

# CONDICIONES PARA MODELAR EL RIEGO POR GRAVEDAD CON PROPIEDADES HIDRODINÁMICAS EQUIVALENTES DEL SUELO

## CONDITIONS FOR MODELING SURFACE IRRIGATION WITH EFFECTIVE SOIL HYDRAULIC PROPERTIES

Felipe Zataráin<sup>1</sup>, Carlos Fuentes<sup>2\*</sup>, Luis Rendón<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, campus IMTA. Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, Paseo Cuauhnáhuac 8532, Progreso, 62550. Jiutepec, Morelos, México (zatarainf@gmail.com). <sup>2</sup>Instituto Mexicano de Tecnología del Agua. (cbfuentesr@gmail.com). <sup>3</sup>Calle Iguala 14, colonia Vista Hermosa, 62290 Cuernavaca, Morelos.

### RESUMEN

Para diseñar el riego por gravedad es común hacer mediciones durante un evento de riego y deducir valores promedio o efectivos de la infiltración. Pero, la variabilidad espacial de los suelos puede ser de tal magnitud que la representatividad de estos valores puede cuestionarse. La hipótesis de este estudio fue que utilizar los valores efectivos de las propiedades hidrodinámicas del suelo es válido en ciertas condiciones de riego por gravedad. El objetivo fue analizar esas propiedades, con base en información experimental de infiltración y avance del riego en melgas, a través de la generación de campos correlacionados de la conductividad hidráulica con un método fundamentado en el análisis espectral. El análisis se complementó con la modelación de la fase de avance con valores de las propiedades hidrodinámicas del suelo generados aleatoriamente a partir de su distribución de probabilidad. A pesar de que los campos correlacionados presentaron variabilidad espacial amplia, según el perfil de las láminas infiltradas, el avance en las simulaciones mostró comportamiento similar. Los métodos inversos son válidos para determinar valores medios de las propiedades hidrodinámicas en el riego por gravedad cuando la distribución de la probabilidad es única en el espacio.

**Palabras clave:** Infiltración, variabilidad espacial, campos correlacionados.

### ABSTRACT

To design a system of surface irrigation, it is common to take measurements during an irrigation event and deduce average or effective values of infiltration. However, spatial variability of the soils can be so great that the representativity of these values may be questionable. The hypothesis of this study was that it is valid to use the effective values of hydrodynamic properties of the soil in certain conditions of surface irrigation. The objective was to analyze these properties based on experimental information on infiltration and advance of water in border irrigation by generating correlated fields of hydraulic conductivity with a method grounded in spectral analysis. The analysis was complemented with modeling of the advance phase with values of hydrodynamic properties of the soil generated randomly from its probability distribution. Although the correlated fields had broad spatial variability, according to infiltrated profiles, advance in the simulations showed similar behavior. Inverse methods are valid to determine mean values of the hydrodynamic properties in surface irrigation when the probability distribution is unique in space.

**Key words:** Infiltration, spatial variability, correlated fields.

### INTRODUCTION

A suitable design of surface irrigation is essential for efficient application of water, and simulation models developed over the recent five decades have become the main tool for predicting water flow and final distribution of moisture along the furrow or border strip during the process of irrigation (Bautista and Strelkoff, 2009).

\* Autor responsable ♦ Author for correspondence.

Recibido: diciembre, 2015. Aprobado: julio, 2016.

Publicado como ARTÍCULO en *Agrociencia* 51: 245-264. 2017.

## INTRODUCCIÓN

Un diseño adecuado del riego por gravedad es esencial para la aplicación eficiente del agua y los modelos de simulación desarrollados durante las cinco décadas recientes se han convertido en la herramienta principal para predecir el flujo del agua y la distribución final de la humedad sobre la longitud de un surco o una melga durante el proceso del riego (Bautista y Strelkoff, 2009). Strelkoff *et al.* (2009) señalaron que el factor más importante en el proceso del riego superficial y uno de los más difíciles de cuantificar es la infiltración, por lo que su caracterización apropiada es fundamental en el desempeño de los sistemas de riego. Para modelar la infiltración es posible resolver la ecuación de Richards (1931), del flujo del agua en suelos parcialmente saturados, pero las condiciones de heterogeneidad son un problema importante por la cantidad de parámetros requeridos. Tradicionalmente, la infiltración se mide en puntos discretos con infiltrómetros de doble cilindro o con instrumentos como el infiltrómetro de disco (Angulo-Jaramillo *et al.*, 2000). Con ellos se obtienen mediciones representativas de un solo punto, en el mejor de los casos, y su variabilidad espacial puede ser de tal magnitud que la inferencia de valores promedio adecuados para la simulación no puede hacerse con facilidad. Para estimar los parámetros adecuados para la modelación se han implementado técnicas para instrumentar pruebas de riego, que pueden ser tan elaboradas como medir los perfiles superficiales del agua durante el riego. Los parámetros obtenidos con métodos de modelación inversa, con las fases de avance y recesión en el riego por gravedad, son populares porque los datos son relativamente fáciles de obtener y los resultados representan promedios de campo en algún sentido (Strelkoff *et al.*, 2009).

De acuerdo con Jury *et al.* (2011), una propiedad efectiva es una relación funcional entre cantidades promediadas sobre un volumen, que dependen de la escala y el modelo. La conductividad hidráulica no saturada es un ejemplo de una propiedad efectiva, se define como el cociente del flujo entre el gradiente de potencial hidráulico medidos en la misma escala. Esta propiedad es monótona y única cuando el volumen se elige en una región con suelo homogéneo, pero no se garantiza que lo sea conforme se aumenta la escala y el suelo es heterogéneo.

Strelkoff *et al.* (2009) pointed out that the most important factor in surface irrigation, and one of the most difficult to quantify, is infiltration. Therefore, its adequate characterization is fundamental in the good performance of surface irrigation. For modeling infiltration it is possible to solve the Richards (1931) equation of water flow in partially saturated soils. However, the conditions of heterogeneity are a major problem because of the number of parameters required. Traditionally, infiltration is measured at discrete points with double-cylinder infiltrimeters or with instruments such as the disc infiltrimeter (Angulo-Jaramillo *et al.*, 2000). With these devices, representative measurements of a single point are obtained, in the best of cases, and their spatial variability can be of such magnitude that adequate average values cannot be easily inferred. To estimate suitable parameters for modeling, techniques for instrumenting irrigation tests were implemented, which can be as elaborate as measuring surface profiles of the water during irrigation. The parameters are obtained with inverse modeling methods, with the advance and recession phases in surface irrigation. They are popular because the data are relatively easy to obtain and the results in some sense represent field averages (Strelkoff *et al.*, 2009).

According to Jury *et al.* (2011), an effective property is a functional relationship between amounts averaged over a volume and depends on the scale and the model. Unsaturated hydraulic conductivity is an example of an effective property, defined as the quotient of the flow over the potential hydraulic gradient measured on the same scale. This property is monotonous and unique when the volume is selected in a region with homogeneous soil. But this is not guaranteed when the scale increases and the soil is heterogeneous.

The use of effective hydrodynamic properties has been discussed in specialized literature. Zhu and Mohanty (2006) analyzed optimal schemes to obtain effective hydraulic properties for transitory infiltration. Mesgouez *et al.* (2014) evaluated the uncertainty and validation of estimating effective hydrodynamic properties in simulations of dynamic evaporation. Durner *et al.* (2008) studied the movement of water at the scale of a lysimeter to analyze the existence and uniqueness of effective hydrodynamic properties in stratified soils by

El uso de propiedades hidrodinámicas efectivas se ha discutido en la literatura especializada. Zhu y Mohanty (2006) analizaron esquemas óptimos para obtener propiedades hidráulicas efectivas para infiltración transitoria; Mesgouez *et al.* (2014) evaluaron la incertidumbre y validación de la estimación de propiedades hidrodinámicas efectivas en simulaciones de evaporación dinámica; Durner *et al.* (2008) investigaron el movimiento del agua a la escala de un lisímetro para analizar la existencia y unicidad de propiedades hidrodinámicas efectivas en suelos estratificados por modelación inversa. La validez de utilizar propiedades hidrodinámicas efectivas en la mayoría de los casos depende del objetivo o las variables de interés de la modelación. La consideración de homogeneidad del medio porosos dependerá del fenómeno en estudio; en el caso del riego por gravedad será importante considerar la heterogeneidad de los suelos sobre los cuales transita la onda de avance de agua, desde su posición de entrada en la melga hasta el final.

Las condiciones generales para representar las propiedades hidrodinámicas del suelo con parámetros efectivos se analizaron en este estudio mediante parámetros generados con la información experimental que obtuvo Zataráin *et al.* (2003) para una parcela en Montecillo, Estado de México. Para analizar la variabilidad espacial de las propiedades hidrodinámicas se utilizó la teoría de similitud de Miller y Miller (1956) en medios porosos para escalar la infiltración.

