasa de crecimiento monetario en el período t
m_t:	*log* de la oferta monetaria al principio del período t	Δp_t:	tasa de inflación observada en el período t
y_t^d:	*log* del gasto agregado planeado en el período t	Δp_t^e:	tasa de inflación esperada en el período t
y_t:	*log* del producto real en el período t	Δy_t:	tasa de crecimiento del producto en el período t

Fuente: elaboración propia.

3. En este artículo, adoptamos que convención de que el período t inicia en el instante t y termina en el instante $t+1$.

Si se utiliza el operador Δ para representar a las variaciones entre dos periodos contiguos,[4] entonces las tres ecuaciones de abajo también están implicadas.

$$\Delta p_t = p_t - p_{t-1} \tag{6}$$

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1} \tag{7}$$

$$\Delta p^e_t = p^e_t - p^e_{t-1} \tag{8}$$

Este modelo dinámico bajo previsión perfecta incluye cinco parámetros. El significado de los parámetros se indica en el Cuadro 2. La relación entre el número de parámetros y ecuaciones es inoperante, trasciende más bien, que los parámetros sean ‘invariantes' a la política económica, lo que está sujeto a la crítica de Lucas (1976).

Cuadro 2
Simbología de los parámetros

α:	semi elasticidad del gasto agregado a la tasa de interés real
β:	elasticidad de la demanda de saldos reales al producto real
γ:	semi elasticidad de la demanda de saldos reales a la tasa de interés nominal
υ:	velocidad de ajuste de los precios monetarios a la brecha de producción:
φ:	velocidad de ajuste de la producción real a la brecha de gasto agregado y producción real

Fuente: elaboración propia.

La interpretación de las ecuaciones

Estas ecuaciones tienen una interpretación en términos del modelo IS-LM y la curva de Phillips. La ecuación (1) es una función de gasto agregado, mientras que la ecuación (3) exterioriza el proceso de adecuación de la producción a los inventarios de mercancías no vendidas. El bloque IS tradicional se desprende de estas dos ecuaciones bajo la hipótesis de un ajuste instantáneo de la producción a la demanda agregada, un aspecto que no se satisface en un modelo dinámico. Esto último exige de tiempo; solo por simplicidad, en un modelo estático, se acepta el ajuste instantáneo.

Como es conocido, la demanda agregada depende positivamente del ingreso nacional; sin embargo, es posible prescindir de la propensión a consumir de Keynes (1936) para hacer depender a la demanda agregada únicamente de la tasa de interés real.[5] Esta omisión es inocua, ya que los resultados no cambian si el ingreso nacional es excluido de la demanda agregada. De este modo, la ordenada al origen en la ecuación (1) denota el componente autónomo del gasto agregado, mientras su pendiente mide qué tan sensible es el gasto agregado a la tasa de interés de interés real.

La expresión (3) es la ecuación de ajuste de la producción real asociado a la variación de *stock* de inventarios. Las empresas toman decisiones de producción en función de la acumulación de inventarios.[6] Si en el período t no venden la totalidad de la producción y acumulan inventarios, entonces reducen su producción

4. Si el operador diferencia Δ es aplicado a x_t, entonces se cumple $\Delta x_t = x_t - x_{t-1}$.

5. La tasa de interés real es la diferencia entre la tasa de interés nominal i_t y la inflación esperada Δp^e_t, es decir, $i_t - \Delta p^e_t$.

6. Esta última es lo mismo que la inversión en existencias, la cual se mide por la diferencia entre la producción y la demanda agregada; es decir, $y_t - y^d_t$.

en el período $t+1$. En tanto existan inventarios no deseados, son necesarios algunos períodos para acomodar la producción a la demanda agregada. En los períodos en los que las empresas tienen la destreza de acoplar su producción a la demanda agregada se cumple la ecuación $y_t = y_t^d$. Esto último es una certeza al asumir que la velocidad de ajuste de la producción real a la demanda agregada tiende a ser 'muy grande'.[7] En el modelo IS-LM estándar es imperativo que las empresas no tengan dificultades en ajustar su producción a la demanda agregada. En contraste, el bloque IS de este modelo dinámico implica la idea de que las empresas necesitan de algunos períodos para ajustar su producción a la demanda agregada. Esto es especialmente notorio si las empresas requieren de la señalización de inventarios.

La ecuación (2) es el bloque LM. Esta ecuación denota la condición de equilibrio entre la demanda y oferta de saldos reales.[8] La demanda de saldos reales depende de manera positiva del producto real y de forma negativa de la tasa de interés nominal.[9] Un supuesto explícito del modelo es que el banco central tiene el control absoluto de la cantidad de dinero. Esto es, dado el nivel de precios, entonces la oferta de saldos nominales es independiente del ingreso nacional y de la tasa de interés nominal.

La expresión (4) es una curva de Phillips extendida. Esta ecuación implica que la inflación tiene una fuente transitoria y/o permanente. El componente transitorio o cíclico proviene del exceso de la producción sobre su capacidad productiva.[10] La inflación es transitoria en la medida que la capacidad productiva no puede seguir el ritmo de la demanda agregada. La inflación se desvanece tan pronto como la brecha económica es igual a cero.[11] El componente permanente de la inflación está prácticamente conectado a la existencia de una tasa de crecimiento del dinero. El banco central no solo controla la oferta de dinero, sino también decide sobre la tasa de crecimiento del dinero.

Por tanto, este modelo es dinámico, no solo por el hecho de que la producción se ajusta a la demanda agregada, sino también porque la economía excede su capacidad productiva. Además, si el banco central emite dinero, el nivel de precios a lo largo del tiempo se ajusta tanto por el ajuste de la producción a la demanda agregada como porque aumenta el circulante monetario.

Por último, la ecuación (5) es la hipótesis de previsión perfecta para la tasa de inflación esperada Δp_t^e.[12] De acuerdo con este supuesto, los agentes económicos anticipan el futuro sin equivocaciones; por esta razón, la inflación esperada Δp_t^e es igual a la inflación observada Δp_t, para todo $t \geq 1$. Desde luego, esta hipótesis es altamente irreal, pero es conveniente desde una perspectiva pedagógica. Desde luego, en una etapa ulterior es necesario eliminar este supuesto y proceder con una hipótesis más idónea, como el esquema de expectativas adaptables o racionales.

---

7. El parámetro φ mide la velocidad de ajuste de la producción a la demanda agregada. Si $\varphi \to 0$, el ajuste es lento, mientras que cuando $\varphi \to \infty$, el ajuste es 'instantáneo'. Por supuesto, el modelo IS-LM dinámico se enfoca en la situación intermedia: $\varphi < \infty$.
8. La oferta de saldos reales se mide por la diferencia entre el *log* de la oferta monetaria y *log* el nivel de precios, esto es, $m_t - p_t$.
9. Los parámetros β y γ miden respectivamente la sensibilidad de la demanda de dinero (en términos reales) a la renta nacional y_t y la tasa de interés nominal i_t.
10. El exceso de producción real sobre su capacidad productiva es la brecha de producción cuantificada por la diferencia entre el producto real y_t y el producto potencial $\overline{y}_t$; es decir, $y_t - \overline{y}_t$.
11. La velocidad con que se ajusta el nivel de precios monetarios se mide por el parámetro υ. Si $\upsilon \to 0$, el ajuste es lento o rígido, pero si $\upsilon \to \infty$, el ajuste es casi instantáneo. Con relación al sistema económico, los *keynesianos* abogan por la lentitud o rigidez de precios, mientras que los *neoclásicos* y los *monetaristas* propugnan un ajuste instantáneo de los precios.
12. La hipótesis de expectativas racionales es idónea en un entorno estocástico y la hipótesis de previsión perfecta es pertinente en un entorno determinista.

Un esbozo al comportamiento económico

Una vez establecidas las ecuaciones del modelo macroeconómico, es momento de clasificar las variables. El equilibrio representa la situación de reposo de las verdaderas variables endógenas en el sistema económico. El Cuadro 3 contiene la clasificación de las variables endógenas y exógenas en el denominado ‘estado estacionario’.

Cuadro 3
Clasificación en el estado estacionario

Endógenas:	$i_t, p_t, p_t^e, y_t, y_t^d$
Exógenas:	$g_t, m_t, \overline{y}_t$
Parámetros:	$\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \upsilon$

Fuente: elaboración propia.

En el estado estacionario las empresas ni expanden ni contraen la producción de bienes y servicios. Las unidades de producción operan en su nivel de capacidad productiva, de modo que $y_t^d = y_t = \overline{y}_t$; en consecuencia, si el banco central no emite dinero, tampoco hay inflación en el estado estacionario. Esto último significa que el público anticipa el nivel de precios, por lo que $p_t^e = p_t$. De este modo, dadas las variables exógenas, el comportamiento de este modelo económico se característica por una sucesión de dos etapas. En la primera etapa, el mercado de bienes establece la tasa de interés real esperada. En la segunda etapa, el mercado de dinero determina el nivel de precios, claro está, a sabiendas de cuál es la tasa de interés real esperada.

