

MODELANDO RIESGO DE INGRESO: UN ENFOQUE DE CÓPULAS

INCOME RISK MODELING: A COPULA APPROACH

Miguel Á. Martínez-Damián^{1*}, José de J. Brambila-Paz¹, Elizabeth González-Estrada¹

¹Colegio de Postgraduados. Km 36.5 Carretera México-Texcoco. 56230. Montecillo, Estado de México. (angel01@colpos.mx).

RESUMEN

La aleatoriedad de precio y rendimiento afectan al ingreso en la actividad agrícola; por tanto, un administrador de riesgo requiere tomar en cuenta simultáneamente ambas fuentes de incertidumbre en la administración de riesgo. Con un enfoque de funciones cópulas el objetivo de este estudio fue modelar el riesgo de ingreso por hectárea en maíz para los estados de Sinaloa, Estado de México, Jalisco y Chiapas. La hipótesis fue que se puede usar la dependencia entre precio y rendimiento en la administración de siniestros. Los resultados mostraron que el número de siniestros de ingreso por debajo del percentil 5 % es menor bajo la modelación de una cópula normal o una cópula t, comparada con los siniestros de precio o rendimiento separado.

Palabras clave: dependencia, riesgo sistémico, riesgo de precio.

INTRODUCCIÓN

En la administración de riesgo existe el problema de más de una fuente de incertidumbre; este es el caso de administrar simultáneamente el riesgo de precio y riesgo de rendimiento. El primero representa el riesgo de mercado y el segundo el riesgo sistemático. Una forma de administrar el riesgo de precio es emplear coberturas en un mercado de futuros, una cobertura cruzada como la ofrece ASERCA (Agencia de Servicios a la Comercialización y Desarrollo de Mercados Agropecuarios) (Martínez y García, 2010). Otra alternativa es implantar un programa de precios de garantía (Martínez, 1990), política que ya no es posible aplicar por los tratados comerciales. Esto es más complicado respecto al riesgo sistemático, pues hay numerosos factores, como climáticos o

ABSTRACT

Randomness in price and yield affect income in agricultural activities; therefore, a risk manager must take simultaneously both sources of uncertainty into account when managing risk. Under a copula function approach, the aim of this study was to model per hectare corn income risk for the Mexican states of Sinaloa, Estado de México, Jalisco and Chiapas. The hypothesis was that the dependency between price and yield can be used to manage claims. Results showed that the amount of income claims below the 5 % percentile is lower when modeled by normal copula or t copula functions, relative to modeling price or yield claims separately.

Key words: dependency, systematic risk, price risk.

INTRODUCTION

The existence of multiple sources of uncertainty is a problem for risk management; this is the case when managing price and yield risks simultaneously. The former is represented by market risk and the latter by systematic risk. One way of managing price risk is using futures market hedging, cross hedge coverage such as that provided by the Agricultural Markets Commercialization and Development Services Agency (ASERCA in Spanish) (Martínez and García, 2010). Another alternative is to impose a support price program (Martínez, 1990); however this policy is no longer viable under current commercial treaties. With regard to systematic risk, this is more complicated, due to a number of factors such as weather or disease, which are uncertainty sources themselves. Thus, creating a multi-peril scheme is a limited solution because too many events need be covered (Goodwin, 1993). Even without calamities, yield has a natural variation and that affects producer's income. The motivation to manage price and yield risks is low because each of them offers only partial protection; the alternative is to manage

*Autor responsable ❖ Author for correspondence.

Recibido: junio, 2016. Aprobado: febrero, 2017.

Publicado como ARTÍCULO en *Agrociencia* 51: 581-590. 2017.

enfermedades, que son fuente de incertidumbre; así, generar un esquema multi-peligro es limitado porque los eventos a cubrir son muchos (Goodwin, 1993). Aun sin eventos catastróficos el rendimiento tiene variación natural que afecta el ingreso de los productores. La motivación para administrar riesgo de precio o rendimiento separadamente es baja, ya que cada uno ofrece solo protección parcial; la alternativa es administrar riesgo de ingreso (Henessy, 1998). El problema principal radica en la dependencia entre precio y rendimiento, y entre precios y rendimientos cuando se considera más de un punto de planeación. Para asegurar un ingreso, un productor adverso al riesgo puede estar dispuesto a pagar una prima a cambio de tener un ingreso mínimo asegurado en el caso de variación de precio o rendimiento. Sin embargo, las condiciones de mercado limitan la posibilidad de ofrecer este tipo de seguro por tener que considerar simultáneamente fuentes de riesgo no independientes. Es decir, los oferentes de seguro pueden no presentar una alternativa de póliza de ingreso ante la incapacidad de modelar simultáneamente precio y rendimiento. Una póliza de precio es difícil de operar debido a que para productores, en un mismo lugar, los precios recibidos tienden a moverse en la misma dirección; una compañía debería tener suficientes productores asegurados de distintas procedencias para amortiguar este problema y lo mismo sucede para asegurar un rendimiento (Miranda, 1991). En este caso el rendimiento puede afectarse por heladas, inundación, granizo, plaga o enfermedad. Como cada una es un riesgo es más factible englobar la incertidumbre en riesgo de rendimiento. La presencia de correlación positiva para un mismo lugar es un problema.