Zataráin *et al.* (2003) señalan que si la media de la conductividad hidráulica saturada es una constante, la representación de la fase de avance por características hidrodinámicas efectivas es posible para caudales que aseguren la llegada del frente de avance al final de la melga. La hipótesis de este estudio fue que el uso de valores medios de las propiedades hidrodinámicas del suelo en el riego por gravedad es válido con estas dos condiciones. El objetivo fue analizarlas, modelando la fase de avance con dos procedimientos de caracterización de la variabilidad espacial, uno a través de la generación de campos correlacionados de la conductividad hidráulica con un método fundamentado en el análisis espectral y conservando la distribución de probabilidad y otro con la generación aleatoria conservando también la distribución de probabilidad.

inverse modeling. The validity of using effective hydrodynamic properties, in most cases, depends on the objective or the variables of interest of the modeling. Consideration of homogeneity of porous media will depend, then, on the phenomenon under study. In the case of surface irrigation, it will be important to consider the heterogeneity of the soils over which the advance wave of irrigation water transits from its position of entry in the furrow or border strip to the end.

The general conditions for representing hydrodynamic properties of the soil with effective parameters were analyzed in this study using parameters generated with experimental information obtained by Zataráin *et al.* (2003) for a field in Montecillo, State of Mexico. To analyze the spatial variability of the hydrodynamic properties, the Miller and Miller (1956) theory of similitude in porous media was used to scale infiltration.

Zataráin *et al.* (2003) point out that, if the mean of saturated hydraulic conductivity is a constant, representation of the advance phase by effective hydrodynamic characteristics is possible for flows that assure the arrival of the advance front to the end of the furrow. The hypothesis of our study was that the use of mean values of soil hydrodynamic properties in surface irrigation is valid under these two conditions. The objective was to analyze them by modeling the advance phase with two procedures of characterization of the spatial variable: one by generating correlated fields of hydraulic conductivity with a method grounded in spectral analysis and conserving the probability distribution and the other by random generation also conserving probability distribution.

## MATERIALS AND METHODS

Analysis of the conditions for modeling the advance phase in surface irrigation in borders was conducted with the hydrological model that results from a simplification of the equations of Barré de Saint-Venant. The law of resistance proposed by Fuentes *et al.* (2004) and the hypothesis of contact time of Saucedo *et al.* (2006) were used. To describe infiltration, we used the equation of Green and Ampt (1911), which can be derived from the equation of Richards (1931), with no loss of generality, according

## MATERIALES Y MÉTODOS

El análisis de las condiciones para modelar la fase de avance en el riego por gravedad en melgas se realizó con el modelo hidrológico que resulta de una simplificación de las ecuaciones de Barré de Saint-Venant. En nuestro estudio se usó la ley de resistencia propuesta por Fuentes *et al.* (2004) y la hipótesis del tiempo de contacto Saucedo *et al.* (2006). Para describir la infiltración se utilizó sin pérdida de generalidad la ecuación de Green y Ampt (1911), que puede derivarse de la ecuación de Richards (1931) de acuerdo con Parlange *et al.* (1982, 1985). El estudio de la variabilidad espacial de la infiltración se simplifica con la teoría de los medios similares de Miller y Miller (1956) (medios fractales auto-similares).

### La descripción del riego

El escurrimiento en el riego por melgas puede considerarse unidimensional por la relación entre la anchura y el tirante de agua. Con esta consideración, la modelación del riego puede hacerse con las ecuaciones de Barré de Saint-Venant, derivadas de los principios de conservación de la masa y de la cantidad de movimiento:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + V_1 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(qU)}{\partial x} + gh \frac{\partial h}{\partial x} + gh(J - J_o) + \beta V_1 U = 0 \quad (2)$$

donde  $x$  es la dirección principal del movimiento [L];  $t$  es el tiempo [T];  $q(x, t) = U(x, t)h(x, t)$  es el gasto por unidad de ancho de melga o gasto unitario [ $L^2T^{-1}$ ];  $U = U(x, t)$  es la velocidad media en una sección transversal [ $LT^{-1}$ ];  $h = h(x, t)$  es el tirante del agua sobre la superficie del suelo [L];  $J_o = -\partial Z / \partial x$ , con  $Z$  la coordenada vertical orientada positivamente hacia arriba [L], es asimilada generalmente a la pendiente topográfica de la superficie del suelo cuando el ángulo de inclinación es pequeño [ $LL^{-1}$ ];  $J = J(x, t)$  es la pendiente de fricción [ $LL^{-1}$ ];  $g$  es la aceleración gravitacional [ $LT^{-2}$ ];  $V_1 = V_1(x, t) = \partial I(x, t) / \partial t$  es la velocidad de infiltración [ $LT^{-1}$ ],  $I = I(x, t)$  es el volumen infiltrado por unidad de ancho y por unidad de longitud de la melga o lámina infiltrada [L]; el parámetro adimensional  $\beta$  está definido como  $\beta = V_{ix} / U$ , donde  $V_{ix}$  es la proyección en la dirección del movimiento de la velocidad de salida de la masa de agua debido a la infiltración, generalmente es depreciada.

to Parlange *et al.* (1982, 1985). The study of spatial variability of infiltration is simplified with Miller and Miller's (1956) theory of similar media (self-similar fractal media).

### Description of the irrigation

Superficial water flow in border irrigation can be considered unidimensional because of the relationship between the width and depth of the water. With this consideration, irrigation modeling can be done with the Barré de Saint-Venant equations, derived from the principles of mass conservation and the quantity of movement:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + V_1 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(qU)}{\partial x} + gh \frac{\partial h}{\partial x} + gh(J - J_o) + \beta V_1 U = 0 \quad (2)$$

where  $x$  is the spatial coordinate in the main direction of the movement [L];  $t$  is time [T];  $q(x, t) = U(x, t)h(x, t)$  is the flow per unit of width of the border strip, or unitary flow [ $L^2T^{-1}$ ];  $U = U(x, t)$  is the average flow rate in a cross-section [ $LT^{-1}$ ];  $h = h(x, t)$  water depth over the soil surface [L];  $J_o = -\partial Z / \partial x$ , with  $Z$  the vertical coordinate oriented positively upward [L], which is generally assimilated to the topographic slope of the soil surface when the angle of the inclination is small [ $LL^{-1}$ ];  $J = J(x, t)$  is the friction slope [ $LL^{-1}$ ];  $g$  is gravitational acceleration [ $LT^{-2}$ ];  $V_1 = V_1(x, t) = \partial I(x, t) / \partial t$  is the rate of infiltration [ $LT^{-1}$ ],  $I = I(x, t)$  is the infiltrated volume per unit of width and per unit of length of the border, or infiltrated depth [L]; the adimensional parameter  $\beta$  is defined as  $\beta = V_{ix} / U$ , where  $V_{ix}$  is the projection in the direction of the movement of the exit rate of the mass of water due to infiltration, which is generally depreciated.

In the advance phase of irrigation, the initial and border conditions are:

$$q(x, 0) = 0 \text{ y } h(x, 0) = 0 \quad (3)$$

$$q(0, t) = q_o, \quad q(x_f, t) = 0 \text{ y } h(x_f, t) = 0 \quad (4)$$

where  $q_o$  is the constant unitary flow imposed at the entrance of the border strip;  $x_f(t)$  is the position of the front of the surge.

En la fase de avance del riego las condiciones iniciales y de frontera son:

$$q(x,0)=0 \text{ y } b(x,0)=0 \quad (3)$$

$$q(0,t)=q_0, \quad q(x_f,t)=0 \text{ y } b(x_f,t)=0 \quad (4)$$

donde  $q_0$  es el gasto unitario constante impuesto a la entrada de la melga;  $x_f(t)$  es la posición del frente de onda.

Para cerrar el sistema (1)-(4) es necesario proporcionar ecuaciones para la velocidad de infiltración y la pendiente de fricción a través de una ley de resistencia hidráulica. Para describir la infiltración puede utilizarse la ecuación de Richards (1931) o una simplificación, como el modelo de Green y Ampt (1911), que se deriva de la ecuación de Richards cuando la difusividad hidráulica se asimila a una densidad de Dirac y la conductividad hidráulica no saturada es continua (Parlange *et al.*, 1982, 1985).

El modelo de Green y Ampt (1911) es representado por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = K_s \left[ 1 - \frac{(h + h_f)(\theta_s - \theta_o)}{I} \right] \quad (5)$$

donde  $I$  es la lámina infiltrada acumulada [L];  $K_s$  es la conductividad hidráulica a saturación [ $LT^{-1}$ ];  $\theta_s$  y  $\theta_o$  son el contenido de humedad a saturación e inicial, respectivamente [ $L^3L^{-3}$ ] [ $L^3L^{-3}$ ];  $h_f$  es la succión en el frente de humedecimiento (flujo en pistón) [L];  $h$  es la lámina de agua sobre la superficie del suelo (presión positiva) [L].

