

PROYECCIÓN EXPLÍCITA E IMPLÍCITA DEL RENDIMIENTO MADERABLE DE PLANTACIONES FORESTALES COMERCIALES DE *Pinus patula* Schiede ex Schltdl. et Cham.

EXPLICIT AND IMPLICIT TIMBER GROWTH PROJECTION OF *Pinus patula* Schiede ex Schltdl. et Cham. IN COMMERCIAL PLANTATIONS

José P. Parra-Piedra¹, Héctor M. De los Santos-Posadas^{2*}, Aurelio M. Fierros-González²,
José R. Valdez-Lazalde², José L. Romo-Lozano³

¹Instituto Tecnológico Superior de Venustiano Carranza. Avenida Tecnológico SN, Colonia El Huasteco, Venustiano Carranza, Puebla. 73049. Postgrado en Ciencias Forestales. Colegio de Postgraduados, Campus Montecillo. 56230. Montecillo, Estado de México. (hmsantos@colpos.mx) ³División Ciencias Forestales. Universidad Autónoma Chapingo. 56230.

RESUMEN

En Zacualpan, Veracruz, México, existen 3,500 ha de plantaciones forestales comerciales de *Pinus patula*, pero hasta el momento no se han realizado evaluaciones de crecimiento que permitan programar adecuadamente la cosecha. El objetivo del estudio fue evaluar el crecimiento y rendimiento maderable, compuesto por un sistema explícito y uno implícito con distribución diamétrica, ambos contruidos con datos de parcelas permanentes de medición forestal. La hipótesis propone que parcelas de observación permanente, de diferentes edades entre ellas y remedidas en el tiempo, permitirán obtener un sistema de crecimiento y rendimiento maderable proyectado en forma explícita e implícita. El primer sistema consta del modelo no lineal en altura dominante tipo Schumacher-Korf polimórfico y de ecuaciones compatibles de predicción – proyección para área basal, volumen total y mortalidad. El sistema implícito utilizó la función de la distribución de probabilidad Weibull de tres parámetros. Para el estudio se eligieron al azar 50 sitios de 400 m² cada uno, distribuidos en clases de edad de tres hasta 21 años, se establecieron en el 2011 y se remidieron en 2012 y 2015. Los resultados mostraron cuatro índices de sitio (IS): 10, 15, 20 y 25 m a la edad base de 15 años. El turno técnico en volumen para la condición promedio (IS de 20 m) fue de 14 años, edad a la que se producen 251 m³ ha⁻¹ como volumen total esperado y un rendimiento medio de 17.9 m³ ha⁻¹ año⁻¹. La distribución diamétrica proyectó un volumen total de 242 m³ ha⁻¹ a la edad del turno técnico y, además, permitió conocer que la proporción de árboles con diámetro normal >30 cm

ABSTRACT

In Zacualpan, Veracruz, Mexico, there are 3,500 ha of commercial forest plantations of *Pinus patula*, but until now no evaluations of growth have been made that would allow an adequate programming of harvest. The objective of the present study was to evaluate growth and yield of timber, using an explicit and an implicit system with diametric distribution, both constructed with data of permanent forestry measurement plots. The hypothesis proposes that permanent observation plots, of different ages re-measured over time, will make it possible to obtain an explicit and implicit projected system of timber growth and yield. The first system is comprised of the polymorphic Schumacher-Korf type non-linear model in dominant height, of compatible equations of prediction-projection for basal area, total volume and mortality. The explicit system utilizes the Weibull probability distribution function of three parameters. For this study 50 sites of 400 m² were randomly selected, distributed in age classes of three to 21 years, which were established in 2011 and were re-measured in 2012 and 2015. Results showed four site indices (SI): 10, 15, 20 and 25 m at the base age of 15 years. The technical rotation in volume for the average condition (SI of 20 m) was at 14 years, age at which 251 m³ ha⁻¹ are produced as expected total volume and a mean yield of 17.9 m³ ha⁻¹ year⁻¹. The diametric distribution projected a total volume of 242 m³ ha⁻¹ at the age of technical rotation, and also made it possible to know that the proportion of trees with normal diameter >30 cm is presented prior to 10 years in rich sites and afterwards is incremented exponentially.

Key words: site index, diametric class, Weibull, yield.

* Autor responsable ♦ Author for correspondence.

Recibido: junio, 2016. Aprobado: noviembre, 2016.

Publicado como ARTÍCULO en Agrociencia 51: 455-470. 2017.

se presenta antes de los 10 años en sitios ricos y después se incrementa exponencialmente.

Palabras clave: índice de sitio, clase diamétrica, Weibull, rendimiento.

INTRODUCCIÓN

La proyección del rendimiento maderable en el tiempo permite planificar el manejo forestal, en especial con silvicultura intensiva. Los modelos de proyección son útiles en los proyectos de plantaciones forestales comerciales, para establecer la valoración en el tiempo y prever el abastecimiento de cada mercado (Clutter *et al.*, 1983; Burkhart y Tomé, 2012).

La empresa Agroprodutores Forestales de Zacualpan, S. P. R. de R. L. ha establecido 3500 ha en 15 años. Al inicio el objetivo fue restaurar áreas degradadas, y fue convertirlas en plantaciones forestales comerciales. Ahora en la región de Zacualpan no hay información cuantitativa para un manejo forestal eficiente y se realizan actividades silvícolas basadas en la experiencia cotidiana. Además, el mercado local de productos maderables está basado en una selección diamétrica, por lo cual es importante tener un sistema de proyección robusto que permita tomar decisiones de forma oportuna.

Para modelar el AB se utilizan estructuras matemáticas influenciadas por la altura dominante (A), el número de árboles por unidad de superficie, la edad (E) y en ocasiones el índice de sitio (IS) (Gonzalez-Benecke *et al.*, 2012; Santiago-García *et al.*, 2013). La variable número de árboles residuales (NA) se explica en función de la edad (E) (Rose *et al.*, 2004), además de indicadores de estado del sitio. Asimismo, el volumen (V) se puede explicar al considerar como variables independientes el área basal, la altura dominante o índice de sitio y la edad (Magaña *et al.* 2008).

Los sistemas de crecimiento y rendimiento maderable (SCRM) son de tipo explícito o implícito. Un sistema explícito puede ajustarse en forma simultánea o individual, y el sistema implícito es un complemento del sistema explícito y permite estimar las variables de estado por categoría diamétrica en forma dinámica (Torres-Rojo *et al.*, 1992). Ambos procedimientos son buenos y ello dependerá de la especie, lugar y tipo de datos utilizados para el ajuste.

La función usada para el sistema implícito es el modelo Weibull de tres parámetros (Weibull 3P).

INTRODUCTION

Timber yield projection over time makes it possible to plan forest management, especially with intensive forest production. The projection models are useful in projects of commercial forest plantations, to establish the valuation over time and foresee the supply in each market (Clutter *et al.*, 1983; Burkhart and Tomé, 2012).

The firm Agroprodutores Forestales de Zacualpan, S. P. R. de R. L. has established 3500 ha in 15 years. At first the purpose was to restore degraded areas, and later the objective was to convert them to commercial forestry plantations. Presently there is no quantitative information in the Zacualpan region for efficient forest management, and forestry activities are carried out based on day to day experience. Furthermore, the local market of timber products is based on a diameter size selection, thus it is important to have a robust projection system that will make it possible to make opportune decisions.

To model the BA, mathematical structures are used, influenced by dominant height (A), the number of trees per surface unit, the age (E) and on occasions the site index (SI) (Gonzalez-Benecke *et al.*, 2012; Santiago-García *et al.*, 2013). The variable number of residual trees (NA) is explained as a function of the age (E) (Rose *et al.*, 2004), along with state indicators of the site. In addition, the volume (V) can be explained by considering as independent variables the basal area, dominant height of site index and age (Magaña *et al.*, 2008).

The systems of timber growth and yield (SCRM) are explicit or implicit. An explicit system can be fitted simultaneously or individually, and the implicit system is a complement of the explicit system and makes it possible to estimate state-variables by diameter class in a dynamic form (Torres-Rojo *et al.*, 1992). Both procedures are good, and this will depend on the species, place and type of data used for the fitting.

The function used for the implicit system is the Weibull model of three parameters (Weibull 3P). This was implemented to project stand conditions in *Pinus rudis* (Magaña *et al.*, 2008), *P. patula* (Santiago-García *et al.*, 2014) and *P. arizonica*, *P. duranguensis*, *P. teocote*, *P. leiophylla*, *P. lumholtzii*, *P. ayacahuite* (Quiñonez *et al.*, 2015a). In other studies distribution models are used such as that of Burr,

Éste se implementó para proyectar condiciones del rodal en *Pinus rudis* (Magaña *et al.*, 2008), *P. patula* (Santiago-García *et al.*, 2014) y *P. arizonica*, *P. duranguensis*, *P. teocote*, *P. leiophylla*, *P. lumholtzii*, *P. ayacahuite* (Quiñonez *et al.*, 2015a). En otros estudios se usan modelos de distribución como el de Burr, distribución logística, y percentiles libres o proyección tabulada del rodal (Stand-Table-Projection) (Borders *et al.*, 1987; Knowe *et al.*, 1997; Lindsay *et al.*, 1996; Wang y Rennolls, 2005).