Sin embargo, el objetivo es estudiar el comportamiento de la economía en el horizonte de tiempo $t \geq 1$ antes de arribar al estado estacionario. Lo anterior requiere aceptar algún disturbio exógeno, lo que desde luego generará una desviación de la economía de su estado estacionario. La única preocupación al respecto es la crítica de Lucas (1976) de que es improbable que los parámetros permanezcan invariantes durante el proceso de ajuste de la economía, más aún en presencia de un cambio en el régimen de política económica. Con todo, durante el proceso de ajuste es igualmente propicio establecer la clasificación de las variables endógenas y exógenas, tal como se muestra en el Cuadro 4.

Cuadro 4
Clasificación fuera del estado estacionario

Endógenas:	$i_t, y_t^d, \Delta p_t, \Delta p_t^e, \Delta y_t$
Exógenas:	$g_t, m_t, p_t, p_t^e, y_t, \overline{y}_t$
Parámetros:	$\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \upsilon$

Fuente: elaboración propia.

Es importante considerar que durante el período t, el nivel de precios p_t y el producto real y_t están dados. Si en el período t se gesta algún disturbio exógeno, el estado estacionario del período previo implica el cumplimiento de estas ecuaciones: $p_t = p_{t-1}$ y $y_t = y_{t-1}$. Además, una vez conocido el conjunto m_t, p_t, y_t, la ecuación (2) nos permite calcular la tasa de interés i_t. Cabe la posibilidad, inclusive, de aceptar la conjetura $i_t = i_{t-1}$, con tal que la oferta monetaria haya permanecido constante, $m_t = m_{t-1}$. Por ejemplo, supongamos que ocurre una reducción del producto natural $\overline{y}_t$. La ecuación (3) pone de manifiesto el surgimiento de una brecha económica positiva ($y_t - \overline{y}_t > 0$). Esto impulsa una tasa de inflación positiva, de modo que el nivel de precios del siguiente período será mayor, es decir $p_{t+1} > p_t$.[13] La existencia de un proceso inflacionario implica la reducción de la tasa de interés real, el gasto público permanece constante; es decir ($g_t = g_{t-1}$), la ecuación (1) nos asegura que la demanda agregada y_t^d aumentará debido a la reducción de la tasa de interés real. Ahora bien, como $y_t^d > y_t$, la ecuación (3) implica que las empresas expandirán su producción, de modo que se comprobará: $y_{t+1} > y_t$.

En el período $t+1$, el conjunto de variables $\{p_{t+1}, y_{t+1}\}$ es conocido. En el caso de que no ocurran más cambios en las variables exógenas, todavía se proyecta el movimiento de las variables endógenas en los períodos futuros sucesivos. Es aquí donde los eventos pudieran no ser inteligibles, por eso, es necesario que el análisis económico descanse en algunas herramientas matemáticas disponibles, como es el caso de las simulaciones numéricas de un sistema dinámico discreto autónomo de primer orden.

Solución al sistema lineal de ecuaciones

El carácter dinámico del modelo que se estudia proviene directamente de las ecuaciones (3) y (4). Junto con el resto del modelo, estas ecuaciones implican la existencia de un sistema lineal de dos 'ecuaciones en diferencias' de primer orden. Esta aseveración es visible en tanto se realizan algunas manipulaciones algebraicas. Si se empieza por despejar la tasa de interés i_t de la ecuación (2), se tiene

$$i_t = \frac{\beta}{\gamma} y_t - \frac{1}{\gamma}(m_t - p_t) \tag{9}$$

Por otro lado, el considerar la hipótesis de previsión perfecta en la función de demanda agregada, implica insertar (5) en la ecuación (1).

$$y_t^d = g_t - \alpha(i_t - \Delta p_t) \tag{10}$$

Es útil sustituir (9) en la ecuación (10) y después separar términos.

$$y_t^d = g_t - \alpha\left[\frac{\beta}{\gamma} y_t - \frac{1}{\gamma}(m_t - p_t) - \Delta p_t\right] = g_t - \frac{\alpha\beta}{\gamma} y_t + \frac{\alpha}{\gamma}(m_t - p_t) + \alpha \Delta p_t \tag{11}$$

En la ecuación (11) se pone de manifiesto que la demanda agregada y_t^d depende de forma positiva del gasto público g_t, los saldos reales ($m_t - p_t$) y la tasa de inflación observada Δp_t. Por otro lado, la demanda agregada y_t^d depende de manera negativa del producto real y_t. La explicación de esta última relación es que una expansión del producto real ocasiona un exceso de demanda de dinero. El ajuste en el mercado monetario ocasiona un incremento en la tasa de interés nominal (y real), de manera que la demanda agregada experimenta una reducción inducida.

Sustituyendo (11) en la ecuación (4) se obtiene la ecuación (12).

$$\Delta y_t - \alpha\varphi\Delta p_t = \varphi\left[g_t - \frac{\gamma + \alpha\beta}{\gamma} y_t + \frac{\alpha}{\gamma}(m_t - p_t)\right] \tag{12}$$

La manipulación algebraica se facilita todavía más en términos matriciales. Por este motivo, las ecuaciones (3) y (12) se escriben en un arreglo de dos renglones y dos columnas.

13. Es importante recurrir a la cláusula *ceteris paribus*, cuya idea principal es la independencia de las variables exógenas, de modo que si se da algún cambio en $\overline{y}_t$, el resto de las variables exógenas permanecen constantes.

$$\tilde{F}_{(2x2)}\begin{bmatrix}\Delta p_t\\ \Delta y_t\end{bmatrix} = \tilde{G}_{(2x2)}\begin{bmatrix}p_t\\ y_t\end{bmatrix} + \tilde{H}_{(2x4)}\begin{bmatrix}\bar{y}_t\\ g_t\\ m_t\\ z_t\end{bmatrix} \tag{13}$$

donde,

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ -\alpha\varphi & 1\end{bmatrix}, \tilde{G} = \begin{bmatrix}0 & \upsilon\\ -\frac{\alpha\varphi}{\gamma} & -\frac{\varphi(\gamma+\alpha\beta)}{\gamma}\end{bmatrix}, \tilde{H}\begin{bmatrix}-\upsilon & 0 & 0 & 1\\ 0 & \varphi & \frac{\alpha\varphi}{\gamma} & 0\end{bmatrix}$$

Es patente que es posible calcular la inversa de la matriz $\tilde{F}$en la ecuación anterior.

$$\tilde{F}^{-1}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \alpha\varphi & 1\end{bmatrix}$$

Al multiplicar $\tilde{F}^{-1}$ en ambos lados de la ecuación (13), se obtiene un sistema de ecuaciones en diferencias de primer orden.

$$\begin{bmatrix}\Delta p_t\\ \Delta y_t\end{bmatrix} = \tilde{A}_{(2x2)}\begin{bmatrix}p_t\\ y_t\end{bmatrix} + \tilde{B}_{(2x4)}\begin{bmatrix}\bar{y}_t\\ g_t\\ m_t\\ z_t\end{bmatrix} \tag{14}$$

donde,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix}0 & \upsilon\\ -\frac{\alpha\varphi}{\gamma} & -\varphi(\alpha\upsilon - \frac{\gamma+\alpha\beta}{\gamma})\end{bmatrix}, \tilde{\beta} = \begin{bmatrix}-\upsilon & 0 & 0 & 1\\ -\alpha\upsilon\varphi & \varphi & \frac{\alpha\varphi}{\gamma} & \alpha\varphi\end{bmatrix}$$

Por otro lado, es fácil mostrar que el vector de variables endógenas es equivalente a la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix}\Delta p_t\\ \Delta y_t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}p_t - p_{t-1}\\ y_t - y_{t-1}\end{bmatrix}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_t\\ y_t\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{t-1}\\ y_{t-1}\end{bmatrix}$$

Si se toma en cuenta esto en la ecuación (14) se obtiene otra expresión:

$$(I - \tilde{A})_{(2x2)}\begin{bmatrix}p_t\\ y_t\end{bmatrix} = I_{(2x2)}\begin{bmatrix}p_{t-1}\\ y_{t-1}\end{bmatrix} + \tilde{\beta}_{(2x4)}\begin{bmatrix}\bar{y}_t\\ g_t\\ m_t\\ z_t\end{bmatrix} \tag{15}$$

donde,

$$(I - \tilde{A}) = \begin{bmatrix}1 & -\upsilon\\ \frac{\alpha\varphi}{\gamma} & \frac{\gamma - \varphi[\alpha\gamma\upsilon - (\gamma+\alpha\beta)]}{\gamma}\end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

La inversa de la primera matriz es igual a

$$(I - \tilde{A})^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{\gamma(1+\varphi) + \alpha\varphi(\beta - \gamma\upsilon)}{\gamma(1+\varphi) + \varphi\alpha[\beta + \upsilon(1-\gamma)]} & \frac{\gamma\upsilon}{\gamma(1+\varphi) + \varphi\alpha[\beta + \upsilon(1-\gamma)]}\\ -\frac{\alpha\varphi}{\gamma(1+\varphi) + \varphi\alpha[\beta + \upsilon(1-\gamma)]} & \frac{\gamma}{\gamma(1+\varphi) + \varphi\alpha[\beta + \upsilon(1-\gamma)]}\end{bmatrix}$$