La ley de resistencia hidráulica relaciona la pendiente de fricción con la velocidad media y el tirante de agua y se puede utilizar la ley propuesta por Fuentes *et al.* (2004), que resulta del análisis del acoplamiento de las ecuaciones de Barré de Saint-Venant y Richards en la singularidad presente a la entrada de la melga:

$$U = k \frac{g^d}{v^{2d-1}} h^{3d-1} J^d; \quad q = Uh = kv \left( \frac{gh^3 J}{v^2} \right)^d \quad (6)$$

donde  $v$  es el coeficiente de viscosidad cinemática [ $L^2T^{-1}$ ];  $k$  es una constante adimensional que depende principalmente de la rugosidad del suelo; la potencia  $d$  es tal que  $1/2 < d < 1$ , el límite inferior corresponde al régimen de Chézy y el superior al régimen de Poiseuille.

To close the system (1)-(4) it is necessary to provide equations for infiltration rate and friction slope with a hydraulic resistance law. To describe infiltration, the Richards (1931) equation, or a simplification of it, can be used, for example, the Green and Ampt (1911) model, which is derived from the Richards equation when hydraulic difussivity is assimilated to a Dirac density and non-saturated hydraulic conductivity is continuous (Parlange *et al.*, 1982, 1985).

The Green and Ampt (1911) model is represented by the following differential equation:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = K_s \left[ 1 - \frac{(h + h_f)(\theta_s - \theta_o)}{I} \right] \quad (5)$$

where  $I$  is the accumulated infiltrated depth [L];  $K_s$  is saturated hydraulic conductivity [ $LT^{-1}$ ];  $\theta_s$  and  $\theta_o$  are moisture content at saturation and initial, respectively, [ $L^3L^{-3}$ ] [ $L^3L^{-3}$ ];  $h_f$ ;  $h_f$  is the suction at the wetting front (piston flow) [L];  $h$  is the depth of water over the soil surface (positive pressure) [L].

The law of hydraulic resistance relates friction slope to average flow rate and water depth. The law proposed by Fuentes *et al.* (2004), resulting from the analysis of coupling the equations of Barré de Saint-Venant and Richards, can be used in the singularity present at the entrance of the border strip:

$$U = k \frac{g^d}{v^{2d-1}} h^{3d-1} J^d; \quad q = Uh = kv \left( \frac{gh^3 J}{v^2} \right)^d \quad (6)$$

where  $v$  is the kinematic viscosity coefficient [ $L^2T^{-1}$ ];  $k$  is an adimensional constant that depends mainly on soil roughness; the  $d$  potential is such that  $1/2 < d < 1$ , the lower limit corresponds to the Chézy regime and the upper limit to the Poiseuille regime.

As simplified forms of the Barré de Saint-Venant equations, they identify the diffusive wave, or zero inertia, model which is obtained from eliminating the inertial terms of equation (2); the kinematic wave model, which results from eliminating the variation in depth in space in the diffusive wave model; and the hydrological model of Lewis and Milne (1938), which retains the continuity equation and assumes a constant average depth over time and space ( $\bar{h}$ ). This model also assumes that infiltration depends only on contact time ( $\tau$ ) between water and the soil at a point  $x$ , defined by  $\tau(x,t) = t - \tau_x$ , where  $t$  is the total advance time and  $\tau_x$  is the time it takes for the advance wave to arrive at the point in question.



Como formas simplificadas de las ecuaciones de Barré de Saint-Venant se identifican el modelo de onda difusiva o inercia cero, que se obtiene al eliminar los términos inerciales de la ecuación (2); el modelo de onda cinemática, que resulta de eliminar la variación del tirante en el espacio en el modelo de la onda difusiva; y el modelo hidrológico de Lewis y Milne (1938), que retiene la ecuación de continuidad y asume un tirante medio constante en el tiempo y en el espacio ( $\bar{h}$ ). Este modelo asume también que la infiltración depende solamente del tiempo de contacto ( $\tau$ ) del agua con el suelo en un punto  $x$ , definido por  $\tau(x,t)=t-t_x$ , donde  $t$  es el tiempo total de avance y  $t_x$  es el tiempo de llegada de la onda de avance al punto en cuestión.

En un estudio de riego por gravedad, Saucedo *et al.* (2001) utilizaron las ecuaciones de Barré de Saint-Venant y de Richards y mostraron que considerar solamente la lámina infiltrada como una función del tiempo de contacto es suficiente para describirlo adecuadamente.

El modelo hidrológico de Lewis y Milne es una aproximación adecuada en la fase de avance del riego por gravedad, ya que conserva sus características principales (Rendón *et al.*, 1997; Castanedo *et al.*, 2013) y será retenido por su sencillez para el estudio de la variabilidad espacial de las propiedades hidrodinámicas del suelo y su impacto en la fase mencionada.

El tirante medio se puede estimar a partir del perfil de la onda en régimen permanente  $\partial h/\partial t=0$  y  $\partial q/\partial t=0$ . De las ecuaciones (1) y (2) se deduce:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{J_o - J + 2\gamma K_s q / gh^2}{1 - F^2} \quad (7)$$

donde  $\gamma=1-1/2\beta$ ;  $K_s$  es el flujo de infiltración permanente igual a la conductividad hidráulica saturada que puede ser variable en el espacio [ $LT^{-1}$ ] y  $F$  es el número de Froude:  $F^2=q^2/gh^3$ .

La ecuación (7) se integra en general de manera numérica, pero se obtiene una solución analítica aproximada si se considera que en la posición del frente de la onda ( $x=x_r$ ) el término predominante es la pendiente de fricción:  $dh/dx \cong -J$ . La pendiente de fricción en términos del tirante y del gasto se deduce de la ecuación (6):  $J=(v^2/gh^3)(q/kv)^{1/d}$ .

La variación del gasto con respecto a  $x$  en régimen permanente se obtiene de la ecuación de continuidad  $dq/dx+K_s=0$  considerando la conductividad hidráulica saturada media, es decir  $q=q_o(1-x/x_{max})$  con  $x_{max}=q_o/K_s$ . La integración conduce a  $h(x)=h_r(1-x/x_{max})^\delta$ , con  $\delta=(1+d)/4d$  y  $h_r=(v^2x_{max}/\delta g)^{1/4}$ , y para extrapolar este perfil hasta la entrada de la melga se reemplaza el tirante  $h_r$  por el tirante normal  $h_o$ . El tirante medio se obtiene del volumen sobre la superficie dividido por  $x_{max}$ :

In a study on surface irrigation Saucedo *et al.* (2001) used the Barré de Saint-Venant and Richards equations and showed that considering only the infiltrated depth as a function of contact time is sufficient to describe it adequately.

The hydrologic model of Lewis and Milne is an adequate approach in the advance phase of surface irrigation since it conserves its principal characteristics (Rendón *et al.*, 1997; Castanedo *et al.*, 2013), and it will be retained for the study of spatial variability of hydrodynamic soil properties and their impact on the advance phase because of its simplicity.

The average surface depth can be estimated from the wave profile in steady regime  $\partial h/\partial t=0$  and  $\partial q/\partial t=0$ . From equations (1) and (2), we deduce the following:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{J_o - J + 2\gamma K_s q / gh^2}{1 - F^2} \quad (7)$$

where  $\gamma=1-1/2\beta$ ;  $K_s$  is the steady infiltration flow equal to saturated hydraulic conductivity that can be variable in space [ $LT^{-1}$ ] and  $F$  is the Froude number:  $F^2=q^2/gh^3$ .

Equation (7) is generally integrated numerically, but an approximate analytical solution is obtained if we consider that in the position of the wave front ( $x=x_r$ ), the predominating term is the friction slope:  $dh/dx \cong -J$ . The friction slope in terms of the depth and flow rate is deduced from equation (6):  $J=(v^2/gh^3)(q/kv)^{1/d}$ .

