

MODELOS DE CRECIMIENTO EN ALTURA DOMINANTE E ÍNDICES DE SITIO PARA *Pinus ayacahuite* Ehren

MODELS OF DOMINANT HEIGHT GROWTH AND SITE INDEXES FOR *Pinus ayacahuite* Ehren

Miguel Hernández-Cuevas¹, Wenceslao Santiago-García^{2*}, H. Manuel De los Santos-Posadas³, Pablo Martínez-Antúnez², Faustino Ruiz-Aquino²

¹Universidad de la Sierra Juárez. Avenida Universidad s/n, Ixtlán de Juárez, 68725, Oaxaca, México. ²Instituto de Estudios Ambientales-División de Estudios de Postgrado. Universidad de la Sierra Juárez. ³Ciencias Forestales. Campus Montecillo. Colegio de Postgraduados. 56230. Montecillo, Estado de México. (wsantiago@unsij.edu.mx)

RESUMEN

El desarrollo de modelos matemáticos con bases técnicas y científicas es importante para tomar decisiones en el manejo forestal. El objetivo de este estudio fue modelar el crecimiento en altura dominante de *Pinus ayacahuite* Ehren, para realizar proyecciones de su productividad. Datos del análisis troncal de 34 individuos de *P. ayacahuite* se usaron para ajustar modelos de crecimiento, clásicos en biometría forestal: Schumacher, Chapman-Richards, Levakovic II, Hossfeld IV y Gompertz; además, con las estrategias de modelado: curva guía, el método de diferencia algebraica (ADA) y el método de diferencia algebraica generalizada (GADA), mediante mínimos cuadrados no lineales. Un ajuste simultáneo se empleó para las ecuaciones ADA y GADA y edad base de 40 años. Los resultados gráficos y numéricos de los modelos fueron satisfactorios de acuerdo con los indicadores estadísticos de bondad de ajuste. Los indicadores de ajuste de los modelos polimórfico b_2 de Chapman-Richards en curva guía y ADA, polimórfico b_1 de Hossfeld IV en ADA, y el modelo de Hossfeld IV bajo el enfoque GADA fueron mejores en comparación con los otros modelos. Los modelos seleccionados permitieron construir familias de curvas de índice de sitio. De ellos, el modelo polimórfico b_2 de Chapman-Richards en ADA mostró capacidad de predicción mayor. Por tanto, se recomienda su uso para determinar el índice de sitio y clasificar los niveles de productividad maderable de rodales de *P. ayacahuite*.

Palabras clave: calidad de sitio, curva guía, diferencia algebraica, diferencia algebraica generalizada, *Pinus ayacahuite*, productividad forestal.

ABSTRACT

The development of mathematical models with technical and scientific bases is important in forest management decision-making. The objective of this study was to model dominant height growth of *Pinus ayacahuite* Ehren to enable productivity projections. Data on stem analysis of 34 *P. ayacahuite* individuals were used to fit growth models, classic in forest biometry (Schumacher, Chapman-Richards, Levakovic II, Hossfeld IV and Gompertz), as well as the modeling strategies Guide Curve Method, Algebraic Difference Approach (ADA) and Generalized Algebraic Difference Approach (GADA), using non-linear least squares method. A simultaneous fit was used for the ADA and GADA equations and a 40-year base-age. The graphic and numerical results of the models were satisfactory, according to the statistical indicators of goodness of fit. The indicators of fit of Chapman-Richards polymorphic b_2 models in guide curve and ADA, polymorphic b_1 of Hossfeld IV in ADA and the Hossfeld IV model under the GADA approach were better than the other models. The models selected enabled the construction of families of site index curves. Of these, the Chapman-Richards polymorphic b_2 model in ADA had the best prediction capacity. Therefore, its use is recommended for determining the site index and to classify levels of timber productivity of *P. ayacahuite* stands.

Key words: site quality, guide curve method, algebraic difference approach, generalized algebraic difference approach, *Pinus ayacahuite*, forest productivity.

INTRODUCTION

Modeling dominant height growth and its corresponding expression of site index enable estimating productivity of forest stands (Tamarit *et al.*, 2014). However, the

* Autor responsable ❖ Author for correspondence.

Recibido: agosto, 2016. Aprobado: abril, 2017.

Publicado como ARTÍCULO en *Agrociencia* 52: 437-453. 2018.

INTRODUCCIÓN

Un modelo de crecimiento en altura dominante y su correspondiente expresión de índice de sitio permiten estimar la productividad de las masas forestales (Tamarit *et al.*, 2014). Sin embargo, las diferencias en las potencialidades productivas de los sitios influyen en los aspectos del manejo de un rodal, como la definición de los objetivos productivos, el régimen silvicultural, el turno de cosecha, las técnicas de aprovechamiento y la rentabilidad de la inversión (Ivancich *et al.*, 2011).

El silvicultor debe calcular el crecimiento en altura dominante para evaluar el potencial productivo, pues en un rodal es una de las variables menos afectadas por cambios en la densidad y por tratamientos silvícolas intermedios; además, está relacionada con el volumen total, es fácil de evaluar y representa un indicador de la productividad forestal (Clutter *et al.*, 1983; Tamarit *et al.*, 2014). El índice de sitio (IS) permite estimar de manera práctica la productividad de un sitio forestal. El concepto de IS se basa en que los sitios más fértiles para una especie dada, producirán árboles de dimensiones mayores a una cierta edad base (Daniel *et al.*, 1979; Mendoza, 1993).

Los métodos para la construcción de las curvas de IS se clasifican en cuatro grupos: método de la curva guía (Guide Curve Method; GCM), método de ecuaciones en diferencia algebraica (Algebraic Difference Approach; ADA), que fue desarrollado por Bailey and Clutter (1974), método de predicción de parámetros (Parameter Prediction Method; PPM) (Clutter *et al.*, 1983) y enfoque de diferencia algebraica generalizada (Generalized Algebraic Difference Approach; GADA), que fue propuesto por Cieszewsky and Bailey (2000).

El método de la curva guía emplea datos provenientes de parcelas temporales de muestreo y se ha utilizado para generar curvas de índice de sitio de tipo anamórficas y polimórficas (Clutter *et al.*, 1983; García *et al.*, 1998). Para el modelado dinámico es necesario disponer de datos medidos en árboles o rodales al menos en dos ocasiones, mediante parcelas de intervalo, parcelas permanentes o análisis troncal (Gadow *et al.*, 2007). El método ADA involucra esencialmente la sustitución de un parámetro del modelo base para expresarlo como una función del sitio. Este enfoque permite construir modelos invariantes de la edad base e invariantes del camino de proyección (Bailey and Clutter, 1974).

differences in productive potentiality of the sites have an influence in stand management aspects, such as defining productive objectives, the silvicultural regime, optimum rotation age, harvesting techniques and investment profitability (Ivancich *et al.*, 2011).

The forester should calculate dominant height growth to evaluate product potential since it is one of the variables least affected by changes in density and intermediate silvicultural treatments in a stand. Moreover, it is related to the total volume, is easy to assess and is an indicator of forest productivity (Clutter *et al.*, 1983; Tamarit *et al.*, 2014). The site index (IS) enables estimating productivity of a forest site in a practical manner. The concept of IS is based on the idea that more fertile sites for a given species will produce trees of larger dimensions at a certain base age (Daniel *et al.*, 1979; Mendoza, 1993).

Methods for constructing IS curves are classified into four groups: the Guide Curve Method (GCM), the Algebraic Difference Approach (ADA) developed by Bailey and Clutter (1974), the Parameter Prediction Method (PPM) (Clutter *et al.*, 1983), and the Generalized Algebraic Difference Approach (GADA) proposed by Cieszewsky and Bailey (2000).

The Guide Curve Method uses data from temporary sampling plots and is utilized to generate anamorphic and polymorphic type site index curves (Clutter *et al.*, 1983; García *et al.*, 1998). For dynamic modeling, it is necessary to have data measured at least twice in trees or stands using interval plots, permanent plots or stem analysis (Gadow *et al.*, 2007). The ADA method involves, essentially, the substitution of a parameter of the base model to express it as a function of the site. This approach enables constructing base-aged invariant site index models and invariant of the projection route (Bailey and Clutter, 1974).

Cieszewski and Bailey (2000) introduced a generalized ADA methodology, the GADA approach, which considers that the base equation expands to permit that more than one parameter depends on the site quality and that the families of curves obtained increase in flexibility (Cieszewski and Bailey, 2000; Cieszewski, 2001). The main advantage of GADA is its capacity to broaden the base of equations, in accord with several theories on growth characteristics (asymptote, growth rate). This includes the possibility of simulating concurrent polymorphism and multiple asymptotes, an important property of site equations (Cieszewski, 2003; Diéguez *et al.*, 2006).