Ahora bien, al multiplicar la matriz inversa en ambos lados de la ecuación (15) se obtiene la expresión

$$\begin{bmatrix} p_t \\ y_t \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} p_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix} + B\begin{bmatrix} \bar{y}_t \\ g_t \\ m_t \\ z_t \end{bmatrix} \tag{16}$$

donde,

$$A = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} \gamma(1+\varphi) + \alpha\varphi(\beta\gamma\upsilon) & \gamma\upsilon \\ -\alpha\varphi & \gamma \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} \dfrac{\upsilon[\gamma(1+\varphi)+\alpha\varphi(\beta-\gamma\upsilon)]}{\gamma(1+\varphi)+\alpha\varphi[\beta+\upsilon(1-\gamma)]} - \alpha\gamma\upsilon^2\varphi & \gamma\upsilon\varphi & \alpha\upsilon\varphi & \gamma(1+\varphi)+\alpha\beta\varphi \\ \dfrac{\alpha\upsilon\varphi}{\gamma(1+\varphi)+\alpha\varphi[\beta+\upsilon(1-\gamma)]} - \alpha\gamma\upsilon^2\varphi & \gamma\varphi & \alpha\varphi & -\alpha\varphi(1-\gamma) \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \gamma(1+\varphi) + \varphi\{\alpha[\beta+\upsilon(1-\gamma)]$$

Este sistema lineal de ecuaciones en diferencias de primer orden anterior es de la forma $x_t = Ax_{t-1} + b$, cuya solución general es

$$x_t = \bar{x} + \lambda_1 s_1 c_1 + \lambda_2 s_2 c_2 \tag{17}$$

donde, $\bar{x} = (I-A)^{-1}b$. Además, λ_1 y λ_2 son los valores propios de A, s_1 es el vector propio asociado a λ_1, s_2 es el vector propio asociado a λ_2 y c_1 y c_2 denotan a constantes arbitrarias (que dependen de las condiciones iniciales).

Siguiendo a Davis y Gómez-Ramírez (2022) este sistema lineal de ecuaciones anterior se resuelve en cuatro etapas: (i) Se calculan los nodos o valores de equilibrio del sistema económico, $\bar{x} = (I-A)^{-1}$; (ii) se computan los valores propios de A al resolver la ecuación cuadrática $\det(\lambda I - A) = 0$ asociados a los nodos del sistema económico; (iii) se cuantifican los vectores propios al resolver los sistemas lineales de ecuaciones $As_1 = \lambda_1 s_1$ y $As_2 = \lambda_2 s_2$; y (iv) como hay infinitos vectores propios, se elige el más idóneo de ellos.

Ahora bien, la naturaleza de un sistema económico dinámico depende en gran manera de los valores propios de la matriz A asociada. En el caso de una matriz de dimensión (2×2), los valores propios se obtienen del siguiente polinomio cuadrático $p_A(\lambda)$

$$\lambda_2 - tr(A)\lambda + \det(A) = 0 \tag{18}$$

es decir,

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}tr(A) \pm \sqrt{(tr^2(A) - 4 \cdot \det(A))} \tag{19}$$

Es conveniente establecer en valor absoluto si los valores propios son menores o mayores a la unidad. En el caso de la matriz A, se desconoce el signo de la traza y determinante.

$$tr(A) = \frac{\gamma(1+\varphi) + \alpha\beta\varphi - \gamma(\alpha\upsilon\varphi - 1)}{\gamma(1+\varphi) + \alpha\beta\varphi - \alpha\upsilon\varphi(\gamma - 1)} \lesseqgtr 0$$

$$\det(A) = \frac{\gamma}{\gamma(1+\varphi) + \alpha\beta\varphi - \alpha\upsilon\varphi(\gamma - 1)} \lesseqgtr 0$$

Con todo, es imperioso buscar que el sistema de ecuaciones en diferencias sea estable.

Condiciones de estabilidad

Un sistema de ecuaciones en diferencias (autónomo) de primer orden es estable si y solo si el valor absoluto de los valores propios de la matriz A en la ecuación (16) es inferior a la unidad, $|\lambda_j| < 1$, $j = 1, 2$. Esta proposición es inmediata si la matriz A es *diagonalizable*. En este caso, la matriz A es *semejante* a su matriz diagonal D de valores propios λ_j a través de la matriz P de vectores propios j.[14]

Esto es,

$$A_{(2x2)} = P_{(2x2)} D_{(2x2)} P^{-1}_{(2x2)} \tag{20}$$

donde,

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$$

Si el sistema económico (16) es estable, entonces es ventajoso determinar las condiciones de la traza y determinante de la matriz A para los que sus valores propios (en valor absoluto) sean inferiores a la unidad. A tal efecto, es conveniente aceptar la propiedad de semejanza de las matrices A y D, siendo así, las ecuaciones de abajo son verdaderas.

$$tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 \tag{21}$$

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \tag{22}$$

Si se asume que λ_1 y λ_2 son números reales, entonces claramente se tiene

$$|\det(A)| = |\lambda_1| |\lambda_1| < 1 \tag{23}$$

Si λ_1 y λ_2 son números complejos de la forma $a + bi$ y $a - bi$, respectivamente, entonces se cumple

$$\begin{aligned} \det(A) &= \lambda_1 \lambda_2 \\ &= (a + bi)(a - bi) \\ &= a^2 - abi + abi - b^2 i^2 \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned} \tag{24}$$

Por otro lado, si el valor absoluto de los valores propios λ_1 y λ_2 coincide

$$|\lambda_1| = \sqrt{(a^2 + b^2)} \tag{25}$$

$$|\lambda_2| = \sqrt{(a^2 + b^2)} \tag{26}$$

entonces,

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 = |\lambda_1|^2 \tag{27}$$

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 = |\lambda_2|^2 \tag{28}$$

14. Cada elemento de la matriz P está anotada por v_{ij}, donde i denota cada entrada $i = \{1, 2\}$ del vector $j = \{1, 2\}$.

Si el sistema es estable y los valores propios son números complejos, entonces también se cumple la desigualdad: $\det(A) < 1$.

Por otro lado, el polinomio característico (18) se puede escribir como:

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \tag{29}$$

Si los valores propios λ_1 y λ_2 son números reales e inferiores (en valor absoluto) a la unidad, al evaluar $\lambda = 1$ o $\lambda = -1$ se tiene $p_A(1) > 0$, $p_A(-1) > 0$.

Lo anterior se satisface debido a que ambos valores propios son inferiores a la unidad, además de que están en el mismo lado de 1 ó -1 (en recta de los números reales). Por otro lado, también se puede mostrar que estas desigualdades son válidas en el caso de valores propios complejos con módulo inferior a la unidad.

Ahora bien, de la ecuación (18) podemos comprobar que se cumplen las siguientes relaciones:

$$p_A(1) = 1 - tr(A) + \det(A) \tag{30}$$

$$p_A(-1) = 1 + tr(A) + \det(A) \tag{31}$$

Por lo tanto, se puede enunciar el siguiente teorema de estabilidad.

TEOREMA. Una matriz A de (2×2) tiene sus dos valores propios en el círculo unitario si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

a) $\det(A) < 1$

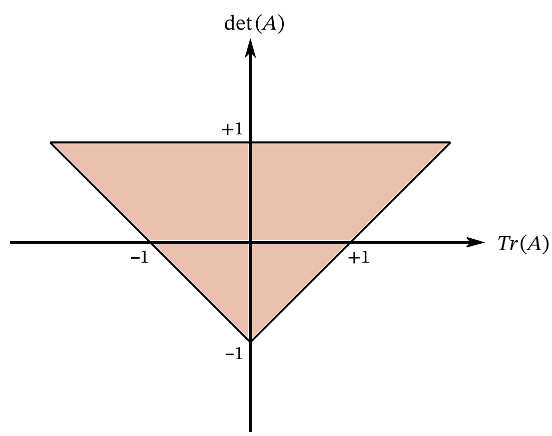
b) $p_A(1) > 0 \Leftrightarrow \det(A) > 1 - tr(A)$

c) $p_A(-1) > 0 \Leftrightarrow \det(A) > 1 - tr(A)$

La Gráfica 1 ilustra el teorema al dibujar las rectas $p_A(1) = 0$ y $p_A(-1) = 0$ en el espacio traza-determinante, junto con una línea horizontal asociada al $\det(A) = 1$. Para las matrices cuyo determinante y traza caigan en el área sombreada, el teorema nos asegura que tiene valores propios dentro del círculo unitario, de modo que su sistema dinámico asociado es estable.

Gráfica 1

Mapa de estabilidad para un sistema de ecuaciones en diferencias



Fuente: elaboración propia.

II. LAS FUNCIONES IMPULSO-RESPUESTA

El sistema de ecuaciones en diferencias de primer orden (16) sintetiza el modelo dinámico bajo previsión perfecta. En este sistema, si la traza y el determinante de la matriz A cumplen con las condiciones de estabilidad, entonces convergerá a un estado estacionario, aun cuando aparezcan diferentes disturbios exógenos. En términos de la influencia que ejerce el dinero en la economía es aleccionador calcular el impacto monetario sobre las variables macroeconómicas. El obstáculo inmediato en la simulación es el desconocimiento de los valores de los parámetros y los valores de las variables exógenas. En una etapa inicial, es mejor admitir ciertos valores de los parámetros con tal que se satisfagan las condiciones de estabilidad del sistema dinámico.