Aun así, la intención de administrar riesgo en agricultura puede ser asegurar un ingreso mínimo, lo que implica incertidumbre de precio y rendimiento. El objetivo de este estudio fue modelar la dependencia entre precio y rendimientos para cuatro de los principales estados productores de maíz (*Zea mays* L.) en México. La dependencia considera la correlación entre precio y rendimiento dentro de un mismo estado, y la correlación de precios y rendimientos entre distintos estados. La hipótesis fue que al modelar la dependencia entre precio y rendimiento el riesgo de ingreso se puede administrar sin recurrir a dos instrumentos, uno de precio y otro de rendimiento, de manera separada.

income risk (Henessy, 1998). The main problem lies in the dependency between prices and yields when considering more than one planning point. To ensure an income, a risk-averse producer can be willing to pay a premium to get a minimum guaranteed income in case of price or yield variation. However, market conditions limit the possibilities to offer this kind of insurance because a number of non-independent risk sources have to be considered simultaneously. That is, insurance providers might not offer an income policy of this kind given the impossibility of modeling price and yield simultaneously. A price policy is itself difficult to operate because prices for the producers in one same area tend to move in the same direction; an insurance firm would need to have enough insured producers in different locations to buffer this problem. The same issue arises in yield insurance (Miranda, 1991). In this case, yield can be affected by frost, flood, hail, plagues, or diseases. Given that each of these represent a risk source, it is more feasible to gather uncertainty under yield risk. The fact that there is a positive correlation for a delimited area is a problem.

Nonetheless, when managing agricultural risk the intention can be to ensure a minimum income, which involves price and yield uncertainty. The aim of this study was to model the dependency between price and yield for four of the main agricultural corn (*Zea mays* L.) producing states in Mexico. The dependency involves both the correlation between price and yield within each state and the correlation between prices and yields between different states. The hypothesis was that by modeling the dependency between price and yield income risk can be managed without resorting to two separate instruments—one for price and one for yield.

MATERIALS AND METHODS

Prices and yields analyzed data correspond to the Mexican states of Sinaloa, Jalisco, Estado de México and Chiapas, on a yearly basis from 1980 to 2014; these states are the largest national corn producers (Sistema de Información Agroalimentaria de Consulta-Secretaría de Agricultura, Ganadería, Pesca y Alimentación; SIACON-SAGARPA^[2]). Each state has a variation both in price and yield, which depends on the technology employed and the intensity of inputs usage. In general, larger yields involve lower prices, except when producers can sell their products outside of the state. Besides, deciding to

MATERIALES Y MÉTODOS

Los datos de precios y rendimientos evaluados corresponden a los estados de Sinaloa, Jalisco, Estado de México y Chiapas, México, con frecuencia anual de 1980 a 2014; estos estados son los de mayor producción nacional de maíz (Sistema de Información Agroalimentaria de Consulta-Secretaría de Agricultura, Ganadería, Pesca y Alimentación; SIACON-SAGARPA^[2]). Cada estado presenta variación en precio y en rendimiento, dependiente de la tecnología empleada y de la intensidad en el uso de insumos. Excepto la oportunidad de vender al exterior del estado, a mayor rendimiento hay menor precio; además, la decisión de producir maíz en un estado puede estar influenciada por el precio y rendimiento en otros estados. En la determinación de ingreso de un productor, interviene el resultado de precio por el rendimiento, aquí se modela que lo que interesa al productor es el ingreso. El ingreso por hectárea de maíz producido en un estado requiere considerar la dependencia de precio y rendimiento; así como la dependencia de precio y rendimiento con otros estados.

Una forma de modelar las fuentes de incertidumbre es emplear una función cópula. Estas funciones se emplean para modelar riesgo bajo dependencia entre precio y rendimiento en el comercio entre productores de cebada canadienses y malteros estadounidenses (Bekkerman *et al.*, 2014), en la evaluación del programa de seguro agrícola bajo distintas alternativas de función cópula (Goodwin y Hungerford, 2015) y en el cálculo del valor en riesgo de un portafolio cambiario (Plasencia, 2012). En cada uno de estos casos lo fundamental es modelar la dependencia entre variables aleatorias y enriquecer al análisis multivariado. La atención en nuestro estudio es la dependencia entre precio y rendimiento, al modelar el ingreso por hectárea y así administrar el riesgo de dicho ingreso.

Una función cópula es una función de distribución conjunta p-variada cuyas marginales son uniformes (Nelsen, 2006):

$$C(u_1, \dots, u_p)$$

donde $C(\cdot)$ tiene soporte definido en R^p sobre el hiper-plano $[0,1]^p$ e imagen definida en $R^1 [0,1]$, y u_i denota la distribución uniforme sobre el intervalo $[0,1]$. Si se tienen $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$ variables aleatorias con funciones de distribución $F_1, F_2, \dots, F_p$ y función de distribución conjunta $F(Y_1, Y_2, \dots, Y_p)$, entonces una función cópula si existe es tal que:

$$F(Y_1, Y_2, \dots, Y_p) = C[F_1(Y_1), F_2(Y_2), \dots, F_p(Y_p)]$$

produce corn in a state can be influenced by prices and yields in other states. A producer's income is the result of price time's yield; in this study, income is considered to be what producers are interested in. The corn income per hectare produced within one state needs to include the dependency of price and yield and its dependency on other state's prices and yields.