Cieszewski y Bailey (2000) introdujeron una generalización a la metodología ADA, que originó el enfoque GADA, el cual considera que la ecuación base se expande para permitir que más de un parámetro dependa de la calidad de estación y que las familias de curvas que se obtengan incrementen su flexibilidad (Cieszewski y Bailey, 2000; Cieszewski, 2001). La ventaja principal de GAD es su capacidad para ampliar la base de ecuaciones de acuerdo con varias teorías sobre las características del crecimiento (asíntota, tasa de crecimiento). Esto incluye la posibilidad de simular polimorfismo concurrente y múltiples asíntotas, una propiedad importante de las ecuaciones de sitio (Cieszewski, 2003; Diéguez *et al.*, 2006).

El objetivo de este estudio fue modelar con diferentes hipótesis de crecimiento (curvas anamórficas, polimórficas y de polimorfismo asíntótico) la altura dominante de *Pinus ayacabuite* Ehren, y realizar proyecciones de su productividad. La hipótesis fue que los modelos polimórficos describen mejor el patrón de crecimiento y la productividad de la especie estudiada.

MATERIALES Y MÉTODOS

Área de estudio y datos dasométricos

El estudio se realizó en bosques del predio comunal de Ixtlán de Juárez, Oaxaca, México (17° 23' 0.50", 17° 23' 0.58" N, 96° 28' 45", 96° 28' 53" O, y altitud media de 2780 m). La base de datos se obtuvo del análisis troncal de 34 individuos de *P. ayacabuite*. Los datos dasométricos se obtuvieron de rodajas extraídas inmediatamente después del tocón, de la altura del diámetro normal (DN, a 1.3 m del suelo y después del DN, a cada longitud comercial (2.62 m, 2.54 m y 1.25 m) hasta llegar al ápice del árbol. La información dasométrica fue edad-altura en cada sección de corte y edad-altura total del árbol; con ella se reconstruyó el perfil completo de cada individuo.

Los datos cubrieron un intervalo amplio de edades y alturas dominantes (Cuadro 1). El resumen estadístico incluyó: media, mediana, desviación estándar e intervalo de las variables para el ajuste de las funciones de crecimiento en altura dominante (HD).

Modelos biométricos empleados y derivación de modelos de autorreferencia

Para predecir el comportamiento dinámico y biológico se probaron cinco modelos base (curva guía) con estructura no lineal (Cuadro 2), clásicos en biometría forestal.

En el modelado del crecimiento en HD e IS de *P. ayacabuite* se expresó cada modelo en sus formulaciones bajo curva guía

The objective of this study was to model dominant height of *Pinus ayacabuite* Ehren under different growth hypotheses (anamorphic and polymorphic curves and curves of asymptotic polymorphism) and make productivity projections. The hypothesis was that the polymorphic models better describe the growth pattern and productivity of the species under study.

MATERIALS AND METHODS

Study area and dendrometric data

The study was conducted in forests on communal land of Ixtlán de Juárez, Oaxaca, México (17° 23' 0.50", 17° 23' 0.58" N, 96° 28' 45", 96° 28' 53" W, mean altitude 2780 m). The database was obtained from stem analysis of 34 *P. ayacabuite* individuals from cross sections extracted immediately after the stump, from diameter at breast height (DBH, 1.3 m above-ground) and after DBH, at each commercial length (2.62 m, 2.54 m and 1.25 m) up to the tree apex. The dendrometric information was age-height in each cross section and age-total height of the tree. With these data, the complete profile of each individual was reconstructed.

The data cover a wide interval of dominant heights and ages (Table 1). The statistical summary included mean, median, standard deviation and variable interval for fitting dominant height (HD) growth functions.

Biometric models used and derivation of self-referencing models

To forecast dynamic and biological behavior, we used five base models (guide curve) with non-linear structure (Table 2), classic in forest biometry.

In modeling HD growth and IS of *P. ayacabuite*, each model was expressed in its formulations under the guide curve and ADA (Table 3). For the case of the Hossfeld IV and Chapman-Richards models, two GADA formulations were posed (Table 4). These approaches permitted construction of different IS curves (anamorphic, polymorphic and asymptotic polymorphic).

Deriving the models with a guide curve involved fitting the base models to obtain the average curve in the entire interval of observations of HD-E, from which proportional curves were generated above and below the central curve in the following order: 1) each growth equation (in its integral form) was fitted to generate the guide curve of a base age (EB) from the predicted HD value, 2) the model was formulated in its site index expression, 3) the parameter of the growth hypothesis of interest was selected and solved from the IS expression, and 4)

Cuadro 1. Resumen estadístico de los datos para el modelado del crecimiento en altura dominante e índice de sitio en *Pinus ayacabuite* Ehren.

Table 1. Statistical summary of data for modeling dominant height growth and site index for *Pinus ayacabuite* Ehren.

Variabes	n	Media	Mediana	Desviación estándar	Mínimo	Máximo
Edad (años)	468	36.29	35.00	22.88	2.00	87.00
HD (m)		14.89	14.65	9.43	0.10	33.37

y ADA (Cuadro 3). Para el caso de los modelos de Hossfeld IV y Chapman-Richards se plantearon dos formulaciones GADA (Cuadro 4). Estos enfoques permitieron tipos diferentes de curvas de IS (anamórficas, polimórficas y de polimorfismo asintótico).

La derivación de los modelos con curva guía implicó ajustar los modelos base para obtener la curva promedio en todo el intervalo de observaciones de HD-E, a partir de la cual se generaron curvas proporcionales por arriba y por abajo de la curva central en el orden siguiente: 1) cada ecuación de crecimiento (en su forma integral) se ajustó para generar la curva guía a una edad base (EB) a partir del valor predicho de HD, 2) se formuló el modelo en su expresión de índice de sitio, 3) se seleccionó y despejó el parámetro de la hipótesis de crecimiento de interés de la expresión de IS, y 4) se sustituyó la solución del parámetro en la ecuación original (integral).

the solution of the parameter in the original equation (integral) was substituted.

The ADA method consisted of developing the equation to be fitted in its differentiated form, by expressing future dominant height (HD_2) as a function of future age (E_2), from the initial age (E_1) and initial dominant height (HD_1). The model of algebraic difference that defines the family of IS curves is expressed as $HD_2 = f(HD_1, E_2, E_1, \beta)$, where HD_2 is the value of dominant height at age E_2 (age of the projection), HD_1 is the dominant height at age E_1 (initial age) and β is the vector of regression parameters (Clutter *et al.*, 1983; Diéguez *et al.*, 2005; Magaña *et al.*, 2008; Santiago *et al.*, 2013).

In developing the GADA models, the following were considered: 1) selection of a growth model and identification of dependent parameters of site quality, 2) expression of the

Cuadro 2. Modelos biométricos ensayados para modelar el crecimiento en altura dominante de *Pinus ayacabuite* Ehren.

Table 2. Biometric models tested for modeling dominant height growth of *Pinus ayacabuite* Ehren.

Modelo	Expresión	Código de ecuación
Schumacher (Schumacher, 1939)	$HD = b_0 \exp\left[-b_1\left(\frac{1}{E}\right)\right]$	Ec. 1
Chapman-Richards (Richards, 1959)	$HD = b_0[1 - \exp(-b_1E)]^{b_2}$	Ec. 2
Levakovic II (Levakovic, 1935)	$HB = b_0\left(\frac{E}{b_1 + E}\right)^{b_2}$	Ec. 3
Hossfeld IV (Hossfeld, 1822)	$HD = \frac{b_0}{1 + \exp(b_1) \exp(-b_2 \ln E)}$	Ec. 4
Gompertz (Gompertz, 1825)	$HD = b_0 \exp[b_1 \exp(b_2E)]$	Ec. 5

donde: HD es altura dominante (m), E es edad del rodal (años), \exp es función exponencial, \ln es logaritmo natural y b_i es parámetros a estimar. ♦ where: HD is dominant height (m), E is stand age (years), exp is the exponential function, ln is natural logarithm and b_i is parameters to be estimated.