El diseño del experimento económico

Consideramos inicialmente dos conjuntos de parámetros dependiendo de los valores propios de la matriz A. Estos dos grupos de parámetros suponen valores propios de la matriz A de números reales y números complejos inferiores a la unidad (en valor absoluto). El Cuadro 5 muestra que la diferencia en los datos reside en el parámetro γ, el cual denota cuán sensible es la demanda de dinero a la tasa de interés. Los monetaristas admiten una función de demanda de dinero 'menos elástica' a la tasa de interés, mientras que los keynesianos aceptan una función de demanda de dinero 'más elástica'.

Cuadro 5

Valores numéricos de los parámetros

Parámetros	*Monetarista*	*Keynesiana*
α	50.00	50.00
β	0.05	0.05
γ	0.50	2.00
υ	0.01	0.01
φ	0.20	0.20

Fuente: Bongers, *et al*. (2017) y propios.

Cuadro 6

Valores numéricos de las variables exógenas

Situación inicial	*Escenario-A*	*Escenario-B*
$\bar{y}_0 = 2000$	$\bar{y}_0 = 2000$	$\bar{y}_0 = 2000$
$g_0 = 2100$	$g_0 = 2100$	$g_0 = 2100$
$m_0 = 100$	$m_1 = 101$	$m_0 = 100$
$z_0 = 0$	$z_0 = 0$	$z_1 = 1$

Fuente: Bongers, *et al*. (2017) y propios.

Por otro lado, el Cuadro 6 contiene los valores de las variables exógenas para dos escenarios distintos. En particular, se contempla un nivel más grande de la oferta monetaria ($m_0 \rightarrow m_1$) o una mayor tasa de crecimiento monetario ($z_0 \rightarrow z_1$). Las demás variables exógenas, el producto natural $\overline{y}_0$ y el componente autónomo del gasto agregado g_0, permanecen invariantes. En términos de la notación matricial y vectorial, se tienen dos matrices de parámetros y tres vectores de variables exógenas.[15]

$$A^m = \begin{bmatrix} 0.9130 & 0.0043 \\ -8.6957 & 0.4348 \end{bmatrix}, A^k = \begin{bmatrix} 0.9643 & 0.0071 \\ -3.5714 & 0.7143 \end{bmatrix}$$

$$Z_0 = \begin{bmatrix} 2000 \\ 2100 \\ 100 \\ 0 \end{bmatrix}, \; Z_0^A = \begin{bmatrix} 2000 \\ 2100 \\ 101 \\ 0 \end{bmatrix}, \; Z_0^B = \begin{bmatrix} 2000 \\ 2100 \\ 100 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Los valores propios $\lambda_j^s, j = 1, 2$ de las matrices A^m y A^k son los siguientes:

$$\lambda_1^m = 0.8131, \;\; \lambda_1^m = 0.5347$$

$$\lambda_1^k = 0.8393 + 0.0994i, \;\; \lambda_2^k = 0.8393 + 0.0994i$$

Los valores propios de la matriz A^m son números reales e inferiores a la unidad. Los valores propios de la matriz A^K, en cambio, son números complejos, pero también tienen un módulo inferior a la unidad. El criterio de la traza y determinante nos dice que ambas economías poseen un *equilibrio estable*. Pero, además, hay teoremas que aseguran que el 'punto fijo' de las dos economías es *globalmente estable*.[16]

Economía monetarista

El equilibrio inicial de la economía 'monetarista' se calcula mediante la siguiente ecuación:

$$X_0 = (I - A^m)^{-1} B^m Z_0$$

donde,

$$B^m = \begin{bmatrix} -0.0096 & 0.0009 & 0.0870 & 0.9565 \\ 0.0435 & 0.0870 & 8.6957 & -4.3478 \end{bmatrix}$$

El vector del nivel de precios y producción de equilibrio es el siguiente:

$$X_0^m = \begin{bmatrix} p_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.5000 & 0.0500 \\ -100.0000 & 1.0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8.6 \\ 1139.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2000 \end{bmatrix}$$

Las otras dos variables; es decir, la tasa de interés i_0 y la demanda agregada y_0^d, se calculan mediante las ecuaciones (9) y (10) en el supuesto de que $\Delta p_0 = 0$. Los cálculos son:

$$\begin{bmatrix} i_0 \\ y_0^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2000 \end{bmatrix}$$

15. En las matrices A^s y B^s y sus respectivos valores propios λ_j^s, el superíndice $s = \{k, m\}$ denota a las posiciones 'keynesiana' y 'monetarista', respectivamente. Cada matriz A^s tiene $j = \{1, 2\}$.

16. La traza y determinante de estas matrices son $tr(A^m) = 1.3478$ y $det(A^m) = 0.4348$, $tr(A^k) = 1.6786$ y $det(A^k) = 0.7143$, respectivamente.

Es posible deducir que el sistema económico evoluciona de acuerdo con siguiente ecuación:

$$X_t^m = X^0 + PD^t P^{(-1)}(X_0 - X^0)$$

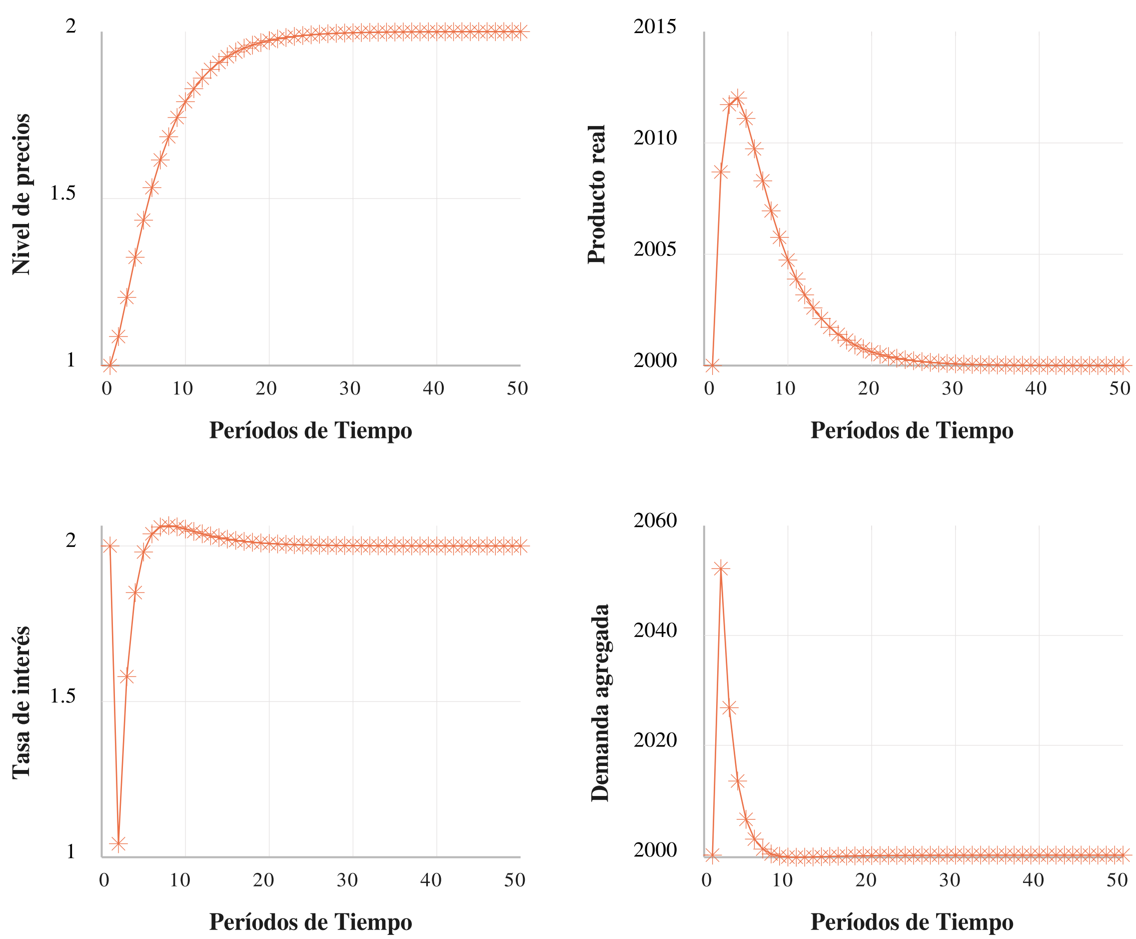
donde, X^0 es el 'punto fijo' al cual converge la economía. La diagonalización de la matriz A^m es la siguiente:

$$A^m = \begin{bmatrix} 0.0435 & -0.0115 \\ -0.9991 & 0.9999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8131 & 0 \\ 0 & 0.5347 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0435 & -0.0115 \\ -0.9991 & 0.9999 \end{bmatrix}^{-1}$$

donde, $A^m = PD^t P^{(-1)}$.

