FUNCIONES DE AHUSAMIENTO PARA CLONES DE *Eucalyptus urophylla* ESTABLECIDOS EN PLANTACIONES COMERCIALES EN HUIMANGUILLO, TABASCO, MÉXICO

TAPER FUNCTIONS FOR *Eucalyptus urophylla* CLONES ESTABLISHED IN COMMERCIAL PLANTATIONS IN HUIMANGUILLO, TABASCO, MEXICO

Jonathan **Hernández-Ramos**[1], Héctor M. **De los Santos-Posadas**[1*], José R. **Valdéz-Lazalde**[1], Juan C. **Tamarit-Urias**[2], Gregorio **Ángeles-Pérez**[2], Adrián **Hernández-Ramos**[1], Alicia **Peduzzi**[3]

[1]Forestal. Campus Montecillo. Colegio de Postgraduados. Montecillo, Estado de México (forestjonathanhdez@gmail.com, hmsantos@colpos.mx). [2]Instituto Nacional de Investigaciones Forestales, Agrícolas y Pecuarias (INIFAP). Campo experimental San Martinito, Tlahuapan, Puebla, México. 74060 (tamarit.juan@inifap.gob.mx). [3]United States Department of Agriculture Forest, Service. Techniques Analyst, 507 25th Street, Ogden, Utah, United States. (apeduzzi@fs.fed.us).

RESUMEN

Las funciones de ahusamiento permiten modelar el perfil fustal, estimar las dimensiones de las secciones del árbol y el volumen maderable por tipo de productos, así como planear el abastecimiento forestal. El objetivo de este estudio fue desarrollar una función que permitiera modelar el perfil fustal de árboles clonales de *Eucalyptus urophylla* S. T. Blake establecidos con fines comerciales en Huimanguillo, Tabasco, México. Con 2,133 pares de datos de 93 árboles se ajustaron diez modelos de ahusamiento con el método de máxima verosimilitud. El mejor modelo se seleccionó de acuerdo con los valores menores de la raiz del cuadrado medio del error (*RCME*), el coeficiente de variación, el sesgo y el mayor coeficiente de determinación ajustado ($R^2_{aj.}$); el modelo polinomial de quinto orden fue el mejor estadísticamente para modelar el perfil fustal de clones de *E. urophylla*, porque incluye la proporción relativa de la altura en cada sección en la altura total. La autocorrelación se corrigió al incluir en el ajuste una estructura de autocorrelación de tipo CAR(1). El modelo polinomial estima de forma confiable el diámetro y la altura en árboles clonales provenientes de plantaciones comerciales de *E. urophylla*.

Palabras clave: Perfil fustal, volumen comercial, clones de eucalipto, aprovechamiento forestal, *Eucalyptus urophylla.*

ABSTRACT

Taper functions allow modelling stem profile, estimating the dimensions of tree sections and the timber-yielding volume per type of products, and planning forest supply. The objective of this study was to develop a function that allows modelling the stem profile of *Eucalyptus urophylla* S. T. Blake clone trees established with commercial purposes in Huimanguillo, Tabasco, Mexico. With 2,133 pairs of data from 93 trees, ten taper models were fitted with the maximum likelihood method. The best model was selected according to the lowest values of the root mean square error (RMSE), the coefficient of variation, the bias and the highest adjusted coefficient of determination ($R^2_{aj.}$). The fifth-degree polynomial model was the best statistically to model the stem profile of *E. urophylla* clones, because it includes the relative proportion of the height in each section of the total height. Autocorrelation was corrected by including in the fiiting a CAR(1) type autocorrelation structure. The polynomial model estimates in a reliable way the diameter and the height in clone trees from commercial plantations of *E. urophylla*.

Key words: Log profile, commercial volumen, eucalyptus clones, forest exploitation, *Eucalyptus urophylla.*

INTRODUCTION

In the world, there are 264 million ha of forest plantations with 25 % made up of introduced species (FAO, 2010). Mexico occupied, until 2015, the fifth place in America with forests established through plantation or sowing, or both,

* Autor responsable ❖ Author for correspondence.
Recibido: septiembre, 2016. Aprobado: mayo, 2017.
Publicado como ARTÍCULO en Agrociencia 52: 1013-1029. 2018.

INTRODUCCIÓN

En el mundo existen 264 millones de ha de plantaciones forestales con 25 % de especies introducidas (FAO, 2010). México ocupaba, hasta 2005, el quinto lugar en América en bosques establecidos mediante plantación o siembra, en el proceso de forestación o reforestación (INEGI, 2014); de éstos destaca el uso de especies de crecimiento rápido (Overbeerk *et al.,* 2012). *Eucalyptus* es el segundo género más utilizado en el país para establecer plantaciones forestales comerciales (PFC) (SEMARNAT-CONAFOR, 2014) con alrededor de 32,452 ha plantadas (CONAFOR, 2015), y *E. urophylla* es la especie más plantada en climas tropicales (CONAFOR, 2012).

La estimación del volumen y la distribución de productos maderables de bosques naturales y plantaciones es una necesidad en el manejo forestal. Las ecuaciones que describen el perfil del fuste o las funciones de ahusamiento son una opción factible para el cálculo preciso de las dimensiones y volúmenes de cualquier parte del fuste en el árbol (Maldonado-Ayala y Návar, 2000; Cancino, 2006) o de la distribución de productos (Barrero *et al.,* 2013). Además, son un componente esencial en los sistemas de rendimiento y en la simulación de troceo (Gezan *et al.*, 2009).

Estas funciones describen la tasa de disminución del diámetro en cualquier parte del fuste a medida que se aproxima a la altura total del árbol (Prodan *et al.,* 1997; Torres y Magaña, 2001) y varían de acuerdo con la especie, edad, tamaño de los árboles, factores asociados al manejo y condiciones de sitio o densidad (Cancino, 2006). También es posible evaluar la influencia de estos factores sobre la producción (Barrero *et al.,* 2013) y proponer actividades de manejo técnico que modifiquen la forma del árbol para conseguir los objetivos planteados en el manejo forestal (Sterba, 1980).

Debido a la dificultad para describir el perfil de un árbol, los modelos se han fundamentado en principios biológicos (Rodríguez-Toro *et al.,* 2016), algunos toman como base la forma de cuerpos geométricos regulares y otros se contruyen con base a la experimentación en función de las medidas referentes de cada individuo sin importar que estén relacionados con un cuerpo geométrico (empíricos), aunque esto no significa que unos sean mejor que otros (Cancino, in the process of forestation or reforestation (INEGI, 2014); among these, the use of species of fast growth stands out (Overbeerk *et al.,* 2012). *Eucalyptus* is the second most used genus in the country to establish commercial forestry plantations (CFP) (SEMARNAT-CONAFOR, 2014) with around 32,452 ha planted (CONAFOR, 2015), and *E. urophylla* is the most frequently planted species in tropical climates (CONAFOR, 2012).

Estimating the volume and the distribution of timber-yielding products from natural forests and plantations is a need in forest management. The equations that describe stem profile or the taper functions are a feasible option for the accurate calculation of the dimensions and volumes of any part of the bole (Maldonado-Ayala and Návar, 2000; Cancino, 2006), or the distribution of products (Barrero *et al.,* 2013). In addition, they are an essential component in the yield systems and in the sawtimber simulation (Gezan *et al.*, 2009).

These functions describe the rate of diameter decrease in any part of the bole as it approaches the total height of the tree (Prodan *et al.,* 1997; Torres and Magaña, 2001) and they vary according to the species, age, tree size, factors associated to management, and conditions of the site or density (Cancino, 2006). It is also possible to assess the influence of these factors on production (Barrero *et al.,* 2013) and to suggest activities for technical management that modify the shape of the tree to attain the objectives set out through forest management (Sterba, 1980).

Due to the difficulty in describing the profile of a tree, models were based on biological principles (Rodríguez-Toro *et al.,* 2016); some were based on the shape of regular geometrical bodies and others were built based on experimentation in function of the measurements that refer to each individual, without taking into account that they are related to a geometrical body (empirical), although this does not mean that one is better than the other (Cancino, 2006). The models can be polynomic, trigonometric, variable exponent, segmented or compatible with functions of total volume (Gezan *et al.*, 2009). Some of the fitting techniques used are systems of seemingly unrelated equations (SUR) through root mean square error (RMSE) and full information maximum likelihood (FIML), because they make the estimators of the parameters consistent and asymptotically efficient, situation that does not happen with the

2006). Los modelos pueden ser de tipo polinómico, trigonométrico, de exponente variable, segmentados o compatibles con funciones de volumen total (Gezan *et al.*, 2009). Algunas de las técnicas de ajuste más utilizadas son mediante ecuaciones aparentemente no relacionadas (SUR) y máxima verosimilitud con información completa (FIML), porque hacen que los estimadores de los parámetros sean consistentes y asintóticamente eficientes, situación que no sucede con el método de mínimos cuadrados ordinarios (MCO), que ignora los errores en el diámetro a lo largo del fuste. La mayor dificultad en la estimación de cualquiera de ellos se presenta en la base y en la punta del árbol (Cancino, 2006), por lo cual Cruz-Cobos *et al.* (2008) modelaron este tipo de información con el enfoque de efectos mixtos.

La forma, distribución de productos y rendimiento de los árboles se deben conocer para planear las actividades de aprovechamiento y extracción de los recursos maderables; además, el eucalipto es una especie de crecimiento rápido y las ecuaciones empleadas deben estar en constante actualización. Por lo tanto, la hipótesis fue que el volumen total y comercial tienen estrecha relación con la forma del árbol, y el objetivo fue desarrollar una función de ahusamiento que permita modelar el perfil fustal de árboles clonales de *E. urophylla* S. T. Blake establecidos con fines comerciales en Huimanguillo, Tabasco, México.

MATERIALES Y MÉTODOS

Este estudio se realizó con datos obtenidos en predios con plantaciones forestales comerciales de clones de *E. urophylla* de uno a siete años de edad, establecidas en el municipio de Huimanguillo, Tabasco, México. El clima local es cálido húmedo (Am), con temperatura promedio anual de 26 °C y precipitación media anual de 2,500 mm. La unidad de suelo predominante es de tipo Feozem (INEGI, 2005).