**Cuadro 3. Estructura de los modelos de crecimiento en sus formulaciones ADA (Algebraic Difference Approach Generalized).
Table 3. Structure of the growth models in their ADA (Algebraic Difference Approach).**

Modelo de Predicción	Modelos de proyección	
<p>Schumacher</p> $HD_1 = b_0 \exp\left[-b_1\left(\frac{1}{E_1}\right)\right]$	<p>Anamórfico:</p> $HD_2 = HD_1 \left[\frac{\exp(-b_1 / E_2)}{\exp(-b_1 / E_1)} \right]$	<p>Polimórfico:</p> $HD_2 = b_0 \exp\left[\ln \frac{HD_1}{b_0} E_1 \left(\frac{1}{E_2}\right)\right]$
<p>Chapman-Richards</p> $HD_1 = b_0 [1 - \exp(-b_1 E_1)]^{b_2}$	<p>Anamórfico:</p> $HD_2 = HD_1 \left[\frac{1 - \exp(-b_1 E_2)}{1 - \exp(-b_1 E_1)} \right]^{b_2}$	
	<p>Polimórfico b_1:</p> $HD_2 = b_0 \left[1 - \left(1 - \left(\frac{HD_1}{b_0} \right)^{\frac{1}{b_2}} \right)^{\frac{E_2}{E_1}} \right]^{b_2}$	<p>Polimórfico b_2:</p> $HD_2 = b_0 [1 - \exp(-b_1 E_2)]^{\left[\frac{\ln \frac{HD_1}{b_0}}{\ln(1 - \exp(-b_1 E_1))} \right]}$
<p>Levakovic II</p> $HD_1 = b_0 \left(\frac{E_1}{b_1 + E_1} \right)^{b_2}$	<p>Anamórfico:</p> $HD_2 = HD_1 \left[\frac{\left(\frac{E_2}{b_1 + E_2} \right)^{b_2}}{\left(\frac{E_1}{b_1 + E_1} \right)^{b_2}} \right]$	
	<p>Polimórfico b_1:</p> $HD_2 = \beta_0 \left[E_2 \left(\left(\frac{E_1}{\exp\left(\frac{\ln(HD_1 / b_0)}{b_2}\right)} - E_1 \right) + E_2 \right)^{-1} \right]^{b_2}$	
	<p>Polimórfico b_2:</p> $HD_2 = b_0 \left(\frac{E_2}{b_1 + E_2} \right)^{\left[\frac{\ln\left(\frac{HD_1}{b_0}\right)}{\ln\left(\frac{E_1}{b_1 + E_1}\right)} \right]}$	
<p>Hossfeld IV</p> $HD_1 = \frac{b_0}{1 + \exp(b_1) \exp(-b_2 \ln E_1)}$	<p>Anamórfico</p> $HD_2 = HD_1 \left[\frac{1 + \exp(b_1) \exp(-b_2 \ln E_1)}{1 + \exp(b_1) \exp(-b_2 \ln E_2)} \right]$	
	<p>Polimórfico b_1:</p> $HD_2 = \frac{b_0}{1 + \exp\left[\ln\left(\frac{b_0 - HD_1}{HD_1}\right) \exp(-b_2 \ln E_1)\right]} \exp(-b_2 \ln E_2)$	
	<p>Polimórfico b_2:</p> $HD_2 = \frac{b_0}{1 + \exp(b_1) \exp\left[\frac{\ln\left(\frac{b_0 - HD_1}{HD_1 \exp(b_1)}\right)}{\ln E_1}\right] \ln E_2}$	

Cuadro 3. Continuación.
Table 3. Continued.

Modelo de Predicción	Modelos de proyección
Gompertz $HD_1 = b_0 \exp[b_1 \exp(b_2 E_1)]$	Anamórfico: $HD_2 = HD_1 \left[\frac{\exp(b_1 \exp(b_2 E_2))}{\exp(b_1 \exp(b_2 E_1))} \right]$
	Polimórfico b_1 : $HD_2 = b_0 \exp \left[\left(\frac{\ln \left(\frac{HD_1}{b_0} \right)}{\exp(b_2 E_1)} \right) \exp(b_2 E_2) \right]$
	Polimórfico b_2 : $HD_2 = b_0 \exp \left[b_1 \exp \left(\ln \left(\frac{\ln \frac{HD_1}{b_0}}{b_1} \right) E_2 E_1^{-1} \right) \right]$

donde: HD_1 es altura dominante (m) en el estado 1 de la medición; HD_2 es altura dominante del estado 2; E_1 y E_2 son edad del árbol (años) correspondiente a los estados 1 y 2. \ln es logaritmo natural y b_i son parámetros a estimar. ♦ where HD_1 is dominant height (m) in the state 1 of measurement; HD_2 is dominant height of state 2; E_1 and E_2 are tree age (years) corresponding to states 1 and 2. \ln is the natural logarithm and b_i parameters to be estimated.

El método ADA consistió en desarrollar la ecuación a ajustar en su forma diferenciada, al expresar la altura dominante futura (HD_2) como una función de la edad futura (E_2), de la edad inicial (E_1) y de la altura dominante inicial (HD_1). El modelo de diferencia algebraica que define la familia de curvas de IS se expresa como $HD_2 = f(HD_1, E_2, E_1, \beta)$, donde HD_2 es el valor de la altura dominante a una edad E_2 (edad de proyección), HD_1 es

selected parameters as functions of the site quality defined by the variable X (not observable, independent variable that describes site productivity) and the new parameters, 3) the bidimensional base equation selected was expanded to an explicit site index tridimensional equation, and 4) the value of X was solved from the initial conditions of the site; that is, we parted from initial values of age and height, in such a way that the model was implicit

Cuadro 4. Estructura de dos modelos base con sus formulaciones GADA (Generalized Algebraic Difference Approach).
Table 4. Structure of two base models with their GADA formulations (Generalized Algebraic Difference Approach).

Modelo	Parámetro relacionado al sitio	Solución para X con valores iniciales (HD_1, E_1)
Chapman-Richards: $HD = a_0 [1 - \exp(-a_1 E)]^{a_2}$	$a_0 = \exp(X)$ $a_2 = b_1 + b_2 / X$	$X = \frac{1}{2} \left\{ \ln(HD_1) - b_1 L_0 \pm \sqrt{[b_1 L_0 - \ln(HD_1)]^2 - 4b_2 L_0} \right\}$ donde: $L_0 = \ln[1 - \exp(-b_0 E_1)]$ $HD_2 = HD_1 \left[\frac{1 - \exp(-b_0 E_2)}{1 - \exp(-b_0 E_1)} \right]^{b_1 + b_2 / X}$ Ecuación dinámica
Hossfeld IV: $HD = \frac{a_0}{1 + \exp(a_1) \exp(-a_2 \ln E)}$	$a_0 = b_0 + X$ $a_1 = b_1 / X$	$X = \frac{1}{2} \left(HD_1 - b_0 + \sqrt{(HD_1 - b_0)^2 + 4b_1 HD_1 E_1^{-b_2}} \right)$ $HD_2 = \frac{b_0 + X}{1 + b_1 / X E_2^{-b_2}}$ Ecuación dinámica

la altura dominante a una edad E_1 (edad inicial) y β es el vector de parámetros de regresión (Clutter *et al.*, 1983; Diéguez *et al.*, 2005; Magaña *et al.*, 2008; Santiago *et al.*, 2013).

En el desarrollo de los modelos GADA se consideró: 1) selección de un modelo de crecimiento e identificación de los parámetros dependientes de la calidad del sitio, 2) expresión de los parámetros seleccionados como funciones de la calidad de estación definida por la variable X (variable no observable e independiente que describe la productividad del sitio) y los nuevos parámetros, 3) la ecuación base bidimensional seleccionada fue expandida a una ecuación explícita tridimensional de índice de sitio, y 4) se despejó el valor de X a partir de condiciones iniciales de la estación; es decir, se partió de valores de partida de edad y altura, de tal forma que el modelo fuera implícito y aplicable (Cieszewski y Bailey, 2000; Cieszewski, 2002; Vargas *et al.*, 2010; Quiñonez *et al.*, 2015).

Ajuste de modelos

Para el ajuste de las ecuaciones de curva guía se emplearon 468 pares de datos altura dominante-edad. En ADA y GADA se realizaron ajustes simultáneos para minimizar simultáneamente los errores del sistema de ecuaciones; $HD_1 = f(E_1, b)$, $HD_2 = f(HD_1, E_2, E_1, b)$ con 434 pares de datos no traslapados. Estos ajustes se realizaron mediante mínimos cuadrados no lineales con el procedimiento PROC MODEL de SAS/ETS[®] v. 9.0 (SAS Institute Inc., 2002). El análisis gráfico se realizó con R Project 3.2.3 (R Development Core Team, 2015).

Indicadores estadísticos

Los indicadores estadísticos para evaluar la bondad de ajuste de cada modelo probado se presentan en el Cuadro 5. El análisis gráfico de la capacidad predictiva y la significancia de los estimadores de los parámetros de cada modelo fueron la base para la elección de los mejores modelos. La significancia se evaluó con la prueba t Student, bajo $H_0: b_i = 0$ y un valor crítico $\alpha = 0.05$ (Infante y Zarate, 2012).