Gráfica 2

El impacto monetario de un incremento de 1% en la oferta monetaria m_t con $\gamma = 0.05$

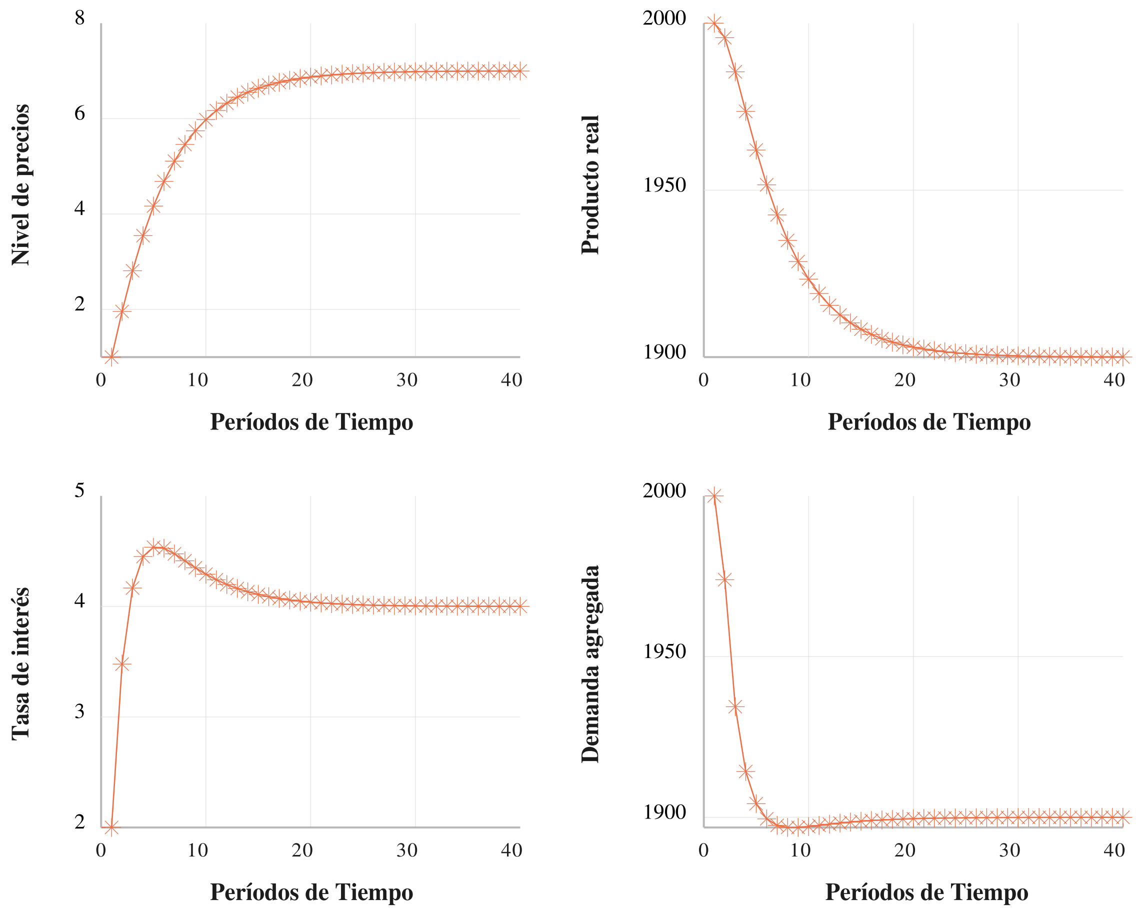


Fuente: elaboración propia.

Una vez calculado el equilibrio inicial, es necesario calcular las funciones impulso-respuesta y trazar las trayectorias temporales de las variables endógenas inducidas por un incremento de una unidad monetaria acorde al vector de exógenas Z_0^A. La Gráfica 2 ilustra el comportamiento de las variables en un lapso de 40 períodos. En todos los casos se observa que las variables endógenas convergen a un nuevo valor estacionario. El nivel de precios se eleva de 1 hasta 2, el cual se estabiliza después de poco más de 20 períodos. La tasa de interés disminuye inmediatamente después del impacto monetario de 2 hasta casi 1, pero después se recupera con suficiente rapidez para finalmente retornar a 2, esto sucede antes de 20 períodos de tiempo. La producción y la demanda agregada saltan al unísono con el incremento monetario, pero después de unos cuantos períodos, la demanda agregada alcanza su valor estacionario inicial, que a la postre significa simplemente que la producción retorna también a su nivel inicial.

Gráfica 3

El impacto monetario de un incremento de 1% en la emisión monetaria z_t con $\gamma = 0.05$



Fuente: elaboración propia.

La Gráfica 3 ilustra el impacto de un incremento en la tasa de emisión monetaria de un 1%. Los efectos se reflejan en el nivel de precios, este aumenta de 1 hasta 7 en un lapso aproximado de 30 períodos; sin embargo, lo más importante de la tasa de emisión monetaria son sus efectos permanentes. La tasa de interés, la demanda agregada y la producción real alcanzan valores distintos de su estado estacionario inicial. La tasa de interés ya no regresa a su nivel inicial de 2, sino que después de una sobrerreacción se estabiliza en un nivel de 4 después de aproximadamente 20 períodos. Esto tiene consecuencias permanentes en la producción y la demanda agregada. Estas dos variables disminuyen de 2000 hasta 1900 en un lapso de tiempo más pronto de lo esperado. La explicación reside en la ecuación (4), que representa a la curva de Phillips. La inflación se desvanece $\Delta p_t = 0$, con tal que la presencia de una brecha de producción negativa $(y_t - \overline{y}_t)$ compense a la tasa de emisión monetaria positiva $z_t > 0$.

A manera de resumen, a corto plazo, el dinero tiene efectos reales; sin embargo, en la economía monetarista, a largo plazo, los incrementos en el nivel de dinero influyen solo en el nivel de precios. Por otro lado, una mayor tasa de emisión monetaria conlleva efectos reales permanentes en el largo plazo; es decir, el dinero no es súper-neutral en tanto hay efectos permanentes en las principales variables agregadas. En particular, no solo el nivel de precios es mayor; sino también la producción real cae. Esto último se explica por el hecho de que la demanda agregada se contrae debido a un incremento en la tasa de interés real. Es decir, el nivel de precios aumenta de manera sustancial respecto de la tasa de interés nominal, de modo que ocurre una caída de la tasa de interés real.

Economía keynesiana

La situación inicial en la economía keynesiana se expresa a través de la siguiente ecuación:

$$X_0 = (I - A^k)^{-1} B^k Z_0$$

donde,

$$\beta^k = \begin{bmatrix} -0.0104 & 0.0014 & 0.0357 & 1.0357 \\ -0.0357 & 0.1429 & 3.5714 & 3.5714 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente, con la ayuda de las ecuaciones (9), (10) y (26) podemos calcular el vector de equilibrio.

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ y_0 \\ i_0 \\ y_0^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2000 \\ 2 - 0.0000i \\ 2000 + 0.0i \end{bmatrix}$$

La gran diferencia en esta economía 'keynesiana' es un nivel de precios 'más inflado'. Esto se explica por la mayor elasticidad de la demanda de dinero a la tasa de interés. Pero, por otro lado, el valor inicial de las demás variables endógenas es prácticamente idéntica al de una economía 'monetarista'.

Como ya sabemos, el sistema económico evolucionará de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$X_t^k = X^0 + PD^t P^{(-1)} (X_0 - X^0)$$

donde, otra vez, X^0 es el 'punto fijo' al cual converge la economía. La diagonalización de la matriz A^m es la siguiente:

$$A^m = \begin{bmatrix} -0.0350 - 0.0278i & -0.0350 + 0.0278i \\ 0.9990 + 0.0000i & 0.9990 + 0.0000i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.8393 + 0.0994i & 0 \\ 0 & 0.8393 - 0.0994i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0.0350 - 0.0278i & -0.0350 + 0.0278i \\ 0.9990 + 0.0000i & 0.9990 + 0.0000i \end{bmatrix}^{-1}$$

Una solución de valores y vectores propios con números complejos tiene un tratamiento distinto especialmente si se desea simular las funciones impulso-respuesta. Por consiguiente, es necesario transitar al espacio de los reales. Sean λ y λ^* valores propios de números complejos de la matriz A y v y v^* sus respectivos vectores propios. En la forma cartesiana

$$\lambda = a + bi, \qquad \lambda^* = a - bi$$

Sin embargo, es útil expresar estos valores propios en su forma polar, es decir:

$$\lambda = r(cos\{\theta\} + i\ sin\{\theta\}), \qquad \lambda^* = r(cos\{\theta\} - i\ sin\{\theta\})$$

donde, $r = \sqrt{a^2 + b^2}, \theta = \tan^{-1}\left\{\frac{b}{a}\right\}$

Ahora bien, por el teorema de Moivre, se tiene

$$\lambda^n = r^n(cos\{n\theta\} + i\ sin\{n\theta\})$$

En particular, sea v el vector propio asociado a λ igual a

$$v = \begin{pmatrix} -v_0 - v_1 i \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_0 \\ v_2 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} -v_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde, $v_0 = 0.0350$, $v_1 = 0.0278$, $v_2 = 0.9990$. En esta situación, se sabe que se cumple

$$A^n v = \lambda^n v = \lambda^n(v_R + iv_I)$$

donde,

$$v_R = \begin{pmatrix} -v_0 \\ v_2 \end{pmatrix}, v_I = \begin{pmatrix} -v_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es decir,

$$\begin{aligned} A^n v &= \lambda^n v \\ &= \lambda^n(v_R + iv_I) \\ &= r^n[\cos n\theta + i \sin n\theta]\left[\begin{pmatrix} -v_0 \\ v_2 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} -v_1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \\ &= r^n\left[\begin{pmatrix} -v_0 \cos n\theta + v_1 \sin n\theta \\ v_2 \cos n\theta \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} -v_1 \cos n\theta - v_0 \sin n\theta \\ v_2 \sin n\theta \end{pmatrix}\right] \end{aligned}$$