One way of modeling uncertainty sources is to use copula functions. These functions are used to model risk considering the price-yield dependency on Canadian barley and U.S. malt producers' trade (Bekkerman *et al.*, 2014), in the agricultural insurance program assessment under different alternatives of copula functions (Goodwin y Hungerford, 2015), and to calculate value at risk of a foreign exchange portfolio (Plasencia, 2012). In each of these cases, modeling dependency between random variables and enhancing multivariate analysis is fundamental. In our study attention is drawn to dependency between price and yield by modeling income per hectare and thus managing the risk for that income.

A copula function is a p-variate joint distribution function which has uniform marginals (Nelsen, 2006):

$$C(u_1, \dots, u_p)$$

where $C(\cdot)$ has support defined in R^p over the hyperplane $[0,1]^p$ and image defined in $R^1 [0,1]$, and u_i denotes the uniform distribution over the $[0,1]$ interval. If there are $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$ random variables with distribution functions $F_1, F_2, \dots, F_p$, and a joint distribution function $F(Y_1, Y_2, \dots, Y_p)$, then if a copula function exists it will be such that:

$$F(Y_1, Y_2, \dots, Y_p) = C[F_1(Y_1), F_2(Y_2), \dots, F_p(Y_p)]$$

If the copula function exists, it will be unique and can be obtained from:

$$C(u_1, \dots, u_p) = F[F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2), \dots, F_p^{-1}(u_p)]$$

An important property is that joint density can be represented as the product of the density of the copula by the product of the individual marginals:

$$f(Y_1, Y_2, \dots, Y_p) = c[F_1(Y_1), F_2(Y_2), \dots, F_p(Y_p)] \prod_j f_j(Y_j)$$

From Sklar's Theorem (Nelsen, 2006) a copula's density is defined as:

² http://infosiap.siap.gob.mx:8080/agricola_siap_gobmx/

La función cópula, si existe, es única y puede obtenerse como:

$$C(u_1, \dots, u_p) = F[F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2), \dots, F_p^{-1}(u_p)]$$

Una propiedad importante es que la densidad conjunta puede representarse como el producto de la densidad de la cópula por el productorio de las marginales individuales:

$$f(Y_1, Y_2, \dots, Y_p) = c[F_1(Y_1), F_2(Y_2), \dots, F_p(Y_p)] \prod_j f_j(Y_j)$$

Del Teorema de Skalar (Nelsen, 2006) la densidad de la cópula es definida como:

$$c[F_1(Y_1), F_2(Y_2), \dots, F_p(Y_p)] = \frac{\partial^p}{\partial u_1 \partial u_2 \dots \partial u_p} c[F_1(Y_1), F_2(Y_2), \dots, F_p(Y_p)]$$

Esto destaca que solo con variables aleatorias independientes, la conjunta puede factorizarse como el producto de las marginales respectivas. Sin embargo, aquí radica la importancia práctica de las funciones cópula, ya que se puede modelar la dependencia separadamente de las distribuciones marginales.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En nuestro estudio se ajustaron distribuciones para los precios respectivos y rendimientos de maíz para los estados de: Sinaloa, Jalisco, Estado de México y Chiapas, lo que mostró ocho variables aleatorias en total. Un primer problema en este ajuste es que datos de precio y rendimiento presentan tendencia; esta última mueve la media en el tiempo y debe ser considerado al momento de ajustar una distribución. Respecto a precio la tendencia está compuesta de los efectos de la inflación (incrementando la media), de productos relacionados y efecto de importaciones que reducen la media. Por tanto, se sustrajo la tendencia con un algoritmo no-paramétrico consistente en ajustar rectas de regresión a un subconjunto de puntos en una vecindad de los valores observados en forma iterativa, una descripción detallada se encuentra en Cleveland *et al.* (1988). La ventaja de este proceder es que no obliga a asumir un modelo particular de predicción, lo que elimina el error de especificación, a la vez que se

$$c[F_1(Y_1), F_2(Y_2), \dots, F_p(Y_p)] = \frac{\partial^p}{\partial u_1 \partial u_2 \dots \partial u_p} c[F_1(Y_1), F_2(Y_2), \dots, F_p(Y_p)]$$

This highlights the fact that only with independent random variables the joint density can be factorized as the product of the corresponding marginals. However, there lies the practical importance of the copula functions, because the dependence can be model separately from the marginal distributions.