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Curva guía

Todos los modelos no lineales generaron ajustes adecuados. Los valores mayores de R^2 -adj fueron de los modelos de Levakovic II, Hossfeld IV y Chapman-Richards, pues explicaron cerca de 93.6 % de la varianza total de la altura dominante. Además, los tres modelos generaron los valores menores en SCE y, en consecuencia, en RECM. Cada uno presentó

and applicable (Cieszewski and Bailey, 2000; Cieszewski, 2002; Vargas *et al.*, 2010; Quiñonez *et al.*, 2015).

Model fit

To fit the guide curve equations, 468 pairs of dominant height-age data were used. In ADA and GADA, fit was performed simultaneously to minimize errors of the equation system; $HD_1 = f(E_1, b)$, $HD_2 = f(HD_1, E_2, E_1, b)$ with 434 pairs of non-overlapping data. These fits were done using non-linear least squares with the procedure MODEL of SAS/ETS[®] v. 9.0 (SAS Institute Inc., 2002). Graphic analysis was done with R Project 3.2.3 (R Development Core Team, 2015).

Statistical indicators

The statistical indicators used to evaluate goodness of fit of each model tested are presented in Table 5. The graphic analysis of the predictive capacity and significance of the estimators of the parameters of each model were the basis of election of the best models. Significance was evaluated with the Student t test, under $H_0: b_i = 0$ and a critical value $\alpha = 0.05$ (Infante and Zarate, 2012).

RESULTS AND DISCUSSION

Guide curve

All the non-linear models generated adequate fit. The highest R^2 -adj values were found with the Levakovic II, Hossfeld IV and Chapman-Richards, explaining nearly 93.6 % of the total variance in dominant height. Moreover, the three models generated the lowest values of SCE and, consequently, of RECM. Each had significant parameters, with P value below 1 % (Table 6).

The graphic analysis indicated that the Schumacher model underestimated growth in early ages. In contrast, the Gompertz model overestimated growth up to 1.5 m at 2 years of age. According to the estimated parameters (Table 6), the asymptotic values of the Schumacher, Levakovic II and Hossfeld IV models were higher than those the species can reach (up to 40 m) (Perry, 1991).

The Chapman-Richards model, which generated a more real asymptotic value, was selected for construction of the site index curves, and growth estimations were compared with the ADA and GADA approaches.

Cuadro 5. Indicadores estadísticos para evaluar la bondad de ajuste de los modelos de crecimiento en altura dominante para *Pinus ayacabuite* Ehren.

Table 5. Statistical indicators for evaluating goodness of fit of dominant height growth models for *Pinus ayacabuite* Ehren.

Indicador	Expresión
Coefficiente de determinación (<i>Pseudo R</i> ²)	$P - R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$
Coefficiente de determinación ajustado por el número de parámetros (<i>R</i> ² - <i>adj</i>)	$R^2 - adj = 1 - (1 - R^2) \left(\frac{n-1}{n-p} \right)$
Suma de cuadrados del error	$SCE = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$
Cuadrado medio del error	$CME = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-p}$
Raíz del error medio cuadrático	$RECM = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-p}}$

donde: y_i , \hat{y}_i , y \bar{y} son los valores observados, predichos, y la media de los valores observados, p es el número de parámetros del modelo y n el número de observaciones. ♦ where y_i , \hat{y}_i , and \bar{y} are the observed and predicted values and the mean of the observed values, p is the number of parameters of the model and n the number of observations.

parámetros significativos, con valor de P menor a 1 % (Cuadro 6).

El análisis gráfico indicó que el modelo de Schumacher subestimó el crecimiento en edades tempranas. Al contrario, el modelo de Gompertz sobrestimó el crecimiento hasta con 1.5 m a los 2 años de edad. De acuerdo con los parámetros estimados (Cuadro 6) los valores asintóticos de los modelos de Schumacher, Levakovic II y Hossfeld IV fueron mayores a los que la especie puede alcanzar (hasta 40 m) (Perry, 1991).

El modelo de Chapman-Richards, que generó un valor asintótico más real, se seleccionó para la construcción de curvas de índice de sitio y las estimaciones de crecimiento se compararon con las metodologías ADA y GADA.

Ecuaciones dinámicas

Los modelos de proyección ADA en sus expresiones anamórficas y polimórficas presentaron ajustes

Dynamic equations

The ADA projection models in their anamorphic and polymorphic expressions had excellent fit (Table 7), and their parameters were significant ($p \leq 0.0001$) (Table 8). The exception was the Schumacher model. The polymorphic models derived from Chapman-Richards (b_2), Levakovic II (b_2) and Hossfeld IV (b_1) were outstanding for their higher value of the adjusted coefficient of determination ($R^2 - adj$) and for explaining approximately 99 % of the total variability. These models had lower SCE and CME values. The Chapman-Richard model b_2 and Hossfeld IV model b_1 had lower standard errors, as well as the most real asymptotic values observed. Thus, in this phase of the numerical analysis, the last two models were better than the others.

According to the Student t test, the parameters of all the fitted models were statistically significant, with $p \leq 0.0001$, lower than the critical value

Cuadro 6. Estadísticas de bondad de ajuste y parámetros estimados de los modelos de predicción del crecimiento en altura dominante para *Pinus ayacabuite* Ehren.
Table 6. Statistics of goodness of fit and estimated parameters of the dominant height growth prediction models for *Pinus ayacabuite* Ehren.

Modelo	SCE	CME	RECM	R ²	R ² -adj	Estimación	P> t	
Schumacher	3049.4	6.5438	2.5581	0.9267	0.9265	b_0	42.74808	<0.0001
						b_1	33.5607	<0.0001
						b_2	38.56064	<0.0001
Chapman-Richards	2659.3	5.7190	2.3914	0.9361	0.9358	b_0	0.022142	<0.0001
						b_1	1.469665	<0.0001
						b_2	61.15912	<0.0001
Levakovic II	2655.5	5.7107	2.3897	0.9362	0.9359	b_0	41.13109	<0.0001
						b_1	1.756719	<0.0001
						b_2	48.14863	<0.0001
Hossfeld IV	2656.9	5.7138	2.3904	0.9361	0.9359	b_0	5.827152	<0.0001
						b_1	1.431855	<0.0001
						b_2	31.26157	<0.0001
Gompertz	2811.7	6.0468	2.4590	0.9324	0.9321	b_0	-3.34316	<0.0001
						b_1	-0.04461	<0.0001
						b_2		

SCE: suma de cuadrados del error, CME: cuadrado medio del error, RECM: raíz del error medio cuadrático, R²: coeficiente de determinación, R²-adj: coeficiente de determinación ajustado por el número de parámetros y b_i : valor de parámetros estimados. ♦ SCE: sum of square errors; CME: mean squared error; RECM: root mean squared error; R²: coefficient of determination; R²-adj: adjusted R² statistic; b_i : value of estimated parameters.

excelentes (Cuadro 7) y sus parámetros fueron significativos ($p \leq 0.0001$) (Cuadro 8), la excepción fue el modelo de Schumacher. Destacaron los modelos polimórficos derivados de Chapman-Richards (b_2), Levakovic II (b_2) y Hossfeld IV (b_1) por su valor mayor de coeficiente de determinación ajustado por el número de parámetros (R²-adj) y explicar aproximadamente 99 % de la varianza total. Estos modelos presentaron valores menores de SCE y CME. Los errores estándar menores los mostraron el modelo b_2 de Chapman-Richards y b_1 de Hossfeld IV, en adición con los valores asintóticos más reales observados. Así, en esta fase del análisis numérico, los dos últimos modelos fueron superiores a los otros.

De acuerdo con la prueba *t* Student los parámetros de todos los modelos ajustados fueron estadísticamente significativos, con valores de $p \leq 0.0001$, menores al valor crítico ($\alpha = 0.05$). Así, cualquier valor menor a este límite representó un rechazo de H_0 . El análisis gráfico permitió verificar los resultados del ajuste al mostrar la tendencia dinámica para *P. ayacabuite* (Figura 1).

Para la derivación de las estructuras GADA se consideraron los modelos de Chapman-Richards y Hossfeld IV (Cuadro 9), que se han utilizado ampliamente para el modelado del crecimiento forestal

($\alpha = 0.05$). Thus, any value lower than this limit represented a rejection of H_0 . The graphic analysis verified the results of the fit by showing the dynamic trend for *P. ayacabuite* (Figure 1).