El método de percentiles se usa para predecir los parámetros del modelo Weibull 3P (*localización, escala y forma*) y describir la distribución de las categorías diamétricas. El percentil utiliza como variable dependiente el diámetro medio cuadrático (Dq , cm) (Torres-Rojo *et al.*, 1992; Santiago-García *et al.*, 2014; Quiñonez *et al.*, 2015a).

Los SCRM son herramientas para programar el plan de cortas, el abastecimiento de materia prima a la industria, implementar aclareos, estimar ingresos económicos futuros y sus usos se han expandido para cuantificar biomasa y carbono (Clutter *et al.*, 1983; Pienaar y Rheney, 1993, Galán *et al.*, 2008).

El objetivo de este estudio fue construir un SCRM dinámico, que incorpore modelos de rodal y de distribución diamétrica. La hipótesis fue que parcelas de observación permanente remedidas en el tiempo describen el patrón de crecimiento y rendimiento lo que, integrado a una función de distribución de probabilidades, permite proyectar el volumen maderable por categoría diamétrica (Kiviste y Kiviste, 2009; Gonzalez-Benecke *et al.*, 2012).

MATERIALES Y MÉTODOS

Área de estudio y datos dasométricos

El área de estudio pertenece al municipio de Zacualpan, Veracruz, México (20° 25' y 20° 31' N, 98° 24' y 98° 25' O, con 1670 m de altitud). El clima es templado húmedo con una temperatura promedio de 18 °C y una precipitación media anual de 1900 mm; el suelo es de tipo Feozem.

En el 2011 se establecieron 50 parcelas de observación permanente, las cuales se remidieron en 2012. De estas, en el 2015 se encontraron 14 parcelas aclareadas, 26 con mortalidad parcial (competencia intra-específica), siete con aprovechamiento total y tres con muerte total de las plantas por dominancia de maleza. Las parcelas son cuadradas, de 20×20 m (400 m²). En cada período se midió el diámetro normal de todos los árboles (DN

logistic distribution, and free percentiles or tabulated stand projection (Stand-Table-Projection) (Borders *et al.*, 1987; Knowe *et al.*, 1997; Lindsay *et al.*, 1996; Wang and Rennolls, 2005).

The percentiles method is used to predict the parameters of the Weibull 3P model (*location, scale and form*) and to describe the distribution of the diametric categories. The percentile utilizes as dependent variable the mean square diameter (Dq , cm) (Torres-Rojo *et al.*, 1992; Santiago-García *et al.*, 2014; Quiñonez *et al.*, 2015a).

The SCRM are tools to program the harvest plan, supply of raw material to industry, implement thinning, estimate future economic income, and their uses have been expanded to quantify biomass and carbon (Clutter *et al.*, 1983; Pienaar and Rheney, 1993, Galán *et al.*, 2008).

The objective of the present study was to construct a dynamic SCRM that incorporates models of stand and diameter distribution. The hypothesis was that permanent observation plots re-measured over time describe the pattern of growth and yield, which integrated to probability density function makes it possible to project the timber volume by diameter class (Kiviste and Kiviste, 2009; Gonzalez-Benecke *et al.*, 2012).

MATERIALS AND METHODS

Study area and dasometric data

The study area pertains to the municipality of Zacualpan, Veracruz, Mexico (20° 25' and 20° 31' N, 98° 24' and 98° 25' W, with 1670 m altitude). The climate is temperate humid with an average temperature of 18 °C and mean annual rainfall of 1900 mm; soil is Feozem.

In 2011 50 permanent observation plots were established, which were re-measured in 2012. Of these, in 2015 14 cleared plots were found, 26 with partial mortality (intra-specific competition), seven with total use and three with total death of the plants by dominance of weeds. The plots are square, 20×20 m (400 m²). In each period normal diameter of all of the trees was measured (DN in cm) and the height of the 5 dominant trees (A in m) and the age of the plantation was measured (E in years).

The state-variables by hectare were: average dominant height (A , m), total volume (V , m³), squared diameter (Dq , cm), basal area (AB , m²) and number of residual trees (NA), all referred to the site index (SI) as criteria for classifying the site quality (Clutter *et al.*, 1983).

en cm) y la altura de los cinco árboles dominantes (A en m) y se registró la edad de la plantación (E en años).

Las variables de estado por hectárea estimadas fueron: altura dominante promedio (A , m), volumen total (V , m³), diámetro cuadrático (Dq , cm), área basal (AB , m²) y número de árboles residual (NA), todas referidas al índice de sitio (IS) como criterio para clasificar la calidad de estación (Clutter *et al.*, 1983).

Sistema de crecimiento explícito

El SCRM explícito se estructuró integrando modelos de predicción y proyección para las variables A , AB , V y NA . El resultado fueron modelos de estimar el rendimiento futuro por hectárea y por calidad de estación determinado por un índice de sitio (Clutter *et al.*, 1983; Burkhardt y Tomé, 2012). La construcción del sistema inició con la selección de un modelo genérico para altura dominante, y después por el método de diferencia algebraica (ADA) se derivó una condición futura en función de una situación inicial (Pienaar y Rheney, 1993; Jordan *et al.*, 2006). La altura dominante fue ajustada con regresión no lineal en forma independiente y el AB , V y NA como sistema compatible (Santiago-García *et al.*, 2013).

Altura dominante

En el ajuste de los modelos en altura dominante (A) e índice de sitio (IS) se utilizaron 76 pares de datos no traslapados que corresponden al promedio de las alturas dominantes con sus edades que oscilaron de 3 a 21 años. A partir del modelo de predicción se derivaron los modelos de proyección e índice de sitio. El método de diferencia algebraica (ADA) genera familias de curvas anamórficas y polimórficas de la forma $A_2 = f(A_1, E_1, E_2, \beta)$ donde: A_2 es la altura dominante proyectada o índice de sitio a la edad E_2 (edad de proyección), A_1 es la altura dominante (a una edad base de 15 años) medida a la edad inicial (E_1) y β es el vector de parámetros de regresión (De los Santos-Posadas *et al.*, 2006; Quiñones-Barraza *et al.*, 2015). La expresión de Schumacher-Korf se utilizó en su forma de curva guía (1) y polimórfica-2 (2) con hipótesis de crecimiento en el parámetro a_2 del modelo genérico (1) (Schumacher, 1939).

$$A = \alpha_0 \cdot e^{\left(\frac{-\alpha_1}{E^{\alpha_2}}\right)} \quad (1)$$

$$A_2 = \alpha_0 \cdot e^{-\alpha \cdot E_2} \left[\frac{\ln \left(\frac{-\alpha_1}{\ln \left(\frac{A_1}{\alpha_0} \right)} \right)}{\ln(E_1)} \right]^{-1} \quad (2)$$

Explicit growth system

The explicit SCRM was structured by integrating models of prediction and projection for the variables A , AB , V and NA . The results were models of estimating future yield per hectare and by station quality determined through a site index (Clutter *et al.*, 1983; Burkhardt and Tomé, 2012). The construction of the system initiated with the selection of a generic model for dominant height and afterwards using the algebraic difference method (ADA) a future condition was derived as a function of an initial situation (Pienaar and Rheney, 1993; Jordan *et al.*, 2006). Dominant height was fitted with non-linear regression independently and the AB , V and NA as a compatible system (Santiago-García *et al.*, 2013).

Dominant height

In the fitting of the models in dominant height (A) and site index (SI) 76 pairs of non-overlapping data were used that correspond to the average of the dominant heights with their ages, which varied from 3 to 21 years. From the prediction model, the models of projection and site index were derived. The algebraic difference method (ADA) generates families of anamorphic and polymorphic curves of the form $A_2 = f(A_1, E_1, E_2, \beta)$ where: A_2 is the projected dominant height or site index at age E_2 (projection age), A_1 is dominant height (at a base age of 15 years) measured at the initial age (E_1) and β is the vector of regression parameters (De los Santos-Posadas *et al.*, 2006; Quiñones-Barraza *et al.*, 2015). The expression of Schumacher-Korf was used in its form of guide curve (1) and polymorphic-2 (2) with growth hypothesis in the parameter α_2 of the generic model (1) (Schumacher, 1939).

$$A = \alpha_0 \cdot e^{\left(\frac{-\alpha_1}{E^{\alpha_2}}\right)} \quad (1)$$

$$A_2 = \alpha_0 \cdot e^{-\alpha \cdot E_2} \left[\frac{\ln \left(\frac{-\alpha_1}{\ln \left(\frac{A_1}{\alpha_0} \right)} \right)}{\ln(E_1)} \right]^{-1} \quad (2)$$

where A : dominant height of prediction, A_1 : dominant height at the initial age, A_2 : dominant height at the projected age, α_0 , α_1 , α_2 : regression parameters, E_1 : Initial age or base age (15 years), E_2 : Projection age, e : exponential function and $\ln$: Napierian logarithm.

donde A : altura dominante de predicción, A_1 : altura dominante a la edad inicial, A_2 : altura dominante a la edad proyectada, α_0 , α_1 , α_2 : parámetros de la regresión, E_1 : Edad inicial o edad base (15 años), E_2 : Edad de proyección, e : función exponencial y $\ln$: logaritmo neperiano.