La muestra constó de 93 árboles derribados, de los cuales se obtuvieron 2,133 pares de datos distribuidos a lo largo del fuste. En cada árbol seleccionado por su dominancia dentro del rodal, se midió el diámetro con corteza (*d*) y la altura (*hm*) en secciones de 1 m de longitud, iniciando con el diámetro de tocón (*dt*) y la altura del mismo (*ht*) hasta llegar a la altura total (*H*); se incluyó además el diámetro normal (*dn*).

Los modelos de ahusamiento ajustados al conjunto de datos se seleccionaron de la literatura internacional por su uso exitoso en otros estudios (Cuadro 1). El ajuste de los modelos se realizó con el procedimiento MODEL del programa SAS 9.2 (SAS institute

method of ordinary least squares (OLS), which ignores the errors in the diameter along the stem. The greatest difficulty in estimating any of these is in the base and the tip of the tree (Cancino, 2006), which is why Cruz-Cobos *et al.* (2008) modelled this type of informaiton with the approach of mixed effects.

The bole shape, distribution of products, and yield of the trees should be understood in order to plan the harvesting activities of timber-yielding resources; in addition, *Eucalyptus* is a fast-growth species and the equations used must be in constant updating. Therefore, the hypothesis of this study was that the total and commercial volumes have a close relationship with the shape of the tree, and the objective was to develop a taper function that allows modelling the stem profile of clone trees of *E. urophylla* S. T. Blake established with commercial purposes in Huimanguillo, Tabasco, Mexico.

MATERIALS AND METHODS

This study was performed with data obtained in plots with commercial forest plantations of clones of *E. urophylla*, one to seven years old, established in the municipality of Huimanguillo, Tabasco, Mexico. The local climate is warm humid (Am), with annual mean temperature of 26 °C and mean annual precipitation of 2,500 mm. The predominant soil unit is Feozem type (INEGI, 2005).

The sample consisted of 93 felled trees, from which 2,133 pairs of data were obtained along the stem. In each tree selected for its dominance within the stand, the diameter with bark (*d*) and the height (*hm*) were measured in sections 1 m long, beginning with the stump diameter (*dt*) and height (*ht*) until reaching the total height (*H*); the normal diameter (*dn*) was also included.

The taper models fitted to the set of data were selected from the international literature for their successful use in other studies (Table 1). The fitting of the models was carried out with the MODEL procedure of the SAS 9.2 software (SAS institute Inc., 2008) and the full information maximum likelihood (FIML) method. The evaluation and selection of the best model was carried out based on the highest value of the adjusted coefficient of determination by the number of parameters ($R^2_{aj.}$) and the lowest values in the Residual Sum of Squares (RSS), Root Mean Square Error (*RMCE*), the Coefficient of Variation (*CV*) and the Bias (*E*).

A hierarchical criterion was used to ease the selection of the best model, for which the goodness of fit statistics was integrated (*SCE, RCME,* $R^2_{aj.}$, *CV* and *E*) and scored (Sakici *et al.*, 2008),

Cuadro 1. Modelos de ahusamiento (*d*) ajustados para modelar el perfil fustal de árboles de *E. urophylla* de PFC en Tabasco, México.
Table 1. Taper models (*d*) fitted to model stem profile of *E. urophylla* trees from CFP in Tabasco, Mexico.

No.	Modelo	Expresión	Donde
(1)	Demaerchalk	$d = dn\sqrt{\beta_1\left(\frac{1}{dn^2 H}\right)\cdot X^{\beta_2} + \beta_3 \cdot X^{\beta_4}}$	$X=(H-hm)/H$
(2)	Kozak	$d = dn\sqrt{\beta_1(X-1) + \beta_2\left(X^2-1\right)}$	$X=(H-hm)/H$
(3)	Forslund	$d = dn\left(1-X^{\beta_1}\right)^{\frac{1}{\beta_2}}$	$X=hm/H$
(4)	Clutter	$d = \beta_1 dn^{\beta_2} H^{\beta_3}(H-hm)^{\beta_4}$	–
(5)	Cielito 1	$d = dn\sqrt{\beta_1 X + \beta_2 X^2 + \beta_3 X^3}$	$X=(H-hm)/H$
(6)	Cielito 2	$d = dn\sqrt{\beta_1 + \beta_2 X + \beta_3 X^2 + \beta_4 X^3 + \beta_5 X^4}$	$X=hm/H$
(7)	Cielito 3	$d = dn\sqrt{\beta_1 X + \beta_2 X^{\beta_3}}$	$X=(H-hm)/H$
(8)	Polinomial	$d = dn\left(\beta_1 + B_2 X + \beta_3 X^2 + \beta_4 X^3 + \beta_5 X^4 + \beta_6 X^5\right)$	$X=hm/H$
(9)	Newnham	$d = dn\beta_1 X^{\beta_2}$	$X=(H-hm)/(H-1.3)$
(10)	Rustagi y Loveless	$d = \beta_1 + \beta_2 dn X^{\beta_3}$	$X=(H-hm)/(H-1.3)$

dn: Diámetro normal. *H*: Altura total. *hm*: Altura a distintos diámetros a lo largo del fuste. β': Parámetros a estimar. ❖ *dn*: Normal diameter. *H*: Total height. *hm*: Height at different diameters along the stem. β': Parameters to be estimated.

Inc., 2008) y la técnica de máxima verosimilitud (FILM, por sus siglas en inglés). La evaluación y selección del mejor modelo se realizó con base en el mayor valor del coeficiente de determinación ajustado por el número de parámetros ($R^2_{aj.}$) y los menores valores en la Suma de Cuadrados del Error (*SCE*), Ríaz del Cuadrado Medio del Error (*RCME*), el Coeficiente de Variación (*CV*) y el Sesgo (*E*).

Para facilitar la selección del mejor modelo se usó un criterio jerárquico, para lo cual se integraron los estadísticos de bondad de ajuste (*SCE, RCME,* $R^2_{aj.}$, *CV* y *E*), y se calificaron (Sakici *et al.*, 2008) con la asignación de valores consecutivos del 1 al 10 en función de su valor para cada uno de los estadísticos empleados, siendo 1 el índice mayor y 10 el menor. Por ejemplo, al modelo con menor valor en la *RCME* se le asigna el valor 1, mientras que a los siguientes en forma asendente se les calificará con 2, 3, 4…10, según corresponda; este procedimiento se aplica para SCE, CV y E. Para la $R^2_{aj.}$ es a la inversa, y el valor 1 se asigna al modelo con mayor valor en este estadístico. Después, para cada modelo se sumaron los valores de calificación de los estadísticos para obtener un total y el modelo con la menor calificación se seleccionó como el mejor.

by assigning consecutive values from 1 to 10 in function of their value for each one of the statistics used, with 1 being the highest index and 10 the lowest. For example, a value of 1 is assigned to the model with least value in the *RCME*, while the next ones in ascending order will be scored with 2, 3, 4…10, as corresponds; this procedure is applied for SCE, CV and E. For $R^2_{aj.}$, it is inverse and the value 1 is assigned to the model with highest value in this statistic. Then, for each model, the grading values of the statistics were added to obtain a total and the model with the lowest score was selected as the best.

The autocorrelation of the errors in the models was examined with the Durbin-Watson test (Augusto *et al.*, 2009). To correct the autocorrelation problems of the taper model selected, an autorregresive model in continuous order (CAR(X)) was applied (Lara, 2011). The fitting was carried out with the structure (Zimmerman & Nuñez-Antón, 2001):

$$Y_{ij} = f\left(X_{ij}, B\right) + e_{ij} \text{ donde } e_{ij} = \sum_{k=1}^{k=X} I_k\, p_k^{h_{ij}-h_{ij-k}} e_{ij-k} + \varepsilon_{ij} \qquad (11)$$

La autocorrelación de los errores en los modelos se examinó con la prueba de Durbin-Watson (Augusto *et al.*, 2009). Para corregir los problemas de autocorrelación en el modelo de ahusamiento seleccionado se aplicó un modelo autorregresivo en orden continuo (CAR(X)) (Lara, 2011). El ajuste se realizó con la estructura (Zimmerman & Nuñez-Antón, 2001):

$$Y_{ij} = f\left(X_{ij}, B\right) + e_{ij} \text{ donde } e_{ij} = \sum_{k=1}^{k=X} I_k \, p_k^{h_{ij}-h_{ij-k}} e_{ij-k} + \varepsilon_{ij} \qquad (11)$$

donde Y_{ij} es el vector de la variable dependiente, X_{ij} la matriz de las variables independientes, B es el vector de los parámetros a estimar, e_{ij} es el *j-ésimo* residuo del árbol *i,* I_k=1 para $j>k$ y es 0 para $j\leq k$, pk es el parámetro autoregresivo de orden k a estimar, $h_{ij}-h_{ij-k}$ es la distancia que separa la altura de medición *j-ésima* de la altura de medición *j-ésimo-k* en cada árbol ($h_{ij}>h_{ij-k}$) y ε_{ij} es el error aleatorio (Álvarez *et al.,* 2005; Barrios *et al.,* 2014).

El número de retardos aplicados en el modelo CAR(X) se definió después de evaluar el estadístico de Durbin-Watson (*DW*) definiéndose un valor que fuera mayor a 1.5 y cercano a 2 (Verbeek, 2004). De forma análoga, se analizaron gráficamente los residuales para verificar problemas de heterocedasticidad, que de acuerdo a Kozak (1997), son los inconvenientes más importantes en este tipo de estudios y que violan los supuestos de la regresión. El volumen total se estimó con la ecuación de ahusamiento seleccionada, mediante la integración del diámetro *d* a lo largo del fuste con respecto a *hm* como un sólido en revolución utilizando la expresión siguiente:

$$Vt = k\int_{h_1}^{h_2} d^2 \partial hm \qquad (12)$$

donde $k=\pi/4$ es la constante volumétrica y ∂hm es el diferencial sobre la altura del fuste, mientras que h_1 y h_2 son las alturas que definen la integral y que pueden variar de $h_1=0$ hasta $h_2=H$ (altura total). El volumen comercial variable (*Vc*) se puede estimar con esta misma ecuación, pero definiendo $h_2=h_m$.