For the derivation of the GADA structures, the Chapman-Richards and Hossfeld IV models (Table 9), which have been widely used for modeling forest growth (Diéguez *et al.*, 2006; Vargas *et al.*, 2013; Tamarit *et al.*, 2014; Quiñonez *et al.*, 2015), were considered.

R²-adj of the two models explained more than 98 % of the total variance. The values of SCE and CME were low, like those of the selected ADA models, and RECM had plausible values for both equations. All the estimations of the parameters were significant ($p \leq 0.01$), and there were no major differences between the two adjusted models. The curves were compared to evaluate the performance of the models with GADA structure (Figure 1).

Families of site index curves for *Pinus ayacabuite*

From 12, 15, 18, 21 and 24 m to the base age of 40 years of the best models, the IS curves constructed from the models of similar fit followed different growth patterns (Figure 1 A - F). Different

Cuadro 7. Estadísticas de bondad de ajuste de los modelos de predicción y proyección bajo la metodología ADA.
Table 7. Statistics of goodness of fit of the prediction and projection models under ADA methodology.

Modelo	Predicción (HD ₁)			Proyección (HD ₂)		
	SCE	CME	R ² -adj	SCE	CME	R ² -adj
Schumacher Anamórfico	8987.9	20.7813	0.7387	2154.2	4.9692	0.9362
Schumacher Polimórfico	2919.7	6.7509	0.9151	2221.3	5.124	0.9342
Chapman-Richards anamórfico	2454.9	5.6827	0.9286	475.2	1.0975	0.9859
Chapman-Richards Polimórfico b_1	2447.1	5.6646	0.9288	397.5	0.9180	0.9882
Chapman-Richards Polimórfico b_2	2447.5	5.6656	0.9288	352.2	0.8135	0.9896
Levakovic II Anamórfico	2459.5	5.6932	0.9284	474.0	1.0946	0.9859
Levakovic II Polimórfico b_1	2450.9	5.6735	0.9287	399.2	0.9218	0.9882
Levakovic II Polimórfico b_2	2449.9	5.6710	0.9287	371.2	0.8573	0.9890
Hossfeld IV Anamórfico	2455.3	5.6837	0.9285	475.5	1.0981	0.9859
Hossfeld IV Polimórfico b_1	2447.1	5.6647	0.9288	398.4	0.9201	0.9882
Hossfeld IV Polimórfico b_2	2450.3	5.6720	0.9287	500.9	1.1567	0.9851
Gompertz Anamórfico	2550.2	5.9032	0.9258	600.5	1.3868	0.9822
Gompertz Polimórfico b_1	2556.9	5.9187	0.9256	461.7	1.0662	0.9863
Gompertz Polimórfico b_2	2524.7	5.8577	0.9258	674.6	1.5616	0.9798

(Diéguez *et al.*, 2006; Vargas *et al.*, 2013; Tamarit *et al.*, 2014; Quiñonez *et al.*, 2015).

R²-adj de los dos modelos explicó varianza total mayor a 98 %. Los valores de SCE y CME fueron bajos, similares a los de los modelos ADA seleccionados y RECM mostró valores plausibles para ambas ecuaciones. Todas las estimaciones de los parámetros fueron significativas ($p \leq 0.01$), y no existieron diferencias importantes entre ambos modelos ajustados. Las curvas se compararon para evaluar el desempeño de los modelos con estructura GADA (Figura 1).

Familias de curvas de índice de sitio para *Pinus ayacahuite*

Las curvas de IS, de 12, 15, 18, 21 y 24 m a la edad base de 40 años de los mejores modelos, construidas a partir de modelos con ajustes similares siguieron patrones de crecimiento diferentes (Figura 1

models can have the same goodness of fit statistics or of comparison but different response (some underestimate in the early ages and overestimate with advanced ages and vice versa) (Diéguez *et al.* 2006).

The superimposed trajectories of the IS data observed in a family of curves, in this case of the anamorphic type of the Chapman-Richards model, showed that the dominant height growth pattern of *P. ayacahuite* follows different trends as a reflection of polymorphism (Figure 1A). In this respect, Corral *et al.* (2004) point out that anamorphic functions are generally not the most adequate for representing dominant height growth because the curve shapes vary among sites. Therefore, dominant height growth is actually polymorphic. For this reason, anamorphic structure was ruled out for describing dominant height growth.

Moreover, larger discrepancies are observed at early ages. In this respect, Huang (1999) suggested

Cuadro 8. Valores de los parámetros estimados de forma simultánea para los modelos de crecimiento en HD por el enfoque ADA.
Table 8. Values of parameters estimated simultaneously for HD growth models by the ADA approach.

Modelo	b_i	Estimación	Error estándar	P> t
Schumacher	b_0	23.653	0.3434	<0.0001
anamórfico	b_1	10.45587	0.1550	<0.0001
Schumacher	b_0	36.9377	0.6447	<0.0001
polimórfico	b_1	27.97976	0.7368	<0.0001
Chapman-Richards	b_0	38.68393	1.4155	<0.0001
anamórfico	b_1	0.021054	0.00138	<0.0001
	b_2	1.390515	0.0410	<0.0001
Chapman-Richards	b_0	38.00643	1.0392	<0.0001
Polimórfico b_1	b_1	0.022102	0.00117	<0.0001
	b_2	1.437551	0.0401	<0.0001
Chapman-Richards	b_0	39.22716	1.1530	<0.0001
Polimórfico b_2	b_1	0.020946	0.00128	<0.0001
	b_2	1.414433	0.0498	<0.0001
Levakovic II	b_0	63.94109	2.9284	<0.0001
Anamórfico	b_1	52.83666	5.7550	<0.0001
	b_2	1.529662	0.0626	<0.0001
Levakovic II	b_0	61.98111	2.2948	<0.0001
Polimórfico b_1	b_1	46.82683	4.4259	<0.0001
	b_2	1.621179	0.0646	<0.0001
Levakovic II	b_0	63.458	2.5390	<0.0001
Polimórfico b_2	b_1	49.42909	5.4951	<0.0001
	b_2	1.59386	0.0785	<0.0001
Hossfeld IV	b_0	49.91392	2.5091	<0.0001
Anamórfico	b_1	5.625445	0.0718	<0.0001
	b_2	1.362065	0.0337	<0.0001
Hossfeld IV	b_0	47.85916	1.8841	<0.0001
Polimórfico b_1	b_1	5.721145	0.0785	<0.0001
	b_2	1.406078	0.0325	<0.0001
Hossfeld IV	b_0	46.82266	1.7840	<0.0001
Polimórfico b_2	b_1	5.708496	0.0622	<0.0001
	b_2	1.413273	0.0271	<0.0001
Gompertz	b_0	29.96692	0.5068	<0.0001
Anamórfico	b_1	-3.26372	0.0683	<0.0001
	b_2	-0.0462	0.00124	<0.0001
Gompertz	b_0	31.0351	0.4086	<0.0001
Polimórfico b_1	b_1	-3.28957	0.0859	<0.0001
	b_2	-0.04436	0.00115	<0.0001
Gompertz	b_0	30.20798	0.3979	<0.0001
Polimórfico b_2	b_1	-3.4001	0.0628	<0.0001
	b_2	-0.04679	0.00107	<0.0001

a-f). Modelos diferentes pueden presentar los mismos estadísticos de bondad de ajuste o de comparación, pero respuesta distinta (unos subestiman en las primeras edades y sobreestiman con edades avanzadas y viceversa) (Diéguez *et al.*, 2006).

Las trayectorias sobrepuestas de los datos observados de IS, en este caso de tipo anamórfica del modelo de Chapman-Richards, mostraron que el patrón de crecimiento en altura dominante de *P. ayacabuite*

that erratic height growth at young ages is due to young trees' reaction to abnormal climatic extremes that can affect their total height, which is frequently determined by factors different from site quality.