RESULTS AND DISCUSSION

In our study, distributions were adjusted for the corresponding corn prices and yields for the states of Sinaloa, Jalisco, Estado de México and Chiapas, which amounts to eight random variables in total. The first issue that arises in this adjustment is that both prices and yields show trends, which moves the mean across time and this should be taken into account when adjusting a distribution. The trend in price is composed by inflation (which increases the mean), related goods' effects, and imports' effects of imports, which reduce the mean. Therefore, the trend was subtracted with a non-parametric algorithm that adjusts regression lines from a subset of data points close to the observed values iteratively; a detailed description can be found in Cleveland *et al.* (1988). The advantage of this procedure is that it does not impose a particular prediction model, which eliminates the specification error while modeling data oscillation. The data used in the adjustment of price distributions were obtained as follows:

$$y_t = \hat{y}_{2014}^p + \hat{\varepsilon}_t$$

where y_t is the data used to adjust the marginal distributions, $\hat{y}_{2014}^p$ is the predicted value for 2014 and $\hat{\varepsilon}_t$ is the residual of the non-parametric adjustment; the same treatment was performed on yield data. This implies treating the data as observed in 2014, considering the observed historic variations.

Using these trend free data, a distribution was adjusted to the price and the yield of each aforementioned state. Even after eliminating the trend, price remains a random variable and its variation is due to unexpected changes in input's

modelan las propias oscilaciones de los datos. Los datos empleados en el ajuste de las distribuciones de precio fueron obtenidos como:

$$y_t = \hat{y}_{2014}^p + \hat{\varepsilon}_t$$

donde y_t es el dato empleado para ajustar las distribuciones marginales, $\hat{y}_{2014}^p$ es el valor predicho para el año 2014 y $\hat{\varepsilon}_t$ es el residual del ajuste no-paramétrico; los datos de rendimiento recibieron el mismo tratamiento. Esto implica tratar los datos como observados en el año 2014, considerando la variación histórica observada.

Con estos datos libres de tendencia se ajustó una distribución a los rendimientos y precios de cada estado. Aun después de eliminar la tendencia el precio es una variable aleatoria, cuyas variaciones obedecen a cambios inesperados en precios de insumos, de productos relacionados y del maíz importado, lo que se modela a través de una función de distribución. Dado que tanto precios como rendimientos son valores positivos se usaron distribuciones con soportes positivos, obteniendo buenos ajustes bajo las distribuciones Wald, Gama y Beta (Bekkerman *et al.*, 2014; Goodwin y Kerr, 1988). Dichas distribuciones se emplearon como marginales en el ajuste de funciones cópula. Las cópulas gaussianas y t se probaron; estas funciones son apropiadas cuando la naturaleza de la dependencia proviene mayormente de los datos alrededor de la media, como se esperarían en datos de precio y rendimiento.

Sean $u_j \sim U(0,1)$ para $j=1,2,\dots,m$ donde m es el total de variables aleatorias empleadas, y U denota la distribución uniforme sobre el intervalo $[0,1]$; sea Σ una matriz de correlaciones positiva semi-definida, entonces la función cópula normal se puede escribir como:

$$C_{\Sigma}(u_1, u_2, \dots, u_m) = \Phi_{\Sigma}[\Theta^{-1}(u_1), \Theta^{-1}(u_2), \dots, \Theta^{-1}(u_m)]$$

donde Φ_{Σ} : denota la función de distribución normal m -variada con media un vector de ceros y matriz de covarianzas Σ y Θ^{-1} : denota la función normal

prices, related goods prices and imported corn prices, which are modeled under distribution function. Given that both prices and yields are positive values, a positive support set of distribution functions was used; a good fit was obtained under Wald, Gama and Beta distributions (Bekkerman *et al.*, 2014; Goodwin y Kerr, 1988). These distributions were used as marginals in the copula functions adjustment. The gaussian and t copulas were tested; these functions are appropriate when the nature of the dependency comes mainly from data around the mean, as would be expected for price and yield data.

Let $u_j \sim U(0,1)$ for $j=1,2,\dots,m$ where m is the total amount of random variables used and U denotes the uniform distribution on the $[0,1]$ interval; let Σ be a positive semidefinite correlation matrix, then the normal copula function can be written as:

$$C_{\Sigma}(u_1, u_2, \dots, u_m) = \Phi_{\Sigma}[\Theta^{-1}(u_1), \Theta^{-1}(u_2), \dots, \Theta^{-1}(u_m)]$$

where Φ_{Σ} denotes the m -variate normal distribution function with mean a null vector and covariance matrix Σ and Θ^{-1} : denotes the inverse normal function. In this case, Σ is unknown, thus the adjustment consists in estimating that parametric matrix.

Let $C_{(\nu, \Sigma)}$ be the t copula function with $\nu \in (1, \dots, \infty)$ and Σ be a correlation matrix, let t_{ν} be a univariate t distribution with zero mean and degrees of freedom, then the t copula can be written as:

$$C_{(\nu, \Sigma)} = t_{\nu, \Sigma}[t_{\nu}^{-1}(u_1), t_{\nu}^{-1}(u_2), \dots, t_{\nu}^{-1}(u_m)]$$

where $t_{\nu, \Sigma}$ is a multivariate t distribution, with ν degrees of freedom and correlation matrix Σ , and $t_{\nu}^{-1}(u_j)$ denotes the inverse t distribution with ν degrees of freedom. In this case what is unknown and must be solved by estimation are the correlation matrix and the degrees of freedom.