El modelo de ahusamiento elegido se utilizó para estimar *hm* a cualquier diámetro comercial de interés, previo despeje de la variable de la expresión matemática usada.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Todos los valores de los parámetros correspondientes a cada modelo ajustado fueron significativos

where Y_{ij} is the vector of the dependent variable, X_{ij} the matrix of independent variables, B is the vector of the parameters to be estimated, e_{ij} is the *j-th* residue of the tree *i,* I_k = 1 for $j>k$ and is 0 for $j\leq k$, pk is the autorregresive parameter of order k to be estimated, h_{ij}-h_{ij-k} is the distance that separates the height of the *j-th* measurement of the height of measurement *j-th-k* in each tree ($h_{ij}>h_{ij-k}$) and ε_{ij} is the random error (Álvarez *et al.,* 2005; Barrios *et al.,* 2014).

The number of lags applied in the model CAR(X) was defined after evaluating the Durbin-Watson statistic (*DW*) which is defined in a value that was higher than 1.5 and close to 2 (Verbeek, 2004). In an analogous way, the residuals were analyzed graphically to verify problems of heterocedasticity, which according to Kozak (1997), are the most important disadvantages in this type of studies and violate the assumptions of the regression.

The total volume was estimated with the taper equation selected, by integrating the diameter *d* along the stem in relation to *hm* as a solid in revolution using the following expression:

$$Vt = k\int_{h_1}^{h_2} d^2 \partial hm \qquad (12)$$

where $k=\pi/4$ is the volumetric constant and ∂hm is the differential on the log height, while h_1 and h_2 are the heights that define the integral and which can vary from $h_1=0$ to $h_2=H$ (total height). The commercial volume variable (*Vc*) can be estimated with this same equation, but defining $h_2=h_m$.

The taper model chosen was used to estimate *hm* at any commercial diameter of interest, after solving for the variable of the mathematical expression used.

RESULTS AND DISCUSSION

All the values from the parameters corresponding to each fitted model were significant with a 95 % statistical confidence and the approximate standard error was small in its majority, with the exception only of parameter β_2 from the Demaerchalk (1) model, which was very large (Table 2). The statistics of fit in the ten taper models and the final score of the system used indicate that the models Cielito 3 (7) and Fifth degree polynomial (8) are the most statistically stable (Table 3).

The models Cielito 3 (7) and Fifth degree polynomial (8) were the best when applying the criteria proposed by Trincado and Leal (2006) and Augusto *et al.* (2009), according to the values of $R^2_{aj.}$,

con una confiabilidad mayor de 95 % y el error estándar aproximado en su mayoría fue bajo, solo con excepción del parámetro β_2 del modelo de Demaerchalk (1) que fue muy alto (Cuadro 2). Los estadísticos de ajuste en los diez modelos de ahusamiento y la calificación final del sistema empleado indican que los modelos Cielito 3 (7) y Polinomial de quinto orden (8) son los más estables estadísticamente (Cuadro 3).

Los modelos Cielito 3 **(7)** y Polinomial de quinto orden (8) fueron los mejores al aplicar los criterios propuestos por Trincado y Leal (2006) y Augusto *et al.* (2009), de acuerdo con los valores de $R^2_{aj.}$, *RCM*E and *CV*, in addition to the scoring system used by Sakici *et al.* (2008) and implemented by Tamarit *et al.* (2014). The statistical fit is similar to what was found for teak plantations by Lara (2011), who also defined that a polynomial model was better to describe the stem profile from the numerous inflection points that it can describe.

The differences between the data observed and the estimation of models Cielito 3 and Fifth degree polynomial were lower than 15 %, which is an acceptable percentage in these studies according to Turribuano and Salinas (1998), who used taper functions with *Pseudotsiga mensiensii* in Chile; the

Cuadro 2. Valores de los parámetros de los modelos de ahusamiento para árboles clonales de E. urophylla en Huimanguillo, Tabasco, México.

Table 2. Values of the parameters of the taper models for clone trees of *E. urophylla* in Huimanguillo, Tabasco, Mexico.

Modelo	Parámetros	Estimación	Error estándar aproximado	Valor de t	Pr > |t|
(1)	β_1	0.3345	0.0090	37.22	<0.0001
	β_2	44.1618	3.9580	11.16	<0.0001
	β_3	0.0001	0.0000	192.31	<0.0001
	β_4	1.4947	0.0156	95.71	<0.0001
(2)	β_1	−2.1846	0.0040	−550.50	<0.0001
	β_2	1.0005	0.0015	688.04	<0.0001
(3)	β_1	0.9682	0.0234	41.35	<0.0001
	β_2	1.3249	0.0291	45.61	<0.0001
(4)	β_1	0.3870	0.0300	12.90	<0.0001
	β_2	0.6696	0.0150	44.74	<0.0001
	β_3	0.8105	0.0089	91.45	<0.0001
	β_4	−0.6593	0.0198	−33.36	<0.0001
(5)	β_1	0.6171	0.0313	19.74	<0.0001
	β_2	−0.6144	0.0968	−6.35	<0.0001
	β_3	1.2550	0.0712	17.62	<0.0001
(6)	β_1	1.4268	0.0067	214.61	<0.0001
	β_2	−6.2136	0.0948	−65.57	<0.0001
	β_3	14.7676	0.3654	40.41	<0.0001
	β_4	−16.6882	0.5047	−33.06	<0.0001
	β_5	6.7078	0.2289	29.30	<0.0001
(7)	β_1	0.6916	0.0053	131.31	<0.0001
	β_2	0.9627	0.0105	91.51	<0.0001
	β_3	15.7811	0.5157	30.60	<0.0001
(8)	β_1	1.2729	0.0030	431.75	<0.0001
	β_2	−5.5526	0.1032	−53.83	<0.0001
	β_3	4.8763	0.0832	58.60	<0.0001
	β_4	−3.7086	0.0575	−64.54	<0.0001
	β_5	−2.6549	0.0386	−68.75	<0.0001
	β_6	−1.7863	0.0244	−73.17	<0.0001
(9)	β_1	1.0099	0.0022	451.58	<0.0001
	β_2	0.8179	0.0091	89.95	<0.0001
(10)	β_1	0.0198	0.0012	17.05	<0.0001
	β_2	0.9263	0.0051	180.90	<0.0001
	β_3	1.0048	0.0141	71.27	<0.0001

Cuadro 3. Estadísticos de bondad de ajuste para los modelos de ahusamiento evaluados para árboles clonales de *E. urophylla* en Huimanguillo, Tabasco, México.
Table 3. Goodness of fit statistics for the taper models evaluated for clone trees of *E. urophylla* in Huimanguillo, Tabasco, Mexico.

Modelo	SCE	RCME	$R^2_{aj.}$	CV	E	Cal. total
(1)	0.628	0.0172	0.938	15.15	0.0015	17
(2)	0.797	0.0193	0.922	17.13	0.0028	34
(3)	0.977	0.0214	0.901	18.62	0.0048	40
(4)	0.663	0.0177	0.935	15.51	0.0004	18
(5)	0.699	0.0181	0.932	15.87	0.0015	23
(6)	0.539	0.0159	0.947	13.88	0.0022	12
(7)	0.544	0.0160	0.947	14.12	0.0003	11
(8)	0.449	0.0145	0.956	12.89	0.0017	9
(9)	0.787	0.0196	0.913	16.18	0.0027	34
(10)	0.689	0.0184	0.924	15.55	0.0003	22

SCE: Suma de Cuadrados del Error. *RCME*: Raíz del Cuadrado Medio del Error. $R^2_{aj.}$: Coeficiente de determinación ajustado por el número de parámetros. *CV*: Coeficiente de Variación. *E*: Sesgo. Cal. total: Calificación total de los estadísticos. ❖ *SCE*: Residual Sum of Squares. *RCME*: Root Mean Square Error. $R^2_{aj.}$: Coefficient of determination adjusted by the number of parameters. *CV*: Coefficient of Variation. *E*: Bias. Cal. total: Total score of the statistics.

y *CV*, además del sistema de calificación utilizado por Sakici *et al.* (2008) e implementado por Tamarit *et al.* (2014). El ajuste estadístico es semejante a lo encontrado por Lara (2011) para plantaciones de teca, quien también determinó que un modelo polinomial fue mejor para describir el perfil fustal por los numerosos puntos de inflexión que puede describir.

Las diferencias entre los datos observados y la estimación de los modelos Cielito 3 y Polinomial de quinto orden fueron inferiores al 15 %, que es un porcentaje aceptable en estos estudios de acuerdo a lo reportado por Turribuano y Salinas (1998) al emplear funciones de ahusamiento en *Pseudotsiga mensiensii* en Chile; las diferencias ocurren principalmente cerca de las dimensiones del *dn* y *dt*. Además, los valores concuerdan con los reportados por Gezan *et al.* (2009) al utilizar los modelos simples de Bruce *et al.* (1968) y Kozak (1988) que se ajustaron adecuadamente a la población evaluada. Kozak *et al.* (1969) y Kozak (1997) indican que este tipo de modelos simples presenta sesgos principalmente en la parte basal del árbol y en la estimación del diámetro final para converger en cero. Sin embargo, en estudios con modelos de ahusamiento de tipo segmentado o ajustados bajo el enfoque de efectos mixtos, se redujo este tipo de errores en las partes mencionadas.

El valor de la prueba de *DW* para las diez funciones utilizadas varió entre 1.15 y 0.54, lo cual muestra que en todos los casos existe presencia de autocorrelación de los errores (Institute Inc. Statistical Analysis

differences happen primarily close to the dimensions of *dn* and *dt*. In addition, the values agree with those reported by Gezan *et al.* (2009) when using the simple models by Bruce *et al.* (1968) and Kozak (1988), which fitted adequately to the population evaluated. Kozak *et al.* (1969) and Kozak (1997) indicate that this type of simple models present biases primarily in the basal part of the tree and in the estimation of the final diameter to converge to zero. However, in studies with taper models of segmented type or fitted under the approach of mixed effects, this type of errors was reduced.

The value of the *DW* test for the ten functions used varied between 1.15 and 0.54, which shows that in every case there is presence of autocorrelation of the errors (Institute Inc. Statistical Analysis System, 2008). The models Cielito 3 and Fifth degree polynomial, which had the best value from the scoring and fitting system, were corrected for the autocorrelation problem by applying a lag in the residuals (*lar1*) with the structure CAR(1). The values of goodness of fit are adequate and the parameters of the final models proposed are significant and, in addition, the correction generated values in the *DW* statistic of 1.82 and 1.75, respectively, which indicates that the problem was corrected (Table 4).