The polymorphic b_2 derivation of Chapman-Richards and b_1 of Hossfeld IV were robust in the ADA models, according to the goodness of fit indicators and the significance of the estimated parameters (Tables 7 and 8). The graphic results (Figure 1C and

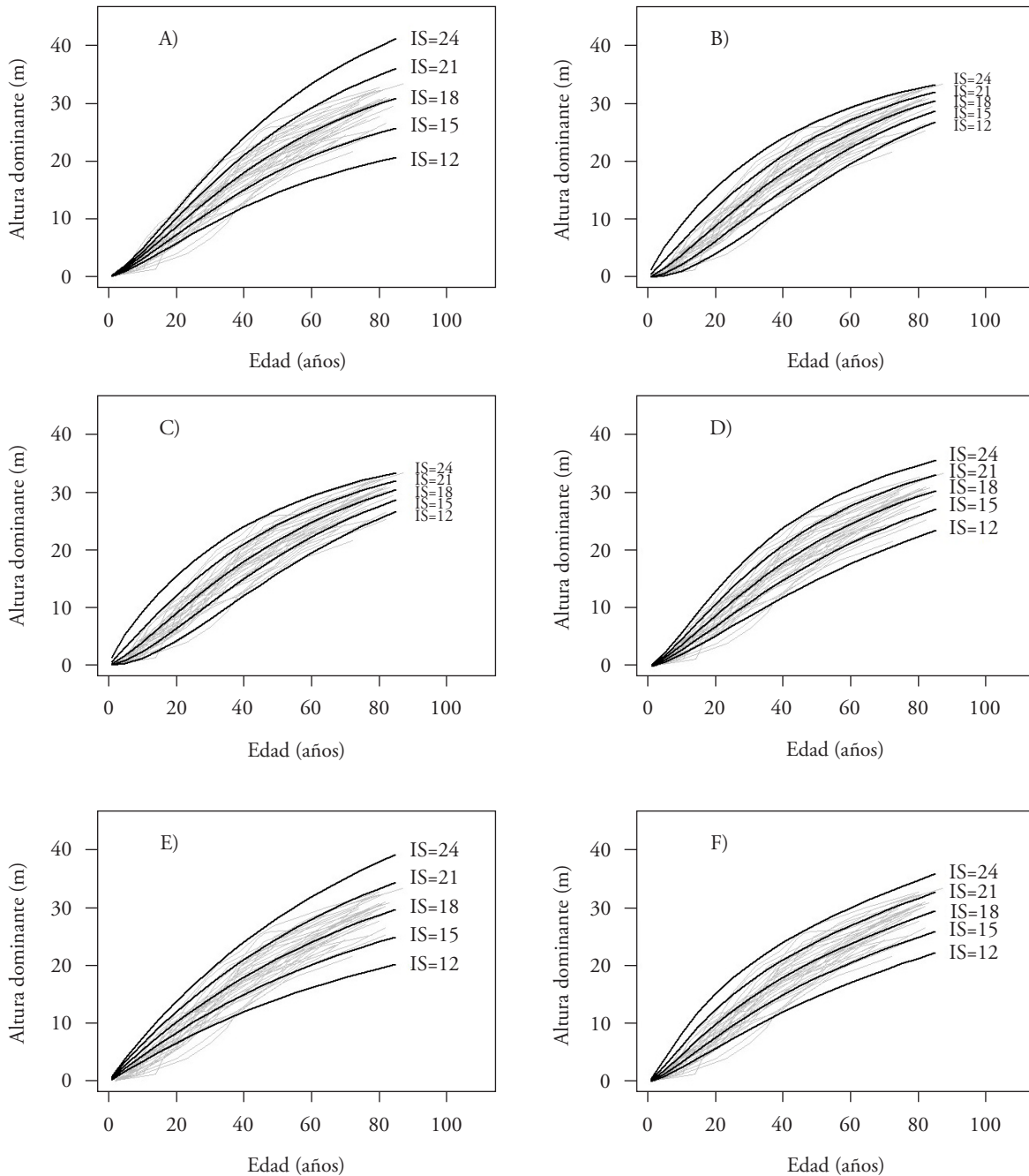


Figura 1. Familias de curvas de índice de sitio para *Pinus ayacabuite* a 40 años de edad base. A) y B): por el método de la curva guía, expresión anamórfica (b_0) y polimórfica b_2 de Chapman-Richards. C) y D): curvas dinámicas de crecimiento tipo ADA, modelo polimórfico b_2 de Chapman-Richards y polimórfico b_1 de Hossfeld IV. E) y F): curvas dinámicas de crecimiento tipo GADA del modelo de Chapman-Richards y Hossfeld, respectivamente.

Figure 1. Families of site index curves for *Pinus ayacabuite* at 40 years base age. A) and B): by the guide curve method, anamorphic expression (b_0) and Chapman-Richards polymorphic b_2 . C) and D): ADA-type dynamic growth curves, polymorphic Chapman-Richards b_2 model and Hossfeld IV polymorphic b_1 . E) and F): GADA-type dynamic growth curves of the Chapman-Richards and Hossfeld models, respectively.

Cuadro 9. Estadísticas de bondad de ajuste y parámetros estimados de los modelos GADA.
Table 9. Statistics of goodness of fit and estimated parameters of the GADA models.

Modelo	SCE	CME	RECM	R ² -adj	Estimación	Error estándar	P> t	
Chapman-Richards	353.6	0.9741	0.9870	0.9853	b_0	0.01255	0.00216	<0.0001
					b_1	-0.83462	0.0384	<0.0001
					b_2	-0.29716	0.0809	0.0003
Hossfeld IV	372.6	0.8645	0.9298	0.9889	b_0	33.00662	3.3777	<0.0001
					b_1	0.026752	0.00784	0.0007
					b_2	-1.42868	0.0462	<0.0001

SCE; suma de cuadrados del error, CME: cuadrado medio del error, RECM: raíz del error cuadrático medio, R²-adj: coeficiente de determinación ajustado por el número de parámetros y b_i : valor de parámetros estimados. ♦ SCE: sum of square errors; CME: mean squared error; RECM: root mean squared error; R²: coefficient of determination; R²-adj: adjusted R² statistic; b_i : value of estimated parameters.

sigue tendencias diferentes, como reflejo del polimorfismo (Figura 1A). Al respecto, Corral *et al.* (2004) señalaron que las funciones anamórficas generalmente no son las más adecuadas para representar el crecimiento en altura dominante porque las formas de las curvas varían entre sitios. Por tanto, el crecimiento en altura dominante es realmente polimórfico. Debido a lo anterior, la estructura anamórfica fue descartada para describir el crecimiento en altura dominante.

Asimismo, las discrepancias mayores se observan en edades tempranas. Al respecto, Huang (1999) sugirió que el crecimiento errático de altura a edades jóvenes se debe a que estas reaccionan más a los extremos climáticos anormales y pueden tener efecto en la altura total del árbol, lo cual es frecuentemente determinado por factores distintos a la calidad del sitio. Por ello, Vargas *et al.* (2013) señalan inconveniente seleccionar una edad de referencia demasiado joven para clasificar correctamente la calidad del sitio.

La derivación polimórfica b_2 de Chapman-Richards y b_1 de Hossfeld IV fueron robustas en los modelos ADA, de acuerdo con los indicadores de bondad de ajuste y la significancia de los parámetros estimados (Cuadros 7 y 8). En los resultados gráficos (Figura 1C y D) se observó que ambos modelos agruparon satisfactoriamente los datos reales observados, de la calidad de sitio mayor y menor. Pero, el modelo derivado de Chapman-Richards agrupó mejor los datos de edades tempranas que el modelo de Hossfeld IV. Por lo tanto, la estructura polimórfica b_2 de Chapman-Richards fue superior que la derivación b_1 de Hossfeld IV para predecir el crecimiento en altura dominante. Este último modelo fue similar al de Hossfeld IV, seleccionado con la metodología

D) show that both models satisfactorily group real observed data of all site qualities. Nevertheless, the model derived from Chapman-Richards grouped the data on early ages better than the Hossfeld IV model. Therefore, the Chapman-Richards polymorphic b_2 structure was superior to the Hossfeld IV b_1 derivation for predicting dominant height growth. The latter model was similar to that of Hossfeld IV, selected with the GADA methodology, which had adequate goodness of fit and graphic performance. In this way, the two specified ADA models were selected.

The numerical analysis of the models derived from Chapman-Richards and Hossfeld IV with the GADA formulation did not show major differences. However, the Hossfeld IV model was more realistic in the graphic result because it generated predictions with trends similar to the observed profiles. For sites of better quality, the Chapman-Richards overestimated growth; the opposite occurred in low quality sites (Figure 1E). For this reason, we concluded that to predict dominant height growth of *P. ayacabuite* with GADA structure, the model derived from Hossfeld IV is adequate. Consequently, to compare growth and productivity estimations of *P. ayacabuite* stands with the three methodologies, the selection is the following: Chapman-Richards polymorphic b_2 model with the guide curve, Chapman-Richards polymorphic b_2 and Hossfeld IV b_1 in ADA and Hossfeld IV in GADA.

The Chapman-Richards and Hossfeld IV models are widely used to model forest growth by the guide curve method and their versions of algebraic difference and generalized algebraic difference approaches. As examples for the Chapman-Richards model, Diéguez

GADA, que tuvo bondades de ajustes y desempeño gráfico adecuados. De esta forma, los dos modelos ADA especificados resultaron seleccionados.