Área basal

Veinticuatro parcelas de observación permanente fueron segregadas de la muestra del 2015 por la realización de aclareos, cortas definitivas o muerte total. Para el ajuste de área basal, volumen y número de árboles por hectárea se usaron 73 pares de datos sin traslape. El modelo de área basal propuesto (3) es una función dependiente de la altura dominante, la edad y el número de árboles por hectárea. Con esta expresión se generó el modelo (4) para estimar el área basal a la edad proyectada (AB_2) (Gonzalez-Benecke *et al.*, 2012). Las expresiones son:

$$AB_1 = e^{\beta_0} \cdot A_1^{\beta_1} \cdot E_1^{\beta_2} \cdot NA_1^{\beta_3} \quad (3)$$

$$AB_2 = AB_1 \cdot \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{\beta_1} \cdot \left(\frac{E_2}{E_1}\right)^{\beta_2} \cdot \left(\frac{NA_2}{NA_1}\right)^{\beta_3} \quad (4)$$

donde AB_1 , A_1 , E_1 , NA_1 : área basal, altura dominante, edad y número de árboles por ha a la edad inicial, AB_2 , A_2 , E_2 , NA_2 : área basal, altura dominante, edad y número de árboles por ha a la edad proyectada y β_0 , β_1 , β_2 , β_3 : parámetros a ser estimados.

Volumen

Para el volumen se usó el par de ecuaciones (5) y (6) que describen el volumen de predicción y de proyección respectivamente:

$$V_1 = \gamma_0 \cdot AB_1^{\gamma_1} \cdot A_1^{\gamma_2} \quad (5)$$

$$V_2 = V_1 \cdot \left(\frac{AB_2}{AB_1}\right)^{\gamma_1} \cdot \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{\gamma_2} \quad (6)$$

donde V_1 , AB_1 , A_1 : son volumen, área basal y altura dominante en su condición inicial, V_2 , AB_2 , A_2 : volumen, área basal y altura dominante en la condición proyectada y γ_0 , γ_1 , γ_2 : parámetros a ser estimados.

Número de árboles residual

En el modelo de número de árboles residual destaca un parámetro que representa la tasa de mortalidad (ω_1); este parámetro

Basal area

Twenty four permanent observation plots were segregated from the sample of 2015 due to thinning, definitive cuts or total death. A total of 73 pairs of non overlapping data were used for the fitting of the basal area, volume and number of trees per hectare. The proposed model of basal area (3) is a function dependent on the dominant height, age and number of trees per hectare. With this expression the model (4) was generated for estimating the basal area at the projected age (AB_2) (Gonzalez-Benecke *et al.*, 2012). The expressions are as follows:

$$AB_1 = e^{\beta_0} \cdot A_1^{\beta_1} \cdot E_1^{\beta_2} \cdot NA_1^{\beta_3} \quad (3)$$

$$AB_2 = AB_1 \cdot \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{\beta_1} \cdot \left(\frac{E_2}{E_1}\right)^{\beta_2} \cdot \left(\frac{NA_2}{NA_1}\right)^{\beta_3} \quad (4)$$

where AB_1 , A_1 , E_1 , NA_1 : basal area, dominant height, age and number of trees per ha at the initial age, AB_2 , A_2 , E_2 , NA_2 : basal area, dominant height, age and number of trees per ha at the projected age and β_0 , β_1 , β_2 , β_3 : parameters to be estimated.

Volume

For the volume the pair of equations (5 and (6) was used which describe the volume of prediction and of projection, respectively:

$$V_1 = \gamma_0 \cdot AB_1^{\gamma_1} \cdot A_1^{\gamma_2} \quad (5)$$

$$V_2 = V_1 \cdot \left(\frac{AB_2}{AB_1}\right)^{\gamma_1} \cdot \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{\gamma_2} \quad (6)$$

where V_1 , AB_1 , A_1 , are volume, basal area and dominant height in their initial condition, V_2 , AB_2 , A_2 : volume, basal area and dominant height in the projected condition and γ_0 , γ_1 , γ_2 : parameters to be estimated.

Number of residual trees

Outstanding in the model for the number of residual trees, is a parameter that represents the mortality rate (ω_1); this parameter multiplies at the age of reference. The survival can be expressed in terms of prediction (7) and projection (8) in the following form:

$$NA_1 = \omega_0 \cdot e^{(-\omega_1 \cdot E_1)} \quad (7)$$

multiplica directamente a la edad de referencia. La sobrevivencia puede expresarse en términos de predicción (7) y proyección (8) de la forma siguiente:

$$NA_1 = \omega_0 \cdot e^{(-\omega_1 \cdot E_1)} \quad (7)$$

$$NA_2 = NA_1 \cdot e^{[-\omega \cdot (E_2 - E_1)]} \quad (8)$$

donde NA_1 , E_1 , NA_2 , E_2 : Número de árboles por hectárea y edad en la condición inicial y proyectada respectivamente y ω_0 , ω_1 : parámetros de la regresión.

Sistema de crecimiento implícito mediante la *fdp* Weibull

Weibull (1951) publicó una función de distribución de probabilidad (*fdp*) y su potencia es tal que ha incursionado incluso en la dasonomía (Villaseñor-Alba y Villanueva-Morales, 2000). Para ajustar la función Weibull y modelar la distribución de clases diamétricas existen métodos como el de regresión lineal y no lineal, percentiles y máxima verosimilitud (Torres-Rojo *et al.*, 1992; Torres-Rojo *et al.*, 2000). El método de estimación de parámetros a través de percentiles ha mostrado buenos resultados (Santiago-García *et al.*, 2014).

Las variables de estado propuestas fueron: área basal por hectárea (AB , $m^2 ha^{-1}$) y diámetro medio cuadrático (Dq , cm) dado por:

$$Dq = \sqrt{\frac{40000}{\pi} \cdot \frac{AB}{NA}} \quad (9)$$

La altura de los árboles no medidos se obtuvo en forma indirecta con la ecuación $H_i = 0.880151 \times A^{1.026997} \times (1 - e^{(-1.075746 \times DN)})$ que relaciona la altura dominante (A) y el diámetro normal (DN) para estimar la altura total individual. El volumen total árbol con corteza se obtuvo del modelo Schumacher: $V_i = 0.000114 \times DN^{1.718158} \times H^{0.939592}$ (Uranga-Valencia *et al.*, 2015) donde H : altura total del árbol y DN : diámetro normal. Los percentiles propuestos fueron:

$$p0 = \varphi_0 \cdot Dq^{\varphi_1} \cdot AB^{\varphi_2} \quad (10)$$

$$p63 = \bar{\omega} \cdot Dq^{\bar{\omega}_1} \quad (11)$$

$$p95 = \xi_0 \cdot Dq^{\xi_1} \cdot A^{\xi_2} \quad (12)$$

$$NA_2 = NA_1 \cdot e^{[-\omega \cdot (E_2 - E_1)]} \quad (8)$$

where NA_1 , E_1 , NA_2 , E_2 : Number of trees per ha and age in the initial and projected condition, respectively and ω_1 , ω_2 : parameters of the regression.

System of implicit growth using the *fdp* Weibull

Weibull (1951) published a probability density function (*fdp*) and its power is such that it has even been widely applied in dasonomy (Villaseñor-Alba and Villanueva-Morales, 2000). To fit the Weibull function and model the distribution of diameter classes there are methods such as that of linear and non-linear regression, percentiles and maximum likelihood (Torres-Rojo *et al.*, 1992; Torres-Rojo *et al.*, 2000). The method of estimation of parameters through percentiles has shown good results (Santiago-García *et al.*, 2014).

The state-variables proposed were: basal area per hectare (AB , $m^2 ha^{-1}$) and mean squared diameter (Dq , cm) given by:

$$Dq = \sqrt{\frac{40000}{\pi} \cdot \frac{AB}{NA}} \quad (9)$$

The height of the unmeasured trees was obtained indirectly with the equation $H_i = 0.880151 \times A^{1.026997} \times (1 - e^{(-1.075746 \times DN)})$ that relates dominant height (A) and normal diameter (DN) to estimate the individual total height. Total tree height with bark was obtained with the Schumacher model: $V_i = 0.000114 \times DN^{1.718158} \times H^{0.939592}$ (Uranga-Valencia *et al.*, 2015) where H =total tree height and DN its normal diameter. The proposed percentiles were as follows:

$$p0 = \varphi_0 \cdot Dq^{\varphi_1} \cdot AB^{\varphi_2} \quad (10)$$

$$p63 = \bar{\omega} \cdot Dq^{\bar{\omega}_1} \quad (11)$$

$$p95 = \xi_0 \cdot Dq^{\xi_1} \cdot A^{\xi_2} \quad (12)$$

where $p0$, $p63$, $p95$ correspond to the zero percentile, 63 and 95, Dq : mean squared diameter, AB : basal area and A : dominant height, φ_0 , φ_1 , φ_2 , $\bar{\omega}_0$, $\bar{\omega}_1$, ξ_0 , ξ_1 , ξ_2 are the parameters to be estimated in the percentiles system. The Weibull 3P probabilities distribution function is given by the probabilistic function:

$$f(x) = \frac{a}{b} \left(\frac{x-a}{b} \right)^{c-1} \cdot e^{-\left[\left(\frac{x-a}{b} \right)^c \right]} \quad (13)$$

donde p_0, p_{63}, p_{95} : corresponden al percentil cero, 63 y 95, D_q : diámetro medio cuadrático, AB : área basal y A : altura dominante, $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varpi_0, \varpi_1, \xi_0, \xi_1, \xi_2$ son los parámetros a ser estimados en el sistema de percentiles. La función de distribución de probabilidades Weibull 3P está dada por la función probabilística:

$$f(x) = \frac{a}{b} \left(\frac{x-a}{b} \right)^{c-1} \cdot e^{-\left(\frac{x-a}{b} \right)^c} \quad (13)$$

($a \leq x \leq \infty$); $=0$, de otra forma, donde a es el parámetro de localización, b el de escala y c el de forma. La función define el valor de densidad de probabilidad asociada a una variable aleatoria, que para este estudio fue el diámetro normal ($x=DN$) (Santiago-García *et al.*, 2014). La distribución acumulada en su forma cerrada es:

$$f(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x-a}{b} \right)^c} \quad (14)$$

($a \leq x \leq \infty$); $=0$, de otra forma.