The graphic behavior of the estimated tapering with the models selected is similar to that reported by Pompa *et al.* (2009), Pompa-García *et al.* (2009) and Tapia and Návar (2011), since the trend of

System, 2008). Los modelos Cielito 3 y Polinomial de quinto orden, los cuales tuvieron el mejor valor del sistema de calificación y ajuste, se les corrigio el problema de autocorrelación al aplicar un retardo en los residuales (*lar1*) con la estructura CAR(1). Los valores de bondad de ajuste son adecuados y los parámetros de los modelos finales propuestos son significativos y, además, la corrección generó valores en el estadístico *DW* de 1.82 y 1.75, respectivamente, lo cual indica que el problema fue corregido (Cuadro 4).

El comportamiento gráfico del ahusamiento estimado con los modelos seleccionados es semejante al reportado por Pompa *et al.* (2009), Pompa-García *et al.* (2009) y Tapia y Návar (2011), pues se observa la tendencia de disminución del diámetro (*d*) a medida que la altura (*hm*) se acerca a la altura total (*H*) del fuste, por lo cual ambos modelos son adecuados para describir el perfil del árbol de esta especie en los predios estudiados (Figura 1).

El comparativo de valores de diámetro observado *versus* diámetro predicho, muestra su similitud (Figura 2) y la tendencia es congruente con lo encontrado en valores altos de *d* por Lara (2011) al analizar cinco modelos de ahusamiento.

El análisis gráfico de los residuales de los modelos Polinomial de quinto orden y Cielito 3, no indica problemas de heterocedasticidad de la varianza (Figura 3), resultado que coincide a lo reportado por

decreasing diameter (*d*) is observed as the height (*hm*) approaches the total height (*H*) of the log, which is why both models are adequate to describe the tree profile of this species in the plots studied (Figure 1).

The comparative of values of observed diameter *versus* predicted diameter shows their similarity (Figure 2) and the trend is consistent with that found in high values of *d* by Lara (2011) when analyzing five taper models.

The graphic analysis of the residuals of the models Fifth degree polynomial and Cielito 3 does not indicate problems of heterocedasticity (Figure 3), result that agrees with that reported by Fassola *et al.* (2007) when analyzing the taper model of Bi in *E. grandis* and Lara (2011) for *Tectona grandis* with the models by Forslund, González, Kozak, Ormerod and Fifth degree polynomial.

When verifying the percentage errors of the estimation of tapering at different heights of the stem in the corrected models, it is observed that the deviation of the estimates in the two models selected is lower than 12 % in the tree section from the base to the normal diameter; in the rest, the errors in the predictions are lower than 2 % (Figure 4). The distribution of the percentage errors throughout the stem takes place in a similar manner to that reported by Fassola *et al.* (2007), where the highest proportion was found in the lower parts of the height of the normal diameter.

Cuadro 4. Estadísticos de bondad de ajuste y valores de los parámetros de los modelos de ahusamiento Cielito 3 y Polinomial de quinto orden corregidos por autocorrelación para árboles de *E. urophylla* en Huimanguillo, Tabasco, México.
Table 4. Statistics of goodness of fit and values of the parameters from the taper models Cielito 3 and Fifth degree polynomial corrected by autocorrelation for trees of *E. urophylla* in Huimanguillo, Tabasco, Mexico.

Modelo	SCE	RCME	$R^2_{aj.}$	DW	Parámetros	Estimación	EEA	Valor de t	Pr > |t|
7	0.374	0.0133	0.963	1.75	β_1	0.6953	0.00802	86.66	<0.0001
					β_2	1.0812	0.01070	100.92	<0.0001
					β_3	17.4023	0.05832	29.84	<0.0001
8	0.332	0.0125	0.967	1.82	β_1	1.3130	0.00256	512.10	<0.0001
					β_2	−6.0812	0.01219	−49.87	<0.0001
					β_3	5.1035	0.09890	51.59	<0.0001
					β_4	−3.8067	0.06900	−55.16	<0.0001
					β_5	−2.6987	0.04660	−57.91	<0.0001
					β_6	−1.8051	0.02950	−61.18	<0.0001

SCE: Suma de Cuadrados del Error. *RCME*: Raíz del Cuadrado medio del error. $R^2_{aj.}$: Coeficiente de determinación ajustado por el número de parámetros. *DW*: Prueba de Durbin-Watson. *EEA*: Error estándar aproximado. ❖ *SCE*: Residual Sum of Squares. *RCME*: Root Mean Square Error. $R^2_{aj.}$: Coefficient of determination adjusted by the number of parameters. *DW*: Durbin-Watson test. *EEA*: Approximate standard error.

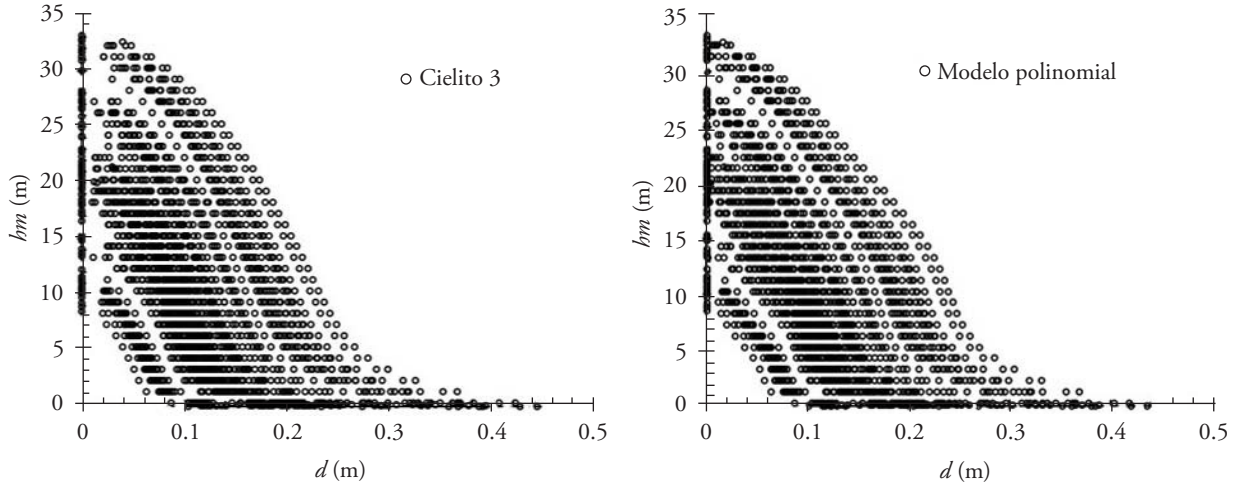

Figura 1. Predicción del perfil de árboles de clones de *E. urophylla* con los modelos Cielito 3 y Polinomial de quinto orden en Huimanguillo, Tabasco, México.

Figure 1. Prediction of the tree profile of *E. urophylla* clones with the models Cielito 3 and Fifth degree polynomial in Huimanguillo, Tabasco, Mexico.

Fassola *et al.* (2007) al analizar el modelo de ahusamiento de Bi en *E. grandis* y Lara (2011) para *Tectona grandis* con los modelos de Forslund, González, Kozak, Ormerod y Polinomial de quinto orden.

Al verificar los errores porcentuales de la estimación del ahusamiento a diferentes alturas del fuste en

When considering the lowest values in *SCE, RCME* and *CV*, the highest statistics of $R^2_{aj.}$ and *DW,* in addition to not having apparent problems of heterocedasticity and deviations in the estimation, the Fifth degree polynomial model (model 8, Table 1) was selected as the best for the description of

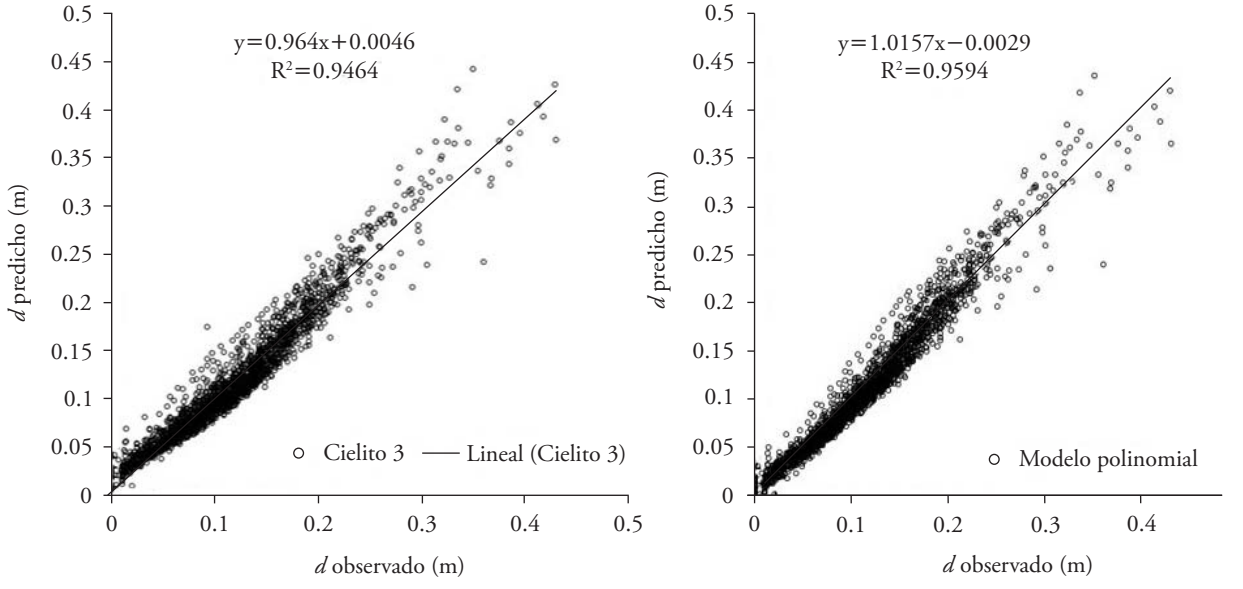

Figura 2. Diámetro observado *vs* predicho de los modelos de ahusamiento Cielito 3 y Polinomial de quinto orden ajustados para árboles clonales de *E. urophylla* en Huimanguillo, Tabasco, México.