De esta manera, las partes real e imaginaria, respectivamente, son

$$R\{A^n v\} = r^n v_R = r^n\begin{pmatrix} -v_0 \cos n\theta + v_1 \sin n\theta \\ v_2 \cos n\theta \end{pmatrix}$$

$$I\{A^n v\} = \lambda^n v_I = r^n\begin{pmatrix} -v_1 \cos n\theta - v_0 \sin n\theta \\ v_2 \sin n\theta \end{pmatrix}$$

Una vez más, sean

$$A_n = r^n\begin{pmatrix} -v_0 \cos n\theta + v_1 \sin n\theta & -v_1 \cos n\theta - v_0 \sin n\theta \\ v_2 \cos n\theta & v_2 \sin n\theta \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} -v_0 & -v_1 \\ v_2 & 0 \end{pmatrix}, v^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & v_1 \\ -v_2 & -v_0 \end{pmatrix}$$

de modo que,

$$\begin{aligned} A^n &= \lambda^n \upsilon^{-1} \\ &= \frac{1}{\upsilon_1 \upsilon_2} r^n \begin{pmatrix} -\upsilon_0 \cos n\theta + \upsilon_1 \sin n\theta & -\upsilon_1 \cos n\theta - \upsilon_0 \sin n\theta \\ \upsilon_2 \cos n\theta & \upsilon_2 \sin n\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \upsilon_1 \\ -\upsilon_2 & -\upsilon_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\upsilon_1 \upsilon_2} r^n \begin{pmatrix} \upsilon_2(\upsilon_1 \cos n\theta + \upsilon_0 \sin n\theta) & (\upsilon_0^2 + \upsilon_1^2) \sin n\theta \\ -\upsilon_2^2 \sin n\theta & \upsilon_2(\upsilon_1 \cos n\theta - \upsilon_0 \sin n\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

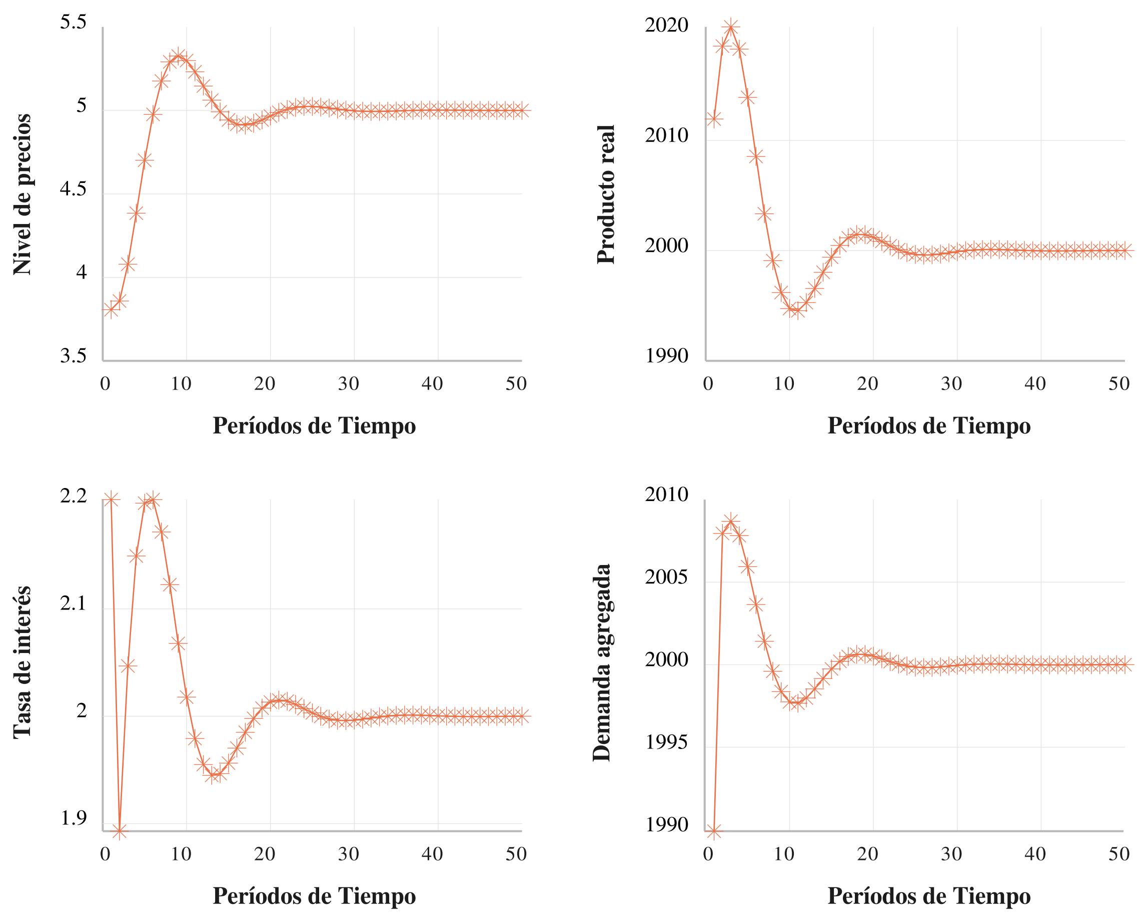
Por lo tanto, en el espacio de los números reales, la solución del sistema dinámico discreto estudiado es

$$X_t^n = X^0 + \frac{1}{\upsilon_1 \upsilon_2} r^n \begin{pmatrix} \upsilon_2(\upsilon_1 \cos n\theta + \upsilon_0 \sin n\theta) & (\upsilon_0^2 + \upsilon_1^2) \sin n\theta \\ -\upsilon_2^2 \sin n\theta & \upsilon_2(\upsilon_1 \cos n\theta - \upsilon_0 \sin n\theta) \end{pmatrix} (X_0 - X^0)$$

donde la trigonometría básica nos dice que $r = \sqrt{a^2 + b^2} = 0.8452,\ \theta = \tan^{-1} \frac{b}{a} = 0.4049.$

Gráfica 4

El impacto monetario de un incremento de 1% en la oferta monetaria m_t cuando $\gamma = 2$



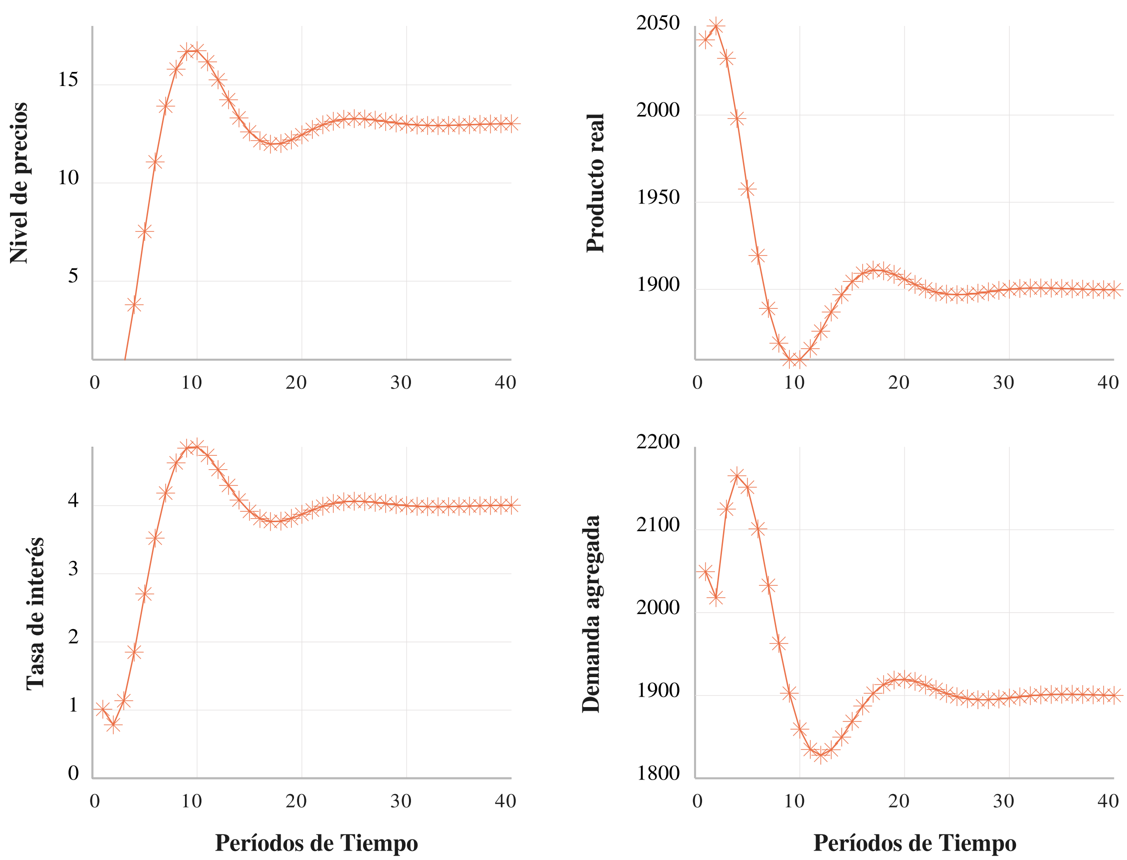
Fuente: elaboración propia.