El análisis numérico de los modelos derivados de Chapman-Richards y Hossfeld IV, con formulación GADA, no mostró diferencias importantes; pero el modelo de Hossfeld IV fue más realista en el resultado gráfico, porque generó predicciones con tendencias similares a los perfiles observados. Además, las curvas de índice de sitio agruparon mejor los datos observados.

Para los sitios de calidad mayor el modelo de Chapman-Richards sobreestimó el crecimiento, lo contrario sucedió en los sitios de calidad baja (Figura 1E). Por ello, se concluyó que para predecir el crecimiento en altura dominante de *P. ayacahuite* con estructura GADA el modelo derivado de Hossfeld IV es adecuado. En consecuencia, para comparar las estimaciones de crecimiento y la productividad de los rodales de *P. ayacahuite* con las tres metodologías la selección es: modelo polimórfico b_2 de Chapman-Richards por el método de la curva guía, polimórfico b_2 de Chapman-Richards y b_1 de Hossfeld IV en ADA y de Hossfeld IV en GADA.

Los modelos de Chapman-Richards y Hossfeld IV se han utilizado ampliamente para modelar el crecimiento forestal, por el método de la curva guía y en sus versiones de diferencia algebraica y diferencia algebraica generalizada. Como ejemplos para el modelo de Chapman-Richards, Diéguez *et al.* (2006) construyeron curvas dinámicas de crecimiento para *Pinus tadea* L. en EUA y Vargas *et al.* (2010) estudiaron *Pinus cooperi* Blanco en Durango, México, con los modelos comparados y derivaciones de Korf y Hossfeld IV. Además, Quiñonez *et al.* (2015) desarrollaron una expresión GADA para compararla con la estructura derivada por Krumland y Eng (2005) en masas forestales de Durango.

El modelo Hossfeld IV lo ejemplificaron Gómez *et al.* (2009) para describir la altura dominante de plantaciones de *E. grandis* Hill ex Maiden y De los Santos *et al.* (2006) con *E. urophylla* S. T. Blake, en Oaxaca. En este último evaluaron el crecimiento de plantaciones de *Terminalia amazonia* (Gmel.) Excell, en dos regiones de Costa Rica. También Santiago *et al.* (2013) investigaron la construcción de un sistema compatible de crecimiento y rendimiento para rodales coetáneos de *Pinus patula* Schl. et Cham.

et al. (2006) constructed dynamic growth curves for *Pinus tadea* L. in the USA, and Vargas *et al.* (2010) studied *Pinus cooperi* Blanco in Durango, Mexico, with the compared models and derivations of Korf and Hossfeld IV. In addition, Quiñonez *et al.* (2015) developed a GADA expression to compare it with the structure derived by Krumland and Eng (2005) in forests of Durango.

Gómez *et al.* (2009) exemplified the Hossfeld IV model to describe dominant height in plantations of *E. grandis* Hill ex Maiden and *E. urophylla* S. T. Blake, in Oaxaca, and De los Santos *et al.* (2006) evaluated growth in plantations of *Terminalia amazonia* (Gmel.) Excell in two regions of Costa Rica. Santiago *et al.* (2013) investigated the construction of a compatible system of growth and yield for even-aged stands of *Pinus patula* Schl. et Cham.

Graphs of the residuals for the models selected with the three methodologies are presented in Figure 2. We can see that in the ADA and GADA dynamic models, the dispersion of the residuals was less (-4 to 3 m), relative to the model selected with the guide curve (-6 to 8 m). Moreover, the latter model showed a slight funnel-shape tendency at early ages; the distribution of the residuals of the other models did not exhibit heteroscedasticity and showed a random pattern of the residuals around the reference line (line zero). This is due to the nature of the data used in the ADA and GADA dynamic equations, which enabled simultaneous fit and comparison of the change rates. For this reason, the studies conducted for construction of site index curves were developed with the methodology of the equations in algebraic differences or in its generalized form (Castillo *et al.*, 2013; Vargas *et al.*, 2013; Quiñonez *et al.*, 2015).

CONCLUSIONS

The Chapman-Richards polymorphic b_2 models in guide curve, the Chapman-Richards polymorphic b_2 , the Hossfeld IV b_1 model in algebraic difference and the Hossfeld IV model in generalized algebraic difference are suitable options for predicting dominant height growth of *P. ayacahuite*. With these models, timber productivity can be quantified. The Chapman-Richards polymorphic b_2 model in algebraic difference is recommended to determine the site index and select appropriate management

Las gráficas de los residuos para los modelos seleccionados con las tres metodologías se presentan en IA. Se observa que en los modelos dinámicos ADA y GADA la dispersión de los residuales fue menor (−4 a 3 m), comparada con el modelo seleccionado bajo la curva guía (−6 a 8 m) (Figura 2). Además, esta última mostró tendencia ligera, con forma de embudo, a edades tempranas, la distribución de los residuales de los demás modelos no mostró evidencia de heterocedasticidad y mostró patrón aleatorio de los residuos alrededor de la línea de referencia (línea cero). Esto se debió a la naturaleza de los datos empleados en las ecuaciones dinámicas ADA y GADA, los que permitieron el ajuste simultáneo y la comparación de tasas de cambio. Por esto, los estudios realizados para la construcción de curvas de índice de sitio se han desarrollado con la metodología de las ecuaciones

regimes for *P. ayacabuite* stands of the Ixtlán de Juárez forest, Oaxaca, given its predictive capacity, graphic behavior, and ease of implementation.

—End of the English version—

-----*

en diferencias algebraicas o en su forma generalizada (Castillo *et al.*, 2013; Vargas *et al.*, 2013; Quiñonez *et al.*, 2015).

CONCLUSIONES

Los modelos polimórfico b_2 de Chapman-Richards en curva guía, el polimórfico b_2 de Chap-

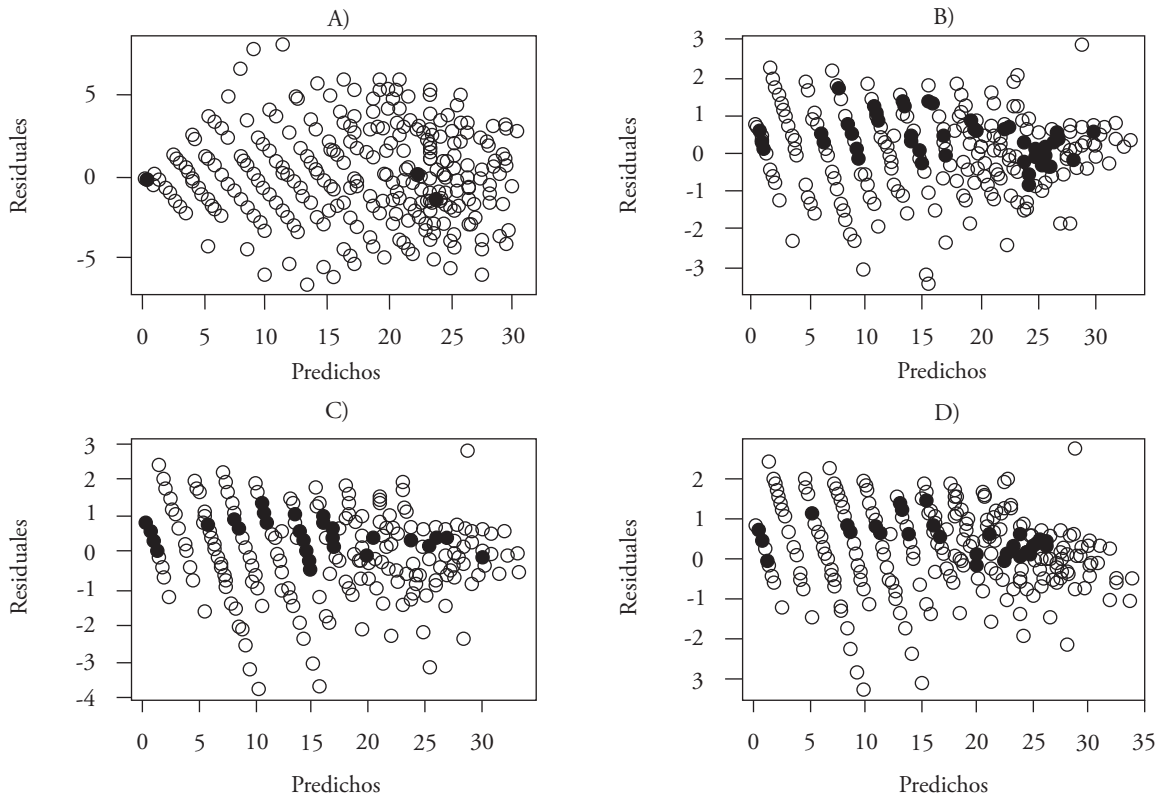


Figura 2. Dispersión de residuales contra alturas predichas. Modelos: A) polimórfico b_2 de Chapman-Richards por el método de la curva guía, B) polimórfico b_2 de Chapman-Richards bajo ADA, C) polimórfico b_1 de Hossfeld IV bajo ADA, y D) Hossfeld IV bajo GADA.