Los valores de los parámetros b y c son positivos, en tanto que a puede ser negativo cero o positivo. Sin embargo en la modelación de distribución de clases diamétricas a no debe ser negativo (Clutter *et al.*, 1983). Conociendo los parámetros puede obtenerse la función de densidad para un intervalo dado por:

$$P = (L < X < U) = e^{-\left(\frac{L-a}{b} \right)^c} - e^{-\left(\frac{U-a}{b} \right)^c} \quad (15)$$

donde P es la proporción de árboles de la clase diamétrica asignada, L y U son el límite inferior y superior de la clase respectivamente, e es la función exponencial y X es el centro de la categoría diamétrica.

Los parámetros fueron estimados por el método de momentos (Pienaar y Rheney, 1993), el cual ha sido probado con resultados satisfactorios (Santiago-García *et al.*, 2014; Quiñonez-Barraza *et al.*, 2015b), utilizando las siguientes ecuaciones:

El parámetro a de localización se determinó con:

$$a = \begin{cases} P_0 - 2.5 \text{ si } P_0 \geq 5 \text{ cm} \\ \frac{p_0}{2} \text{ de otra forma} \end{cases} \quad (16)$$

($a \leq x \leq \infty$); $=0$, otherwise, where a is the parameter of location, b of scale and c of form. The function defines the value of probability density associated to a random variable, which for this study was normal diameter ($x=DN$) (Santiago-García *et al.*, 2014). The accumulated distribution in its closed form is:

$$f(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x-a}{b} \right)^c} \quad (14)$$

($a \leq x \leq \infty$); $=0$, otherwise.

The values of the parameters b and c are positive, whereas a can be negative, zero or positive. However, in the modeling of distribution of diameter classes, a should not be negative (Clutter *et al.*, 1983). Knowing the parameters, the density function for a given interval can be obtained with:

$$P = (L < X < U) = e^{-\left(\frac{L-a}{b} \right)^c} - e^{-\left(\frac{U-a}{b} \right)^c} \quad (15)$$

where P is the proportion of trees of the assigned diametric class, L and U are the lower and upper limit of the diameter class respectively, e is the exponential function and X is the center of the diametric category.

The parameters were estimated by the moments method (Pienaar and Rheney, 1993), which has been tested with satisfactory results (Santiago-García *et al.*, 2014; Quiñonez-Barraza *et al.*, 2015b), utilizing the following equations:

Parameter a of location was determined with:

$$a = \begin{cases} P_0 - 2.5 \text{ si } P_0 \geq 5 \text{ cm} \\ \frac{p_0}{2} \text{ de otra forma} \end{cases} \quad (16)$$

Parameter c is given by $c = \ln [((- \ln(1-0.95))/(- \ln(1-0.63)))/\ln(p_{95}-a)/\ln(p_{63}-a)]$. For the parameter b the following expression of the second moment of the Weibull distribution was used:

$$b = a \cdot \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} + \left[\left(\frac{a}{\Gamma_2} \right)^2 \cdot (\Gamma_1^2 - \Gamma_2) + \frac{Dq^2}{\Gamma_2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (17)$$

where $\Gamma_1 = \Gamma(1+1/c)$, $\Gamma_2 = \Gamma(1+2/c)$, $\Gamma(\cdot)$ is the Gamma function, the other variables were previously defined already.

El parámetro c está dado por $c = \ln [((- \ln(1-0.95))/(- \ln(1-0.63)))/\ln(p95-a)/p63-a)]$. Para el parámetro b se utilizó la siguiente expresión del segundo momento de la distribución Weibull:

$$b = a \cdot \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} + \left[\left(\frac{a}{\Gamma_2} \right)^2 \cdot (\Gamma_1^2 - \Gamma_2) + \frac{Dq^2}{\Gamma_2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (17)$$

donde $\Gamma_1 = \Gamma(1+1/c)$, $\Gamma_2 = \Gamma(1+2/c)$, $\Gamma(\cdot)$ es la función Gamma, las demás variables ya fueron definidas previamente.

Variables de estado por categoría diamétrica

El número de árboles por clase diamétrica se obtuvo de la forma siguiente: $NA_{(CD)} = P(L < X < U) \times NAHA$, donde $NA_{(CD)}$ es la distribución de la clase diamétrica por hectárea, $P(L < X < U)$ es la función de densidad de probabilidad para el intervalo de esa misma categoría (CD) y $NAHA$: número de árboles por hectárea residuales a una edad determinada. El volumen por hectárea por categoría diamétrica se obtuvo con la expresión $V_{(CD)} = NA_{(CD)} \times Vi$, donde $NA_{(CD)}$ es el número de árboles de la distribución de la clase diamétrica.

Técnica y prueba de bondad de ajuste

El ajuste del modelo de altura dominante e índice de sitio se realizó mediante regresión no lineal con el procedimiento MODEL del software SAS/ETS® (SAS, 2014). El coeficiente de determinación ajustado por el número de parámetros (R^2_{adj}), la suma de cuadrados del error (SCE), el cuadrado medio del error (CME), el nivel de significancia de los parámetros ($Pr > |t|$), y la modelación lógica de las curvas con respecto al gráfico de datos observados en campo fueron los criterios de bondad para validar el modelo (De los Santos-Posadas *et al.*, 2006).

Los modelos compatibles de área basal, volumen y mortalidad fueron ajustados simultáneamente con regresión aparentemente no relacionada (SUR, siglas en inglés), esta técnica asume que las variables son independientes entre ellas. La prueba de Kolmogorov-Smirnov (KS) fue utilizada para calificar la bondad de ajuste de los percentiles. Para descartar parcelas se usó un nivel de significancia de $\alpha = 0.05$ y 0.1 (Santiago-García *et al.*, 2014; Quiñonez *et al.*, 2015a).

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Altura dominante y rendimiento explícito

Para altura dominante los modelos de Hossfeld IV, Schumacher-Korf y Chapman-Richards tienen

Variables of state by diametric category

The number of trees per diametric class was obtained as follows: $NA_{(CD)} = P(L < X < U) \times NAHA$ is the function of density of probability for the interval of this same category (CD) and $NAHA$: number of trees per hectare residuals at a determined age. The volume per hectare per diametric category was obtained with the expression $V_{(CD)} = NA_{(CD)} \times Vi$, where $NA_{(CD)}$ is the number of trees of the distribution of the diameter class.

Technique and test of goodness of fit

The fitting of the dominant height model and site index was done using non-linear progression with the MODEL procedure of the software SAS/ETS® (SAS, 2014). The coefficient of determination fitted by the number of parameters (R^2_{adj}), the sum of squares of the error (SCE), the mean square of the error (CME), the level of significance of the parameters ($Pr > |t|$), and the logical modeling of the curves with respect to the graph of data observed in the field were the criteria of goodness to validate the model (De los Santos-Posadas *et al.*, 2006).

The compatible models of basal area, volume and mortality were fitted simultaneously with seemingly unrelated regression (SUR); this technique assumes that the variables are independent from each other. The test of Kolmogorov-Smirnov (KS) was used to qualify the goodness of fit of the percentiles. To discard plots a significance level of $\alpha = 0.05$ and 0.1 was used (Santiago-García *et al.*, 2014; Quiñonez *et al.*, 2015a).

RESULTS AND DISCUSSION

Dominant height and explicit yield

For dominant height the models of Hossfeld IV, Schumacher-Korf and Chapman-Richards have the best fits and from them are derived families of site index (SI) (De los Santos-Posadas *et al.*, 2006; Quiñones-Barraza *et al.*, 2015). Model (2) fitted to predict dominant height coherently describes the growth pattern of the permanent observation plots (Figure 1). This made it possible to derive four site qualities labeled by the site index (SI , m) at a base age of 15 years, with $SI=10$ for low productivity stands and $SI=25$ for stands with higher production potential. $SI=20$ was considered the most representative condition. The estimator of the parameter α_0 related to the asymptote has a rejection value for the model (1); this would imply that the height of the trees would reach 125 m. In contrast, model (2) has a projected value of 30.8 m height (Table 1).

los mejores ajustes y de ellos derivan familias de índice de sitio (*IS*) (De los Santos-Posadas *et al.*, 2006; Quiñones-Barraza *et al.*, 2015). El modelo (2) ajustado para predecir la altura dominante describe coherentemente el patrón de crecimiento de las parcelas de observación permanente (Figura 1). Este permitió derivar cuatro calidades de estación etiquetadas por el índice de sitio (*IS*, m) a una edad base de 15 años, siendo *IS*=10 para rodales de baja productividad e *IS*=25 para rodales de mayor potencial productivo. El *IS*=20 fue considerado como la condición más representativa. El estimador del parámetro α_0 relacionado con la asíntota tiene un valor de rechazo para el modelo (1) esto implicaría que la altura de los árboles alcanzara 125 m. Por el contrario el modelo (2) tiene un valor proyectado de 30.8 m de altura (Cuadro 1).

