

OBTENCIÓN DE TRAYECTORIAS SUBÓPTIMAS DE TEMPERATURA CON EL MÉTODO DE MONTE CARLO PARA LA MAXIMIZACIÓN DE LA PRODUCCIÓN DE TOMATE (*Solanum lycopersicum* L.) EN INVERNADERO

COMPUTATION OF SUBOPTIMAL TEMPERATURE TRAJECTORIES WITH THE MONTE CARLO METHOD TO MAXIMIZE GREENHOUSE TOMATO (*Solanum lycopersicum* L.) PRODUCTION

Eduardo **Moreno-Ramos**¹, América **Morales-Díaz**^{1*}, Antonio **Juárez-Maldonado**²,
Karim **de Alba-Romenus**³, Adalberto **Benavides-Mendoza**⁴

¹Programa de Robótica y Manufactura Avanzada del CINVESTAV Saltillo. ²Departamento de Botánica, ³Departamento de Maquinaria Agrícola. ⁴Departamento Horticultura de la UAAAN, Saltillo. (abmoralesd@gmail.com)

RESUMEN

El objetivo de este estudio fue obtener una trayectoria subóptima de la temperatura requerida para maximizar la producción de peso fruto (W_p) y fruto cosechado (W_{HF}) de tomate (*Solanum lycopersicum* L.) mediante el método de Monte Carlo. Así se plantea un problema de optimización dinámica basada en un modelo dinámico no lineal del crecimiento del cultivo en condiciones de invernadero. En la solución de este problema se utilizan restricciones en la temperatura de 15 °C a 30 °C en un intervalo; éste que representa el intervalo medio de temperatura durante el día en la ciudad de Saltillo, se realiza la optimización considerando horizontes de predicción de 15 min en un intervalo de 120 d después del transplante (ddt) y usando un modelo dinámico matemático de crecimiento del cultivo de tomate (*Solanum lycopersicum* L.) evaluado en un invernadero tipo capilla, en Saltillo, Coahuila (25°25'36" N, 100°59'44" O). Para realizar esto se determinó la trayectoria subóptima de temperatura que maximiza el peso de fruto (W_p) en todo el intervalo de tiempo de la simulación (de 0 a 120 ddt). Además, se determinó la trayectoria subóptima de temperatura que maximizó el peso de fruto (W_p) durante el intervalo de tiempo de precosecha (de 0 a 58 ddt) y de peso de fruto cosechado (W_{HF}) a partir del inicio de la etapa de cosecha (día 59), descrita por el modelo hasta el final de la simulación (120 ddt). Los resultados obtenidos muestran que la trayectoria subóptima de temperatura desde el día 59 que marca el inicio de la cosecha se estabilizó alrededor de 15 °C para la maximización de W_F y alrededor de 30 °C para la maximización de W_F y W_{HF} . Asimismo puede observarse que la trayectoria subóptima de temperatura

ABSTRACT

The objective of this study was to obtain a suboptimal temperature trajectory to maximize fresh weight (W_p) and harvested fruit weight (W_F) of tomato (*Solanum lycopersicum* L.) using the Monte Carlo method. We posed a problem of dynamic optimization based on a non-linear dynamic crop growth model under greenhouse conditions. In the solution of this problem temperature restrictions in the range of 15 °C to 30 °C, which represents the mean temperature range during the day in the city of Saltillo. Optimization is done considering prediction horizons of 15 min in an interval of 120 d after transplant (dat) and using a dynamic mathematical tomato (*Solanum lycopersicum* L.) growth model evaluated in a chapel-type greenhouse in Saltillo, Coahuila (25°25'36" N, 100°59'44" O). The suboptimal temperature trajectory that maximizes fruit weight (W_F) was determined for the entire simulation time interval (0 to 120 dat). Moreover, the suboptimal temperature trajectory that maximized fruit weight (W_p) during pre-harvest (0 to 58 dat) and harvested fruit (W_{HF}) as of the beginning of harvest (day 59), described by the model until the end of simulation (120 dat). The results obtained show that the suboptimal temperature trajectory from day 59, which marks the beginning of harvest, was established around 15 °C to maximize W_F and around 30 °C for maximization of W_F and W_{HF} . It could also be observed that the suboptimal temperature trajectory for both cases shows periods that emulate day and night, 15 °C to 30 °C, before day 59. The results obtained permit us to propose conditions for either maximizing fruit on the plant or harvested fruit, and the resulting temperature trajectories can be used to obtain a softened curve with more stable cycles that can be put into practice.

* Autor responsable ♦ Author for correspondence.

Recibido: junio, 2016. Aprobado: marzo, 2017.

Publicado como ARTÍCULO en Agrociencia 51: 849-866. 2017.

para ambos casos muestra períodos que emulan el día y la noche, alrededor de 15 °C a 30 °C antes del día 59. Los resultados obtenidos permitirán plantear condiciones para ya sea maximizar el fruto en la planta o el fruto cosechado y pueden usarse las trayectorias de temperatura obtenidos para obtener una curva suavizada con ciclos más estables que pueden ser llevados a la práctica.

Palabras clave: modelo dinámico de crecimiento de tomate, maximización de la producción, método de Monte Carlo.

INTRODUCCIÓN

El tomate (*Solanum lycopersicum* L.) es el cultivo hortícola más importante del mundo por su valor económico. Éste se usa tanto en fresco como producto procesado (Mehdizadeh *et al.*, 2013). El tomate ocupa el segundo lugar después de la papa (*Solanum tuberosum* L.), por su producción mundial pero ocupa el primer lugar como cultivo procesado (Mehdizadeh *et al.*, 2013). En México, entre los principales cultivos producidos en condiciones protegidas se encuentra el tomate con un 70 %, seguido por pimiento (*Capsicum annumm* L.) 16 % y pepino (*Cucumis sativus* L.) 10 % (SAGARPA, 2012) de la superficie. Además, México es el principal exportador de tomate a nivel mundial y envía su producto principalmente a EE.UU., Canadá y El Salvador (MEXICOPRODUCE, 2012).

A pesar de que la actividad agrícola es una de las más antiguas de la especie humana, sólo en las décadas recientes se usan sistemas de información y control automático para mejorar la calidad y productividad de las cosechas. Desde los años sesenta del siglo pasado se estudian estrategias de control para optimizar la producción de cultivos bajo invernadero y se plantean modelos dinámicos que permiten predecir los efectos causados por la modificación de factores medioambientales tales como temperatura, humedad, cantidad de dióxido de carbono (CO₂) y de radiación fotosintéticamente activa (PAR), dentro del invernadero. Estos estudios se han realizado principalmente en Europa, donde las temperaturas extremas que se presentan en invierno y verano hacen que sea necesario mejorar el costo de operación de los sistemas tanto de calefacción como de aire acondicionado empleados para evitar que las plantas sean afectadas por temperaturas extremas (Van Straten *et al.*, 2011).

Key words: model of tomato growth dynamics, production maximization, Monte Carlo method.

INTRODUCTION

Tomato (*Solanum lycopersicum* L.) is the most economically important vegetable crop in the world. It is used both fresh and processed (Mehdizadeh *et al.*, 2013). Tomatoes are second to potatoes (*Solanum tuberosum* L.) worldwide in production, but they are first as a processed crop (Mehdizadeh *et al.*, 2013). In Mexico, tomatoes occupy 70 % of the crop area under conditions of protected agriculture, followed by peppers (*Capsicum annumm* L.), 16 %, and cucumbers (*Cucumis sativus* L.), 10 % (SAGARPA, 2012). Moreover, Mexico is the largest exporter of tomatoes worldwide, exporting mostly to the USA, Canada and El Salvador (MEXICOPRODUCE, 2012).

Although agriculture is one of humankind's oldest activities, it is only recently that information systems and automatic control have been used to improve crop quality and productivity. Since the 1970s, control strategies have been studied to optimize greenhouse crop production, and dynamic models have been proposed to predict effects caused by modifying environmental factors such as temperature, moisture, quantity of carbon dioxide (CO₂) and photosynthetically active radiation (PAR) inside the greenhouse. These studies have been conducted mainly in Europe, where it necessary to reduce operation costs of both heating and air conditioning systems used to protect the plants from extreme winter and summer temperatures (Van Straten *et al.*, 2011).

One of the main objectives of agricultural research is to increase crop yields sustainably and improve produce quality. For this reason, use of system analysis and crop modeling techniques to estimate production potential and to define strategies, tactics and decisions have increased (Castilla-Prados, 1995).

Greenhouse crop mathematical models

Mathematical crop models simulate characteristics such as growth through several plant physiological processes, for example, photosynthesis, respiration, transpiration and crop development. These models can put to test different hypotheses on crop performance

Un objetivo principal de la investigación agrícola es incrementar de forma sustentable el rendimiento de cultivos y mejorar la calidad de los productos. Derivado de esto, se ha incrementado el uso de técnicas de análisis de sistemas y modelado de cultivos para estimar el potencial de producción y también para definir estrategias, tácticas y decisiones que se pueden realizar en la práctica con el cultivo (Castilla-Prados, 1995).

Los modelos matemáticos de cultivos en invernadero

Los modelos matemáticos de cultivo simulan algunas características como el crecimiento a través de varios procesos fisiológicos de las plantas tales como la fotosíntesis, respiración, transpiración y desarrollo de cultivo. Los modelos permiten poner a prueba diferentes hipótesis del comportamiento de los cultivos sin la necesidad de realizar experimentos, lo cual implica reducir todos los costos. Por lo tanto, a partir de los modelos matemáticos de los cultivos es posible obtener buenas aproximaciones de la realidad cuando se hace una adecuada calibración y evaluación de estos (Bouman *et al.*, 1994, Wallach *et al.*, 2006).

Los estudios de aplicación de modelos de cultivos en invernadero se han desarrollado en los Países Bajos, donde también se desarrollaron modelos dinámicos con base en procesos biológicos. Inicialmente todos estos estudios fueron desarrollados en forma numérica usando principios de balances biológicos, posteriormente fueron evaluados con datos experimentales y finalmente se aplicaron en sistemas de cultivo (Van Straten *et al.*, 2011).