The variation in flow rate, relative to  $x$  in steady regime, is obtained from the continuity equation  $dq/dx+K_s=0$  considering the average saturated hydraulic conductivity; that is,  $q=q_o(1-x/x_{max})$  with  $x_{max}=q_o/K_s$ . Integration leads to  $h(x)=h_r(1-x/x_{max})^\delta$ , with  $\delta=(1+d)/4d$  and  $h_r=(v^2x_{max}/\delta g)^{1/4}$ , and to extrapolate this profile up to the entrance to the border strip, depth  $h_r$  is replaced by the normal depth  $h_o$ . The average depth is obtained from volume over the area divided by  $x_{max}$ :

$$\bar{h} \cong \left( \frac{4d}{5d+1} \right) h_o \quad (8)$$

where:

$$h_o = \left( \frac{v^2}{gJ_o} \right)^{1/3} \left( \frac{q_o}{kv} \right)^{1/3d} \quad (9)$$

$$\bar{h} \cong \left( \frac{4d}{5d+1} \right) h_o \quad (8)$$

donde:

$$h_o = \left( \frac{v^2}{gJ_o} \right)^{1/3} \left( \frac{q_o}{kv} \right)^{1/3d} \quad (9)$$

La integración de la ecuación (5) con la condición  $I=0$  en  $t=0$ , considerando el tirante de agua constante e igual al valor medio definido por la ecuación (8) conduce a:

$$I = K_s t + \lambda \ln \left( 1 + \frac{I}{\lambda} \right) \quad (10)$$

donde  $\lambda = (\bar{h} + h_f)(\theta_s - \theta_o)$ .

La ecuación (10) presenta dos parámetros desconocidos:  $h_f$  y  $K_s$ . Los parámetros  $\theta_s$  y  $\theta_o$  pueden medirse y  $\bar{h}$  se estima con la ecuación (8) si se conoce el coeficiente adimensional de rugosidad.

### La infiltración y la variabilidad espacial

Para el análisis de la variabilidad espacial de la infiltración se utilizaron los datos reportados por Zataráin *et al.* (2003). Los experimentos se realizaron en un suelo de textura arenosa en Montecillo, Estado de México. En una melga de 100 m de longitud, 5 m de anchura y pendiente longitudinal  $J_o=0.002 \text{ mm}^{-1}$ ; se hicieron 21 pruebas de infiltración en un transecto al centro de la melga, la primera de ellas se realizó al inicio de la melga y el resto a 5 m con respecto a la prueba inmediata anterior. El método del doble cilindro (Angulo-Jaramillo *et al.*, 2000) se utilizó con 0.35 m y 1.45 m de diámetro interior y exterior, respectivamente. La lámina infiltrada acumulada tuvo diferencias de hasta 70 cm en un día entre las pruebas de infiltración (Figura 1).

Si se cuenta con  $N_s$  pruebas de infiltración se deben identificar  $2N_s$  parámetros de la ecuación (10). El análisis de la variabilidad espacial de estos parámetros se simplifica con la teoría de los medios similares de Miller y Miller (1956) (medios fractales auto-similares); que indica que los parámetros  $K_s$  y  $\lambda$  de la ecuación (10) de un suelo cualesquiera están relacionados con los parámetros respectivos del suelo de referencia por:

Integration of equation (5) with condition  $I=0$  in  $t=0$ , considering constant water depth equal to the average value defined by equation (8), leads to:

$$I = K_s t + \lambda \ln \left( 1 + \frac{I}{\lambda} \right) \quad (10)$$

where  $\lambda = (\bar{h} + h_f)(\theta_s - \theta_o)$ .

Equation (10) has  $h_f$  and  $K_s$  as unknown parameters.  $\theta_s$  and  $\theta_o$  can be measured, and  $\bar{h}$  is estimated with equation (8) if the dimensional roughness coefficient is known.

### Infiltration and spatial variability

For the analysis of spatial variability of infiltration, the data reported by Zataráin *et al.* (2003) were used. The experiments were conducted in a sandy soil in Montecillo, Estado de Mexico. In a 100 m long, 5 m wide border strip with a longitudinal slope of  $J_o=0.002 \text{ mm}^{-1}$ , 21 infiltration tests were conducted in a transect at the center of the crop bed. The first of these was done at the beginning of the bed and the rest at 5 m, relative to the test just before. The double cylinder method (Angulo-Jaramillo *et al.*, 2000) was used with 0.35 m interior and 1.45 m exterior diameters. The accumulated infiltrated depth had differences between infiltration tests of up to 70 cm in one day (Figure 1).

If we have  $N_s$  infiltration tests,  $2N_s$  parameters of equation (10) must be identified. The analysis of spatial variability of these parameters is simplified with the Miller and Miller (1956) theory of similar media (self-similar fractal media), which indicates that the parameters  $K_s$  and  $\lambda$  of equation (19) of any soil are related to the respective parameters of the reference soil by:

$$K_{sj} = r_j^2 K_{s*}; \quad \lambda_j = \frac{\lambda^*}{r_j} \quad (11)$$

where the subscript  $j$  identifies the soils:  $j=1,2,\dots,N$ , where  $N_s$  is the number of infiltration tests;  $r$  are the scale factors, and the parameters with asterisks correspond to the reference soil.

From equation, we infer:

$$K_j \lambda_j^2 = K_s \lambda^2 = \Omega_f \quad (12)$$

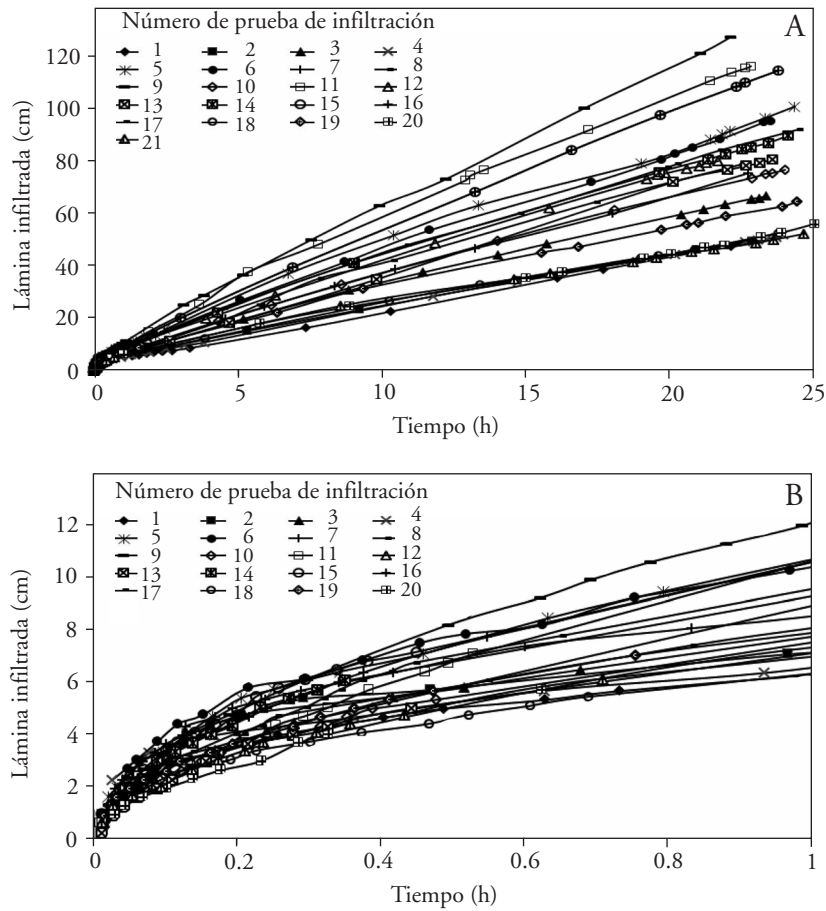


Figura 1. Datos experimentales de infiltración acumulada en 21 puntos en Montecillo, México, en (A) un día y (B) una hora (Fuente: Zataráin *et al.*, 2003).

Figure 1. Experimental accumulated infiltration data at 21 points in Montecillo, México, in (A) one day and (B) one hour (Source: Zataráin *et al.*, 2003).

$$K_{sj} = r_j^2 K_{s*}; \quad \lambda_j = \frac{\lambda_*}{r_j} \tag{11}$$

donde el subíndice j identifica a los suelos:  $j=1,2,\dots,N$ , donde  $N_s$  es el número de pruebas de infiltración; r son los factores de escala y los parámetros con asterisco corresponden al suelo de referencia.