Figure 2. Observed diameter *vs* predicted diameter of the taper models Cielito 3 and Fifth degree polynomial fitted for clone trees of *E. urophylla* in Huimanguillo, Tabasco, Mexico.

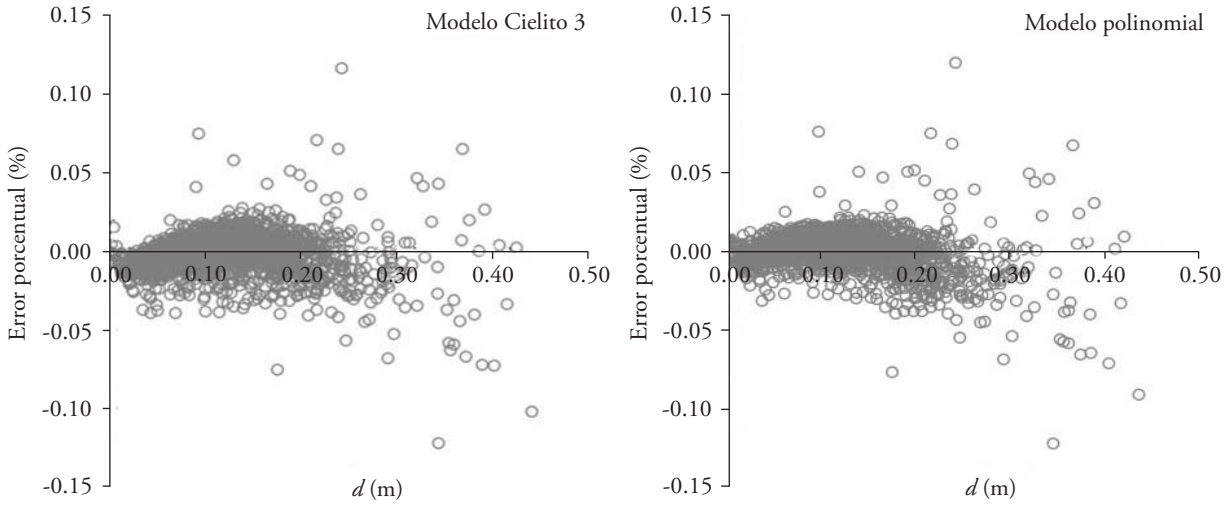

Figura 3. Residuales de los modelos seleccionados para ahusamiento de árboles clonales de *E. urophylla* en Huimanguillo, Tabasco, México.

Figure 3. Residuals of the taper models selected for clone trees of *E. urophylla* in Huimanguillo, Tabasco, Mexico.

los modelos corregidos, se observa que la desviación de las estimaciones en los dos modelos seleccionados es menor a 12 % en la sección del árbol desde la base hasta el diámetro normal; en el resto, los errores de las predicciones son menores al 2 % (Figura 4). La distribución de los errores porcentuales a lo largo del fuste ocurre de forma semejante a lo reportado por Fassola *et al.* (2007), donde la mayor proporción se

the stem profile of clone trees of *E. urophylla* under plantation conditions.

The model selected is reliable in the description of the tree profile. Lara (2011) and Orfanó *et al.* (2006) found good results for teak in Brazil when using various types of polynomial models, while in Argentina, Fassola *et al.* (2007) and Crechi *et al.*

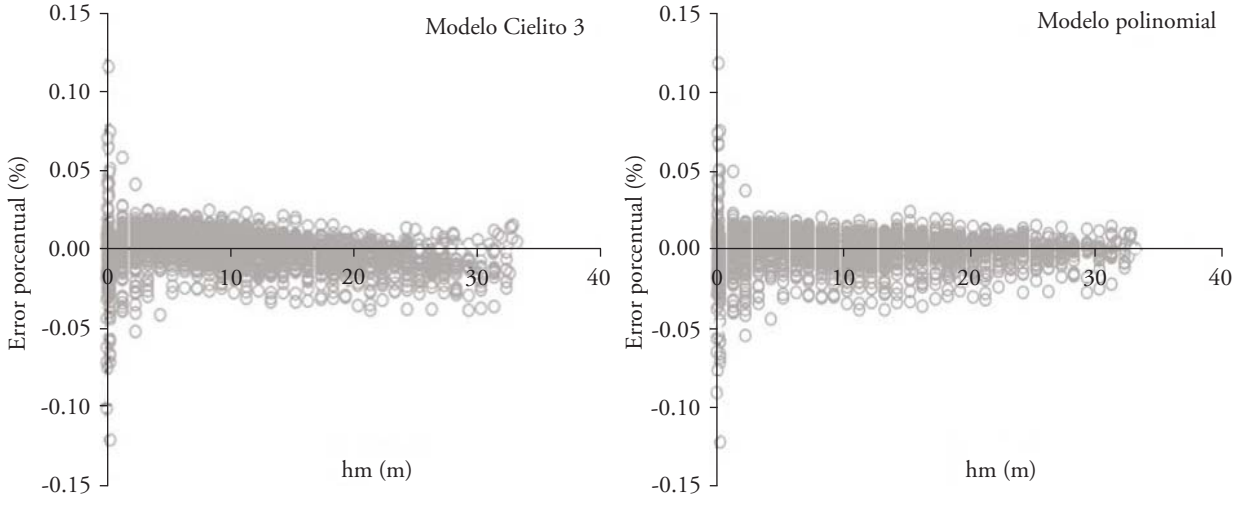

Figura 4. Error porcentual de estimación del *d* a distintas *hm* en el fuste mediante los modelos Cielito 3 y Polinomial de quinto orden ajustados para árboles clonales de *E. urophylla* en Huimanguillo, Tabasco, México.

Figure 4. Percentage error of estimation of *d* at different *hm* in the stem through the models Cielito 3 and Fifth degree polynomial, fitted for clone trees of *E. urophylla* in Huimanguillo, Tabasco, Mexico.

encuentra en las partes inferiores a la altura del diámetro normal.

Al considerar los valores menores en la *SCE,* la *RCME* y *CV*, los mayores estadísticos de $R^2_{aj.}$ y *DW,* además de no presentar problemas aparentes de heterocedasticidad y desviaciones en la estimación, se eligió el modelo Polinomial de quinto orden (modelo 8, Cuadro 1) como el mejor para la descripción del perfil fustal de árboles clonales de *E. urophylla* en condiciones de plantación.

El modelo seleccionado es confiable en la descripción del perfil del árbol. Lara (2011) y Orfanó *et al.* (2006) encontraron buenos resultados para teca en Brasil al usar diversos tipos de modelos polinomiales, mientras que, en Argentina, Fassola *et al.* (2007) y Crechi *et al.* (2008) obtuvieron buenos ajustes para *E. grandis* y *Grevillea robusta*, respectivamente.

Para estimar la altura comercial a cualquier diámetro de interés del fuste con el modelo propuesto, la ecuación que estima *hm* presenta en su solución raíces imaginarias que pueden ser reducidas algebraicamente hasta ser eliminadas. Por ello, la solución se obtuvo en dos formas: la primera fue implementando en la herramienta SOLVER del paquete Microsoft Excel una aproximación numérica para alturas a diferentes secciones, donde $d=d_c$, en la cual el valor de *hm* es cambiante y da la solución. La expresión utilizada es la siguiente:

$$0 = d_c - \left[dn\left(\beta_1 + \beta_2 X + \beta_3 X^2 + \beta_4 X^3 + \beta_5 X^4 + \beta_6 X^5\right)\right] \quad (13)$$

donde *dn* es el diémtro normal, X_i es una aproximación de SOLVER a cero y d_c representa el diámetro comercial establecido.

La segunda forma es la propuesta por Cruz-Cobos *et al.* (2008), que consiste en usar el método iterativo proponiendo una solución parcial y redundante en *X*. La aproximación al valor buscado es el producto de la multiplicación del valor de dicha solución parcial (X_j) y la altura total (*H*), con la cual se define este valor parcial cuando la diferencia absoluta estimada entre una solución previa y la utilizada, sea constante o lo menor posible posterior a la realización de las iteraciones necesarias. La expresión para este modelo es la siguiente:

(2008) obtained good fits for *E. grandis* and *Grevillea robusta*, respectively.

To estimate the commercial height at any diameter of interest of the stem with the model proposed, the equation that estimates *hm* presents in its solution imaginary roots that can be reduced algebraically until being eliminated. Therefore, the solution was obtained in two ways. The first was by implementing in the SOLVER tool of the Excel Microsoft package, a numerical approximation for heights at different sections, where $d = d_c$, in which the value of *hm* is changing and gives the solution, and the expression used is the following:

$$0 = d_c - \left[dn\left(\beta_1 + \beta_2 X + \beta_3 X^2 + \beta_4 X^3 + \beta_5 X^4 + \beta_6 X^5\right)\right] \quad (13)$$

where *dn* is the normal diameter, X_i is an approximation of SOLVER to zero and d_c represents the commercial diameter established.

The second way is proposed by Cruz-Cobos *et al.* (2008), and consists in using the iterative method suggesting a partial and redundant solution in *X*. The approximation to the value sought is the product of the multiplication of the value of such a partial solution (X_j) and the total height (*H*), with which this partial value is defined when the absolute difference estimated between a previous solution and the one used is either constant or the least possible, after the realization of the necessary iterations. The expression for this model is the following:

$$X_j = \frac{\frac{d_c}{dn} - \beta_1}{\left(\beta_2 + \beta_3 X + \beta_4 X^2 + \beta_5 X^3 + \beta_6 X^4\right)} \quad (14)$$

where X_j is the iterative approximation and partial solution for *hm*.

When verifying in the two procedures the convergence when $d=dn$, it was obtained that *hm* is equal to the height of 1.3 m and with regards to *H* the average deviation is lower than 1 %, situation that is desirable to estimate the height at any diameter established or to calculate the V_c with the dimensions given.

$$X_j = \frac{\frac{d_c}{dn} - \beta_1}{\left(\beta_2 + \beta_3 X + \beta_4 X^2 + \beta_5 X^3 + \beta_6 X^4\right)} \quad (14)$$

donde X_j es la aproximación iterativa y solución parcial para *hm*.