Para el cultivo de tomate se han desarrollado varios modelos de crecimiento a lo largo de los años, que van desde algunos muy simples hasta muy complejos. Un modelo determinístico de crecimiento de tomates de invernadero escrito en lenguaje Pascal fue desarrollado basado en un modelo de asimilación de la hoja, más una teoría de respiración y una teoría del rango de fotosíntesis, lo cual es controlado por las condiciones ambientales y los contenidos de carbohidratos en las hojas. El modelo fue aplicado para estimar el efecto del enriquecimiento de CO₂ sobre la producción de frutos de tomate (Kano y Van Bavel, 1988). En cuanto a la distribución de materia seca entre hojas, tallo, raíz y frutos de las plantas Heuvelink y Marcelis (1989), desarrollaron un modelo

without the need to conduct experiments, thus reducing costs. Good approximations can be obtained with mathematical crop models when they are suitably calibrated and evaluated (Bouman *et al.*, 1994, Wallach *et al.*, 2006).

Studies on application of models to greenhouse crops have been developed in The Netherlands where dynamic models based on biological processes have also been developed. Initially, these studies were developed in numerical form using principles of biological balances, evaluated against experimental data, and finally applied in crop systems (Van Straten *et al.*, 2011).

For tomato, several growth models have been developed over the years, some very simple and others very complex. A deterministic greenhouse tomato growth model written in Pascal language was developed based on a model of leaf assimilation plus a theory of respiration and another of the range of photosynthesis, which is controlled by environmental conditions and carbohydrate contents in the leaves. The model was applied to estimate the effect of CO₂ enrichment on tomato fruit production (Kano and Van Bavel, 1988). For dry matter distribution among plant leaves, stem, root and fruits, Heuvelink and Marcelis (1989) developed a dynamic model. Their results of simulation of dry matter among tomato leaves, stems and fruits corresponded reasonably well with measured experimental data.

The TOMGRO model for tomatoes, which integrates the Acock model, was used to calculate net crop photosynthesis. The results show that the model is inadequate for describing the CO₂ balance of a greenhouse agrosystem. However, it was determined that it can be used in a more complex model to describe tomato growth and development (Zekki *et al.*, 1999).

There are other models for tomatoes under greenhouse conditions. One of them is TOMPOUSSE, which predicts production of tomato crops (Abreu and Meneses, 2000). Moreover, Dai *et al.* (2006) developed a relatively simple model for prediction of biomass production of the canopy as well as for harvested fruits for three greenhouse crops, including tomatoes. The results show that the model satisfactorily predicts canopy biomass and fruit harvest for the three crops. Furthermore, Dimokas *et al.* (2008) proposed a new model modified from the original TOMGRO model. The model was evaluated

dinámico. Los resultados de simulación de la materia seca entre las hojas, tallos y frutos de tomate correspondieron razonablemente bien con los datos medidos en el experimento.

El modelo TOMGRO para el cultivo de tomate se usó para calcular la fotosíntesis neta del cultivo, el cual integra el modelo Acock para el cálculo de la misma. Los resultados muestran que el modelo es inadecuado para describir el balance de CO_2 del agrosistema del invernadero, sin embargo, se determinó que puede ser usado en un modelo más complejo para describir el crecimiento y el desarrollo del cultivo de tomate (Zekki *et al.*, 1999).

Existen otros modelos para el cultivo de tomate bajo condiciones de invernadero, uno de ellos es el TOMPOUSSE, que predice la producción para los cultivos de tomate (Abreu y Meneses, 2000). Además, Dai *et al.* (2006), desarrollaron un modelo relativamente simple para predecir la producción de biomasa del dosel además de la cosecha de frutos para tres cultivos en invernadero incluido el tomate. Los resultados muestran que el modelo predice satisfactoriamente la producción de biomasa del dosel y la cosecha de los frutos para los tres cultivos. Por otra parte, Dimokas *et al.* (2008), proponen un nuevo modelo modificado del modelo original TOMGRO. El modelo fue evaluado y calibrado en el cultivo de tomate bajo condiciones de invernadero, ya que hubo una buena relación entre los datos medidos y simulados tomando en cuenta el desarrollo del cultivo, la biomasa y la producción de frutos. Tal experimento fue desarrollado para las condiciones del mediterráneo, en el este de Grecia.

El control óptimo en invernaderos

Los métodos de control óptimo permiten la obtención de trayectorias de las condiciones medioambientales dentro del invernadero que permitirán alcanzar los objetivos de producción previamente establecidos. Estos métodos se basan en un modelo dinámico que describe el comportamiento del cultivo que se desea producir y del establecimiento de un criterio de optimización (Bryson y Ho, 1975; Lewis, 1998). Por esta razón el desarrollo de controles óptimos en invernaderos es un tema que ha sido estudiado de manera muy activa en los últimos años, a continuación se hace una breve descripción de los estudios hechos en este enfoque y que son alternativas al método aquí propuesto.

and calibrated in greenhouse tomato and a good relation between measured and simulated data were found for crop development and for biomass and fruit production. This experiment was conducted in Mediterranean conditions in eastern Greece.

Optimal control in greenhouses

Optimal control methods allow obtaining trajectories of environmental conditions inside the greenhouse, which would lead to achieving previously established production goals. These methods are based on a dynamic model that describes the desired crop behavior and establishes an optimization criterion (Bryson and Ho, 1975; Lewis, 1998). For this reason, development of optimal controls in greenhouses is a topic that recently has been very actively studied. Below, we give a brief description of these studies, which are alternatives to the method we propose.

The work of Boaventura Cunha *et al.* (1997) and Coelho *et al.* (2005) present a general technique of predictive control to regulate greenhouse environmental conditions. This technique predicts future states of the system when an optimal control trajectory is obtained at a fixed time horizon and recalculated for each time horizon. Tap *et al.* (1996, 1997) propose an algorithm of optimal control that is applied at certain time horizons called RHOC (Receding Horizon Optimal Control) and evaluated during the reproductive stages of tomato production. The objective of our study was to obtain the suboptimal temperature trajectory required to maximize production of tomato (*Solanum lycopersicum* L.) fruit weight (W_p) and harvested fruit (W_f) using the Monte Carlo method. The hypothesis was that, by using numerical simulations, it is possible to determine the suboptimal temperature trajectory on which the greenhouse should be maintained for a period of 120 dat in order to increase tomato production.

MATERIALS AND METHODS

Dynamic tomato model under greenhouse conditions

Types of mathematical models are empirical, explanatory and teleonomic. It is the explanatory type that is of interest to our study. Explanatory models are defined through a set of ordinary differential equations that describe the behavior of the system

En los estudios de Boaventura Cunha *et al.* (1997) y de Coelho *et al.* (2005), se presenta una técnica general de control predictivo para regular las condiciones medioambientales dentro del invernadero, en la cual se desarrolla una predicción de los futuros estados del sistema cuando se obtiene una trayectoria óptima de control en un horizonte de tiempo fijo, la cual se re-calcula cada horizonte de tiempo. En los estudios de Tap *et al.* (1996, 1997) se propone un algoritmo de control óptimo que se aplica en ciertos horizontes de tiempo llamado RHOC (Receding Horizon Optimal Control) por sus siglas en inglés, el cual es evaluado durante las etapas reproductivas en la producción de tomate (*Solanum tuberosum* L.).

El objetivo de este estudio fue la obtención de una trayectoria subóptima de la temperatura requerida para maximizar la producción de peso fruto (W_F) y fruto cosechado (W_{HF}) de tomate (*Solanum lycopersicum* L.) mediante el método de Monte Carlo.

La hipótesis fue que usando simulaciones numéricas es posible determinar la trayectoria subóptima de la temperatura a la que se debe mantener el invernadero durante un período de 120 ddt de tal forma que aumente la producción de tomate.

MATERIALES Y MÉTODOS

Modelo dinámico de tomate bajo condiciones de invernadero

Los tipos de modelos matemáticos son los empíricos, los explicativos y los teleonómicos. Los explicativos son del interés del presente estudio, se definen mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias que describen el comportamiento de las variables de estado del sistema, es decir aquellas variables que representan las propiedades relevantes o atributos del sistema considerado (López-Cruz *et al.*, 2005).

El modelo matemático en el presente estudio fue propuesto por Tap *et al.* (1996), consta de seis ecuaciones dinámicas y por consecuencia seis variables de estado, y se describe aquí:

$$\begin{aligned}\frac{dB}{dt} &= P_g - b \left(f_g W_F + u g_L \frac{W_L}{z} \right) - bR \\ \frac{dW_F}{dt} &= b g_F W_F - (1-b) r_F W_F - h_F W_F \\ \frac{dW_L}{dt} &= b g_L W_L - (1-b) r_L W_L - h_L W_L\end{aligned}\quad (1)$$

state variables, that is, those variables that represent the relevant properties or attributes of the system under consideration (López-Cruz *et al.*, 2005).

The mathematical model used in our study was proposed by Tap *et al.* (1996) and consists of six dynamic equations and, consequently, six state variables, which are described here:

$$\begin{aligned}\frac{dB}{dt} &= P_g - b \left(f_g W_F + u g_L \frac{W_L}{z} \right) - bR \\ \frac{dW_F}{dt} &= b g_F W_F - (1-b) r_F W_F - h_F W_F \\ \frac{dW_L}{dt} &= b g_L W_L - (1-b) r_L W_L - h_L W_L \\ \frac{dD_p}{dt} &= d_1 - d_2 \ln \left(\frac{T_g}{d_3} \right) - d_4 t - h \\ \frac{dW_{HF}}{dt} &= h_F W_F \\ \frac{dW_{HL}}{dt} &= h_L W_L\end{aligned}\quad (1)$$

$B[\text{gm}^{-2}]$ represents the accumulation of assimilates of dry matter per unit of plant area. That is, the metabolic resources that allow the plant to carry out all of its biological processes. $W_F[\text{gm}^{-2}]$ and $W_L[\text{gm}^{-2}]$ are dry weight of fruit and leaves still on the plant. D_p [adimensional] is a parameter that indicates the stage of plant development on a zero to one scale, while $W_{HF}[\text{gm}^{-2}]$ and $W_{HL}[\text{gm}^{-2}]$ represent, respectively, harvested fruits and leaves, that is, those that were detached from the plant.

The model described by Tap *et al.* (1996) was evaluated by Juárez-Maldonado *et al.* (2012) in two tomato crop cycles in a chapel-type greenhouse covered with polycarbonate for two climatic conditions in Saltillo, Coahuila, Mexico ($25^{\circ}25'36''$ N, $100^{\circ}59'44''$ O). Because of the model's evaluation and calibration process, its parameters (Juárez-Maldonado *et al.*, 2012) were different from those of Tap *et al.* (1996). The modified parameters in our study (Table 1) were used in the dynamic model (1) with which the problem of greenhouse tomato production maximization was determined and solved by manipulating the temperature.