De la ecuación (11) se infiere:

$$K_j \lambda_j^2 = K_s \lambda_*^2 = \Omega_f \tag{12}$$

donde el parámetro  $\Omega_f [L^3 T^{-1}]$  es una constante característica de la región estudiada. La ecuación permite reducir el número de

where parameter  $\Omega_f [L^3 T^{-1}]$  is a constant characteristic of the study region. Equation (12) allows reducing the number of unknown parameters of  $2N_s$  to  $N_s+1$  (Zataráin *et al.*, 2003). Because hydraulic conductivity at saturation is independent of the water depth over the soil surface and of the initial condition, the scaling provided by equation (12) should be written as:

$$K_j h_{fj}^2 = K_s h_{fs}^2 = \Omega \tag{13}$$

where the new regional parameter  $\Omega$  is estimated considering the definition of parameter  $\lambda$ , from:

$$(\sqrt{K_{s*}})h_{f*} = \sqrt{\Omega_f} / (\theta_s - \theta_o) - (\sqrt{K_{s*}})\bar{h} = \sqrt{\Omega}.$$



parámetros desconocidos de  $2N_s$  a  $N_s+1$  (Zataráin *et al.*, 2003). Puesto que la conductividad hidráulica a saturación es independiente de la carga de agua sobre la superficie del suelo y de la condición inicial, el escalamiento proporcionado por la ecuación (12) debe ser escrito como:

$$K_y h_{fj}^2 = K_s h_{fp}^2 = \Omega \quad (13)$$

donde el nuevo parámetro regional  $\Omega$  se estima considerando la definición del parámetro  $\lambda$ , a partir de:

$$(\sqrt{K_{s*}})h_{f*} = \sqrt{\Omega_f} / (\theta_s - \theta_o) - (\sqrt{K_{s*}})\bar{h} = \sqrt{\Omega}.$$

Fuentes (1992)<sup>4</sup> sugirió que el suelo de referencia sea construido de manera que la conductividad hidráulica a saturación del suelo de referencia sea igual a la media geométrica, es decir:

$$\ln(K_{s*}) = \frac{1}{N_s} \sum_{j=1}^{N_s} \ln(K_{sj}); \quad \mu_\tau = \frac{1}{N_s} \sum_{j=1}^{N_s} \ln(r_j) = 0 \quad (14)$$

donde  $\mu_\tau$  es la media aritmética de los logaritmos de los factores de escala:  $\tau = \ln(r)$ .

El ajuste de los datos experimentales escalados y la función de Green y Ampt con los parámetros del suelo de referencia mostraron la aplicabilidad de la teoría de los medios similares a la información experimental (Figura 2).

Datos experimentales (Nielsen *et al.*, 1973; Warrick y Amoozegard-Fard, 1979; Sharma *et al.*, 1980; Vauclin, 1982) muestran que es válido considerar que la variable  $\tau = \ln(r)$  muestra distribución de Gauss. Considerando la normalización definida por la ecuación (14) la densidad de probabilidad  $p(\tau)$  y la probabilidad acumulada  $F(\tau)$  gaussianas se escriben como sigue:

$$p(\tau) = \frac{1}{\sigma_\tau \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\tau^2}{2\sigma_\tau^2}\right] \quad (15)$$

$$F(\tau) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \frac{\tau}{\sigma_\tau \sqrt{2}} \right] \quad (16)$$

Fuentes (1992)<sup>4</sup> suggested that the reference soil be constructed in such a way that its hydraulic conductivity to saturation be equal to the geometric mean; that is:

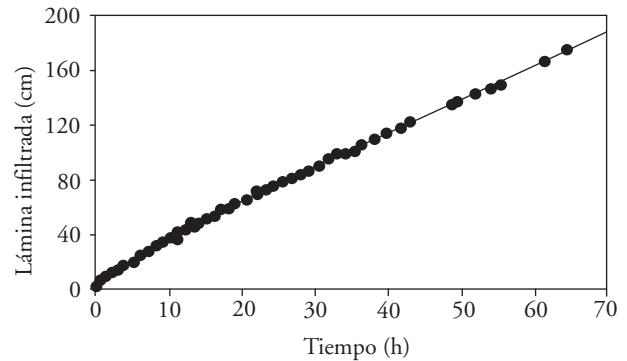
$$\ln(K_{s*}) = \frac{1}{N_s} \sum_{j=1}^{N_s} \ln(K_{sj}); \quad \mu_\tau = \frac{1}{N_s} \sum_{j=1}^{N_s} \ln(r_j) = 0 \quad (14)$$

where  $\mu_\tau$  is the arithmetic mean of the logarithms of the scale factors:  $\tau = \ln(r)$ .

The fit of the scaled experimental data and the Green and Ampt function to the parameters of the reference soil show the applicability of the theory of similar media to the experimental information (Figure 2).

Experimental data (Nielsen *et al.*, 1973; Warrick and Amoozegard-Fard, 1979; Sharma *et al.*, 1980; Vauclin, 1982) show that it is valid to consider that the variable  $\tau = \ln(r)$  exhibits Gauss distribution. Considering the normalization defined by equation (14), the Gaussian probability density  $p(\tau)$  and accumulated probability  $F(\tau)$  are written as follows:

$$p(\tau) = \frac{1}{\sigma_\tau \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\tau^2}{2\sigma_\tau^2}\right] \quad (15)$$



**Figura 2.** Datos experimentales escalados y función de Green y Ampt con parámetros del suelo de referencia (Zataráin *et al.*, 2003).

**Figure 2.** Scaled experimental data and Green and Ampt function with parameters of the reference soil (Zataráin *et al.*, 2003).

<sup>4</sup>Fuentes, C. 1992. Approche fractale des transferts hydriques dans les sols non-saturés. Thèse Docteur, L'Université Joseph Fourier de Grenoble. France. 267 p.

donde  $\sigma_\tau$  es la desviación estándar del logaritmo de los factores de escala y  $\text{erf}(x)$  denota la función error.

En el escalamiento realizado por Zataráin *et al.* (2003) obtuvieron los siguientes parámetros del suelo de referencia:  $K_s=2.33 \text{ cmh}^{-1}$  y  $\lambda_s=7.71 \text{ cm}$ , y regional:  $\Omega=5.84 \text{ cm}^3\text{h}^{-1}$ . La variabilidad espacial se refleja en los valores de los factores de escala, con media  $\langle r \rangle=1.0231$  y desviación estándar  $\langle \sigma_r \rangle=0.2217$ . Al suponer que efectivamente la variable  $\tau=\ln(r)$  sigue una distribución de Gauss, los autores determinaron  $\sigma_\tau=0.2207$ . La conductividad hidráulica saturada tuvo media  $\langle K_s \rangle=2.55 \text{ cmh}^{-1}$  y desviación estándar  $\langle \sigma_{K_s} \rangle=1.08 \text{ cmh}^{-1}$ , lo cual ilustra también la variabilidad espacial de las propiedades hidrodinámicas a lo largo de la melga. La desviación estándar de la conductividad hidráulica saturada en la melga aquí estudiada es del mismo orden de magnitud que los de la literatura (Kutilek y Nielsen, 1994).

Para analizar la estructura espacial del logaritmo de los factores de escala se introducen el autocorrelograma y el semivariograma. El autocorrelograma o función de autocorrelación de un proceso  $z(x)$ , con estacionariedad de segundo orden y media  $\mu$ , se define como:

$$C(h)=E\{[z(x+h)-\mu][z(x)-\mu]\} \quad (17)$$

donde  $h$  es la interdistancia entre dos puntos. El coeficiente de autocorrelación se define como  $\rho(h)=C(h)/\sigma^2$ , con  $\sigma^2=C(0)$  la varianza, y es tal que  $|\rho(h)|\leq 1$ . En el caso de este estudio  $z(x)=\tau(x)$ ,  $\sigma^2=\sigma_\tau^2$  y  $\mu=\mu_\tau=0$ .

El semivariograma es definido como:

$$\gamma(h)=1/2 \text{ Var } \{z(x+h)-z(x)\}=C(0)-C(h) \quad (18)$$

De las ecuaciones (17) y (18) se infiere que el semivariograma dividido entre la varianza está relacionado con el coeficiente de autocorrelación:

$$\gamma^*(h)=\frac{\gamma(h)}{\sigma^2}=1-\rho(h) \quad (19)$$

Para calcular el semivariograma o autocorrelograma se utilizó el siguiente estimador insesgado:

$$\gamma(h)=\frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} z(x_i+h)-z(x_i)^2 \quad (20)$$

donde  $N(h)$  es el número de pares de puntos separados por un distancia  $h$ .

$$F(\tau)=\frac{1}{2} \left[ 1 + \text{erf} \frac{\tau}{\sigma_\tau \sqrt{2}} \right] \quad (16)$$

where  $\sigma_\tau$  is the standard deviation of the logarithm of the scale factors, and  $\text{erf}(x)$  denotes the error function.