Al verificar en los dos procedimientos la convergencia cuando $d=dn$, se obtuvo que *hm* es igual a la altura de 1.3 m y con respecto a *H* la desviación en promedio es menor al 1 %, situación deseable para estimar la altura a cualquier diámetro establecido o calcular el V_c con las dimensiones dadas.

Para determinar el cambio de forma dendrométrica del fuste en porcentaje con respecto a la altura total, se usaron los valores estimados de los parámetros y la segunda derivada (∂) con respecto a *X* del modelo polinomial de quinto orden, donde se obtuvo una solución y el valor resultante se sustituyó en la ecuación original para conocer los puntos de inflexión. Se determinó que los árboles de *E. urophylla* tienen tres puntos de cambio y cuatro formas definidas. Estos puntos ocurren en promedio al 36, 50 y 73 % de la *H*. Así, el árbol desde el suelo hasta el primer punto de inflexión es de forma neiloide, seguido de una sección con forma cilíndrica y posterior una forma de paraboloide, mientras que la punta tiene una forma de cono.

Para complementar la descripción del perfil del árbol y realizar estimaciones precisas de volumen comercial a diferentes alturas del fuste o determinar la distribución de productos, se obtuvo el modelo de *Vc* compatible con la función de ahusamiento (15). Este modelo es el resultado de la integración matemática del modelo polinomial de quinto orden con respecto a *hm* definiendo los límites entre la altura total y la altura del tocón (*hm*=0) de la expresión (12): $Vt = k\int_{h_1}^{h_2} d^2 \partial hm$, expresada de la forma siguiente:

$$Vc = \frac{\pi}{4} k \times dn^2 \int_0^{hm} \left(\beta_1 + \beta_2\left(\frac{hm}{H}\right) + \beta_3\left(\frac{hm}{H}\right)^2 + \beta_4\left(\frac{hm}{H}\right)^3 + \beta_5\left(\frac{hm}{H}\right)^4 + \beta_6\left(\frac{hm}{H}\right)^5\right)^2 \delta hm \quad (15)$$

Una vez integrada esta función y evaluada entre 0 y *hm*, con simplificación posterior, se tiene que la

In order to determine the change of dendrometric shape of the stem in percentage in relation to the total height, the values estimated from the parameters and the second derivate (∂) were used in relation to the *X* from the fifth degree polynomial model, where a solution was obtained and the resulting value was substituted in the original equation to understand the points of inflection. It was determined that *E. urophylla* trees have three changing points and four defined shapes. These points happen in average at 36, 50 and 73 % of the *H*. Thus, the tree from the ground up to the first point of inflection is of neiloid shape, followed by a section with cylinder shape and then a paraboloid shape, while the tip has a cone shape.

To complement the description of the tree profile and to perform accurate estimations of commercial volume at different heights of the stem or to determine the distribution of products, the *Vc* model compatible with the taper function was obtained (15). This model is the result of the mathematical integration of the fifth degree polynomial model in relation to *hm*, defining the limits between the total height and the stump height (*hm*=0) of expression (12): $Vt = k\int_{h_1}^{h_2} d^2 \partial hm$, expressed as follows:

$$Vc = \frac{\pi}{4} k \times dn^2 \int_0^{hm} \left(\beta_1 + \beta_2\left(\frac{hm}{H}\right) + \beta_3\left(\frac{hm}{H}\right)^2 + \beta_4\left(\frac{hm}{H}\right)^3 + \beta_5\left(\frac{hm}{H}\right)^4 + \beta_6\left(\frac{hm}{H}\right)^5\right)^2 \delta hm \quad (15)$$

Once this function is integrated and evaluated between 0 and *hm*, with later simplification, we find that the equation of commercial volume (V_c) at any height *hm* on the stem was:

$$V_t = \frac{\pi \times dn^2}{4} \times H \times \left(\beta_1 + \frac{2\beta_1\beta_3 + \beta_2^2}{3} + \frac{2\beta_1\beta_5 + 2\beta_2\beta_4 + \beta_3^2}{5} + \frac{\beta_1\beta_6 + \beta_2\beta_5 + \beta_3\beta_4}{3} + \frac{\beta_1\beta_4 + \beta_2\beta_3}{2} + \beta_1\beta_2 + \frac{2\beta_2\beta_6 + 2\beta_3\beta_5 + \beta_4^2}{7} + \frac{\beta_3\beta_6 + \beta_4\beta_5}{4} + \frac{2\beta_4\beta_6 + \beta_5^2}{9} + \frac{\beta_5\beta_6}{5} + \frac{\beta_6^2}{11}\right) \quad (16)$$

ecuación de volumen comercial (V_c) a cualquier altura *hm* sobre el fuste es:

$$V_t = \frac{\pi \times dn^2}{4} \times H \times \left(\beta_1 + \frac{2\beta_1\beta_3 + \beta_2^2}{3} + \frac{2\beta_1\beta_5 + 2\beta_2\beta_4 + \beta_3^2}{5} + \frac{\beta_1\beta_6 + \beta_2\beta_5 + \beta_3\beta_4}{3} + \frac{\beta_1\beta_4 + \beta_2\beta_3}{2} + \beta_1\beta_2 + \frac{2\beta_2\beta_6 + 2\beta_3\beta_5 + \beta_4^2}{7} + \frac{\beta_3\beta_6 + \beta_4\beta_5}{4} + \frac{2\beta_4\beta_6 + \beta_5^2}{9} + \frac{\beta_5\beta_6}{5} + \frac{\beta_6^2}{11} \right) \quad (16)$$

Al usar esta expresión de volumen comercial, pero definiendo el valor de *hm* como *H,* se obtiene el modelo de volumen total de la forma:

$$V_t = \frac{\pi \times dn^2}{4} \times H \times \left(\beta_1^2 + \frac{2\beta_1\beta_3 + \beta_2^2}{3} + \frac{2\beta_1\beta_5 + 2\beta_2\beta_4 + \beta_3^2}{5} + \frac{\beta_1\beta_6 + \beta_2\beta_5 + \beta_3\beta_4}{3} + \frac{\beta_1\beta_4 + \beta_2\beta_3}{2} + \beta_1\beta_2 + \frac{2\beta_2\beta_6 + 2\beta_3\beta_5 + \beta_4^2}{7} + \frac{\beta_3\beta_6 + \beta_4\beta_5}{4} + \frac{2\beta_4\beta_6 + \beta_5^2}{9} + \frac{\beta_5\beta_6}{5} + \frac{\beta_6^2}{11} \right) \quad (17)$$

El modelo se puede definir como un modelo de forma constante $V_t = \alpha \times (d^2H)$, donde el parámetro *a* queda definido de la forma siguiente:

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \times \left(\beta_1^2 + \frac{2\beta_1\beta_3 + \beta_2^2}{3} + \frac{2\beta_1\beta_5 + 2\beta_2\beta_4 + \beta_3^2}{5} + \frac{\beta_1\beta_6 + \beta_2\beta_5 + \beta_3\beta_4}{3} + \frac{\beta_1\beta_4 + \beta_2\beta_3}{2} + \beta_1\beta_2 + \frac{2\beta_2\beta_6 + 2\beta_3\beta_5 + \beta_4^2}{7} + \frac{\beta_3\beta_6 + \beta_4\beta_5}{4} + \frac{2\beta_4\beta_6 + \beta_5^2}{9} + \frac{\beta_5\beta_6}{5} + \frac{\beta_6^2}{11} \right)$$

Al sustituir los parámetros estimados del modelo de ahusamiento (8) se obtuvo un modelo de tipo factor de forma constante donde $V_t = 0.32204 \times (d^2H)$ (18), que se puede utilizar para la estimación del volumen total en árboles de la especie estudiada en las PFC referidas.

El ajuste de la ecuación de volumen comercial resultante de la integración del modelo polinomial

When using this expression of commercial volume, although defining the value of *hm* as *H,* the total volume model is obtained of the shape:

$$V_t = \frac{\pi \times dn^2}{4} \times H \times \left(\beta_1^2 + \frac{2\beta_1\beta_3 + \beta_2^2}{3} + \frac{2\beta_1\beta_5 + 2\beta_2\beta_4 + \beta_3^2}{5} + \frac{\beta_1\beta_6 + \beta_2\beta_5 + \beta_3\beta_4}{3} + \frac{\beta_1\beta_4 + \beta_2\beta_3}{2} + \beta_1\beta_2 + \frac{2\beta_2\beta_6 + 2\beta_3\beta_5 + \beta_4^2}{7} + \frac{\beta_3\beta_6 + \beta_4\beta_5}{4} + \frac{2\beta_4\beta_6 + \beta_5^2}{9} + \frac{\beta_5\beta_6}{5} + \frac{\beta_6^2}{11} \right) \quad (17)$$

The model can be defined as a model of constant shape $V_t = \alpha \times (d^2H)$, where the parameter *a* is defined in the following way:

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \times \left(\beta_1^2 + \frac{2\beta_1\beta_3 + \beta_2^2}{3} + \frac{2\beta_1\beta_5 + 2\beta_2\beta_4 + \beta_3^2}{5} + \frac{\beta_1\beta_6 + \beta_2\beta_5 + \beta_3\beta_4}{3} + \frac{\beta_1\beta_4 + \beta_2\beta_3}{2} + \beta_1\beta_2 + \frac{2\beta_2\beta_6 + 2\beta_3\beta_5 + \beta_4^2}{7} + \frac{\beta_3\beta_6 + \beta_4\beta_5}{4} + \frac{2\beta_4\beta_6 + \beta_5^2}{9} + \frac{\beta_5\beta_6}{5} + \frac{\beta_6^2}{11} \right)$$

By substituting the parameters estimated of the taper model (8), a model of constant shape factor was obtained where $V_t = 0.32204 \times (d^2H)$ (18), which can be used for the estimation of the total volume in trees of the species studied in the CFP referred.