Dynamic optimization

The dynamic system to be studied is the following:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t) \quad (2)$$

$$\begin{aligned}\frac{dD_p}{dt} &= d_1 - d_2 \ln\left(\frac{T_g}{d_3}\right) - d_4 t - h \\ \frac{dW_{HF}}{dt} &= h_F W_F \\ \frac{dW_{HL}}{dt} &= h_L W_L\end{aligned}$$

$B[\text{gm}^{-2}]$ representa la acumulación de asimilados del peso de la materia seca por unidad de área de la planta, es decir, los recursos metabólicos que le permiten a la planta realizar todos sus procesos biológicos. $W_F[\text{gm}^{-2}]$ y $W_L[\text{gm}^{-2}]$ son el peso seco de los frutos y las hojas que aún están en la planta, respectivamente. $D_p[\text{adimensional}]$ es un parámetro que nos indica la etapa de desarrollo de la planta en una escala de cero a uno mientras que $W_{HF}[\text{gm}^{-2}]$ y $W_{HL}[\text{gm}^{-2}]$ representan, respectivamente, los frutos y hojas que fueron cosechados, es decir, fueron desprendidos de la planta.

El modelo descrito por Tap *et al.* (1996) se evaluó en dos ciclos de cultivo de tomate en un invernadero tipo capilla con cubierta de policarbonato por Juárez-Maldonado *et al.* (2012) para las condiciones climáticas de en Saltillo, Coahuila, México (25°25'36" N, 100°59'44" O). Debido al proceso de evaluación y calibración del mismo, los parámetros del modelo en Juárez-Maldonado *et al.* (2012) cambiaron en comparación con los de Tap *et al.* (1996). Los parámetros modificados en el presente estudio (Cuadro 1) se usaron en el modelo dinámico (1) y con ello se determinó y se resolvió el problema de maximización de la producción de tomate en condiciones de invernadero, mediante la manipulación de la temperatura.

Optimización dinámica

El sistema dinámico a estudiar es el siguiente:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t) \quad (2)$$

donde $x(t) \in R^n$ es el estado, $f(x(t), u(t), t)$ representa un vector de funciones no lineales descritas en el sistema (1), esto es, todas las funciones en forma vectorial al lado derecho de la igualdad y $u(t) \in R^m$ es el vector de entradas de control, las cuales están acotadas como:

$$\alpha_i(t) \leq u_i(t) \leq \beta_i(t), i=1, 2, \dots, m \quad (3)$$

donde $\alpha_i(t), \beta_i(t)$ son funciones conocidas.

Además tenemos el vector de condiciones iniciales definidos como

where $x(t) \in R^n$ is the state, $f(x(t), u(t), t)$ represents a vector of non-linear functions described in system (1), that is, all the functions in vector form on the right of the equation, and $u(t) \in R^m$ is the vector of control inputs, which are delimited as follows:

$$\alpha_i(t) \leq u_i(t) \leq \beta_i(t), i=1, 2, \dots, m \quad (3)$$

where $\alpha_i(t), \beta_i(t)$ are known functions. Moreover, we have the vector of initial conditions defined as

$$x(0) = x_0 \quad (4)$$

The interval of interest is $[0, t_f]$, where t_f is the final defined time. The problem consists of finding the entries for the control $u(t)$ in an interval of time $[0, t_f]$ that would lead the system to the trajectory $x(t), t \in [0, t_f]$ so that a function or variable is maximized in the entire time interval from $[0, t_f]$. In our case, this function is known as the cost function and is given in the following form:

$$J(u(t)) = \varphi(x(t_f), t_f) + \int_0^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt \quad (5)$$

where L is the Lagrangian of the system that contains its dynamic evolution expressed in equation (1) (Van Straten *et al.*, 2011) and $\varphi(x(t_f), t_f)$ is a final condition that can be imposed on the system.

In this study, the dynamic greenhouse tomato growth model developed by Tap *et al.* (1996) was the basis for calculating a suboptimal temperature trajectory that would maximize fruit (W_p) and harvested fruit (W_{HP}) production of greenhouse tomatoes. To solve this problem, the Monte Carlo random solution method was selected. This method establishes a temperature range and aims to determine the configuration that guarantees a maximum value for tomato fruit (W_p) and harvested tomato fruit (W_{HP}) weight. Temperature was selected as the parameter to calculate because of its greater effect on plant development and growth and because it is one of the factors in which many resources are invested for its control. The Monte Carlo method was selected also because it is possible to obtain approximations of results without knowing the system's behavior since it is necessary only to give value entries and determine which value has the greatest probability of occurring and generating the desired system behavior.

The first step is to determine the trajectory of the control entries $u(t)$ that the greenhouse should maintain during a period of 0 to 120 dat and during tomato development to increase production, using numerical simulations of model (1) with the parameters of Table 1 and application of the Monte Carlo method. The assumption is that by using numerical simulations,

Cuadro 1. Descripción de los parámetros de (1) obtenidos en Juárez-Maldonado *et al.* (2012).
Table 1. Description of the parameters of (1) obtained from Juárez-Maldonado *et al.* (2012).

Parámetro	Valor	Unidades	Descripción
b_1	2.72	$\text{m}^2 \text{g}^{-1}$	Coefficiente de la función de cambio en el búfer
d_1	$2.13 \cdot 10^{-7}$	s^{-1}	Parámetro del desarrollo de la planta
d_2	$2.47 \cdot 10^{-7}$	s^{-1}	Parámetro del desarrollo de la planta
d_3	20.0	$^{\circ}\text{C}$	Parámetro del desarrollo de la planta
d_4	$3.46 \cdot 10^{-13}$	—	Parámetro del desarrollo de la planta
f	1.2	—	Cociente del requerimiento de asimilados en la fruta
f_1	$8.10 \cdot 10^{-6}$	s^{-1}	Coefficiente de la tasa de crecimiento del fruto
f_2	$4.63 \cdot 10^{-6}$	s^{-1}	Coefficiente de la tasa de crecimiento del fruto
m	2.511	s^{-1}	Parámetro de la función de corrección del índice de área foliar
m_F	$9.57 \cdot 10^{-8}$	s^{-1}	Coefficiente de respiración de mantenimiento de fruto
m_L	$2.89 \cdot 10^{-8}$	s^{-1}	Coefficiente de respiración de mantenimiento vegetativo
p_3	577.0	Wm^2	Parámetro de fotosíntesis
p_4	221.0	$\text{gs}^{-1} \text{m}^{-2}$	Parámetro de fotosíntesis
P_m	$3.55 \cdot 10^{-3}$	$\text{gs}^{-1} \text{m}^{-2}$	Fotosíntesis máxima
Q_G	1.0	—	Tasa de crecimiento de la fruta debida a la temperatura
Q_R	2.0	—	Coefficiente de respiración
t	86 400.0	s	Duración de un día
T_G	20	$^{\circ}\text{C}$	Temperatura de referencia que afecta el crecimiento
T_R	25	$^{\circ}\text{C}$	Temperatura de referencia que afecta la respiración
v	2.23	—	Parámetro del asimilado requerido por las hojas
v_1	0.45	—	Parámetro de crecimiento vegetativo del fruto
v_2	-0.068	$^{\circ}\text{C}^{-1}$	Parámetro de crecimiento vegetativo del fruto
v_3	20	$^{\circ}\text{C}$	Parámetro de crecimiento vegetativo del fruto
ω_R	32.13	gm^{-2}	Parámetro de corrección de la función de índice de área foliar
γ_F	1.9183	—	Coefficiente de la tasa de cosecha del fruto
γ_L	1.9183	—	Coefficiente de la tasa de cosecha de las hojas
z	0.6081	—	Fracción de peso seco de hojas

$$x(0)=x_0 \quad (4)$$

El intervalo de interés es $[0, t_f]$, donde t_f es el tiempo final ya definido. El problema consiste en encontrar las entradas para el control $u(t)$ en el intervalo de tiempo $[0, t_f]$ que conduzcan al sistema a la trayectoria $x(t)$, $t \in [0, t_f]$ tal que una función o variable sea maximizada en todo el intervalo de tiempo desde $[0, t_f]$. En nuestro caso esa función se conoce como función de costo y está dada de la siguiente forma:

$$J(u(t)) = \varphi(x(t_f), t_f) + \int_0^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt \quad (5)$$

donde L es el Lagrangiano del sistema que contiene su evolución dinámica expresada en la ecuación (1) (Van Straten *et al.*, 2011) y $\varphi(x(t_f), t_f)$ es una condición final que puede imponerse al sistema.

En el presente estudio se tomó como base el modelo dinámico de crecimiento de tomate en invernadero desarrollado por Tap *et al.* (1996), para calcular una trayectoria subóptima de la

it is possible to determine the suboptimal trajectory of the control entries $u(t)$ that would increase tomato production. To achieve this, maximizing fruit weight (W_F) and harvested fruit weight (W_{HF}) are posed considering two cost functions, which are described below:

- In the first, only maximum growth of the variable W_F was considered in a time interval of $[0, 120]$ dat and manipulating the control inputs $u(t)$, that is:

$$\max(J) = \max \left(\int_{t_0}^{t_f} W_F dt \right) = \max \int_{t_0}^{t_f} (bg_F W_F - (1-b)r_F W_F - h_F W_F) dt \quad (6)$$

subject to the following restrictions: $u^{min} \leq u(t) \leq u^{max}$ and that the dynamic equations of system (1) are satisfied.

temperatura que maximice la producción de fruto (W_F) y fruto cosechado (W_{HF}) de tomate en invernadero. Para resolver este problema se seleccionó el método de solución aleatorio de Monte Carlo, donde se establece un rango de temperatura y lo que se busca es determinar la configuración que garantice un valor máximo en el peso de fruto (W_F) y fruto cosechado (W_{HF}) de tomate. La temperatura se seleccionó como el parámetro para calcular por su efecto mayor en el desarrollo y crecimiento de las plantas y porque es uno de los factores en los que se invierten muchos recursos para su control. Mientras que por otro lado se decidió usar el método de Monte Carlo debido a que es posible obtener aproximaciones de resultados sin conocer el comportamiento del sistema ya que solo es necesario dar entradas de valores y ver cual valor tiene mayor probabilidad de ocurrir y genere el comportamiento deseado en el sistema.