In each case, maximum likelihood estimation can be applied (Kjersti, 2004; McNell *et al.* 2015), in the case of a normal copula only the correlation matrix

inversa. En este caso se desconoce Σ , el ajuste consiste en estimar esa matriz paramétrica.

Sea $C_{(\nu, \Sigma)}$ la función t cópula con $\nu \in (1, \dots, \infty)$ y Σ una matriz de correlaciones, sea t_ν una distribución t univariada con media cero y ν grados de libertad, y la función t cópula se puede escribir como:

$$C_{(\nu, \Sigma)} = t_{\nu, \Sigma} [t_\nu^{-1}(u_1), t_\nu^{-1}(u_2), \dots, t_\nu^{-1}(u_m)]$$

donde $t_{\nu, \Sigma}$ es una distribución t, m -variada con ν grados de libertad y matriz de correlaciones Σ y $t_\nu^{-1}(u_j)$ denota la inversa de la distribución t con ν grados de libertad. En este caso lo que se desconoce y debe resolverse por estimación son la matriz de correlaciones y los grados de libertad.

La estimación en cada caso se puede realizar con máxima verosimilitud (Kjersti, 2004; McNell *et al.*, 2015) y en el caso de la cópula normal solo se estima la matriz de correlaciones, mientras que en el caso de la cópula t se debe estimar además los grados de libertad (Kjersti, 2004; McNell *et al.*, 2015). La estimación de las correspondientes matrices de correlaciones para la cópula normal y t permite constatar la correlación negativa entre precio y rendimiento principalmente dentro del mismo estado como se aprecia para los estados de: Sinaloa, Estado de México y Chiapas (Cuadro 1 y 2). Para Jalisco la correlación precio y rendimiento resultó positiva, lo que haría al ingreso por hectárea riesgoso en ese estado; sin embargo, el rendimiento en Jalisco tuvo correlación negativa con el precio en Sinaloa, Estado de México y Chiapas bajo la cópula normal y solo con Sinaloa bajo la cópula t. Esto da la base para la distribución de riesgo de ingreso en un esquema de cobertura que contenga productos fuera del propio estado de Jalisco. Además, la correlación de precios entre estados es positiva lo que hace necesario buscar correlaciones negativas con rendimientos dentro o fuera del estado para cubrir el riesgo de precio.

Los estimadores de las matrices de correlaciones difieren debido a la forma funcional ajustada en cada caso. Al estar interesado en un evento particular, como:

is estimated, and in the case of a t copula the degrees of freedom must be estimated as well (Kjersti, 2004; McNell *et al.*, 2015). Estimating the corresponding correlation matrixes for the normal and t copulas allows verifying the negative correlation between price and yield especially within the same state, as can be observed for the states of Sinaloa, Estado de México and Chiapas (Table 1 and 2). In Jalisco's case, the correlation between price and yield was positive, which would make for a risky income per hectare in that state. However, yield in Jalisco had a negative correlation with prices in Sinaloa, Estado de México and Chiapas under the normal copula function, and only with Sinaloa under the t copula.

This supports distributing income risk in a coverage scheme that includes producers in states other than Jalisco itself. In addition, price correlation between states is positive, which is the reason why it is necessary to search for negative correlations with yield within or outside the state to cover for price risk.

The correlation matrixes' estimators differ due to the adjusted functional form in each case. Now, given the interest in a particular event such as:

$$P(Y_1 \leq y_1, Y_2 \leq y_2, \dots, Y_8 \leq y_8) = \rho$$

Despite having the copula and marginal functions, it is not possible to obtain this probability by direct integration because the involved integral does not have an analytical closed form. One solution is to simulate a sample from the copula function and use the empirical marginals. Here values were simulated from the corresponding adjusted copula function; in particular, a random 1000 sample was generated out of the eight employed variables (four prices and four yields). This produces the eight synthetic variables with the estimated dependency structure. However, these variables are uniformly distributed. To return data to its original form, the inverse transformation was used:

$$y = F^{-1}(u)$$

where y is the random generated price or yield variable, $F^{-1}()$ is the inverse function of the marginal distributions used and u is a uniform random variable obtained from the simulation of the copula function.

Cuadro 1. Matriz de correlaciones estimada bajo la copula normal.
Table 1. Correlation matrix estimated under the normal copula.

	SIN_R	JAL_R	MX_R	CHIA_R	SIN_P	JAL_P	MX_P	CHIA_P
SIN_R	1.0000	0.2226	-0.1625	-0.1144	-0.3190	-0.2789	-0.2556	-0.2123
JAL_R	0.2226	1.0000	0.3084	-0.0120	-0.2298	0.0270	-0.0310	-0.0678
MX_R	-0.1625	0.3084	1.0000	0.0263	-0.0609	0.0458	-0.0981	-0.0079
CHIA_R	-0.1144	-0.0120	0.0263	1.0000	0.1687	0.1055	0.1282	-0.0655
SIN_P	-0.3190	-0.2298	-0.0609	0.1687	1.0000	0.4041	0.5220	0.6157
JAL_P	-0.2789	0.0270	0.0458	0.1055	0.4041	1.0000	0.6998	0.6596
MX_P	-0.2556	-0.0310	-0.0981	0.1282	0.5220	0.6998	1.0000	0.5768
CHIA_P	-0.2123	-0.0678	-0.0079	-0.0655	0.6157	0.6596	0.5768	1.0000