The fitting of the commercial volume equation resulting from the integration of the fifth degree polynomial model, on its own, tends to present non-significant parameters. However, the inclusion in a simultaneous system of the expressions (8) and (16) does not present this inconvenient because the colinearity between its parameters is broken. This allows estimating in a reliable way the comercial volumen at a given diameter or height; the expression coincides with what was obtained by Orfanó *et al.* (2006) and Lara (2011) for this modBy simultaneously fitting the compatible system of taper-commercial volumen using the technique of maximum likelihood, problems of autocorrelation and heterocedasticity are observed, which is why

de quinto orden, por si sola, tiende a presentar parámetros no significativos. Sin embargo, la inclusión en un sistema simultáneo de las expresiones (8) y (16) no presenta este inconveniente debido a que se rompe la colinealidad entre sus parámetros. Lo anterior permite estimar de forma confiable el volumen comercial a un diámetro o altura dada; la expresión concuerda con lo obtenido por Orfanó *et al.* (2006) y Lara (2011) para este modelo.

Al ajustar de forma simultánea el sistema compatible de ahusamiento-volumen comercial utilizando la técnica de máxima verosimilitud, se observan problemas de autocorrelación y heterocedasticidad, por lo cual se decidió agregar un retardo (*lar(1)*) con un modelo de tipo CAR(X) tanto al *d* como al *Vc* para corregir el problema, además de ponderar los residuales de este último para reducir el problema heterocedastisidad. Diéguez-Aranda *et al.* (2009) señalan que, al estimar todos los parámetros del sistema de manera simultánea, se optimiza la suma de cuadrados de los errores. Con ello se minimizan los errores en la predicción tanto del diámetro a diferentes alturas, como del volumen. Los valores de los parámetros son significativos y los estadísticos del ajuste simultáneo del sistema compatible de ahusamiento y volumen comercial son adecuados (Cuadro 5).

Los estadísticos de ajuste tanto para *d* como *Vc* indican una descripción de los datos superior al 96 % y todos sus parámetros son significativos, lo cual indica un buen ajuste estadístico a los datos utilizados. Además, y para corregir la autocorrelación en *d*, el valor de la prueba de *DW* fue igual a 1.83, lo cual indica la inexistencia de estos problemas según

it was decided to add a lag (*lar(1)*) with a model of type CAR(X), both to *d* and to *Vc* in order to correct the problem, in addition to weighing the residuals of the latter to reduce the heterocedasticity problem. Diéguez-Aranda *et al.* (2009) point out that when estimating all the parameters of the system simultaneously, the residual sum of square errors is optimized. With this, the errors in the prediction are minimized, both of the diameter at different heights and of the volume. The values of the parameters are significant and the statistics of the simultaneous fit of the compatible system of taper and commercial volume are adequate (Table 5).

The statistics of fit both for *d* and *Vc* indicate a description of the data higher than 96 % and all the parameters are significant, which indicates a good statistical fit to the data used. In addition, and to correct the autocorrelation in *d*, the value of the *DW* test was equal to 1.83, which indicates the inexistence of these problems, according to Barrios *et al.* (2014), because the value approaches 2 in the Durbin-Watson test. However, in this type of fit the contrast between the variables observed and those predicted should be examined graphically.

Figure 5 (A and B) shows the trend of the estimations of accumulated volume ($Vc_{acumulado}$) in relation to *d* and *hm,* which are similar to those reported by Tamarit *et al.* (2014) for estimation with the model of V_c. In addition, the data observed were compared against those predicted by the model (Figure 5C).

The estimations of V_c with the function generated from the fifth degree polynomial model are good,

Cuadro 5. Valores de los estadísticos y parámetros del ajuste simultáneo de ahusamiento y volumen comercial para *E. urophylla* en Huimanguillo, Tabasco, México.

Table 5. Values of the statistics and parameters of simultaneous fit of tapering and commercial volume for *E. urophylla* in Huimanguillo, Tabasco, Mexico.

Modelo	SCE	RCME	$R^2_{ajustada}$	Parámetros	Estimación	EEA	Valor de t	Pr > |t|
d	0.274	0.012	0.966	β_1	1.0399	0.0047	221.85	<0.0001
Vc	1.779	0.030	0.979	β_2	−1.1466	0.0304	−37.70	<0.0001
				β_3	−0.2389	0.0384	−6.23	<0.0001
				β_4	0.8769	0.0666	13.17	<0.0001
				β_5	0.6111	0.1145	5.34	<0.0001
				β_6	−0.9743	0.0126	−77.44	<0.0001
				lar(1)	0.5823	0.0073	80.30	<0.0001

SCE: Suma de Cuadrados del Error. *RCME*: Raíz del Cuadrado Medio del Error. $R^2_{aj.}$: Coeficiente de determinación ajustado por el número de parámetros. *EEA*: Error estándar aproximado. ❖ *SCE*: Residual Sum of Squares. *RCME*: Root Mean Square Error. $R^2_{aj.}$: Coefficient of determination adjusted by the number of parameters. *DW*: Durbin-Watson test. *EEA*: Approximate standard error.

lo indican Barrios *et al.* (2014) al acercarse el valor a 2 en la prueba de Durbin-Watson. Sin embargo, en este tipo de ajustes se deberá examinar de forma gráfica el contraste entre las variables observadas y las predichas.

En la Figura 5 (A y B) se muestra la tendencia de las estimaciones del volumen acumulado ($Vc_{acumulado}$) con respecto al *d* y *hm,* las cuales son semejantes a las reportadas por Tamarit *et al.* (2014) para la estimación con el modelo de V_c. Además, se compararon los datos observados contra los predichos por el modelo (Figura 5C).

Las estimaciones de V_c con la función generada a partir del modelo polinomial de quinto orden son buenas, ya que el sesgo promedio es sólo 4.41 %, aunque puede presentar el inconveniente de que el sesgo aumente y el *Vc* se sobreestime en árboles con volúmenes comerciales superiores a 0.4 m^3, por lo que el rango de aplicabilidad de la función es para individuos que tengan menor volumen que el mencionado.

La ecuación de forma variable derivada del modelo (18) para estimar el volumen total se puede usar de forma confiable. Sin embargo, la expresión compatible ajustada de forma simultánea para calcular el volumen comercial (16) tiene buenos valores estadísticos, pero tiende a presentar sesgos. Además, para modelar el ahusamiento se sugiere utilizar los

since the average bias is only 4.41 %, although it can present the inconvenience of the bias increasing and the *Vc* being overestimated in trees with commercial volumes higher than 0.4 m^3, which is why the range of applicability of the function is for individuals that have volume lower than the one mentioned.

The equation of variable form derived from the model (18) to estimate the total volume can be used in a reliable way. However, the compatible expression simultaneously fitted to calculate the commercial volume (16) has good statistical values, but it tends to present biases. In addition, to model the taper it is suggested to use the parameters obtained from the fitted fifth degree polynomial model or else to test in its fitting the inclusion of random effects that allow evaluating the effect of the variability of the genetic base and the changing profile of trees.

CONCLUSION

The function of the tree profile suggested can be used to describe the taper and to determine the height at any diameter established, which allows estimating the distribution of products or the commercial volume in trees from existing commercial forest plantations, due to the close relationship of the tree shape with the distribution of volume along the stem. However, because it is a fast-growing species

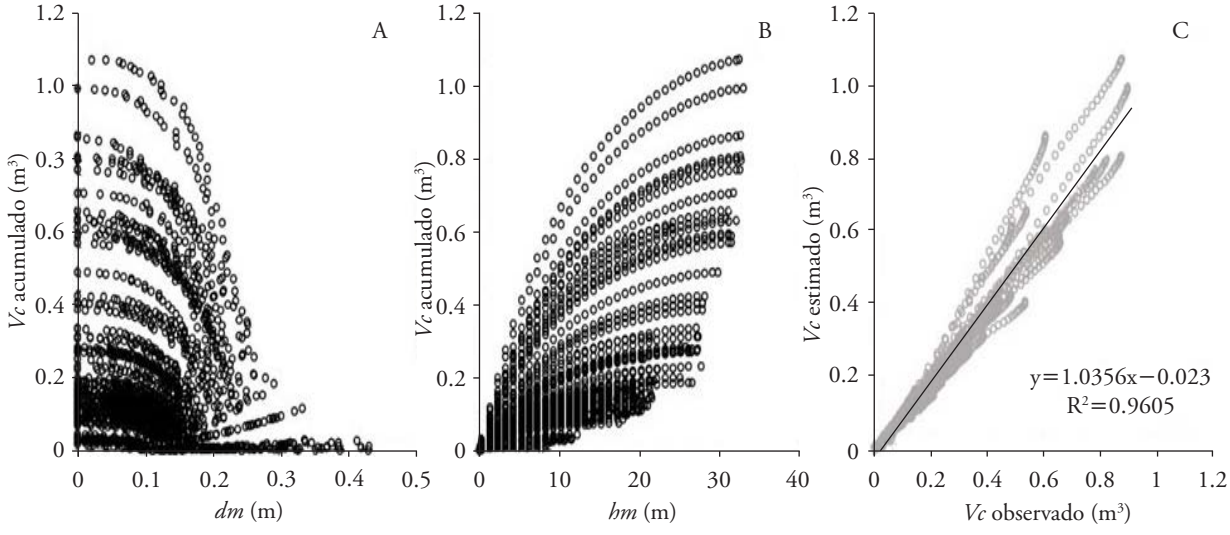

Figura 5. Comportamiento entre el *d* y *hm* con respecto al V_c (A y B) y gráfica de datos observados *vs* predichos del modelo de V_c (C) para *E. urophylla* en Huimanguillo, Tabasco, México.

Figure 5. Behavior between *d* and *hm* in relation to the V_c (A and B) and graph of the data observed *vs* predicted from the model of V_c (C) for *E. urophylla* in Huimanguillo, Tabasco, Mexico.

parámetros obtenidos del ajuste en el modelo polinomial de quinto orden o bien probar en su ajuste la inclusión de efectos aleatorios que permitan evaluar el efecto de la variabilidad de la base genética y el perfil cambiante de los árboles.

CONCLUSIÓN

La función de perfil del árbol propuesta se puede utilizar para describir el ahusamiento y determinar la altura a cualquier diámetro establecido, lo cual permite estimar la distribución de productos o el volumen comercial en los árboles de las plantaciones forestales comerciales existentes, debido a la estrecha relación de la forma del árbol con la distribución de volumen a lo largo del fuste. Sin embargo, por ser una especie de rápido crecimiento y de constante mejoramiento genético (clones), la actualización continua de este tipo de herramientas silvícolas es esencial para cálculos más precisos en el tiempo de establecimiento, crecimiento y desarrollo de PFC con nuevos clones, ya que el rendimiento volumétrico de los individuos tiene una relación estrecha con la forma y tamaño de los árboles de *E. urophylla.*

Agradecimientos

Por el financiamiento a la Oficina de Programas Internacionales del Servicio Forestal del Departamento de Agricultura de EE.UU. a través del Northern Research Station y el Programa de Paisajes Sustentables de la Agencia para el Desarrollo Internacional de EE.UU., por medio del proyecto "Reducing Greenhouse Gas Emissions and Improving Forest Management in Mexico"; y a PROTEAK-MÉXICO por el apoyo logístico proporcionado.