El primer paso es determinar la trayectoria de las entradas de control $u(t)$ a las que se debe mantener el invernadero durante un período de 0 a 120 ddt y durante el desarrollo de tomate para aumentar su producción, utilizando simulaciones numéricas del modelo (1) con los parámetros del Cuadro 1 y con la aplicación del método de Monte Carlo. La suposición es que usando simulaciones numéricas es posible determinar la trayectoria subóptima las entradas de control $u(t)$ que aumenten la producción de tomate. Para lograrlo se plantea maximizar la cantidad de peso de fruto (W_F) y peso de fruto cosechado (W_{HF}) considerando dos funciones de costo descritas a continuación:

- En la primera sólo se contempló la maximización del crecimiento de variable W_F en un intervalo de tiempo de [0,120] ddt manipulando las entradas de control $u(t)$, esto es:

$$\max(J) = \max \left(\int_{t_0}^{t_f} W_F dt \right) = \max \int_{t_0}^{t_f} (bg_F W_F - (1-b)r_F W_F - h_F W_F) dt \quad (6)$$

Sujeta a las siguientes restricciones: $u^{min} \leq u(t) \leq u^{max}$ y que se cumplan las ecuaciones dinámicas del sistema (1).

- En la segunda se contemplaron la maximización tanto del peso de fruto (W_F) como del peso del fruto cosechado (W_{HF}). En esta forma, del tiempo inicial hasta el tiempo que se alcanza la etapa de cosecha, a partir de 0 a 58 días después del trasplante, se buscó únicamente una mayor productividad de W_F y finalmente desde la etapa de cosecha (59 ddt) hasta el final del período de crecimiento (120 dddt) se incrementó la producción de W_{HF} , esto es

- In the second, maximization of both fruit weight (W_F) and harvested fruit weight (W_{HF}) were considered. In this way, from the initial time up to harvest time, 0 to 58 days after transplant, the goal was only to maximize productivity of W_F and finally, from harvest (59 dat) up to the final growth period (120 dat) W_{HF} was increased; that is,

$$\max(J) = \max \left(\int_{t_0}^{t_m} W_F dt + \int_{t_m}^{t_f} W_{HF} dt \right) = \max \left(\int_{t_0}^{t_m} (bg_F W_F - (1-b)r_F W_F - h_F W_F) dt + \int_{t_m}^{t_f} h_F W_F dt \right) \quad (7)$$

Likewise, subjected to the restrictions of the previous case, the goal was not to obtain a maximum value of only W_{HF} from the beginning of the simulation since this variable remains constant with a value of zero until the harvest stage is reached. To achieve this objective, one or several inputs of the dynamic system (1) must be selected, such as temperature, PAR radiation, or CO_2 concentration.

Temperature is one of the main climatic factors that affect development stages and physiological processes of the plant. This can be seen in the dynamic model (4) as T_g , which is one of its inputs. Satisfactory development of the phases of germination, vegetative growth, flowering, fruit set and fruit ripening depend on the temperatures inside the greenhouse at each growth stage. Moreover, because tomato is a plant that is sensitive to extreme temperature and/or changes in relative humidity, it is necessary to maintain it within an optimum temperature range so that it can achieve its maximum development. Also, it should be added that tomato is a thermoperiodic plant, which means that its growth is favored by temperature that varies with the stage of plant development, as can be seen in Table 2 (Jaramillo-Noreña *et al.*, 2013; Wallach *et al.*, 2006).

Thus, to achieve the objective of maximizing production based on dynamic model (4), temperature is selected as the control input (Table 2) to obtain, first, a temperature trajectory that maximizes the quantity of fruit on the plant during the period of 120 dat. Another temperature trajectory is then chosen to maximize the quantity of fruit in the first 58 dat and harvested fruit from day 59 to 120 dat. It is important to clarify two points. First, despite the existence of another two inputs in dynamic model (1), which correspond to PAR (I) radiation and CO_2 concentration, these were not determined in our study; rather, we used those reported by Juárez Maldonado *et al.*, 2012) (Figures 8 and 9). Second, to obtain a feasible temperature

$$\max(J) = \max \left(\int_{t_0}^{t_m} W_F dt + \int_{t_m}^{t_f} W_{HF} dt \right) = \max \left(\int_{t_0}^{t_m} (bg_F W_F - (1-b)r_F W_F - h_F W_F) dt + \int_{t_m}^{t_f} h_F W_F dt \right) \quad (7)$$

Igualmente sujeta a las restricciones del caso anterior, no se buscó obtener un valor máximo sólo de la variable W_{HF} desde el comienzo de la simulación, ya que esta variable permanece constante con valor cero hasta que se alcanza la etapa de cosecha. Para lograr este objetivo se debe escoger una o diversas entradas del sistema dinámico (1), tales como la temperatura, la radiación PAR o la concentración de CO_2 .

La temperatura es uno de los principales factores climáticos que influye en los estados de desarrollo y procesos fisiológicos de la planta. Esto puede verse en el modelo dinámico (4) como T_g que es una de las entradas al mismo. El desarrollo satisfactorio de las fases de germinación, crecimiento vegetativo, floración, fructificación y maduración de frutos, depende de las temperaturas que se alcanzan en el invernadero en cada etapa de su crecimiento. Además, como el tomate es una planta sensible a cambios extremos de temperaturas y/o humedad relativa, es necesario mantenerlo en un rango óptimo de temperatura para que alcance su máximo desarrollo. Así mismo, cabe agregar que el tomate es una planta termoperiódica, lo cual implica que su crecimiento se ve favorecido por una temperatura variable. Dicha temperatura varía con el estado de desarrollo de la planta, ver Cuadro 2 (Jaramillo-Noreña *et al.*, 2013; Wallach *et al.*, 2006).

Entonces, para lograr el objetivo de maximización de la producción basándonos en el modelo dinámico (4), se selecciona la temperatura como entrada de control (Cuadro 2) para primero obtener una trayectoria de temperatura que maximice la cantidad de fruto en la planta durante un período de 120 ddt. Posteriormente se elige otra trayectoria de temperatura que maximice la cantidad de fruto en los primeros 58 ddt y del fruto cosechado a partir del día 59 y hasta los 120 d. Es importante aclarar dos puntos: el primero es que a pesar de que existen otras dos entradas en el modelo dinámico (1), las cuales corresponden a la radiación PAR (I) y a la concentración de CO_2 , éstas no fueron consideradas en este estudio y se usaron las reportadas en el estudio de Juárez Maldonado *et al.*, 2012 (Figuras 8 y 9); el segundo es que para obtener una trayectoria de temperatura factible en la maximización de la producción de tomate, en cualquiera de los dos problemas aquí planteados, se requiere tener una restricción en la temperatura, que es la entrada manipulada. Por esta razón

trajectory in maximizing tomato production, in either of the two problems posed here, it is necessary to have a restriction on temperature, which is the manipulated input. For this reason and considering the studies of Pérez *et al.* (2002), Jaramillo *et al.* (2013) and Wallach *et al.* (2006), a temperature restriction interval of $15^\circ C \leq T_g \leq 30^\circ C$ was chosen. This range was selected since it is the mean temperature range during the day in the city of Saltillo.

The problem of maximizing fruit is formulated with the system of differential equations (1), which describes the growth dynamics of cultivated tomato plants. Considering the control input $u = T_g$, which is restricted to the range of $15^\circ C \leq u \leq 30^\circ C$, that is, $u \in [15; 30]$ and considering the vector of states, $x(t) = [B, W_F, W_L, D_p, W_{HF}, W_{HL}]$, with the initial crop conditions of $x(0) = [0; 0.42; 43.59; 0; 0; 3.95]$ obtained by Juárez-Maldonado *et al.* (2014), it is necessary to find the temperature trajectory that generates a higher quantity of fruit (W_F) and of harvested fruit (W_{HF}) in the final growth period $t_f = 120$ days. It is important to mention that each time interval in which a temperature is calculated is 15 min during the 120 d of simulation.

The Monte Carlo Method

The Monte Carlo method consists of generating random numbers on the basis of a given probability distribution. In this way, configurations, or inputs, accessible for the system

Cuadro 2. Temperaturas mínima, máxima y óptima de las etapas de desarrollo de la planta reportadas en Jaramillo-Noreña *et al.* (2013) y Wallach *et al.* (2006).

Table 2. Minimum, maximum and optimal temperatures for plant development stages reported by Jaramillo-Noreña *et al.* (2013) and Wallach *et al.* (2006).

Estado de desarrollo	T. Mínima (°C)	T. Óptima (°C)	T. Máxima (°C)
Germinación	11	16-29	34
Crecimiento	18	21-24	32
Fecundación	13	15-25	30
Cuajado de frutos durante el día	18	23-26	32
Cuajado de frutos durante la noche	10	14-17	22
Producción de pigmento rojo (licopeno)	10	20-24	30
Producción de pigmento amarillo	10	21-23	40
Temperatura del suelo	12	20-24	25

y considerando los estudios de Pérez *et al.* (2002), Jaramillo *et al.* (2013) y Wallach *et al.* (2006), se seleccionó un intervalo de restricción de la temperatura de $15\text{ }^{\circ}\text{C} \leq T_g \leq 30\text{ }^{\circ}\text{C}$. Este rango fue seleccionado de esa manera ya que representa el intervalo medio de temperatura durante el día en la ciudad de Saltillo.

El problema de la maximización de fruto se formula con el sistema de ecuaciones diferenciales (1) que describe la dinámica de crecimiento de las plantas de tomate bajo cultivo: considerando a la entrada de control como $u = T_g$, la cual está restringida en el intervalo de $15\text{ }^{\circ}\text{C} \leq u \leq 30\text{ }^{\circ}\text{C}$, es decir, $u \in [15; 30]$ y considerando el vector de estados, $x(t) = [B, W_p, W_L, D_p, W_{HP}, W_{HL}]$, con las condiciones iniciales en el cultivo de $x(0) = [0; 0.42; 43.59; 0; 0; 3.95]$, obtenidas por Juárez-Maldonado *et al.* (2014). Se requiere encontrar la trayectoria de temperatura que generen una mayor cantidad de fruto (W_p) y fruto cosechado (W_{HP}) en el tiempo de crecimiento final $t_f = 120$ días; donde es importante mencionar que cada intervalo de tiempo en el que se calculó una temperatura es de 15 min durante los 120 d de simulación.

Método de Monte Carlo

El método de Monte Carlo consiste en la generación de números aleatorios en base a una distribución de probabilidad dada. De esta manera se exploran configuraciones o entradas accesibles al sistema para posteriormente tomar las de mayor probabilidad en base a los criterios seleccionados.