Área basal, volumen y número de árboles residual

Pienaar y Rheney (1993), Galán *et al.* (2008) y Magaña *et al.* (2008) generaron sistemas de crecimiento y rendimiento maderable (*SCRM*) relacionando modelos de altura dominante (*A*, m), área basal (*AB*, m² ha⁻¹), volumen (*V*, m³ ha⁻¹) y mortalidad o número de árboles (*NA*), con diferentes técnicas estadísticas y los resultados fueron buenos. El sistema de ecuaciones del presente estudio generó resultados adecuados. Los criterios de bondad de ajuste (Cuadro 2) son aceptables y con altos niveles de significancia en sus parámetros (Cuadro 3). Con el sistema de ecuaciones y los parámetros estimados en combinación con la familia de curvas polimórficas se construyó la tabla de rendimiento maderable por calidad de estación y calidad promedio (Cuadro 4). El valor de

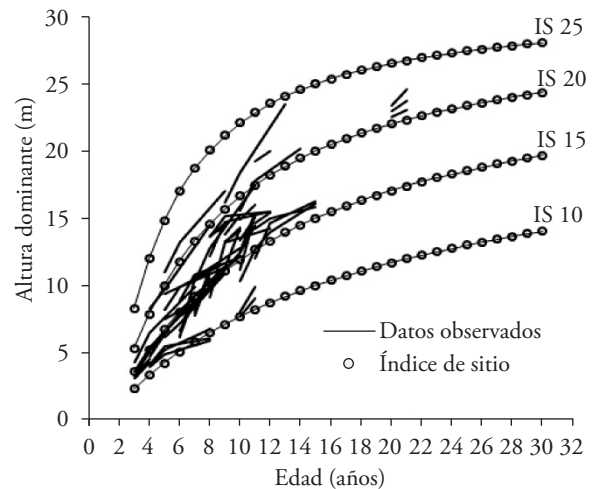


Figura 1. Familia de curvas de crecimiento en altura dominante por calidad de estación con patrón polimórfico *vs* el patrón de crecimiento de los datos observados en parcelas permanentes.

Figure 1. Family of growth curves for dominant height by site quality with polymorphic pattern *vs* the growth pattern of the data observed in permanent plots.

Basal area, volume and number of residual trees

Pienaar and Rheney (1993), Galán *et al.* (2008) and Magaña *et al.* (2008) generated systems of knowledge and timber yield (*SCRM*) relating models of dominant height (*AB*, m² ha⁻¹), volume (*V*, m³ ha⁻¹) and mortality or number of trees (*NA*) with different statistical techniques, with good results. The system of equations of the present study generated adequate results. The criteria of goodness of fit (Table 2) are acceptable and with high levels of

Cuadro 1. Parámetros de regresión y pruebas de bondad de ajuste de las curvas Schumacher-Korf (1) y de la curva polimórfica-2 para altura dominante.

Table 1. Regression parameters and tests of goodness of fit of the curves of Schumacher-Korf (1) and of the polymorphic curve-2 for dominant height.

Modelo	Parámetro	Valor	Valor t	Pr > t	SCE	CME	R ²
(1)	α_0	125.3513	1.03	0.3033	681.1	4.9715	0.7959
	α_1	5.321888	12.79	<0.0001			
	α_2	0.37774	2.32	0.0217			
(2)	α_0	30.88691	5.02	<0.0001	209.8	2.3843	0.8867
	α_1	4.56364	8.14	<0.0001			

SCE: suma de cuadrados del error. CME: cuadrado medio del error; α_0 , α_1 , α_2 : parámetros estimados por regresión no lineal. ♦ SCE: sum of squares of the error. CME: mean square of the error; α_0 , α_1 , α_2 : parameters estimated by non-linear regression.

Cuadro 2. Estadísticos de bondad bajo regresión aparentemente no relacionada (SUR) del sistema de ecuaciones de predicción-proyección para área basal, volumen y mortalidad.
Table 2. Goodness of fit statistics under seemingly unrelated regression (SUR) of the system of equations of prediction-projection for basal area, volume and mortality.

Componente	Modelo	SCE	CME	R ²	R ² _{Adj}
Área basal	(3)	1327.6	18.8318	0.8330	0.8294
	(4)	636.2	8.8975	0.9155	0.9150
Volumen	(5)	3596.9	50.6599	0.9945	0.9944
	(6)	485.7	6.7452	0.9993	0.9993
Número de árboles por ha	(7)	12 586 984	17 6042	0.0561	0.0495
	(8)	836 369	11 536.1	0.9344	0.9348

R² del modelo de volumen es bajo lo que implica una variación muy alta entre los valores de densidad inicial. Al año uno se fijó el parámetro ω_0 con 1100 árboles por hectárea, que es la densidad inicial a la que se realiza la mayoría de las plantaciones de *P. patula* en Zacualpan, Veracruz. La proyección de las curvas de crecimiento describe congruentemente el patrón observado en las parcelas de observación permanentes (Figura 2A).

El turno técnico para la calidad de estación con *IS* 10, 15, 20 y 25 ocurre a los 21, 18, 14 y 11 años, respectivamente. El incremento medio anual para estas calidades es de 7, 12, 18 y 26 m³ ha⁻¹ año⁻¹ (Figura 2B).

El tener tres mediciones sobre la misma unidad muestral y parcelas con edades representativas en las plantaciones, resultó en un buen ajuste de los modelos. En consecuencia permitió describir de manera

significance in their parameters (Table 3). With the system of equations and the estimated parameters in combination with the family of polymorphic curves, the table of timber yield was constructed for station quality and average quality (Table 4). The value of R² of the volume model is low, which implies a very high variation among the values of initial density. At year-one the parameter ω_0 was fixed at 1100 trees per hectare, which is the initial density of most of the plantations of *P. patula* in Zacualpan, Veracruz. The projection of the growth curves congruently describes the pattern observed in the permanent observation plots (Figure 2A).

The technical turn for site quality with *SI* 10, 15, 20 and 25 occurs at 21, 18, 14 and 11 years, respectively. The mean annual increment for these qualities is of 7, 12, 18 and 26 m³ ha⁻¹ year⁻¹ (Figure 2B).

Cuadro 3. Parámetros estimados y nivel de significancia de los parámetros con regresión aparentemente no relacionada (SUR) del sistema de ecuaciones de predicción-proyección para área basal, volumen y mortalidad.
Table 3. Estimated parameters and significance level of the parameters with seemingly unrelated regression (SUR) of the prediction-projection system of equations for basal area, volume and mortality.

Modelo	Parámetro	Valor	Error estándar	Valor t	Pr> t
AB (3) y (4)	β_0	-4.00173	0.5604	-7.14	<0.0001
	β_1	0.583318	0.0843	6.92	<0.0001
	β_2	0.842482	0.0974	8.65	<0.0001
	β_3	0.517767	0.0634	8.17	<0.0001
V (5) y (6)	γ_0	1.127274	0.0312	36.16	<0.0001
	γ_1	0.896381	0.0102	87.74	<0.0001
	γ_2	0.83278	0.0133	62.56	<0.0001
NA (7) y (8)	ω_0	1773.78	80.1781	22.12	<0.0001
	ω_1	0.045648	0.00423	10.79	<0.0001

Pr>|t|: prueba de significancia de parámetros; <0.001 es altamente significativo. $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \gamma_0, \gamma_1, \omega_0, \omega_1$. Parámetros de la regresión. ♦ Pr>|t|: test of significance of parameters; <0.001 is highly significant. $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \gamma_0, \gamma_1, \omega_0, \omega_1$ Parameters of regression.

Cuadro 4. Tabla de crecimiento y rendimiento *AB*, *V*, y *NA* por calidad de estación, generada por el método implícito y regresión no lineal aparentemente no relacionada.**Table 4. Table of growth and yield *AB*, *V*, and *NA* for site quality, generated by the implicit method and non-linear seemingly unrelated regression.**

Edad	<i>NA</i> [†]	Área basal (m ² ha ⁻¹) por <i>IS</i>				Volumen (m ³ ha ⁻¹) por <i>IS</i>			
		10	15	20	25	10	15	20	25
1	1100	0.0	0.4	0.4	0.4	0	0	0	0
3	1004	2.7	3.5	4.4	5.7	6	10	17	31
5	916	5.6	7.4	9.3	11.7	18	33	57	96
7	836	8.6	11.2	13.9	16.9	33	62	103	163
9	763	11.4	14.7	18.0	21.5	51	93	149	224
11	697	14.0	18.0	21.7	25.4	69	124	193	277
14	608	17.5	22.2	26.4	30.2	96	168	251	344
15	581	18.5	23.4	27.7	31.6	105	182	268	363
18	506	21.3	26.7	31.3	35.1	130	219	315	413
19	484	22.2	27.7	32.3	36.1	137	231	329	427
20	462	22.9	28.6	33.2	37.0	145	242	342	440
21	441	23.7	29.4	34.1	37.8	152	252	354	452
22	422	24.4	30.2	34.9	38.6	159	262	365	463
25	368	26.2	32.2	36.9	40.5	178	288	394	490
26	351	26.7	32.8	37.4	41.0	184	296	403	498
27	336	27.2	33.3	37.9	41.4	189	303	411	505
29	306	28.0	34.2	38.8	42.2	199	317	424	517
30	293	28.4	34.5	39.1	42.5	204	323	430	522

NA[†]: número de árboles por hectárea, *IS*: índice de sitio en metros a la edad base de 15 años y edad en años. ♦

NA[†]: number of trees per hectare, *SI*: site index in meters at the base age of 15 years and age in years.

adecuada el patrón de crecimiento de las variables de interés.