In the scaling conducted by Zataráin *et al.* (2003), the following parameters of the reference soil were obtained:  $K_s=2.33 \text{ cmh}^{-1}$  and  $\lambda_s=7.71$ , and regional:  $\Omega=5.84 \text{ cm}^3\text{h}^{-1}$ . Spatial variability is reflected in the values of the scale factors, with mean  $\langle r \rangle=1.0231$  and standard deviation  $\langle \sigma_r \rangle=0.2217$ . By assuming that, in effect, the variable  $\tau=\ln(r)$  follows a Gauss distribution, we determined that  $\sigma_\tau=0.2207$ . Saturated hydraulic conductivity had a mean  $\langle K_s \rangle=2.55 \text{ cmh}^{-1}$  and standard deviation  $\langle \sigma_{K_s} \rangle=1.08 \text{ cmh}^{-1}$ , which also illustrates the spatial variability of the hydrodynamic properties along the length of the border strip. The standard deviation of the saturated hydraulic conductivity in the border strip studied here is of the same order of magnitude as those found in the literature (Kutilek and Nielsen to analyze the spatial structure of the logarithm of the scale factors, the autocorrelogram and the semivariogram are introduced. The autocorrelogram, or function of autocorrelation of a process  $z(x)$ , with second order stationarity and mean  $\mu$ , is defined as:

$$C(h)=E\{[z(x+h)-\mu][z(x)-\mu]\} \quad (17)$$

where  $h$  is the distance between two points. The autocorrelation coefficient is defined as  $\rho(h)=C(h)/\sigma^2$  with the variance  $\sigma^2=C(0)$ , and is such that  $|\rho(h)|\leq 1$ . In the case of this study,  $z(x)=\tau(x)$ ,  $\sigma^2=\sigma_\tau^2$  and  $\mu=\mu_\tau=0$ .

The semivariogram is defined as:

$$\gamma(h)=1/2 \text{ Var } \{z(x+h)-z(x)\}=C(0)-C(h) \quad (18)$$

From equations (17) and (18) it is inferred that the semivariogram divided by the variance is related to the autocorrelation coefficient:

$$\gamma^*(h)=\frac{\gamma(h)}{\sigma^2}=1-\rho(h) \quad (19)$$

To calculate the semivariogram or auto-correlogram, the following unbiased estimator was used:

$$\gamma(h)=\frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} z(x_i+h)-z(x_i)^2 \quad (20)$$

Para modelar el semivariograma empírico se aplicó la hipótesis markoviana de primer orden que resulta del coeficiente de autocorrelación:

$$\rho(h)=a \exp(-h/\lambda_m) \tag{21}$$

donde  $\lambda_m$  es la longitud de autocorrelación. Para los datos de la melga estudiada, Zataráin *et al.* (2003) supusieron  $\rho(0)=a=1$ , que permite estimar una longitud de autocorrelación  $\lambda_m=10$ .

**Las propiedades efectivas**

Para establecer las condiciones en las que la fase de avance puede describirse por características efectivas, Zataráin *et al.* (2003) consideraron: a) la infiltración tiene un régimen permanente en tiempos muy largos, el flujo de Darcy es igual a la conductividad hidráulica a saturación ( $K_s$ ); b) la media ( $\bar{K}_s$ ) existe; y c) la variabilidad espacial de las características hidrodinámicas en la fase de avance se manifiesta plenamente en los tiempos muy largos, es decir, cuando el régimen de flujo se aproxima al régimen permanente.

Un régimen permanente de la infiltración permite establecer:  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_f(t) = x_{max}$  y  $\lim_{t \rightarrow \infty} U_f(t) = 0$ , y  $U_f(t)=dx_f/dt$  [ $LT^{-1}$ ] es la velocidad de avance. Cuando  $t \rightarrow \infty$ , la onda de Saint-Venant está completamente establecida, el tirante ya no depende del tiempo  $\partial h/\partial t=0$  y  $V_1=K_s$ , la ecuación (1) se reduce a:  $dq/dx+K_s(x)=0$ , cuya integración conduce a ( $q=0$  en  $x=x_{max}$ ):

$$q(x) = \int_x^{x_{max}} K_s(\bar{x}) d\bar{x} \tag{22}$$

y en la entrada de la melga ( $x=0, q=q_0$ ) se tiene:

$$q_0 = \int_x^{x_{max}} K_s(\bar{x}) d\bar{x} \tag{23}$$

De acuerdo con el teorema del valor medio de las integrales se define la media sobre el intervalo  $[0, x_{max}]$ , como:

$$\bar{K}_s(x_{max}) = \frac{1}{x_{max}} \int_x^{x_{max}} K_s(\bar{x}) d\bar{x} \tag{24}$$

es decir:

where  $N(h)$  is the number of pairs of points separated by a distance  $h$ .

To model the empirical semivariogram, we applied the first order Markovian hypothesis, which results from the autocorrelation coefficient:

$$\rho(h)=a \exp(-h/\lambda_m) \tag{21}$$

where  $\lambda_m$  is the length of autocorrelation. For the data of the border strip studied, Zataráin *et al.* (2003) assumed that  $\rho(0)=a=1$ , which permits estimating a length of autocorrelation  $\lambda_m=10$ .

**Effective properties**

To establish the conditions in which the advance phase can be described by effective characteristics, Zataráin *et al.* (2003) considered that a) infiltration has a steady regime over long times; Darcy flow is equal to saturated hydraulic conductivity ( $K_s$ ); b) the mean ( $\bar{K}_s$ ) exists; and c) spatial variability of the hydrodynamic characteristics in the advance phase is manifested fully over very long times, that is, when the flow regime approximates the steady regime.

A steady infiltration regime allows establishment of  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_f(t) = x_{max}$  and  $\lim_{t \rightarrow \infty} U_f(t) = 0$ , and  $U_f(t)=dx_f/dt$  [ $LT^{-1}$ ] is the advance rate. When  $t \rightarrow \infty$ , the Saint-Venant wave is completely established, the depth no longer depends on time  $\partial h/\partial t=0$  and  $V_1=K_s$ , equation (1) is reduced to  $dq/dx+K_s(x)=0$ , whose integration leads to ( $q=0$  in  $x=x_{max}$ ):

$$q(x) = \int_x^{x_{max}} K_s(\bar{x}) d\bar{x} \tag{22}$$

and at the entrance of the border strip ( $x=0, q=q_0$ ) we have:

$$q_0 = \int_x^{x_{max}} K_s(\bar{x}) d\bar{x} \tag{23}$$

According to the mean value theorem for integrals, the mean over the interval  $[0, x_{max}]$  is defined as:

$$\bar{K}_s(x_{max}) = \frac{1}{x_{max}} \int_x^{x_{max}} K_s(\bar{x}) d\bar{x} \tag{24}$$

$$q_o = \bar{K}_s(x_{\max})x_{\max} \quad (25)$$

La ecuación (25) indica que para un gasto de riego dado existe un valor medio de la conductividad hidráulica que define una posición del frente de avance máximo. Para una melga de longitud  $L$ , el gasto mínimo que asegura la llegada del agua al extremo final se deduce de la ecuación (25):

$$q_m = \bar{K}_s(L)L \quad (26)$$

Al considerar que la media de la conductividad es una constante sobre el intervalo  $[0, L]$ ,  $\bar{K}_s(L) = \langle K_s \rangle$ , la representación de la fase de avance por características hidrodinámicas efectivas, es decir independientes del gasto de riego, es posible para gastos superiores al proporcionado por la ecuación (26).

### Generación de campos correlacionados

La generación de un campo correlacionado de la conductividad hidráulica consiste en producir realizaciones de la misma que presenten ciertas características impuestas. Para el caso de la hipótesis de estacionariedad de segundo orden es suficiente mantener la media y el semivariograma (Journel y Huijbregts, 1978).

Los métodos fundamentados en el análisis espectral permiten generar una realización  $z(x)$  en cualquier punto del espacio (Rice, 1954; Shinozuka y Jan, 1972; Mejía y Rodríguez-Iturbe, 1974). El análisis espectral de una función aleatoria  $z(x)$  asocia a la función de autocovarianza  $C(h)$  su transformada de Fourier, llamada densidad espectral  $S(\omega)$ , donde  $\omega$  es la frecuencia angular, a saber:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega h} C(h) dh \quad (27)$$

Por analogía con el caso de un fenómeno temporal aleatorio, en el caso de funciones aleatorias espaciales, se utiliza un generador espectral para la simulación de la función, es decir:

$$z(x) = \sum_{n=1}^{Nh} c_n \cos(\omega_n x + \varphi_n) \quad (28)$$

donde  $Nh$  es el número de armónicas;  $c_n$  es un coeficiente de ponderación que permite la restitución de la función de densidad espectral de la señal y de su varianza;  $\omega_n$  son las frecuencias de la señal;  $\varphi_n$  son los ángulos de fase aleatorios distribuidos uniformemente entre  $0$  y  $2\pi$ ;  $\cos(\omega_n x + \varphi_n)$  es un modelo aleatorio de fase, estacionario de orden dos, ergódico, de media nula y varianza igual a un medio.

That is:

$$q_o = \bar{K}_s(x_{\max})x_{\max} \quad (25)$$

Equation (25) indicates that, for a given irrigation flow rate, there is a mean value of hydraulic conductivity that defines a position of the maximum advance front. For a border strip of  $L$  length, the minimum flow rate that assures that the water will arrive at the end is deduced from equation:

$$q_m = \bar{K}_s(L)L \quad (26)$$

Considering that the conductivity mean is a constant over the interval  $[0, L]$ ,  $\bar{K}_s(L) = \langle K_s \rangle$ , representation of the advance phase with effective hydrodynamic characteristics, that is, regardless of the intake flow, is possible for flows larger than that provided by equation (26).