El algoritmo basado en el Método de Monte Carlo (Peña Sánchez de Rivera, 2001) que se utilizó para obtener la trayectoria de temperatura es:

1. Establecer el rango o intervalo de temperatura al cual será sometido el sistema.
2. Fijar el número de iteraciones o pasos para explorar el rango de temperatura.
3. De los valores correspondientes a la temperatura tomamos uno de manera aleatoria, esa temperatura la llamaremos T_1 e integramos el sistema dinámico (1) usando un método explícito de Runge-Kutta de 4to y 5to orden combinado con el método de Dorman y Prince, (1980), para mejorar la aproximación de la solución al adaptar el paso de integración que contiene MATLABR11 y llamado ode45 (MathWorks, 2017).
4. Nuevamente tomamos una temperatura al azar dentro del rango establecido, T_2 , e integramos el sistema dinámico (1).
5. Si la temperatura T_2 genera un mayor valor de la variable que nos interesa maximizar añadimos a T_2 a la base de datos de temperatura subóptimas para el sistema.
6. En caso contrario se calcula la diferencia entre las variables a maximizar como: $x = x_2 - x_1$. Donde x_1 y x_2 corresponden

are explored to later take those of greater probability based on selected criteria.

The algorithm based on the Monte Carlo Method (Peña Sánchez de Rivera, 2001) used to obtain the temperature trajectory is the following:

1. Establish the temperature range or interval to which the system will be subjected.
2. Fix the number of iterations or steps for exploring the temperature range.
3. From the values corresponding to temperature, we take one at random; this temperature we will call T_1 and we integrate the dynamic system (1) using an explicit method of Runge-Kutta of 4th and 5th order combined with the method of Dorman and Prince (1980) to improve approximation of the solution by adapting the integration step, which MATLABR11 contains and is called ode45 (MathWorks, 2017).
4. Again we take a temperature at random in the established range, T_2 , and we integrate the dynamic system (1).
5. If temperature T_2 generates a higher value of the variable we are interested in maximizing, we add T_2 to the database of suboptimal temperatures for the system.
6. In the opposite case, the difference between the variables to be maximized is calculated as: $x = x_2 - x_1$. Where x_1 and x_2 correspond to the variables obtained with T_1 and T_2 , respectively. In our case, as we mentioned above, the variables to be maximized are fruit weight W_F and harvested fruit weight W_{HF} .
7. We generate a random number r between 0 and 1.
8. If $r > e^{-x}$, we keep temperature T_1 , since the difference, $x = x_2 - x_1$ between the variables to be optimized is very low in this temperature interval.
9. Repeat steps 3 to 9 until completing the established iterations.

One step of Monte Carlo is considered completed when the entire process described above has been carried out. The suboptimal temperature trajectory is obtained by calculating the averages of T_g in the iterations done to graph them against the established time intervals using the equation of the mean $\left(\langle T_g \rangle = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M T_{gi}\right)$, where T_{gi} is the temperature obtained in step i of the simulation and M is the total number of iterations.

Because it is random and not based on the conditions of first and second order optimality (Bryson and Ho, 1975; Lewis, 1998), the Monte Carlo method must be evaluated by changing the number of iterations. It is known that, by increasing the number of iterations, the method can better approximate its

a las variables obtenidas con T_1 y T_2 , respectivamente. En nuestro caso como se menciona anteriormente las variables a maximizar son el peso de fruto W_F y peso de fruto cosechado W_{HF} .

7. Generamos un número aleatorio r entre 0 y 1.
8. Si $r > e^{-x}$ nos quedamos con la temperatura T_1 , ya que la diferencia $x = x_2 - x_1$ entre las variables a optimizar es muy baja en ese intervalo de temperatura.
9. Repetir nuevamente desde el paso 3 al 9 hasta haber completado las iteraciones establecidas.

Se considera que se ha completado un paso de Monte Carlo cuando se cumple todo el proceso descrito anteriormente. La trayectoria subóptima de temperatura se obtiene calculando los promedios de T_g en las iteraciones hechas para graficarlos contra los intervalos de tiempo establecidos usando la ecuación de la media $\left(\langle T_g \rangle = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M T_{gi} \right)$, donde T_{gi} es temperatura obtenida en el paso i de la simulación y M es el número total de iteraciones.

El método de Monte Carlo al ser aleatorio y al no estar basado en las condiciones de optimalidad de primer y segundo orden (Bryson y Ho, 1975; Lewis, 1998) requiere ser evaluado cambiando el número de iteraciones. Es conocido que al aumentar el número de iteraciones este método aproxima mejor su solución, por lo tanto depende de un criterio de finalización al determinar el máximo error que va a ser admitido. Por esta razón, para resolver el problema anterior se realizaron dos simulaciones, una con 500 mil y la segunda con 1 millón de iteraciones con el método de Monte Carlo para los dos casos de maximizar las variables de peso de fruto (W_F) y peso de fruto cosechado (W_{HF}), considerando que los límites de temperatura están entre los 15 y 30 °C.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Las trayectorias de temperatura se consideraron subóptimas bajo el criterio de que el método de Monte Carlo no asegura soluciones óptimas, y de las variables que se maximizaron en los casos discutidos anteriormente. Estos son: (1) sólo se contempló la maximización del crecimiento de variable W_F en un intervalo de tiempo de 0 a 120 ddt; (2) se contemplaron la maximización tanto del peso de fruto (W_F) de 0 a 58 ddt, como del peso del fruto cosechado (W_{HF}) de los 59 a los 120 ddt.

Primer Caso: maximización de W_F

Las trayectorias subóptimas de temperatura obtenidas después del día 59 para el primer caso de

solution. Therefore, it depends on the finalization criterion when determining the maximum error to be admitted. For this reason, to solve the previous problem, two simulations are carried out: one with 500 thousand and the second with 1 million iterations with the Monte Carlo method for the two cases of maximizing the variables fruit weight (W_F) and harvested fruit weight (W_{HF}), considering that the temperature limits are between 15 and 30 °C.

RESULTS AND DISCUSSION

The temperature trajectories, which were considered suboptimal under the criterion that the Monte Carlo method does not assure optimal solutions. Also presented are the variables that are maximized and were obtained for the two cases discussed previously. They are: 1) only maximization of the W_F growth variable is contemplated in a time interval of 0 to 120 dat and 2) maximization of both fruit weight (W_F) from 0 to 58 dat and harvested fruit weight (W_{HF}) from 59 to 120 dat are considered.

First case: maximization of W_F

The suboptimal temperature trajectories obtained after day 59 for the first case of only W_F maximization, which corresponds to 1 million iterations, indicates that temperature stabilizes around 15 °C, the lower limit of the imposed restriction, unlike what occurs at 500 thousand iterations where no stabilization is observed. Moreover, it can be observed that the suboptimal temperature trajectory shows periods that emulate day and night around this same restriction interval (Figure 1).

Maximized fruit weight (W_F) with the suboptimal temperature trajectory (Figure 1), for 500 thousand and 1 million iterations, reveals that the increase in the number of iterations has an impact on obtaining maximized fruit weight and that, for 500 thousand iterations, around 650 [gm⁻²] W_F is obtained, while for the case of 1 million iterations, 750 [gm⁻²] W_F is obtained (Figure 2).

The results of harvested fruit (W_{HF}), when only fruit weight (W_F) is maximized considering 500 thousand and 1 million iterations, indicate that the curve begins to increase around day 59, which is when fruit harvest initiates. Harvested fruit weight (W_{HF}) reaches an approximate value of 900 [gm⁻²] for both 500 thousand iterations and for 1 million iterations (Figure 3).

maximización sólo de W_F , en lo que corresponde a un 1 millón de iteraciones, indican que la temperatura se estabiliza alrededor de 15 °C, que corresponde al límite inferior de la restricción impuesta a diferencia de lo que ocurre a 500 mil iteraciones donde no se observa esta estabilidad, así mismo puede observarse que la trayectoria de temperatura subóptima muestra períodos que emulan el día y la noche, alrededor de este mismo intervalo de restricción (Figura 1).

El peso de fruto maximizado (W_F) con la trayectoria subóptima de temperatura (Figura 1), para 500 mil y 1 millón de iteraciones permite apreciar que el aumento en el número de iteraciones tiene un impacto en la obtención del peso de fruto maximizado y que para 500 mil iteraciones se obtienen alrededor de 650 [gm⁻²] de W_F , mientras que para el caso de 1 millón de iteraciones se obtienen 750 [gm⁻²] W_F (Figura 2).

Los resultados del fruto cosechado (W_{HF}) para cuando sólo se maximiza el peso de fruto (W_F), considerando 500 mil y 1 millón de iteraciones señalan que la curva inicia a incrementarse alrededor del día 59, que es cuando el fruto empieza a cosecharse. El peso de fruto cosechado (W_{HF}) alcanza un valor aproximado de 900 [gm⁻²] tanto para las 500 mil iteraciones y como para un millón de iteraciones (Figura 3).

Segundo caso: maximización de W_F y W_{HF}

La trayectoria de temperatura subóptima obtenida para la maximización combinada de W_F y W_{HF} , que es el segundo caso, permite observar una periodicidad tal como cuando se maximiza únicamente el

Second case: maximization of W_F and W_{HF}

The suboptimal temperature trajectory obtained for combined maximization of W_F and W_{HF} , shows a periodicity similar to that when only fruit weight W_F is maximized. However, as of day 59, approximately, corresponding to the harvest stage, maximization indicates that temperature should be maintained at around the upper limit of temperature restriction of 30 °C (Figure 4).

The results of fruit weight (W_F) indicate values similar to the first case in the period of 0-59 d, 650 [gm⁻²] and 750 [gm⁻²] W_F for 500 thousand and 1 million iterations, respectively. However, as of day 59, both simulations of fruit weight (W_F) decrease since in this case only harvested fruit weight is maximized (W_{HF}) (Figure 5).

Harvested fruit weight (W_{HF}) increases considerably, relative to the case in which only fruit weight (W_F) is maximized; that is approximately 1300 [gm⁻²] and 1450 [gm⁻²] are obtained for 500 thousand and one million iterations, respectively, contrasting with the 900 [gm⁻²] obtained previously (Figure 3).