En bosques del municipio de Zacualtipán, Hidalgo, regenerados de manera natural con *P. patula*, se ha registrado a la edad de 20 años, un rendimiento en volumen de 10.2 m³ ha⁻¹ año⁻¹ en calidades de estación con *IS* de 26 m a una edad base de 40 años (Santiago-García *et al.* 2013). Lo anterior significa que las plantaciones muestran mejor rendimiento comparado con bosques naturales.

La tasa de cambio (parámetro) que se traduce en mortalidad del número de árboles por hectárea es resultado de la competencia intra-específica del rodal. En Zacualtipán se reportó un parámetro de -0.0337 (Santiago-García *et al.* 2013) y en nuestra investigación fue un poco mayor (-0.04). El crecimiento en área basal en combinación con una secuela de aclareos es útil para simular modelos de respuesta a aclareos.

Having three measurements of the same sampling unit and having plots with representative ages in the plantations resulted in a good fit of the models. Consequently it made it possible to adequately describe the growth pattern of the variables of interest.

In forests of the municipality of Zacualtipán, Hidalgo, regenerated naturally with *P. patula*, at the age of 20 years a yield in volume of 10.2 m³ ha⁻¹ year⁻¹ has been registered in site qualities of *SI* 26 m at a base age of 40 years (Santiago-García *et al.*, 2013). The above means that the plantations show a better yield when compared with natural forests.

The rate (parameter) that translates in mortality of the number of trees per hectare is the result of the intra-specific competition of the stand. In Zacualtipán a parameter of -0.0337 (Santiago-García *et al.*, 2013) was reported and in our investigation

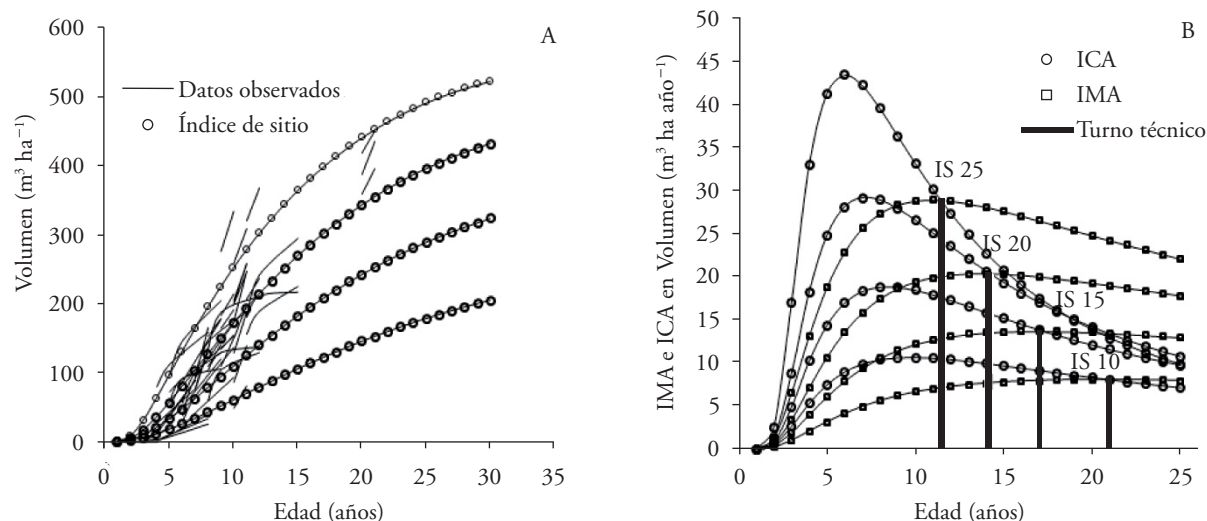


Figura 2. (A) Modelación explícita del crecimiento en volumen para diferente calidad de estación sobrepuesta a la trayectoria de los datos de parcelas remedidas. (B) Incremento Medio e Incremento Corriente Anual (IMA e ICA) por calidad de estación.

Figure 2. (A) Explicit modeling of growth in volume for different site quality superimposed over the trajectory of the data of re-measured plots. (B) Mean Annual Increment and Current Annual Increment (IMA and ICA) for site quality.

Sistema de crecimiento y rendimiento implícito con la *fdp* Weibull

Los estadísticos de bondad de ajuste y los valores estimados en cada parámetro permiten aplicar los modelos propuestos. La prueba *KS* con un $\alpha=0.05$ [$C(\alpha)=1.36$] indicó el rechazo de cuatro de las 50 parcelas (8 %) y con un $\alpha=0.1$ [$C(\alpha)=1.22$] un rechazo de cinco (10 %). Estos resultados son similares a los de Quiñonez *et al.* (2015a) y Santiago-García *et al.* (2013), estos últimos con 1.58 y 3.96 % de rechazo para $\alpha=0.05$ y $\alpha=0.1$, respectivamente. La prueba *KS* permitió confirmar que los datos de parcelas tienen una distribución Weibull. Al respecto, a mayor nivel de significancia el contraste de las desviaciones se reduce (Santiago-García *et al.*, 2014).

El procedimiento SUR utiliza las correlaciones de los errores de los modelos para mejorar el ajuste. Para modelar Weibull 3P se requieren al menos dos percentiles, y la elección de estos dependen de la muestra (Santiago-García *et al.*, 2014; Borders *et al.*, 1987). La eficiencia del percentil 63 y 95 se muestra en los Cuadros 5 y 6. Al estar centrados se reduce el sesgo de predicción. En estudios similares han utilizado percentiles 50 y 90, 40 y 82 y 24 y 93 (Santiago-García *et al.*, 2014).

it was a little higher (-0.04). Growth in basal area in combination with a thinning sequel is useful for simulating models of response to thinning.

System of growth and implicit yield with the *fdp* Weibull

The statistics of goodness of fit and the estimated values in each parameter make it possible to apply the proposed models. The *KS* test with $\alpha=0.05$ [$C(\alpha)=1.36$] indicated the rejection of four of the 50 plots (8 %) and with $\alpha=0.1$ [$C(\alpha)=1.22$] a rejection of five (10 %). These results are similar

Cuadro 5. Estadísticos de bondad de ajuste de los modelos de percentiles para la función Weibull.

Table 5. Statistics of goodness of fit of the models of percentiles for the Weibull function.

Modelo	Percentil	SCE	CME	R ²	R ² _{Adj}
(9)	<i>p</i> 0	389.9	3.1699	0.8101	0.8071
(10)	<i>p</i> 63	27.2885	0.2201	0.9953	0.9953
(11)	<i>p</i> 95	244.9	1.9913	0.9735	0.973

*p*0, *p*63, *p*95: percentil cero, 63 y 95. ♦ *p*0, *p*63, *p*95: percentile zero, 63 and 95.

Cuadro 6. Parámetros estadísticos de los modelos de percentiles para la función Weibull.
Table 6. Statistical parameters of the models of percentiles for the Weibull function.

Modelo	Parámetro	Valor	Error estándar	Valor t	Pr> t
(9) $p0$	φ_0	0.093337	0.0182	5.14	<0.0001
	φ_1	1.778855	0.092	19.33	<0.0001
	φ_2	-0.23953	0.0682	-3.51	0.0006
(10) $p63$	ϖ_1	0.928185	0.0187	49.5	<0.0001
	ϖ_2	1.047835	0.00691	151.57	<0.0001
	ξ_0	1.493064	0.0698	21.4	<0.0001
(11) $p95$	ξ_1	0.883772	0.0296	29.83	<0.0001
	ξ_2	0.102851	0.0308	3.34	0.0011

$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varpi_1, \varpi_2, \xi_0, \xi_1, \xi_2$: Parámetros estimados mediante regresión no lineal. ♦ $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varpi_1, \varpi_2, \xi_0, \xi_1, \xi_2$: Parameters estimated through non-linear regression.

La distribución diamétrica a la edad de 20 años indica que rodales con calidad de estación promedio (*IS* 20) tendrán 23 % más árboles para aserrío ($DN > 25$ cm) comparado con sitios de calidad pobre (*IS* 10), lo cual repercute en el valor de la producción, a mayor diámetro el precio de venta del producto es más alto (Figuras 3 y 4). En *IS* 25 a la edad de 10 años se proyecta obtener 51 árboles con $DN > 30$ cm; para clase de sitio pobre se proyecta cero árboles con esa misma categoría diamétrica.

Resultados promisorios se esperan para *IS* de 20 m; porque a la edad de 15 años se pronostican 429 árboles ha^{-1} con $DN < 30$ cm y $151 > 30$ cm ha^{-1} , que corresponde a un volumen de 155 y 103 $m^3 ha^{-1}$, respectivamente. Santiago-García *et al.* (2014) presentan para la misma especie (sitio promedio) pero en bosque natural bajo manejo de Zacualtipán, Hidalgo, una proyección a 20 años de 70 árboles con $DN > 30$ cm y 750 individuos con $DN < 30$ cm.