SIN_R: rendimiento Sinaloa; JAL_R: rendimiento Jalisco; MX_R: rendimiento Estado de México; CHIA_R: rendimiento Chiapas; SIN_P: precio Sinaloa; JAL_P: precio Jalisco; MX_P: precio Estado de México; CHIA_P: precio Chiapas ♦ SIN_R: yield in Sinaloa; JAL_R: yield in Jalisco; MX_R: yield in Estado de Mexico; CHIA_R: yield in Chiapas; SIN_P: price in Sinaloa; JAL_P: price in Jalisco; MX_P: price in Estado de Mexico; CHIA_P: price in Chiapas.

Cuadro 2. Matriz de correlaciones estimada bajo la copula t.
Table 2. Correlation matrix estimated under the t copula.

	SIN_R	JAL_R	MX_R	CHIA_R	SIN_P	JAL_P	MX_P	CHIA_P
SIN_R	1.0000	0.1812	-0.2328	-0.1760	-0.2939	-0.1760	-0.1967	-0.1290
JAL_R	0.1812	1.0000	0.2939	0.0817	-0.1342	0.1656	0.1342	0.0449
MX_R	-0.2328	0.2939	1.0000	0.0765	-0.1080	0.0554	-0.1028	-0.0132
CHIA_R	-0.1760	0.0817	0.0765	1.0000	0.2019	0.0817	0.1342	-0.1342
SIN_P	-0.2939	-0.1342	-0.1080	0.2019	1.0000	0.4315	0.5242	0.7024
JAL_P	-0.1760	0.1656	0.0554	0.0817	0.4315	1.0000	0.6872	0.6599
MX_P	-0.1967	0.1342	-0.1028	0.1342	0.5242	0.6872	1.0000	0.5942
CHIA_P	-0.1290	0.0449	-0.0132	-0.1342	0.7024	0.6599	0.5942	1.0000

Parámetro	Estimador	Error Estándar	Valor de t	Pr> t aproximada
GL	3.735610	1.113125	3.36	0.0008

SIN_R: rendimiento Sinaloa; JAL_R: rendimiento Jalisco; MX_R: rendimiento Estado de México; CHIA_R: rendimiento Chiapas; SIN_P: precio Sinaloa; JAL_P: precio Jalisco; MX_P: precio Estado de México; CHIA_P: precio Chiapas ♦ SIN_R: yield in Sinaloa; JAL_R: yield in Jalisco; MX_R: yield in Estado de Mexico; CHIA_R: yield in Chiapas; SIN_P: price in Sinaloa; JAL_P: price in Jalisco; MX_P: price in Estado de Mexico; CHIA_P: price in Chiapas.

$$P(Y_1 \leq y_1, Y_2 \leq y_2, \dots, Y_8 \leq y_8) = \rho$$

A pesar de tener la función cópula y las marginales, obtener esta probabilidad por integración directa no es posible porque dicha integral no tiene forma analítica cerrada. Una solución es simular una muestra desde la función cópula y usar las marginales empíricas. Aquí se simularon valores obtenidos de la función cópula ajustada respectiva; en particular, una muestra aleatoria de tamaño 1000 se obtuvo de las ocho variables empleadas (cuatro precios y cuatro rendimientos). Esto produce las ocho

The advantage of this approach is that each simulated variable contains the within-state effect and the between-state effect simultaneously. Hence, these data can be treated as emerging from a joint distribution. In this case, data were used to model income per hectare —obtained as price times yield— for each of the four states.

Income per hectare can be built by calculating price's and yield's quantiles. This allows distinguishing income loss thresholds by state, which considers the joint price and yield dependency within and between states (Table 3 for the normal copula function, Table 4 for the t copula function).

variables sintéticas con la estructura de dependencia estimada; sin embargo, esas variables son de distribución uniforme. Para regresar los datos a su forma original se usó la transformación inversa:

$$y = F^{-1}(u)$$

donde y es la variable aleatoria precio o rendimiento generada, $F^{-1}(\cdot)$ es la función inversa de las distribuciones marginales empleada y u es una variable aleatoria uniforme obtenida de la simulación de la función cópula.

La ventaja de esto es que cada variable aleatoria simulada contiene el efecto intra-estado y entre-estado simultáneamente; por tanto, estos datos se pueden emplear como provenientes de una distribución conjunta. En la presente aplicación estos datos se usan para modelar el ingreso por hectárea de los cuatro estados, obtenidos como precio por rendimiento.