Figure 2. Dispersion of residuals against predicted heights. Models: A) Chapman-Richards polymorphic b_2 by the guide curve method, B) Chapman-Richards polymorphic b_2 under ADA, C) Hossfeld IV polymorphic b_1 under ADA, and D) Hossfeld IV under GADA.

man-Richards, el polimórfico b_1 de Hossfeld IV en diferencia algebraica y el modelo de Hossfeld IV en diferencia algebraica generalizada son una opción adecuada para predecir el crecimiento en altura dominante de *P. ayacahuite*. Con estos modelos puede cuantificarse la productividad maderera. El modelo polimórfico b_2 de Chapman-Richards, en diferencia algebraica, se recomienda para determinar el índice de sitio y seleccionar los regímenes de manejo apropiados para rodales de *P. ayacahuite* del bosque de Ixtlán de Juárez, Oaxaca, dada su capacidad predictiva, el comportamiento gráfico y la implementación sencilla.

LITERATURA CITADA

- Bailey, R. L., and J. L. Clutter. 1974. Base-age invariant polymorphic site curves. *Forest Sci.* 20: 155-159.
- Castillo, L. A., B. Vargas L., J. J. Corral R., J. A. Nájera L., F. Cruz C., y F. Javier H. 2013. Modelo compatible altura-índice de sitio para cuatro especies de pino en Santiago Papasquiaro, Durango. *Rev. Mex. Cienc. For.* 18: 89-103.
- Cieszewski, C. J. 2001. Three methods of deriving advanced dynamic site equations demonstrated on inland Douglas-fir site curves. *Can. J. Forest Res.* 31: 165-173.
- Cieszewski, C. J. 2002. Comparing fixed- and variable-base-age site equations having single versus multiple asymptotes. *Forest Sci.* 48: 7-23.
- Cieszewski, C. J. 2003. Developing a well-behaved dynamic site equation using a modified Hossfeld IV function $Y_3 = (axm)/(c + xm - 1)$, a simplified mixed-model and scant subalpine fir data. *Forest Sci.* 49: 539-554.
- Cieszewski, C. J., and R. L. Bailey. 2000. Generalized algebraic difference approach: theory based derivation of dynamic equations with polymorphism and variable asymptotes. *Forest Sci.* 46: 116-126.
- Clutter, J. L., J. C. Forston, L. V. Pienaar, G. H. Brister, and R. L. Bailey. 1983. *Timber Management: A Quantitative Approach*. John Wiley & Sons, Inc. New York. 333 p.
- Corral R., J. J., J. G. Álvarez G., A. D. Ruíz G., and K. V. Gadow. 2004. Compatible height and site index models for five pine species in El Salto, Durango (México). *Forest Ecol. Manag.* 201: 145-160.
- Daniel, T. W., J. A. Helms., and F. S. Baker. 1979. *Principles of Silviculture*. 2nd Ed. McGraw-Hill. New York. 500 p.
- De los Santos P., H. M., M. Montero M., y M. Markku. 2006. Curvas dinámicas de crecimiento en altura dominante para *Terminalia amazonia* (Gmel.) Excell en Costa Rica. *Agrociencia* 40: 521-532.
- Diéguez A., U., J. G. Álvarez G., M. Barrio A., and A. Rojo A. 2005. Site quality equations for *Pinus sylvestris* L. plantations in Galicia (north-west Spain). *Ann. Forest Sci.* 62: 143-152.
- Diéguez A., U., H. E. Burkhart, and R. L. Amateis. 2006. Dynamic site model for loblolly pine (*Pinus taeda* L.) plantations in the United States. *Forest Sci.* 52: 262-272.
- Gadow, K. V., S. Sánchez O., y J. G. Álvarez G. 2007. *Estructura y Crecimiento del Bosque*. Universidad de Göttingen, Alemania. 287 p.
- García, C. X., H. Ramírez M., C. Rodríguez F., J. Jasso M., y C. A. Ortiz S. 1998. Índice de sitio para caoba (*Swietenia macrophylla* King) en Quintana Roo, México. *Rev. Ciencia For. Méx.* 23: 9-19.
- Gómez T., J., H. M. de los Santos P., A. M. Fierros G., y J. R. Valdez L. 2009. Modelos de crecimiento en altura dominante para *Eucalyptus grandis* Hill ex Maiden y *E. urophylla* S. T. Blake en Oaxaca, México. *Rev. Fitotec. Mex.* 32: 161-169.
- Gompertz, B. 1825. On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies. *Philos. T. Roy. Soc.* 115: 513-585.
- Hossfeld, J. W. 1822. *Mathematik für Forstmänner, Ökonomen und Cameralisten*. Gotha, 4. Bd., S. 310.
- Huang, S. 1999. Development of compatible height and site index models for young and mature stands within an ecosystem based management framework. In: Amaro, A., and M. Tomé (eds). *Empirical and Process-based Models for Forest Tree and Stand Growth Simulation*, Edições Salamandra-Novas Tecnologias. Lisbon. pp: 61-98.
- Infante G., S., y G. P. Zárate de L. 2012. *Métodos Estadísticos: Un Enfoque Interdisciplinario*. 3a ed. Ed. La Gaya Ciencia, Colegio de Postgraduados. México. 624 p.
- Ivancich, H., G. Martínez P., y P. Peri. 2011. Modelos forzados y no forzados para el cálculo del índice de sitio en bosques de *Nothofagus antarctica* en Patagonia Sur. *Bosque* 32: 135-145.
- Krumland, B., and H. Eng. 2005. *Site index systems for major young-growth forest and woodland species in northern California*. California. Department of Forestry & Fire Protection. Forestry Report No. 4. 272 p.
- Levakovic, A. 1935. An analytical form of growth law. *Glasnik za sumske pokuse*. Zagreb 4: 189-282. (In Serbo-Croat).
- Magaña T., O. S., J. M. Torres R., C. Rodríguez F., H. Aguirre D., y A. M. Fierros G. 2008. Predicción de la producción y rendimiento de *Pinus rudis* Endl., en Aloapan, Oaxaca. *Madera Bosques* 14: 5-19.
- Mendoza B., M. A. 1993. *Conceptos Básicos de Manejo Forestal*. UTEHA NORIEGA Eds. México. 161 p.
- Perry Jr., J. P. 1991. *The Pines of Mexico and Central America*. Timber Press. Portland. 231 p.
- Quiñonez B., G., H. M. de los Santos P., F. Cruz C., A. Velázquez M., G. Ángeles P., y G. Ramírez V. 2015. Índice de sitio con polimorfismo complejo para masas forestales de Durango, México. *Agrociencia* 49: 439-454.
- R Development Core Team. 2015. *R: language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN URL<<http://www.R-project.org>>.
- Richards, F. J. 1959. A flexible growth function for empirical use. *J. Exp. Bot.* 10: 290-300.
- Santiago G., W., H. M. de los Santos P., G. Ángeles P., J. R. Valdez L., y G. Ramírez V. 2013. Sistema compatible de crecimiento y rendimiento para rodales coetáneos de *Pinus patula*. *Rev. Fitotec. Mex.* 36: 163-172.
- SAS Institute Inc. 2002. *SAS/ETS® 9.0 User's Guide*. SAS Institute Inc. Cary, NC.

- Schumacher, F. X. 1939. A new growth function curve and its application to timber-yield studies. *J. Forestry* 37: 819-820.
- Tamarit U., J. C., H. M. de los Santos P., A. Aldrete., J. R. Valdez L., H. Ramírez M., y V. Guerra de la C. 2014. Ecuaciones dinámicas de índice de sitio para *Tectona grandis* en Campeche, México. *Agrociencia* 48: 225-238.
- Vargas L., B., J. G. Álvarez G., J. J. Corral R., y O. A. Aguirre C. 2010. Construcción de curvas dinámicas de índice de sitio para *Pinus cooperi* Blanco. *Rev. Fitotec. Mex.* 33: 343-351.
- Vargas L., B., O. A. Aguirre C., J. J. Corral R., F. Crecente C., y U. Diéguez A. 2013. Modelo de crecimiento en altura dominante e índice de sitio para *Pinus pseudostrobus* Lindl. en el noreste de México. *Agrociencia* 47: 91-106.