Los resultados muestran una amplia variación en las variables de estado, lo anterior motivado por la calidad de estación. En *IS* 20, a la edad del turno técnico (14 años) el 85 % del volumen será comercial, mientras que en *IS* 10 el turno técnico se proyecta a los 21 años con similar producción maderable.

CONCLUSIONES

A partir de las proyecciones por calidad de sitio se podrán programar las cortas finales a una edad conocida. El *SCRM* permite generar zonificación de las áreas ya plantadas en la región para establecer prioridades en los planes de expansión de esta actividad

to those of Quiñonez *et al.* (2015a) and Santiago-García *et al.* (2013), the latter with 1.58 and 3.96 % of rejection for $\alpha = 0.05$ and $\alpha = 0.1$, respectively. The *KS* test confirms that the data of plots has a Weibull distribution. To this respect, at a higher level of significance the contrast of the deviations is reduced (Santiago-García *et al.*, 2014).

The SUR procedure utilizes the correlations of the errors of the models to improve the fit. To model Weibull 3P at least two percentiles are required, and their selection depends on the sample (Borders *et al.*, 1987; Santiago-García *et al.*, 2014). The efficiency of the percentile 63 and 95 is shown in Tables 5 and 6. By being centered the bias of prediction is reduced. Similar studies have used percentiles 50 and 90, 40 and 24 and 93 (Santiago-García *et al.*, 2014).

The diameter distribution at the age of 20 years indicates that stands with average site quality (*SI* 20) will have 23 % more trees for saw-timber ($DN > 25$ cm) compared to sites of poor quality (*SI* 10), which is reflected in the value of production, the larger the diameter, the higher the sale price of the product (Figures 3 and 4). In *SI* 25 at the age of 10 years it is projected to obtain 51 trees with $DN > 30$ cm; for poor site class zero trees are projected with this same diameter class.

Promising results are expected for *SI* of 20 m; because at the age of 15 years 429 trees ha^{-1} are predicted with $DN < 30$ cm and $151 > 30$ cm ha^{-1} , which corresponds to a volume of 155 and 103 $m^3 ha^{-1}$, respectively. Santiago-García *et al.* (2014) present for the same species (average site) but with natural forest management of Zacualtipán, Hidalgo,

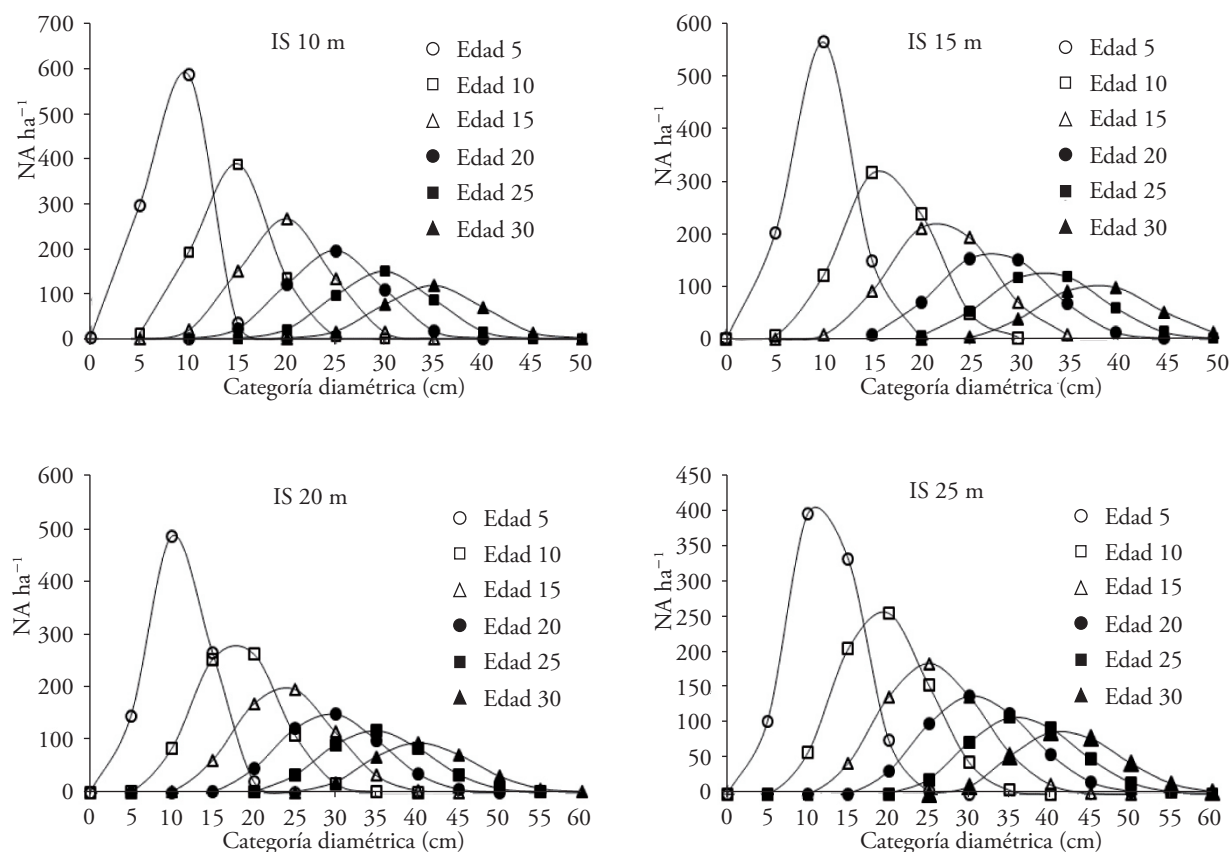


Figura 3. Distribuciones diamétricas estimadas a diferentes edades del rodal por calidad de estación con la función de distribución de probabilidad Weibull. *IS*: 10, 15, 20 y 25 m, Edad 5, 10, 15, 20, 25 y 30: es la edad de la plantación en años, NA ha⁻¹: número de árboles vivos por hectárea, categoría diamétrica en intervalos de 5 cm.

Figure 3. Diameter distributions estimated at different ages of the stand by station quality with the Weibull probability distribution function. *SI*: 10, 15, 20 and 25 m, Age 5, 10, 15, 20, 25 and 30: is the plantation age in years, NA ha⁻¹: number of live trees per hectare, diametric category in intervals of 5 cm.

productiva, y también permite contar con elementos técnicos para realizar análisis financieros de los proyectos de plantaciones en la región de Zacualpan, Veracruz. La modelación explícita proyecta el volumen sin considerar categorías diamétricas. La forma implícita agrupa por clases diamétricas, por tanto el volumen será mayor en el primer sistema que en el segundo. El volumen por hectárea a 30 años en *IS* 25 producirá 522 y 740 m³ ha⁻¹ con rendimiento explícito e implícito, respectivamente. El crecimiento libre (sin cortas intermedias) expresado en los sistemas de crecimiento aporta herramientas para el manejo como el turno, el volumen a futuro y la distribución diamétrica para contemplar ingresos por venta de madera.

a projection at 20 years of 70 trees with DN > 30 cm and 750 individuals with DN < 30 cm.

Results show a wide variation in the state-variables, which is motivated by site quality. In *SI* 10 the technical rotation is projected at 21 years with similar timber production.

CONCLUSIONS

From the projections by site quality the final harvest can be programmed at a known age. The *SCRM* makes it possible to generate zonification of the areas already planted in the region to establish priorities in the expansion plans of this productive activity, and also makes it possible to have technical