LITERATURA CITADA

Álvarez J. G., M. Barrio, F. Castedo-Dorado, U. Diéguez-Aranda, y A. D. Ruiz-González. 2005. Modelos para la gestión forestal: una revisión de las metodologías de construcción de modelos de masa. 5° Congreso Forestal Nacional, Portugal. 13 p.

Augusto, C. T., J. O. Vargas M., y M. Escalier H. 2009. Ajuste y selección de modelos de regresión para estimar el volumen total de árboles. Documento Técnico No. 5. Escuela de Ciencias Forestales de la Universidad Mayor de San Simón. Cochabamba, Bolivia. 27 p.

Barrios A., A. M. López, y V. Nieto. 2014. Predicción de volúmenes comerciales de *Eucalyptus grandis* a través de modelos de volumen total y de razón. Colombia For. 17: 137-149.

under constant genetic improvement (clones), the continuous updating of this type of forestry tools is essential for more precise calculations in the time of establishement, growth and development of CFP with new clones, since the volume yield of individuals has a close relationship with the shape and size of the *Eucalyptus urophylla* trees.

—End of the English version—

Barrero M., H., D. Álvarez-Lazo, e Y. Alonso-Torrens. 2013. Modelos del perfil de fuste para *Pinus caribaea* var. caribaea en la provincia Pinar del Río, Cuba. Rev. Científ. Avances 15: 259-268.

Bruce, D., R. Curtis, and G. Vancoevering. 1968. Development of a system of taper and volume tables for red alder. For. Sci. 14: 656-658.

Cancino C., J. O. 2006. Dendrometría básica. Universidad de Concepción. Facultad de Ciencias Forestales. Departamento de Manejo de Bosques y Medio Ambiente. http://repositorio.udec.cl/xmlui/handle/123456789/407 (Consulta: diciembre 2015).

CONAFOR (Comisión Nacional Forestal). 2012. Situación actual y perspectivas de las plantaciones forestales comerciales en México. México: Comisión Nacional Forestal. http://www.conafor.gob.mx/web/temas-forestales/plantaciones-forestales/ Consulta: diciembre 2015.

CONAFOR (Comisión Nacional Forestal). 2015. Plantaciones forestales comerciales. http://www.conafor.gob.mx/web/temas-forestales/plantaciones-forestales/ (Consulta: diciembre 2015).

Crechi, E., A. Keller, y H. Fassola. 2008. Desarrollo de una ecuación de forma-volumen relativo para la estimación de diferentes volúmenes de *Grevillea robusta* A. en Misiones, Argentina. XIII Jornadas Técnicas Forestales y Ambientales. Facultad de Ciencias Forestales, UNaM-EEA Montecarlo, INTA. Misiones, Argentina. 10 p.

Cruz-Cobos, F., H. M. De los Santos-Posadas, y J. R. Valdez-Lazalde. 2008. Sistema compatible de ahusamiento-volumen para *Pinus cooperi* Blanco en Durango, México. Agrociencia 42: 473-485.

Diéguez-Aranda, U., A. Alboreca R, F. Castedo-Dorado, J. G. Álvarez-González, M. Barrio-Anta, F. Crecente-Campo, J. M. González-González, C. Pérez-Cruzado, R. Rodríguez-Soalleiro, C. A. López-Sánchez, M. A. Balboa-Murias, J. J. Gorgoso-Varela, y F. Sánchez Rodríguez. 2009. Herramientas Selvícolas para la Gestión Forestal Sostenible en Galicia. Xunta de Galicia. Lugo, España. 259 p.

GezanA. S., P. C. Moreno M., y A. Ortega. 2009. Modelos fustales para renovales de roble, raulí y coigüe en Chile. Bosque 30: 61-69.

FAO (Organización de las Naciones Unidas para la Agricultura y la Alimentación). 2010. Principales resultados: Evaluación

de los recursos forestales mundiales 2010. FAO. Roma, Italia. 12 p.

Fassola H. E., E. Crechi, A. Keller, y S. Barth. 2007. Funciones de forma de exponente variable para la estimación de diámetros a distintas alturas en *Eucalyptus grandis* Hill ex Maiden., cultivadas en la Mesopotamia, Argentina. Rev. Inv. Agropec. 36: 109-128.

INEGI (Instituto Nacional de Estadística y Geografía-México). 2005. Marco Geoestadístico Municipal 2005, versión 3.1. http://www3.inegi.org.mx/sistemas/mexicocifras/datos-geograficos/27/27008.pdf (Consulta: Diciembre 2015).

INEGI (Instituto Nacional de Estadística y Geografía-México). 2014. México en el Mundo 2014. INEGI. Aguascalientes, México. 619 p.

Kozak, A. 1997. Effects of multicollinearity and autocorrelation on the variable-exponent taper functions. Can. J. Forest Res. 27: 619-629.

Kozak, A. 1988. A variable-exponent taper equation. Can. J. For. Res. 18: 1363-1368.

Kozak, A., D. Munro, and J. Smith. 1969. Taper functions and their application in forest inventory. For. Chron. 45: 1-6.

Lara V., C. E. 2011. Aplicación de ecuaciones de conicidad para teca (*Tectona grandis* L.F) en la zona costera ecuatorial. Ciencia y Tecnol. 4:19-27.

Maldonado-Ayala D., y J. J. Návar Ch. 2000. Ajuste de funciones de ahusamiento de cinco especies de pino en plantaciones en la Región del Salto, Durango. Rev. Chapingo Serie Ciencias For. y Ambiente 6: 159-164.

Overbeek W., Kröger M., y Gerber J. F. 2012. Una panorámica de las plantaciones industriales de árboles en los países del Sur. Conflictos, tendencias y luchas de resistencia. Informe de EJOLT nº 3. 104 p.

Orfanó, F. E., J. R. Soares S., y A. Donizette O. 2006. Seleção de modelos polinomiais para representar o perfil e volume do fuste de *Tectona grandis* L.F. Acta Amaz. 36:465-482.

Pompa-García M., C. Hernández, J. A. Prieto-Ruíz, y R. Dávalos S. 2009. Modelación del volumen fustal de *Pinus durangensis* en Guachochi, Chihuahua, México. Madera y Bosques 15: 61-73.

Pompa G., M., J. J. Corral R, M. A. Díaz V., y M. Martínez S. 2009. Función de ahusamiento y volumen compatible para *Pinus arizonica* Engelm., en el Suroeste de Chihuahua. Rev. Mex. Ciencia For. 34: 119-136.

Prodan M., R. Peters, F. Cox, y P. Real. 1997. Mensura Forestal. Serie Investigación y Educación de Desarrollo Sostenible. Instituto Interamericano de Cooperación para la Agricultura (IICA)/BMZ/GTZ sobre Agricultura, Recursos Naturales y Desarrollo Sostenible. San José, Costa Rica. 561 p.

Rodríguez-Toro, A., R. Rubilar-Pons, F. Muñoz-Sáez, E. Cártes-Rodríguez, E. Acuña-Carmona, y J. Cancino-Cancino. 2016. Modelo de ahusamiento para *Eucalyptus nitens*, en suelos de ceniza volcánica de la región de La Araucanía (Chile). Rev. Facultad de Ciencias Agrarias UNCUYO 48: 101-114.

Sakici, O. E., N. Misira, H. Yavuza, and M. Misira. 2008. Stem taper functions for *Abies nordmanniana* subsp. *bornmulleriana* in Turkey. Scand. J. For. Res. 23: 522-533.

SAS Institute Inc. 2008. SAS/STAT® 9.2 User's Guide Second Edition. SAS Institute Inc. Raleigh, NC USA. s/p. https://support.sas.com/documentation/cdl/en/statugmcmc/63125/PDF/default/statugmcmc.pdf (Consulta: diciembre 2015).

SEMARNAT-CONAFOR (Secretaria de Medio Ambiente y Recursos Naturales-Comisión Nacional Forestal). 2014. Boletín 77. CONAFOR. http://www.conafor.gob.mx:8080/documentos/docs/7/5752M%C3%A9xico%20cuenta%20con%20270%20mil%20hect%C3%A1reas%20de%20%20Plantaciones%20Forestales%20Comerciales.pdf (Consulta: diciembre 2015).

Sterba, H. 1980. Stem curves: a review of the literature. For. Abstr. 41: 141-145

Tamarit U., J. C., H. M. De los Santos P., A. Aldrete, J. R. Valdez-Lazalde, H. Ramírez M., y V. Guerra C. 2014. Sistema de cubicación para árboles individuales de *Tectona grandis* L. f. mediante funciones compatibles de ahusamiento – volumen. Rev. Mex. Ciencia For. 5: 58-74.

Tapia J., y J. Návar. 2011. Ajuste de modelos de volumen y funciones de ahusamiento para *Pinus pseudostrobus* Lindl., en Bosques de pino de la Sierra Madre Oriental de Nuevo León, México. Foresta Veracruzana 13:19-28.

Torres R. J. M., y O. S. Magaña, T. 2001. Evaluación de Plantaciones Forestales. Editorial Limusa. D.F., México. 472 p.

Trincado G., y C. Leal D. 2006. Ecuaciones locales y generalizadas de altura-diámetro para pino radiata (*Pinus radiata*). Bosque 27:23-34.

Torruniano C., y H. Salinas. 1998. Herramientas de cubicación para pino oregón (*Pseudotsoga menziensii* (Mirb) Franco) ubicado en la zona de Valdivia. Bosque 19: 11-21.

Verbeek, M. 2004. A Guide to Modern Econometrics. 2 ed. West Sussex: John Wiley & Sons. 429 p.

Zimmerman, D., L., and V. Núñez-Antón. 2001. Parametric modelling of growth curve data: An overview (with discussion). Test 10: 1-73.