### Generation of correlated fields

Generation of a correlated field of hydraulic conductivity consists of producing realizations of the same that have certain imposed characteristics. For the case of the second order stationarity hypothesis, it is sufficient to maintain the mean and the semivariogram (Journel and Huijbregts, 1978).

The methods grounded in spectral analysis permit generating a realization  $z(x)$  at any point in space (Rice, 1954; Shinozuka and Jan, 1972; Mejía and Rodríguez-Iturbe, 1974). Spectral analysis of a random function  $z(x)$  associates the autocovariance function  $C(h)$  to its Fourier transform, called spectral density  $S(\omega)$ , where  $\omega$  is the angular frequency, namely:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega h} C(h) dh \quad (27)$$

By analogy to the case of a random temporal phenomenon, in the case of spatial random functions, a spectral generator is used to simulate the function, that is:

$$z(x) = \sum_{n=1}^{Nh} c_n \cos(\omega_n x + \varphi_n) \quad (28)$$

where  $Nh$  is the number of harmonics;  $c_n$  is a coefficient of ponderation that permits the restitution of the spectral density function of the signal and its variance;  $\omega_n$  are the signal frequencies;

La función de autocovarianza que resulta de la introducción de la ecuación (28) en la ecuación (17) es la siguiente:

$$C(h) = \sum_{n=1}^{Nh} \frac{c_n^2}{2} \cos(\omega_n h) \quad (29)$$

donde  $\omega_n$  son las frecuencias de cada una de las armónicas.

De la ecuación (29) se obtiene la siguiente expresión de la varianza,  $C(0)=\sigma^2$ :

$$\sigma^2 = \sum_{n=1}^{Nh} \frac{c_n^2}{2} \quad (30)$$

Entre los métodos propuestos para estimar el coeficiente  $c_n$  está el de Mejía y Rodríguez-Iturbe (1974), que suponen todos los coeficientes iguales y obtienen  $c_n = \sigma \sqrt{2/Nh}$ , se conserva la varianza pero no todo el semivariograma (Muñoz-Pardo, 1987)<sup>5</sup>.

En nuestro estudio se seleccionó el método de Shinozuka y Jan (1972) porque conserva la estructura espacial y la varianza. De la transformada inversa de Fourier de la densidad espectral, ecuación (27), se deduce (Falconer, 1990):

$$C(h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos(\omega h) d\omega \quad (31)$$

que se discretiza como sigue:

$$C(h) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{Nh} S(\omega_n) \Delta\omega \cos(\omega_n h) \quad (32)$$

y como  $C(0)=\sigma^2$ , se deduce:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{Nh} S(\omega_n) \Delta\omega \quad (33)$$

donde  $\Delta\omega=2\Omega/Nh$  de suerte que  $-\Omega < \omega_n < \Omega$ .

La comparación de las ecuaciones (30) y (33) conduce a la siguiente expresión para calcular los coeficientes:

$\varphi_n$  are the random phase angles distributed uniformly between 0 and  $2\pi$ ;  $\cos(\omega_n x + \varphi_n)$  is a random phase model, second order stationary, ergodic, of null mean and variance equal to a half.

The autocovariance function that results from the introduction of equation (28) into equation (17) is the following:

$$C(h) = \sum_{n=1}^{Nh} \frac{c_n^2}{2} \cos(\omega_n h) \quad (29)$$

where  $\omega_n$  are the frequencies of each of the harmonics.

From equation (29), the following expression of the variance  $C(0)=\sigma^2$  is obtained:

$$\sigma^2 = \sum_{n=1}^{Nh} \frac{c_n^2}{2} \quad (30)$$

Among the methods proposed for estimating the coefficient  $c_n$  is that of Mejía and Rodríguez-Iturbe (1974), which assumes that all of the coefficients are equal and obtains  $c_n = \sigma \sqrt{2/Nh}$  the variance is conserved, but not all of the semivariogram (Muñoz-Pardo, 1987)<sup>5</sup>.

In our study, the method of Shinozuka and Jan (1972) was chosen because it conserves the spatial structure and the variance. From the inverse Fourier transform of spectral density, equation (27) is deduced (Falconer, 1990):

$$C(h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos(\omega h) d\omega \quad (31)$$

which is discretized as follows:

$$C(h) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{Nh} S(\omega_n) \Delta\omega \cos(\omega_n h) \quad (32)$$

and as  $C(0)=\sigma^2$ , we deduce that:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{Nh} S(\omega_n) \Delta\omega \quad (33)$$

<sup>5</sup>Muñoz-Pardo, J. F. 1987. Approche géostatistique de la variabilité spatiale des milieux géophysiques. Application à l'échantillonnage de phénomènes bidimensionnels par simulation d'une fonction aléatoire. Thèse Docteur-Ingénieur, L'Université Scientifique, Technologique et Médicale de Grenoble. 254 p.

$$c_n = \sqrt{\frac{2}{\pi} S(\omega_n) \Delta\omega} \quad (34)$$

### RESULTADOS Y DISCUSIÓN

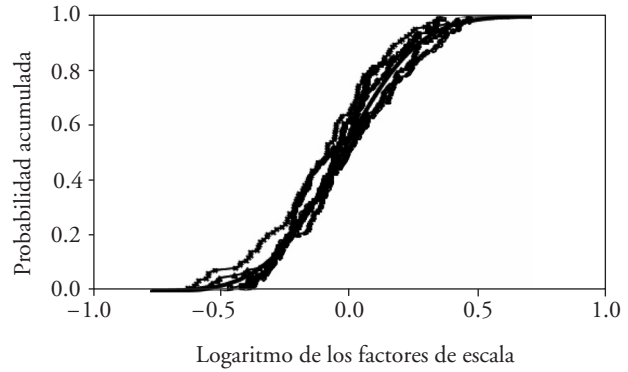
Las condiciones generales para representar las propiedades hidrodinámicas del suelo con parámetros efectivos para simular el riego por gravedad se analizaron con la generación sintética de parámetros. Al inicio, se generaron campos correlacionados de la conductividad hidráulica, a través del logaritmo de los factores de escala y el método de Shinozuka y Jan (1972). Los valores se introdujeron en el modelo hidrológico de simulación del frente de avance. Después, los parámetros probabilísticos se utilizaron para generar los parámetros de la infiltración aleatoria en los suelos, considerando que la condición general para utilizar propiedades hidrodinámicas efectivas en el riego por gravedad implica que la distribución probabilística de las propiedades hidrodinámicas sea única en el espacio.

Las realizaciones conservaron la varianza y el semivariograma, para ejemplificar se obtuvieron los resultados con cinco campos correlacionados generados (Figura 3) y se observó la conservación de la distribución probabilística del logaritmo de los factores de escala. El comportamiento de los semivariogramas de los campos generados fue similar al semivariograma teórico dentro de la escala de correlación (Figura 4).

Los valores de los factores de escala de los cinco campos correlacionados (Figura 5) se introdujeron en el modelo de simulación del avance del riego.

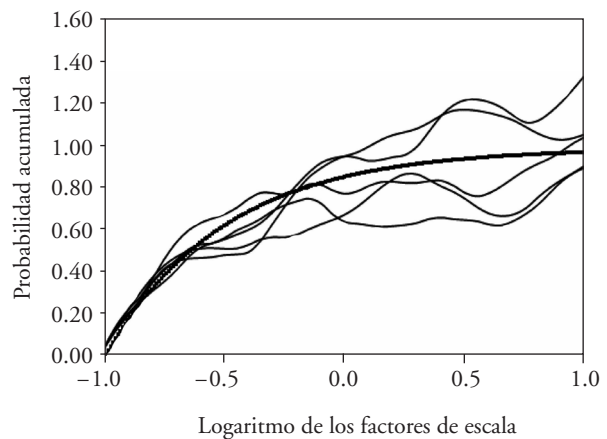
Los factores de escala de los campos correlacionados se introdujeron en el modelo de simulación del avance del riego con los valores de referencia  $K_s^* = 2.33 \text{ cmh}^{-1}$  y  $\lambda^* = 7.71 \text{ cm}$ , con los que se obtuvo  $h_f^* = 27 \text{ cm}$ ; la pendiente de la melga fue  $J_0 = 0.002 \text{ mm}^{-1}$  y el contenido de humedad a saturación  $\theta_s = 0.4865 \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-3}$ ; la humedad inicial  $\theta_0 = 0.2479 \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-3}$  y el gasto unitario  $q_0 = 0.032 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \text{ m}^{-1}$ .