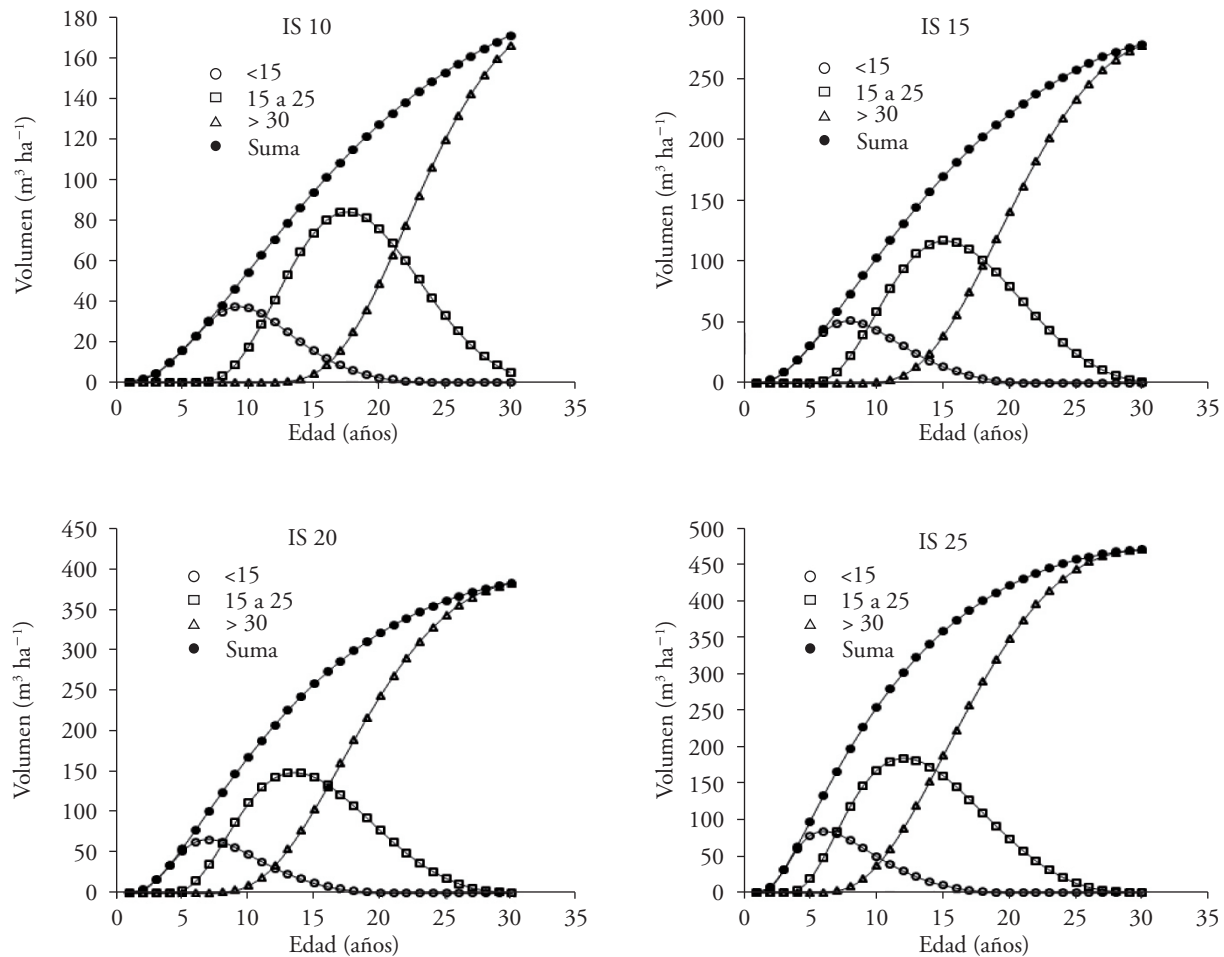


Figura 4. Rendimiento maderable ($\text{m}^3 \text{ha}^{-1}$) por calidad de estación: IS 10, 15, 20 y 25, contra a la edad de la plantación. <15: volumen total de madera en árboles menores a 15 cm de DN. 15 a 25: volumen total de madera de árboles entre 15 y hasta 25 cm de DN. >30: volumen total en árboles con DN superior a 30 cm. Suma: volumen acumulado integrando todas las clases diamétricas.

Figure 4. Timber yield ($\text{m}^3 \text{ha}^{-1}$) by site quality: SI 10, 15, 20 and 25, against the age of the plantation. <15: total volume of wood in trees less than 15 cm of DN. >30: total volume in trees with DN higher than 30 cm. Sum: accumulated volume integrating all of the diameter classes.

LITERATURA CITADA

- Borders, B. E., R. A. Souter, R. L. Bailey, and K. D. Ware. 1987. Percentile-based distribution characterize forest stand tables. *For. Sci.* 33: 570-576.
- Burkhardt, H. E., and M. Tomé. 2012. *Modeling Forest Trees and Stands*. Springer, New York. 457 p.
- Clutter, J. L., J.C. Forston, L. V. Pienaar, G. H. Brister, and R. L. Bailey. 1983. *Timber Management: A Quantitative Approach*. John Wiley & Sons, Inc. New York. 333 p.
- De los Santos-Posadas, H. M., M. Montero-Mata, y M. M. Kaninen. 2006. Curvas dinámicas de crecimiento en altura dominante para *Terminalia amazonia* (Gmel.) Excell en Costa Rica. *Agrociencia* 40: 521-532.

elements with which to carry out financial analyses of the projects of plantations in the region of Zacualpan, Veracruz. The explicit modeling projects the volume without considering diametric categories. The implicit form groups by diameter classes, therefore the volume will be greater in the former system than in the latter. The volume per hectare at 30 years in SI 25 will produce 522 and 740 $\text{m}^3 \text{ha}^{-1}$ with explicit and implicit yield, respectively. Free growth (without intermediate cuts) expressed in the growth systems provides tools for management such as estimated rotation, future volume and diameter distribution to accurate estimate income from the sale of wood.

- Galán, L. R., H. M. De los Santos-Posadas, y J. I. Valdez H. 2008. Crecimiento y rendimiento de *Cedrela odorata* L. y *Tabebeuia donnell-smithii* Rose en San José Chacalapa, Pochutla, Oaxaca. *Madera y Bosques* 14: 65-82.
- Gonzalez-Benecke, C. A., S. A. Gezan, D.J. Leduc, T. A. Martin, W.P. Cropper, and L. J. Samuelson. 2012. Modeling survival, yield, volume partitioning and their response to thinning for longleaf pine plantations. *Forests* 3: 1104-1132.
- Jordan, L., R. Souther, B. Parresol., and R. F. Daniels. 2006. Applications of the algebraic difference approach for developing self-referencing specific gravity and biomass equations. *For. Sci.* 52: 81-92.
- Kiviste, A., and K. Kiviste. 2009. Algebraic difference equations for stand height, diameter, and volume depending on stand age and site factors for Estonian state forests. *Math. Comput. Nat. – Res. Sci.* 1: 67-77.
- Knowe, S. A., G. R. Ahrens., and D. S. De Bell. 1997. Comparison of diameter-distribution-prediction, stand-table-projection, and individual-tree-growth modeling approaches for young red alder plantations. *For. Ecol. Manag.* 98: 49-60.
- Lindsay, R. S., G. R. Wood, and R. C. Wollons. 1996. Modeling the diameter distribution of forest stands using the Burr distribution. *J. Appl. Stat.* 23: 609-619.
- Magaña, T. O. S., J. M. Torres R., C. Rodríguez F. H. Aguirre D., y A. M. Fierros G. 2008. Predicción de la producción y rendimiento de *Pinus rudis* Endl. en Aloapan, Oaxaca. *Madera y Bosques* 14: 5-13.
- Pienaar, L.V., and J. W. Rheney. 1993. Yield prediction for mechanically site- prepared Slash pine plantations in the southeastern coastal plain. *South. J. Appl. For.* 17: 163-173.
- Quiñones B., G., H. M. De los Santos P., F. Cruz C., A. Velázquez M., G. Ángeles P., y G. Ramírez V. 2015a. Modelación dinámica de distribuciones diamétricas en masas mezcladas de *Pinus* en Durango, México. *Madera y Bosques* 21: 59-71.
- Quiñones-Barraza, G., H. M. De los Santos-Posadas, F. Cruz-Cobos, A. Velázquez-Martínez, G. Ángeles-Pérez, y G. Ramírez-Valverde. 2015b. Índice de sitio con polimorfismo complejo para masas forestales de Durango, México. *Agrociencia* 49: 439-454.
- Rose, C. E., M. L. Clutter, B. D. Shiver, D. B. Hall, and B. Borders. 2004. A generalized methodology for developing whole – stand survival models. *For. Sci.* 50: 686-695.
- SAS Institute Inc. 2014. SAS/ETS® 9.3 User's Guide. SAS Institute Inc., Cary, NC. 2861 p.
- Santiago-García, W., H. M. De los Santos-Posadas, G. Ángeles-Pérez, J. R. Valdez-Lazalde, y G. Ramírez-Valverde. 2013. Sistema compatible de crecimiento y rendimiento para rodales coetáneos de *Pinus patula*. *Rev. Fitotec. Mex.* 36: 163-172.
- Santiago-García, W., H. M. De los Santos-Posadas, G. Ángeles-Pérez, J. J. Corral-Rivas, J. R. Valdez-Lazalde, y D. H. Del Valle-Paniagua. 2014. Predicción del rendimiento maderable de *Pinus patula* Schl. et Cham. a través de modelos de distribución diamétrica. *Agrociencia* 48: 87-101.
- Schumacher, F. X. 1939. A new growth curve and its applications to timber yield studies. *J. For.* 37: 819-820.
- Torres-Rojo, J. M., M. Acosta-Mireles, y O. S. Magaña-Torres. 1992. Métodos para estimar los parámetros de la función Weibull y su potencial para ser predichos a través de atributos del rodal. *Agrociencia* 2: 57-76.
- Torres-Rojo, J. M., O. S. Magaña-Torres, y M. Acosta-Mireles. 2000. Metodología para mejorar la predicción de parámetros de las distribuciones diamétricas. *Agrociencia* 34: 627-637.
- Uranga-Valencia, L. P., H. M. De los Santos-Posadas, J. R. Valdez-Lazalde, J. López-Úpton, y H. Navarro-Garza. 2015. Volumen total y de ahusamiento para *Pinus patula* Schiede ex Schltdl. et Cham. en tres condiciones de bosque. *Agrociencia* 49: 797-801.
- Villaseñor-Alba, J. A., y Villanueva-Morales, A. 2000. Dos pruebas de hipótesis basadas en estimadores para el parámetro de forma de la distribución Weibull. *Agrociencia* 35: 197-209.
- Wang, M., and K. Rennolls. 2005. Tree diameter distribution modelling: introducing the logit-logistic distribution. *Can. J. For. Res.* 35: 1305-1313.
- Weibull, W. 1951. A statistical distribution function of wide applicability. *J. Appl. Mech.* 18: 293-297.