Results of the simulation without the optimization reported by Juárez-Maldonado *et al.*, (2012)

The results of fruit weight and of harvested fruit weight reported by Juárez-Maldonado *et al.* (2012), reproduced by simulation and presented here (Figure 7), maximize neither W_F nor W_{HF} . Only the trajectories of temperature, CO₂ and PAR radiation, measured during the 120 dat in the greenhouse were considered

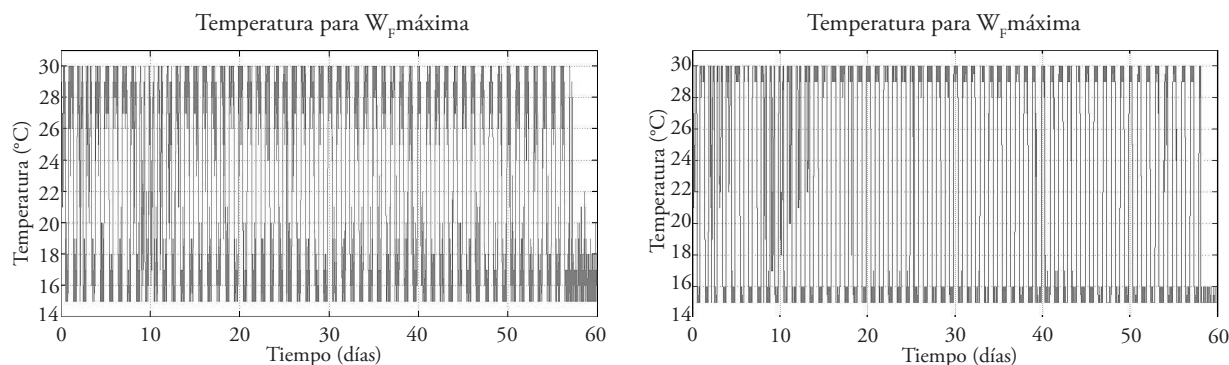


Figura 1. Trayectorias de temperatura subóptima cuando se maximiza W_F . Obtenida con 500 mil iteraciones (izquierda) y con 1 millón de iteraciones (derecha).

Figure 1. Suboptimal temperature trajectories when maximizing W_F , obtained with 500 thousand iterations (left) and with 1 million iterations (right).

peso de fruta (W_F). Sin embargo, a partir del día 59 aproximadamente, el cual corresponde a la etapa de la cosecha, la maximización indica que la temperatura debe mantenerse alrededor del intervalo de restricción de temperatura máxima de 30 °C (Figura 4).

Los resultados del peso de fruta (W_F) indican valores similares a los del primer caso, en el intervalo de 0-59 d, de 650 [gm⁻²] y de 750 [gm⁻²] de W_F para 500 mil y un millón de iteraciones, respectivamente. Sin embargo, desde el día 59 en ambas simulaciones el peso de fruta (W_F) decrece, ya que en esta caso se maximiza sólo el peso de fruto cosechado (W_{HF}) (Figura 5).

En cuanto al peso de fruto cosechado (W_{HF}) se observó que éste aumenta considerablemente con respecto al caso donde cuando únicamente se maximiza el peso de fruto (W_F), es decir, se obtienen aproximadamente 1300 [gm⁻²] y 1450 [gm⁻²], para 500 mil y un millón de iteraciones, respectivamente; en contraste con los 900 [gm⁻²] obtenidos anteriormente (Figura 3).

Resultados de simulación sin optimización reportado por Juárez-Maldonado *et al.* (2012)

Los resultados del peso de fruto y de peso de fruto cosechado reportados por Juárez-Maldonado *et al.* (2012), reproducidos por simulación y presentados a continuación (Figura 7), no se maximiza W_F ni W_{HF} y sólo se consideran las trayectorias de temperatura, CO₂ y radiación PAR medidas durante los 120 días ddt dentro del invernadero (Figuras 8-10) sin optimizar. En dichos resultados se observa un aumento del peso de fruto (W_F) de 600 [gm⁻²] sin maximizar

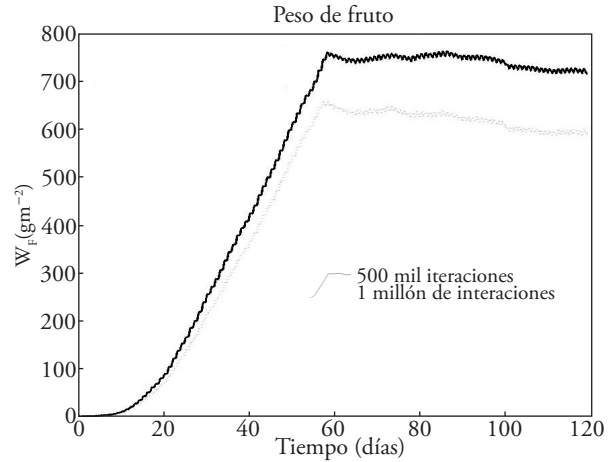


Figura 2. W_F [gm⁻²] maximizada, obtenida con 500 mil iteraciones y con 1 millón de iteraciones.

Figure 2. Maximized W_F [gm⁻²] obtained with 500 thousand iterations and with 1 million iterations.

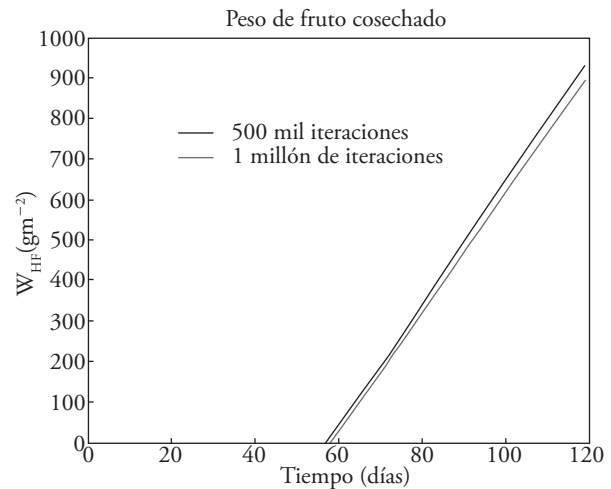


Figura 3. W_{HF} [gm⁻²] obtenida con 500 mil iteraciones y con 1 millón de iteraciones.

Figure 3. W_{HF} [gm⁻²] obtained with 500 thousand iterations and with 1 million iterations.

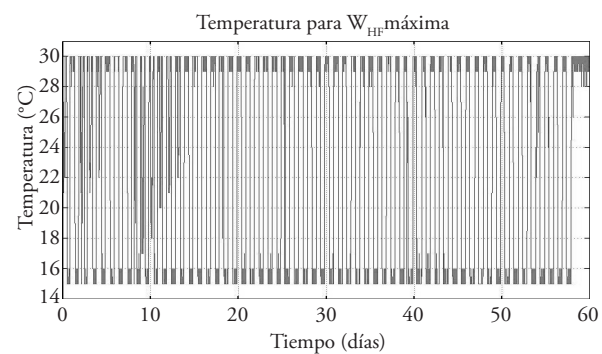
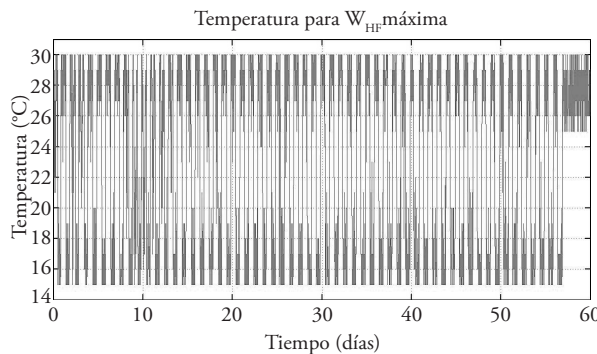


Figura 4. Trayectorias de temperatura subóptima para W_F y W_{HF} . Obtenida con 500 mil iteraciones (izquierda) y con 1 millón de iteraciones (derecha).

Figure 4. Suboptimal temperature trajectories for maximizing W_F and W_{HF} , obtained with 500 thousand iterations (left) and with 1 million iterations (right).

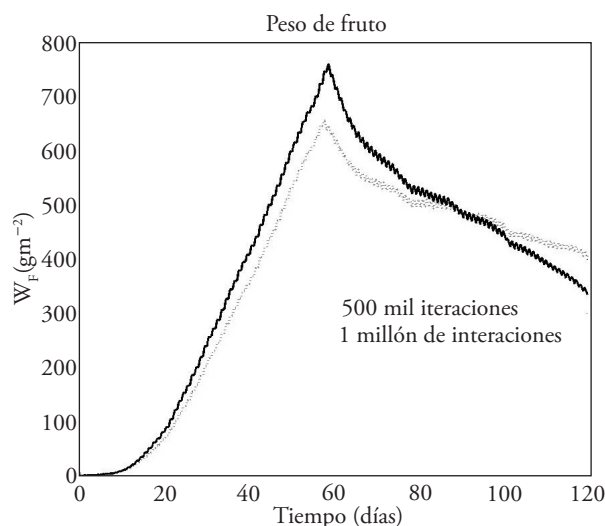


Figura 5. W_F [gm^{-2}] maximizada, obtenida con 500 mil iteraciones y con 1 millón de iteraciones.

Figure 5. Maximized W_F [gm^{-2}] obtained with 500 thousand and with 1 million iterations.

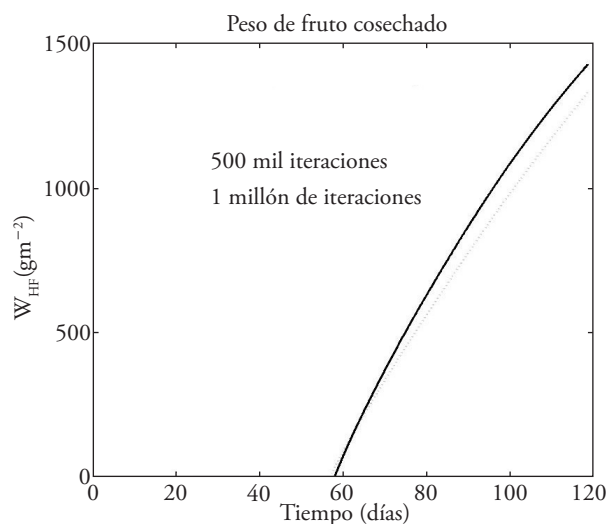


Figura 6. W_{HF} [gm^{-2}] maximizada, obtenida con 500 mil iteraciones y con 1 millón de iteraciones.