El ingreso por hectárea se puede construir calculando los cuantiles de los precios y rendimientos. Esto permite distinguir umbrales de pérdida de ingreso

An insurance company looking to offer indemnity when income is under a certain threshold might use the estimated quantiles' results. For instance, when income is under 26 647 in Sinaloa, indemnities have a 5 % probability of occurring in price and yield. However, while considering the 5 % percentile 50 prices and 50 yields below the corresponding threshold would be expected; taken as a whole set the total observations of income per hectare below the threshold is even lower. The total amount of observations under the 26 647 income per hectare threshold are three using the normal copula (Table 3) and eleven using the t copula (Table 4). The amount of claims using each copula differs due to the adjustment to the functions which implies that copula function selection is of relevance (Goodwin y Hungerford, 2015). A comparative study is not presented here; but it is important to remark that if dependencies between prices and yields are not taken into account, the amount of expected claims is higher. This method for risk management, an income policy, would be more efficient. The insurer does not require two policies—one for price and one for yield—

Cuadro 3. Cuantiles de precio, rendimiento y siniestros de ingreso bajo copula normal.

Table 3. Price, yield quantiles and income claims under the normal copula function.

Normal	P_SIN	R_SIN	P_JAL	R_JAL	P_MX	R_MX	P_CHIA	R_CHIA
Nivel	Cuantil	Cuantil	Cuantil	Cuantil	Cuantil	Cuantil	Cuantil	Cuantil
100 %	4692.72	11.15	3238.27	7.10	3492.66	5.10	3657.81	2.90
99 %	4448.93	10.51	3143.40	6.69	3409.96	4.26	3476.62	2.54
95 %	4225.03	9.95	3073.82	6.45	3330.64	3.93	3399.50	2.40
90 %	4123.62	9.69	3024.55	6.32	3295.25	3.73	3360.64	2.32
75 %	3964.62	9.33	2942.19	6.12	3222.92	3.40	3281.92	2.17
50 %	3776.54	8.93	2838.10	5.88	3146.72	3.05	3192.88	2.02
25 %	3585.06	8.52	2739.69	5.66	3065.89	2.74	3116.76	1.88
10 %	3448.42	8.15	2652.78	5.45	2992.32	2.46	3044.66	1.74
5 %	3345.58	7.97	2613.05	5.35	2953.56	2.31	2996.70	1.66
1 %	3199.65	7.54	2543.37	5.11	2896.17	2.11	2916.49	1.54
0 %	3082.01	6.94	2405.19	4.86	2838.96	1.91	2791.15	1.37
Umbral de ingreso mínimo								
	26647.91		13980.13		6821.84		4977.13	
Siniestros	3		9		19		17	

SIN_R: rendimiento Sinaloa; JAL_R: rendimiento Jalisco; MX_R: rendimiento Estado de México; CHIA_R: rendimiento Chiapas; SIN_P: precio Sinaloa; JAL_P: precio Jalisco; MX_P: precio Estado de México; CHIA_P: precio Chiapas ♦ SIN_R: yield in Sinaloa; JAL_R: yield in Jalisco; MX_R: yield in Estado de Mexico; CHIA_R: yield in Chiapas; SIN_P: price in Sinaloa; JAL_P: price in Jalisco; MX_P: price in Estado de Mexico; CHIA_P: price in Chiapas.

Cuadro 4. Cuantiles de precio, rendimiento y siniestros de ingreso bajo copula t.
Table 4. Price, yield quantiles and income claims under the t copula function.

t	P_SIN	R_SIN	P_JAL	R_JAL	P_MX	R_MX	P_CHIA	R_CHIA
Nivel	Cuantil	Cuantil	Cuantil	Cuantil	Cuantil	Cuantil	Cuantil	Cuantil
100 %	4856.06	10.80	3370.06	6.87	3595.49	4.82	3599.09	2.74
99 %	4462.80	10.31	3179.30	6.64	3403.87	4.30	3492.58	2.58
95 %	4242.89	9.97	3066.43	6.46	3322.85	3.99	3399.14	2.43
90 %	4119.82	9.72	2999.88	6.34	3278.43	3.73	3344.52	2.32
75 %	3950.35	9.31	2913.41	6.13	3207.26	3.40	3278.98	2.19
50 %	3771.59	8.92	2823.41	5.89	3128.54	3.04	3191.71	2.03
25 %	3569.93	8.54	2720.74	5.69	3057.21	2.72	3102.75	1.87
10 %	3421.36	8.23	2638.26	5.49	2994.45	2.41	3024.92	1.75
5 %	3331.24	8.00	2593.40	5.37	2953.68	2.27	2990.19	1.67
1 %	3171.36	7.64	2510.87	5.16	2876.07	2.03	2896.13	1.54
0 %	2945.57	7.28	2463.22	5.00	2811.26	1.69	2830.93	1.47
Umbral de ingreso mínimo								
	26665.04		13931.82		6711.23		4980.01	
Siniestros	11		22		28		12	

SIN_R: rendimiento Sinaloa; JAL_R: rendimiento Jalisco; MX_R: rendimiento Estado de México; CHIA_R: rendimiento Chiapas; SIN_P: precio Sinaloa; JAL_P: precio Jalisco; MX_P: precio Estado de México; CHIA_P: precio Chiapas ♦ SIN_R: yield in Sinaloa; JAL_R: yield in Jalisco; MX_R: yield in Estado de Mexico; CHIA_R: yield in Chiapas; SIN_P: price in Sinaloa; JAL_P: price in Jalisco; MX_P: price in Estado de Mexico; CHIA_P: price in Chiapas.

por estado, que toma en cuenta la dependencia conjunta de precios e ingresos dentro y entre estados (Cuadro 3 para la función cópula normal; Cuadro 4 para la función cópula t).