Las trayectorias temporales de las variables endógenas que resultan de una unidad de dinero más, y cual está representado por el vector Z_0^A, son ilustradas en la Gráfica 4. Las funciones impulso-respuesta muestran que el nivel de precios se incrementa en una unidad más (pasa de 4 a 5) en un lapso de tiempo de casi 20 períodos. La tasa de interés disminuye al principio; sin embargo, a la postre se recupera para estabilizarse en su nivel inicial de 2. Esto sucede en un lapso de alrededor de 30 períodos de tiempo. En el caso de la demanda agregada y la producción después de un período de ajuste estos se estabilizan alrededor de 2000. Sin embargo, algo distintivo de la economía keynesiana es que un incremento de la masa monetaria ocasiona que todas las variables se alternan entre períodos ascendentes y descendentes, si bien las oscilaciones finalmente convergen a un valor estacionario.

En la Gráfica 5 tenemos el caso de un incremento en la tasa de emisión monetaria, medido por el vector Z_0^B. El impacto monetario es notorio no solo en el corto plazo, sino también en el largo plazo. El nivel de precios se eleva de un nivel de 4 hasta 13, es decir, el nivel de precios aumenta más que proporcionalmente con el incremento en la tasa de emisión de dinero. Por otro lado, la tasa de interés nominal se eleva de 2 a 4, acompañado de una sobrerreacción respecto de su nivel de estado estacionario final. Sin embargo, los efectos reales más visibles en la economía son la demanda agregada y producción real. Estas dos variables disminuyen de 2000 a 1900, mostrando así los efectos permanentes de la concurrencia de una tasa de emisión monetaria fijada por el banco central. Además, es evidente que la naturaleza de la convergencia es oscilatoria.

Gráfica 5

El impacto monetario de un incremento de 1% en la emisión monetaria z_t cuando $\gamma = 2$



Fuente: elaboración propia.

Los efectos permanentes se manifiestan en el nivel de precios, la tasa de interés, la demanda agregada y la producción real. La totalidad de las variables requieren de más tiempo para alanzar sus valores estacionarios. Estos cambios obedecen a una mayor elasticidad de la demanda de dinero a la tasa de interés, de modo que la economía keynesiana experimenta más fluctuaciones que una economía monetarista después de presentarse el disturbio monetario. Además, si los parámetros cambian es posible encontrar más resultados con una tendencia al comportamiento caótico. Por ejemplo, en el Cuadro 7, se reportan valores de una economía keynesiana moderada y extrema. La situación moderada es conocida de las dos simulaciones previas, pero ¿qué pasa con los nuevos valores paramétricos del cuadro de abajo?

Cuadro 7

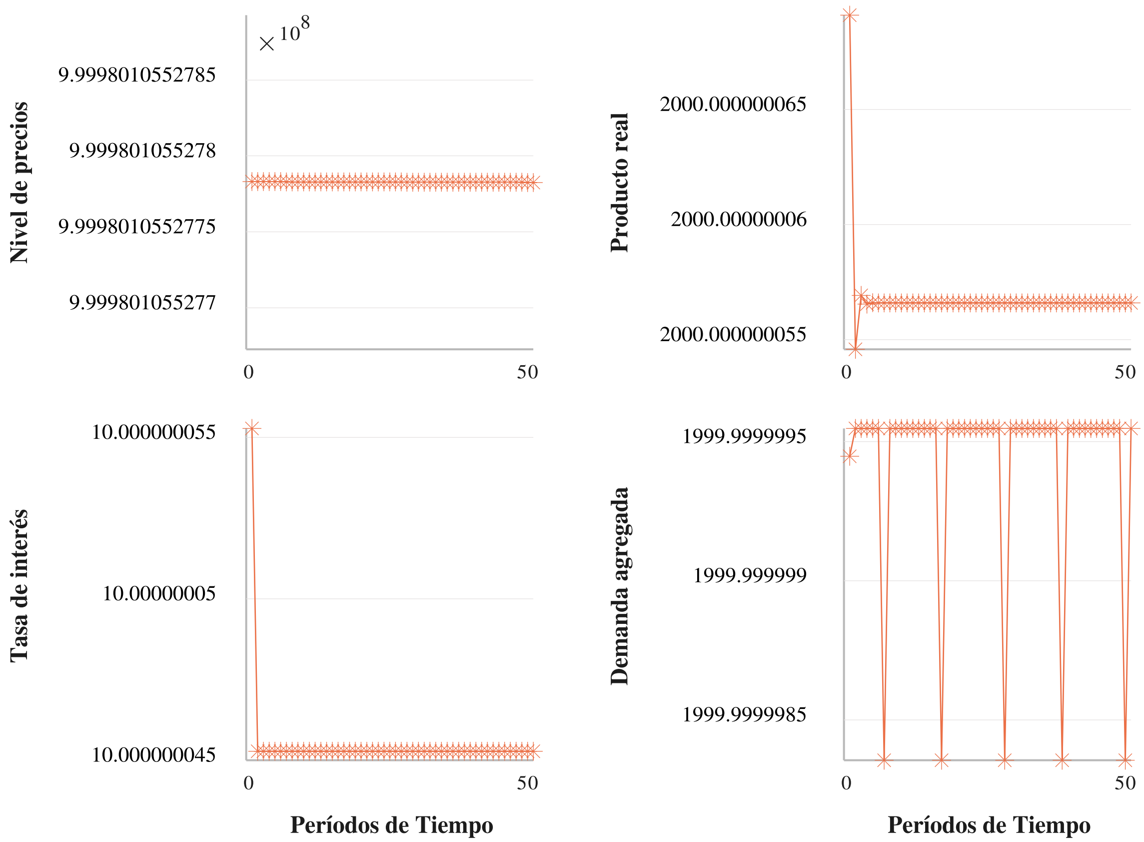
Valores numéricos de los parámetros

Parámetros	*Keynesiano-moderado*	*Keynesiano-extremo*
α	50.00	10.00
β	0.05	10.00
γ	2.00	100’000,000
υ	0.01	0.9
φ	0.20	0.9

Fuente: Bongers, *et al*. (2017) y propios.

Gráfica 6

El impacto monetario de un incremento de 1% en la masa monetaria en una economía keynesiana extrema



Fuente: elaboración propia.

En el caso de valores numéricos de una economía keynesiana ‘extrema’ (trampa de liquidez) se tiene un valor propio inferior a la unidad, además de una raíz unitaria: $\lambda\_1=-0.1613$ y $\lambda\_2=1$. En este caso, el sistema dinámico discreto se caracteriza por una ‘orbita periódica’, también conocido como histéresis. La simulación numérica de las funciones impulso-respuesta se reportan en la Gráfica 6. Debido a un mayor circulante monetario, el nivel de precios pasa de 4 a de 9.99, el nivel de producto real se estabiliza en torno de 2000, la tasa de interés se queda en reposo alrededor de 10. Sin embargo, lo que llama la atención es el comportamiento de la demanda agregada. Esta variable se reposa en torno de 1999.999 con sobresaltos (caídas) a intervalos regulares exhibiendo así que se trata de una órbita periódica.

CONCLUSIÓN

El principal problema de los modelos dinámicos para su enseñanza es que no necesariamente tienen una solución explícita, en muchos casos necesitan ser resueltos de forma numérica. La enseñanza de los modelos dinámicos requiere incluso de instrumentos relativamente complejos, por lo que es necesario tener un adiestramiento en sistemas dinámicos discretos. En muchos casos, la estrategia consiste en la construcción de diagramas de fases para establecer las propiedades dinámicas. Por ejemplo, Shone (2002) afirma que es necesario cierta destreza y experiencia en la elaboración de un diagrama de fase, dado que no siempre es fácil interpretar las condiciones de estabilidad. Por otro lado, el uso de hojas de cálculo es pertinente sólo en modelos macroeconómicos relativamente simples, pero es insuficiente, dados los avances informáticos.