Figure 6. Maximized W_{HF} [gm^{-2}] obtained with 500 thousand iterations and with 1 million iterations.

a 750 [gm^{-2}] para cuando se maximiza sólo (W_F) con 1 millón de iteraciones (Figura 2). En comparación, cuando se maximiza el peso de fruto cosechado (W_{HF}) desde el día 59 hay un aumento de 800 [gm^{-2}] sin maximizar a 1450 [gm^{-2}] (Figuras 6 y 7). La temperatura registrada en el estudio de Juárez-Maldonado (2012) sin optimizar (Figura 8), comparada con las trayectorias subóptimas reportadas en las Figuras 2 y 4, muestra un gran cambio entre ellas. Es necesario un análisis de costo de producción entre el desarrollo

(Figures 8-10). These results show an increase in fruit weight (W_F) of 600 [gm^{-2}] without maximization to 750 [gm^{-2}] when maximizing only W_F with 1 million iterations (Figure 2). In comparison, when harvested fruit weight (W_{HF}) is maximized, as of day 59 there is an increase of 800 [gm^{-2}] without maximizing to 1450 [gm^{-2}] (Figures 7 and 6). The temperatures recorded in the study of Juárez-Maldonado (2012), without optimization (Figure 8), compared with the suboptimal trajectories reported in Figures 2

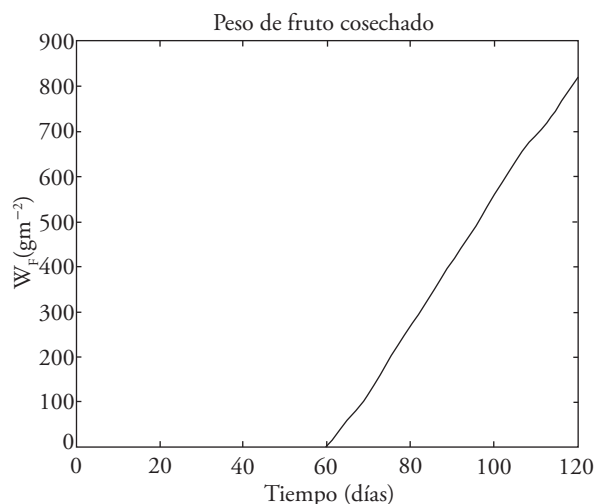
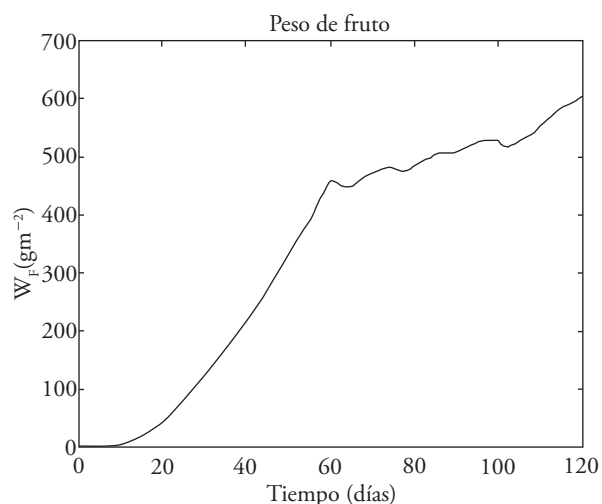


Figura 7. Peso de fruto (izquierda) y de fruto cosechado (derecha) reportado por Juárez-Maldonado *et al.* (2012).

Figure 7. Fruit weight (left) and harvested fruit (right) reported by Juárez-Maldonado *et al.* (2012).

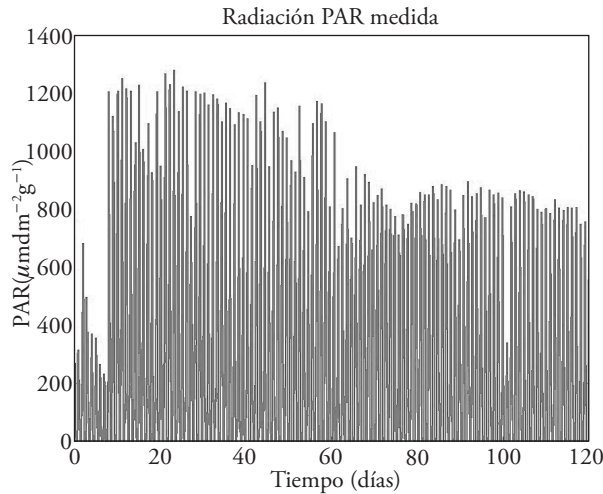


Figura 8. Radiación PAR reportada por Juárez-Maldonado *et al.* (2012).

Figure 8. PAR radiation reported by Juárez-Maldonado *et al.* (2012).

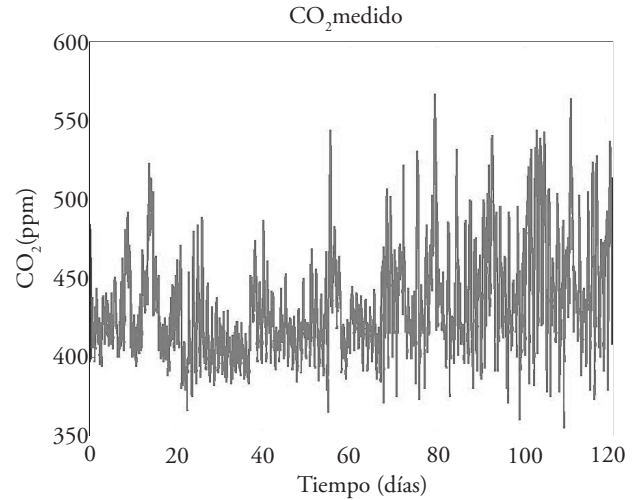


Figura 9. Concentración de CO₂ reportada por Juárez-Maldonado *et al.* (2012).

Figure 9. CO₂ concentration reported by Juárez-Maldonado *et al.* (2012).

del cultivo sin control y con la suboptimización de la trayectoria de temperatura antes de decidir si es posible su aplicación.

Los resultados mostraron dos características importantes. La primera correspondiente a la aproximación de la solución aumentando el número de iteraciones del método de Monte Carlo, de 500 mil a 1 millón. Considerando esta variación de iteraciones se observa (Figuras 1 y 4) una menor oscilación en las gráficas con mayor número de iteraciones lo cual era de esperarse ya que a medida que aumentamos los pasos el sistema tiende a la convergencia de la solución del problema (Peña, 2001). La segunda es el comportamiento obtenido de la trayectoria de la temperatura para la maximización únicamente del peso de fruto (W_F) y para la maximización de W_F entre los días 0 y 58, y del peso de fruto cosechado (W_{HF}) a partir del día 59 y hasta el final del periodo (120 d). Desde el día 59 que marca el inicio de la cosecha la trayectoria subóptima de temperatura se estabilizó alrededor de 15 °C para la maximización de W_F (Figura 1) y alrededor de 30 °C para la maximización de W_F y W_{HF} (Figura 4). Este último comportamiento puede explicarse a través de la dinámica de W_F y W_{HF}

$$(ec. \quad 4): \quad \frac{dW_F}{dt} = bg_F W_F - (1-b)r_F W_F - h_F W_F$$

$$\frac{dW_{HF}}{dt} = h_F W_F; \text{ del cual se observa que ambas están}$$

and 4, change greatly. A production cost analysis to compare crop development without control and with temperature trajectory suboptimization is necessary before deciding whether its application is possible.

The results revealed two important characteristics. The first is approximation of the solution when the number of iterations of the Monte Carlo method is increased from 500 thousand to 1 million. Considering this variation in iterations, less oscillation is observed in the graphs (Figures 1

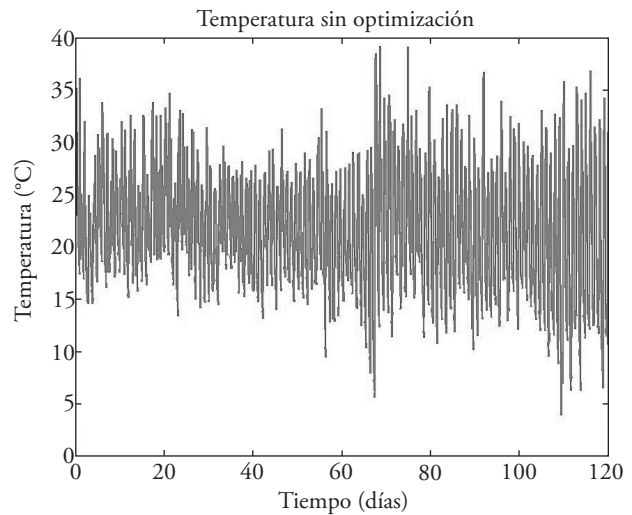


Figura 10. Temperatura reportada por Juárez-Maldonado *et al.* (2012).

Figure 10. Temperature reported by Juárez-Maldonado *et al.* (2012).

ligadas por el término $h_F W_F$, y que en el caso de W_F merma su producción, mientras que para W_{HF} el mismo término permite un incremento del fruto cosechado. Asimismo, se aprecia que la trayectoria de temperatura subóptima para ambos casos muestra períodos que emulan el día y la noche, alrededor de este mismo intervalo de restricción antes del día 59.

Temperatura óptima

Para obtener la trayectoria óptima de temperatura se realizó una comparación entre los métodos de Monte Carlo con 1 millón de iteraciones y la aplicación de control óptimo usando MATLABR11 (MathWorks 2017) con la herramienta de optimización no lineal y el programa DYNOPT basado en el estudio de Logsdon y Biegler (1989) y se determina una trayectoria de control óptimo dado un modelo dinámico de un proceso, que está sujeto a restricciones de igualdad y desigualdad. Por brevedad de espacio, sólo mostramos la trayectoria de temperatura óptima en el caso de maximización de W_F y W_{HF} (Figura 11), en la cual, si se comparamos con la Figura 4, se nota una similitud entre ambas trayectorias. La diferencia radica en que debido a la naturaleza aleatoria del método de Monte Carlo, el comportamiento de la temperatura tiende a oscilar alrededor del valor medio o esperado

and 4) with a larger number of iterations. This is expected since, as steps increase, the system tends to convergence of the solution to the problem (Peña, 2001). The second is the behavior of the temperature trajectory for maximization of only fruit weight (W_F), for W_F maximization between days 0 and 58 and for harvested fruit weight (W_{HF}) from day 58 to the end of the period (120 d). From day 59, which marks the beginning of harvest, the suboptimal temperature trajectory stabilizes around 15 °C for maximization of W_F (Figure 1) and around 30 °C for maximization of W_F and W_{HF} (Figura 4). The latter behavior can be explained by the dynamics of W_F and W_{HF}

$$(eq. 4): \quad \frac{dW_F}{dt} = bg_F W_F - (1-b)r_F W_F - h_F W_F$$

$\frac{dW_{HF}}{dt} = h_F W_F$. It can be observed that both are linked by the term $h_F W_F$, and in the case of W_F , production shrinks, while for W_{HF} the same term allows an increase in harvested fruit. Also, it can be seen that the suboptimal temperature trajectory for both cases shows periods that emulate day and night, around this same restriction interval before day 59.