Una compañía de seguros que ofrece indemnizar cuando el ingreso es inferior a un umbral podría utilizar los resultados de los cuantiles estimados. Por ejemplo, cuando el ingreso es inferior a 26 647 en Sinaloa indemnizar es un evento que ocurre con 5 % de probabilidad, en precio y rendimiento. Sin embargo, mientras que debido al percentil 5 % se esperarían 50 precios y 50 rendimientos inferiores al umbral respectivo; tomados en conjunto, el total de observaciones de ingreso por hectárea por debajo del umbral es menor. El total de observaciones por debajo de un umbral de ingreso por hectárea de 26 647 es de tres bajo la cópula normal (Cuadro 3) y de 11 bajo la cópula t (Cuadro 4). El número de siniestros con cada función cópula difiere por el propio ajuste a las funciones lo que implica que la función cópula empleada tiene relevancia (Goodwin y Hungerford, 2015). Aquí no se presentó un estudio comparativo; pero si no se toma en cuenta las dependencias entre los respectivos precios y rendimientos, el número de

which doubles administrative requirements and the risk-averse decision-maker can choose to pay only one premium in a single transaction. Moreover, if the dependencies are exploited the amount of expected claims is lower.

CONCLUSIONS

When there are more than one uncertainty sources, risk management can be expensive. Such is the case for price and yield risks; managing them separately would imply double risk premiums, which is compounded if different locations are included. However, if the dependency is modeled, it is possible to build an income risk management instrument that considers price and yield risks simultaneously. This solution may potentially be less expensive both for the insurer and the producer, with a lower amount of claims compared to the separate price and yield policies.

—End of the English version—



siniestros esperados es mayor. Esta forma de administrar riesgo, una póliza de ingreso, es más eficiente, si existiera. El oferente no requiere dos pólizas, la de precio y la de rendimiento, ya que se duplica el requerimiento administrativo. El tomador de decisiones adverso al riesgo de precio y de rendimiento, puede hacerlo erogando una sola prima de seguro en una operación. Además, el número de siniestros esperados es menor aprovechando las dependencias.

CONCLUSIONES

Cuando se tiene más de una fuente de incertidumbre la administración de riesgo puede ser costosa. Es el caso de riesgo de precio y de rendimiento; su administración separada implicaría doble prima de riesgo y esto se compone si existen distintas localidades. Sin embargo, si se modela la dependencia es posible construir un instrumento de administración de riesgo de ingreso, que considera simultáneamente riesgo de precio y rendimiento. Este es potencialmente más económico tanto para ofrecerse como de comprarse, con número menor de siniestros, comparado con pólizas separadas de precio y rendimiento.

LITERATURA CITADA

- Bekkerman, A., H. Schweitzer, and V. H. Smith. 2014. The impacts of the Canadian wheat board ruling on the North American malt barley markets. *Can. J. Agr. Econ.* 63: 619-645.
- Cleveland, W. S., S. J. Devlin, and E. Grosse. 1988. Regression by Local Fitting. *J. Econometrics* 37: 87-114.
- Goodwin, B. K. 1993. An empirical analysis of the demand for multiple peril crop insurance. *Am. J. Agr. Econ.* 75: 425-434.
- Goodwin, B. K. and A. Hungerford. 2015. Copula-based models of systemic risk in U.S. agriculture: implications for crop insurance and reinsurance contracts. *Am. J. Agr. Econ.* 97: 879-896.
- Goodwin, B. K., and A. P. Kerr. 1988. Nonparametric estimation of crop yield distributions: implications for rating group-risk crop insurance contracts. *Am. J. Agr. Econ.* 80: 139-153.
- Hennessy, D. A., 1998. The production effects of agricultural income support policies under uncertainty. *Am. J. Agr. Econ.* 80: 46-57.
- Kjersti, A. 2004. Modeling the dependence structure of financial assets: a survey of four copulas. <https://www.nr.no/files/samba/bff/SAMBA2204b.pdf>
- Martínez D., M., y J. García J. 2010. Política de cobertura de precios de maíz en México. *Rev. Mex. Econ. Agríc. Rec. Nat.* 3: 69-76.
- Martínez F., B. 1990. Los precios de garantía en México. *Comercio Exterior* 40: 938-942.
- McNell, A., R. Frey, and P. Embrechts. 2015. Quantitative risk management: concepts, techniques and tools. Princeton (NJ): Princeton University Press. 664 p.
- Miranda, M., 1991. Area yield crop insurance reconsidered. *Am. J. Agr. Econ.* 73: 233-242.
- Nelsen, R. B., 2006. An introduction to copulas. New York (NY): Springer Science+Business Media, Inc. 276 p.
- Plascencia, T. 2012. Valor en riesgo utilizando cópulas financieras: aplicación al tipo de cambio mexicano (2002-2011). *Contabilidad y Negocios* 14: 57-68.