La macroeconomía computacional en los siguientes años adquirirá un papel preponderante en la enseñanza de la macroeconomía. La recomendación es utilizar softwares especializados, tal como Matlab, u otros, de modo que, por ejemplo, el análisis se facilite en términos de las funciones impulso-respuesta u otras medidas estadísticas. La aplicación computacional de los sistemas de ecuaciones en diferencias rendirá beneficios en nuestra comprensión de los modelos dinámicos estocásticos. Los principios en los que se cimentan la resolución de modelos dinámicos deterministas aparecen de cierta manera en los modelos dinámicos estocásticos. Este adiestramiento es provechoso si el objetivo es acortar la distancia entre la visión estándar y la macroeconomía moderna estocástica a través del cómputo computacional.

La cuantía del impacto monetario, desde luego, depende de la interrelación de los mercados y de otras particularidades propias del modelo dinámico en cuestión. Por ejemplo, el modelo dinámico con previsión perfecta estudiado en este artículo admite la interacción de los mercados de activos de rápido movimiento y mercados de bienes de movimiento menos rápido. Además, el modelo destaca la desviación de la producción real de la demanda agregada, es decir, el ajuste de la producción a través de los inventarios lleva su tiempo. Por otro lado, el nivel de precios cambia en función de la brecha de producción y la emisión monetaria. La naturaleza dinámica del modelo macroeconómico está justificada, aun cuando los agentes conocen el futuro. La premisa acerca del futuro es irreal, pero facilita los cálculos mientras no se incluyan expectativas estáticas o racionales.

En síntesis, y a modo de conclusión, el impacto monetario en el modelo macroeconómico dinámico con previsión perfecta descansa en los valores de las funciones impulso-respuesta. La simulación numérica arroja dos resultados importantes: (i) el nivel de dinero tiene efectos reales en el corto plazo, pero es neutral en el largo plazo; y (ii) la tasa de emisión de dinero tiene efectos reales no solo a corto sino a largo plazo. El dinero no es súper-neutral en el largo plazo en una economía monetarista o keynesiana. Este último resultado no siempre es intuitivo en términos de cambios en la tasa de emisión monetaria. La divergencia en la cuantía del impacto monetario depende, entre otros factores, de que la demanda de dinero sea ‘más o menos elástica’. Una economía keynesiana difiere de una economía monetarista en tanto la demanda de dinero sea más elástica. Los efectos del dinero son más trascendentales en el caso de la tasa de emisión de dinero, la economía exhibe más oscilaciones, mientras más sensible sea la demanda de dinero a la tasa de interés (i.e. mientras más keynesiana y menos monetarista sea la economía). Por último, al calibrar los parámetros es posible encontrar una solución de órbita periódica que corresponde a una raíz unitaria (histéresis). En este caso, las variables orbitan alrededor de algunos valores estacionarios. En la simulación numérica esto es imperceptible con excepción de la demanda agregada.

REFERENCIAS

Alfonso, O. y Vasconcelos P.B. (2016). *Computational Economics: A concise introduction*, N.Y., New York and London, Routledge, Taylor y Francis Group.

Argandoña, A., Gámez C. y Mochón, F. (1996). *Macroeconomía Avanzada I. Métodos dinámicos y teoría de la política económica*, Madrid: McGraw Hill.

Barro, R. (1997). *Macroeconomics*, Cambridge, Mass.: MIT Press.

Benassy, J.P. (2011). *Macroeconomic Theory*, New York: Oxford University Press. https://doi.org/10.1093/acprof:osobl/9780195387711.001.0001

Bofinger, P., Mayer, E., y Wollmershuser, T. (2006). The BMW Model: A New Framework for Teaching Monetary Economics. *The Journal of Economic Education*, *37*(1), 98-117. https://doi.org/10.3200/JECE.37.1.98-117

Bongers, A., Gómez, T. y Torres, J.L. (2017). Una aproximación alternativa a la enseñanza de la Macroeconomía: La Macroeconomía Computacional. *e-Pública. Revista electrónica sobre la enseñanza de la Economía Pública*, (21), 1-20. https://e-publica.unizar.es/wp-content/uploads/2017/09/211Bongers.pdf

Brevik, F. y Gärtner, M. (2007). Teaching Real Business Cycles to Undergraduates. T*he Journal of Economic Education*, *38*(2), 229-247. https://doi.org/10.3200/JECE.38.2.229-247

Cahill, M., y Kosicki, G. (2000). Exploring economic models using Excel. *Southern Economic Journal*, *66*(3): 770-02. https://doi.org/10.2307/1061439

Carlin, W. y Soskice D. (2005). The 3-equation New Keynesian model: A graphical exposition. *Contributions to Macroeconomics*, *5*(1), Article 13, 1-36. https://doi.org/10.2202/1534-6005.1299

Carlin, W. y Soskice D. (2006). *Macroeconomics: Imperfections, Institutions & Policies. and the Financial System*, New York: Oxford University Press.

Costa, C. y García-Cintado, A. (2018). Teaching DSGE models to undergraduates. *EconomiA*, *19*(3), 424-444. https://doi.org/10.1016/j.econ.2018.11.001

Davis, L.E y Gómez-Ramírez, L. (2022). Teaching post-intermediate macroeconomics with a dynamic 3-equation model. *The Journal of Economic Education*, *53*(4), 348–367. https://doi.org/10.1080/00220485.2022.2111385

Davidson, P. (1978). Why Money Matters: Lessons from a Half Century of Monetary Theory. *Journal of Post Keynesian Economics*, *1*(1), 46-70. http://www.jstor.org/stable/4537459

Etter, D.M. (2015). *Introduction to MATLAB*, 3th Edition, Harlow-England: Pearson Education.

Fane, G. (1985). A derivation of the IS–LM model from explicit optimizing behavior. *Journal of Macroeconomics*, *7*(4), 493–508. https://doi.org/10.1016/0164-0704(85)90038-2

Friedman, M. (1956). The quantity theory of money – a restatement. In Friedman, M. (Ed.). *Studies in the Quantity Theory of Money*. Chicago: University of Chicago Press.

Friedman, M. (1968). The role of monetary policy. *American Economic Review*, *58*(1), 1-17. https://www.jstor.org/stable/1831652

Hayek, F. (1929). *Monetary Theory and the Trade Cycle*. London: University of London.

Heijdra, B. (2017). *Foundations of Modern Macroeconomics*, 3th Edition, New York: Oxford University Press.

Kerr, W. y R.G. King, R.G. (1996). Limits on interest rate rules in the IS Model. *Federal Reserve Bank of Richmond Economic Quarterly*, *82*(2), 47–75.

Keynes, J.M. (1936). *La teoría general de la ocupación, el interés y el dinero*, México: Fondo de Cultura Económica.

King, R. (2000). The New IS-LM Model: Language, Logic, and Limits. *FRB Richmond Economic Quarterly*, *86*(3), 45-104.

Koenig, E.F. (1989). A simple optimizing alternative to traditional IS–LM analysis. *Manuscript*, Federal Reserve Bank of Dallas.

Lucas, R. E. (1976). Econometric Policy Evaluation: A Critique. *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, *1*, 19-46. https://doi.org/10.1016/S0167-2231(76)80003-6

Lucas, R. E. (1975). An Equilibrium Model of the Business Cycle. *Journal of Political Economy*, *83*(6), 1113–1144. http://www.jstor.org/stable/1830853

Pablo-Romero, M.P, Pozos-Barajas R. y Gómez-Calero, M.P. (2012). Evaluation of Teaching the IS-LM Model through a Simulation Program. *Journal of Educational Technology & Society*, *15*(4), 193-204.

Patinkin, D. (1965). *Money, Interest and Prices: An Integration of Monetary and Value Theory*. 2nd Edition, Row, Peterson and Co., Evanston, Harper and Row, New York.

Romer, D. (2000). Keynesian Macroeconomics without the LM Curve. *Journal of Economic Perspectives*, *14*(2), 149-169. https://doi.org/10.1257/jep.14.2.149

Shone, R. (2002). *Economic Dynamics. Phase Diagrams and their Economic Application*, Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Smith, G. (1980). A dynamic IS–LM simulation model. *Applied Economics*, *12*(3), 313-327. https://doi.org/10.1080/00036848000000033

Snowdon, B. y Vane, H. (2005). *Modern Macroeconomics: Its Origins, Development and Current State*, UK: Edward Elgar.

Strulik, H. (2004). Solving Rational Expectations Models Using Excel. *The Journal of Economic Education*, *35*(3), 269-283. https://doi.org/10.3200/JECE.35.3.269-283

Taylor, J.B. (2000). Teaching Modern Macroeconomics at the Principles Level. *American Economic Review*, *90*(2), 90-94. https://doi.org/10.1257/aer.90.2.90

Torres, J.L. (2015). *Introduction to Dynamic Macroeconomic General Equilibrium Models*, 2th Edition, Wilmington: Vernon Press.

Walsh, C.E. (2002). Teaching Inflation Targeting: An Analysis for Intermediate Macro. *The Journal of Economic Education*, *33*(4), 333-346. https://doi.org/10.1080/00220480209595331

Wickens, M. (2012). *Macroeconomic Theory: A Dynamic General Equilibrium Approach*, 2th Edition, Princeton: Princeton University Press.

Willamson, S.D. (2018). *Macroeconomics*, 6th Edition, Harlow, UK: Pearson Education Limited.

Woodford, M. (2003). *Interest and Prices Foundations of a Theory of Monetary Policy*, Princeton & Oxford: Princeton University Press.