Optimal temperature

To obtain the optimal temperature trajectory, the Monte Carlo method with 1 million iterations was compared with application of optimal control using MATLABR11 (MathWorks 2017) with the non-linear optimization tool and DYNOPT software based on the study of Logsdon and Biegler (1989), and an optimal control trajectory was determined given a dynamic model of a process, which is subject to restrictions of equality and inequality. Because of limited space, we show only the optimal temperature trajectory in the case of W_F and W_{HF} maximization (Figure 11), which is similar to that shown in Figure 4. The difference is due to the random nature of the Monte Carlo method in which temperature tends to oscillate around the mean, or expected, value, and this oscillation is directly related to the number of simulation steps, while in the non-linear optimization method, these oscillations do not exist.

CONCLUSIONS

It is possible to develop numerical simulations based on a model for maximizing fruit weight (W_F

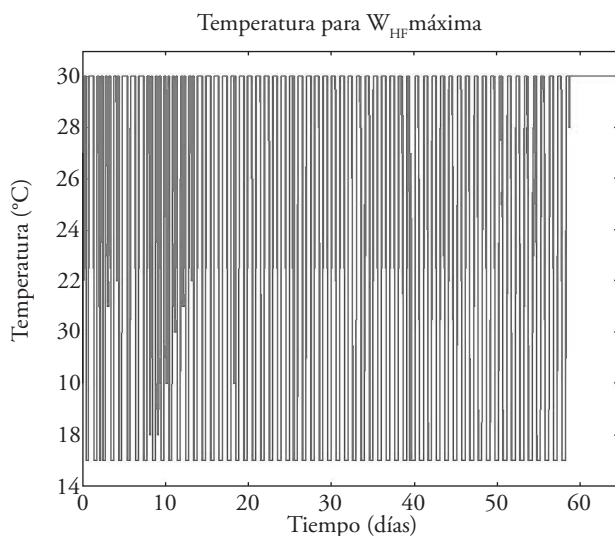


Figura 11. Trayectoria óptima de temperatura calculada mediante el programa de control óptimo DYNOPT.

Figure 11. Optimal temperature trajectory calculated with DYNOPT optimal control software.

y esta oscilación está relacionada directamente en el número de pasos de la simulación, mientras que con el método optimización no lineal no existen estas oscilaciones.

CONCLUSIONES

Es posible desarrollar simulaciones numéricas basadas en modelo para la maximización del peso de fruto (W_p , gm^{-2}) y de fruto cosechado (W_{HP} , gm^{-2}), en cultivo de tomate en invernadero, con el Método de Monte Carlo para la obtención de trayectorias de temperatura subóptima, denominada así porque el método de Monte Carlo no cumple las condiciones de optimalidad de primero y segundo orden. Los resultados de simulación muestran que al controlar la temperatura se puede incrementar la productividad del cultivo de tomate. Esto permite plantear condiciones ya sea para maximizar el fruto en la planta o el fruto cosechado, pero no ambos a la vez.

La trayectoria de temperatura subóptima obtenida con 1 millón de iteraciones puede usarse para obtener una curva suavizada que genere ciclos más estables y prácticos que pueden ser alimentados a un sistema de control que varíe la temperatura del invernadero en forma más estable, para ser llevados a la práctica para validar la hipótesis teórica aquí presentada en un sistema experimental.

LITERATURA CITADA

- Abreu, P., and J. F. Meneses. 2000. TOMPOUSSE, a model of yield prediction for tomato crops: calibration study for unheated plastic greenhouses. *Acta Hort.* 519: 141-149.
- Boaventura Cunha, J., C. Couto, and A. E. Ruano. 1997. Real-time parameter estimation of dynamic temperature models for greenhouse environmental control. *Ctrl. Eng. Prac.* 5: 1473-1481.
- Bouman, M., M. Wopereis, and J. Riethoven. 1994. The Use of Crop Growth Models in Agroecological Zonation of Rice. DLO-Research Institute for Agroecology and Soil Fertility, Wageningen, Department of Theoretical Production Ecology, Wageningen and International Rices Research Institute, 134 p.
- Bryson Jr., A. E., and Y. C. Ho. 1975. *Applied Optimal Control*. New York: Hemisphere. pp: 42-65.
- Castilla-Prados, N. 1995. Manejo del cultivo intensivo con suelo. In: Nuez, F. *El Cultivo del Tomate*. Editorial Mundi-Prensa, Madrid, pp: 189-225.
- Coelho, J. P., P. B. Moura Oliveira, and J. Boaventura Cunha. 2005. Greenhouse air temperature predictive control using the particle swarm optimisation algorithm. *Comp. Electro. Agric.* 49: 330-344.
- gm⁻²) and harvested fruit weight (W_{HF} , gm^{-2}) of tomatoes cultivated in a greenhouse with the Monte Carlo method to obtain suboptimal temperature trajectories, since the Monte Carlo method does not comply with the first and second order optimality conditions. The results of simulation show that, when temperature is controlled, tomato crop productivity can be increased. This permits proposing conditions for maximizing either fruit on the plant or harvested fruit, but not both at the same time.
- The suboptimal temperature trajectory obtained with 1 million iterations can be used to obtain a softer curve that generates more stable and practical cycle, which can be fed into a control system that varies greenhouse temperature in a more stable way and be put into practice to validate the theoretical hypothesis presented here in an experimental system.
- End of the English version—
- *---
- Dai, J., W. Luo, Y. Li, C. Yuan, Y. Chen, and J. Ni. 2006. A simple model for prediction of biomass production and yield of three greenhouse crops. *Acta Hort.* 718: 81-88.
- Dimokas, G., C. Kittas, and M. Tchamitchian. 2008. Validation of a tomato crop simulator for mediterranean greenhouses. *Acta Hort.* 797: 247- 252.
- Dormand, J. R., and P. J. Prince. 1980. A family of embedded Runge-Kutta formulae. *J. Comp. Appl. Mat.* 6: 19-26.
- Jaramillo-Noreña, J. E., G. D. Sánchez, V. P. Rodríguez, P. Aguilar, L. F. Gil, J. Hío, L. M. Pinzón, M. C. García, D. Quevedo, M. A. Zapata, J. F. Restrepo, y M. Guzmán. 2013. Tecnología para el Cultivo de Tomate bajo Condiciones Protegidas. Corporación Colombiana de Investigación Agropecuaria, Corpoica, Bogotá, pp: 142.
- Juárez-Maldonado, A., K. De Alba-Romenus, y A. Benavides-Mendoza. 2012. Calibración y validación de un modelo de crecimiento de tomate bajo condiciones de invernadero. *Congreso Internacional de Investigación Academia J. Celaya* 4: 1490-1495.
- Juárez-Madonado, A., A. Benavides-Mendoza, K. de Alba-Romenus, and A. Morales-Díaz. 2014. Dynamic modeling of mineral contents in greenhouse tomato crop. *Agric. Sci.* 5: 114-123.
- Heuvelink, E., and L. F. M. Marcelis. 1989. Dry matter distribution in tomato and cucumber. *Acta Hort.* 260: 149-157.
- Kano, A., and C. H. M. Van Bavel. 1988. Design and test of a simulation model of tomato growth and yield in a greenhouse. *J. Japan. So. Hort. Sci.* 56: 408-416.
- Lewis, F. L. 1986. *Optimal Control*. New York: John Wiley & Sons. pp: 4-14.
- Logsdon, J. S., and L. T. Biegler. 1989. Accurate solution of differential-algebraic optimization problems, *Chem. Eng. Sci.* 28:1628-1639.

- López-Cruz, I., A. Ramírez-Arias, y A. Rojano-Aguilar. 2005. Modelos matemáticos de hortalizas en invernadero: trascendiendo la contemplación de la dinámica de cultivos. *Rev. Chapingo Serie Hort.* 11: 257-267.
- MathWorks. 2017. https://www.mathworks.com/help/simulink/gui/solver.html?searchHighlight=Dormand&cs_tid=doc_srchttitle (Consulta: enero 2017)
- Mehdizadeh, M., E. I. Darbandi, H. Naseri-Rad, and H. Tobeh. 2013. Growth and yield of tomato (*Lycopersicon esculentum* Mill.) as influenced by different organic fertilizers. *Int. J. Agron. Plant Prod.* 4: 734-738.
- MÉXICOPRODUCE. 2013. Productos: Jitomate. <http://www.mexicoproduce.mx/productos.html#jitomate> (Consulta: enero 2017)
- Peña Sanchez de Rivera, D. 2001. Deducción de distribuciones: el método de Monte Carlo. *In: Fundamentos de Estadística.* Alianza Editorial, Madrid. pp: 220-300.
- Pérez, J., G. Hurtado, V. Aparicio, Q. Argueta, y M. Larín. 2002. Guía Técnica: Cultivo de Tomate. Centro Nacional de Tecnología Agropecuaria y Forestal. Ciudad Arce, La Libertad. pp: 1-48.
- SAGARPA. 2013. Agricultura protegida. <http://2006-2012.sagarpa.gob.mx/agricultura/Paginas/Agricultura-Protegida2012.aspx> (Consulta: febrero 2017)
- Tap, R. F., L. G. Van Willigenburg, and G. Van Straten. 1996. Experimental results of receding horizon optimal control of greenhouse. *Acta Hort.* 406: 229-238.
- Tap, R. F., G. Van Straten, and L. Willigenburg. 1997. Comparison of classical and optimal control of greenhouse tomato crop production. *Proc. 3rd Int. IFAC Workshop Mathematical and Control Applications in Agriculture and Horticulture.* Hannover, Germany.
- Van Straten, G., G. Van Willigenburg, E. Van Henten, and R. Van Ooteghem. 2011. *Optimal Control of Greenhouse Cultivation.* First Edition. CRC Press Taylor and Francis Group, Boca Raton, FL. pp: 25-38.
- Wallach, D., D. Makowski, and J. Jones. 2006. *Working with Dynamic Crop Models: Evaluation, Analysis, Parameterization and Applications.* Elsevier B. V., Amsterdam. pp: 441.
- Zekki, H., C. Gary, A. Gosselin, and L. Gauthier. 1999. Validation of a photosynthesis model through the use of the CO₂ balance of a greenhouse tomato canopy. *Ann. Bot.* 84: 591-598.