Para seleccionar los parámetros  $k$  y  $d$  de la ley de resistencia hidráulica proporcionada por la ecuación (6) se calculó el número de Reynolds:  $Re = Uh/v = q/v$ , para estimar el tipo de régimen de flujo; con  $v = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  se obtuvo  $Re = 3200$ , que permitió utilizar la ley de Poiseuille ( $d = 1$ ) del régimen laminar (Sotelo-Ávila, 1997). El valor medio medido del tirante en la cabecera de la melga fue  $h_0 = 2.07 \text{ cm}$ . Con las ecuaciones (8) y (9) se obtuvo  $k \cong 1/54$  y  $\bar{h} \cong 1.38 \text{ cm}$ .



**Figura 3. Probabilidad acumulada del logaritmo de los factores de escala en la melga Montecillo y en los campos correlacionados generados.**

**Figure 3. Accumulated probability of the logarithm of the scale factors in the Montecillo border strip and in generated correlated fields.**



**Figura 4. Semivariogramas teórico y de los campos correlacionados del logaritmo de los factores de escala.**

**Figure 4. Theoretical semivariograms and of the correlated fields of the logarithm of the scale factors.**

where  $\Delta\omega = 2\Omega/Nh$  in such a way that  $-\Omega < \omega_n < \Omega$ .

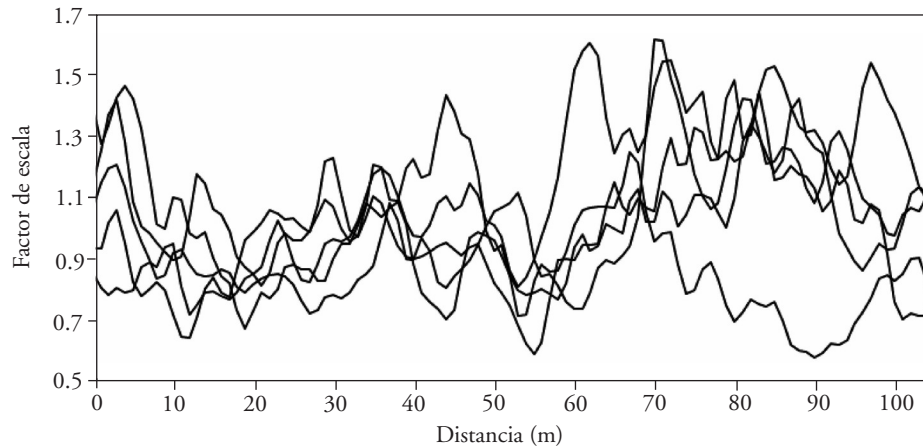
Comparison of equations (30) and (33) leads to the following expression to calculate the coefficients:

$$c_n = \sqrt{\frac{2}{\pi} S(\omega_n) \Delta\omega} \quad (34)$$

### RESULTS AND DISCUSSION

The general conditions for representing soil hydrodynamic properties with effective parameters





**Figura 5. Distribución espacial de los cinco campos de factores de escala generados.**  
**Figure 5. Spatial distribution of the five fields of generated scale factors.**

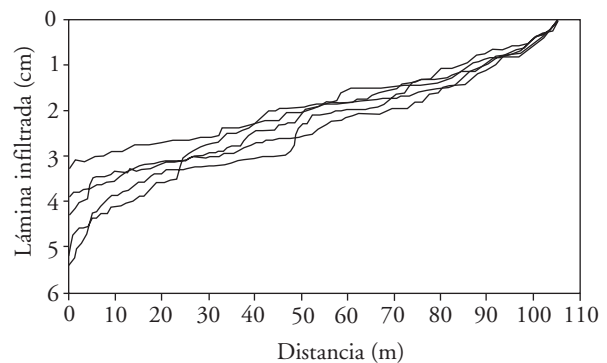
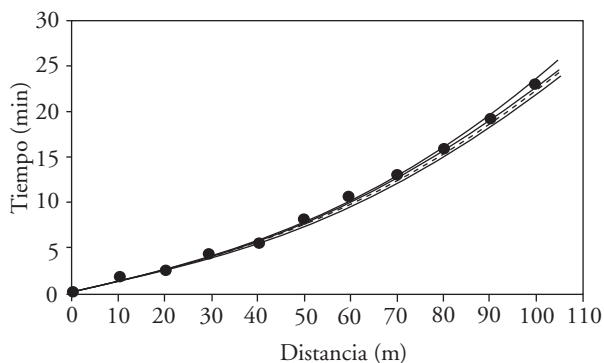
El frente de avance simulado con los cinco campos correlacionados fue semejante al de los datos experimentales (Figura 6).

A pesar de que los campos correlacionados presentan variabilidad espacial, que se refleja en el perfil de las láminas infiltradas, las simulaciones mostraron prácticamente el mismo comportamiento del avance del riego. Así, la aplicación de los campos correlacionados permite contribuir al análisis de las condiciones para aplicar métodos inversos en la caracterización de suelos con eventos de riego.

Los parámetros probabilísticos también se utilizaron para estudiar la condición general para representar las propiedades hidrodinámicas por propiedades

to simulate surface irrigation were analyzed by synthetic parameter generation. Initially, correlated hydraulic conductivity fields were generated using the logarithm of the scale factors and the Shinozuka and Jan (1972) method. The values were introduced into the hydrological model simulating the advance front. Then, the probabilistic parameters were used to generate parameters of random infiltration in the soils, considering that the general condition for using effective hydrodynamic properties in surface irrigation implies that the probabilistic distribution of the hydrodynamic properties are unique in space.

The realizations conserve the variance and the semivariogram. To illustrate, results were obtained



**Figura 6. Avance e infiltración en la melga Montecillo con campos correlacionados de la conductividad hidráulica a través del logaritmo de los factores de escala.**

**Figure 6. Advance and infiltration in the Montecillo crop bed with correlated fields of hydraulic conductivity using the logarithm of scale factors.**

efectivas. Esta condición implica que la distribución probabilística de las propiedades hidrodinámicas sea única en el espacio. La modelación del avance se realiza variando el número de suelos desde dos hasta cien. Para cada valor del número de suelos se realizan al menos diez repeticiones de la modelación del avance. En cada repetición se generan aleatoriamente los factores de escala cuyo número corresponde al número de suelos, es decir, cada suelo está representado por su factor de escala.

Para obtener los factores de escala se generaron aleatoriamente los valores de probabilidad para los suelos y con la función de probabilidad acumulada se obtuvieron los valores del logaritmo de los factores de escala. El mismo suelo de referencia que en los casos anteriores fue utilizado. Los valores se ubicaron, conforme se generaron, sobre la melga de 100 m y discretizada para la modelación en 100 nodos. El gasto de riego fue  $3.2 \text{ ls}^{-1}\text{m}^{-1}$ . El número de nodos por suelo resultó de dividir el número total de nodos entre el número de suelos.

En una melga con dos suelos de características hidrodinámicas contrastantes, una mitad correspondió a un suelo arcilloso ( $r=1.434$ ) y la otra mitad a un suelo arenoso ( $r=0.678$ ). En el primer caso el suelo arcilloso se colocó al inicio de la melga y para el segundo el suelo arenoso se colocó al inicio. El tiempo de avance fue mayor en el segundo caso, debido a que el volumen infiltrado fue mayor (Figura 7).

En la modelación con números de suelos 20, 50 y 100, se observó que al aumentar el número de suelos las curvas de avance fueron más similares (Figuras 8, 9 y 10). Al incrementarse el número de suelos el tiempo total de avance osciló convergentemente a un valor único (Figura 11).

La modelación con dos suelos, intercambiando su posición mostró gran diferencia en los tiempos de avance, y con el incremento del número de suelos el tiempo de avance convergió a un valor único. Esto confirmó que para la modelación de la fase de avance en el riego por gravedad las propiedades hidrodinámicas efectivas existen cuando la distribución de probabilidad de las mismas es única.

## CONCLUSIONES

El análisis de las condiciones en las que la fase de avance en el riego por gravedad puede ser modelada con propiedades hidrodinámicas efectivas se abordó reproduciendo la variabilidad espacial de la conduc-

with five generated correlated fields (Figure 3) and we observed that the probabilistic distribution of the logarithm of the scale factors was conserved. Behavior of the semivariograms of the generated fields was similar to the theoretical semivariogram within the scale of correlation (Figure 4).

The values of the scale factors of the five correlated fields (Figure 5) were introduced into the irrigation advance simulation model.

The scale factors of the correlated fields were introduced into the irrigation advance simulation model with the reference values  $K_s^*=2.33 \text{ cmh}^{-1}$  and  $\lambda^*=7.71$ , with which  $h_f^*=27 \text{ cm}$  was obtained. The slope of the border strip was  $J_0=0.002 \text{ mm}^{-1}$ , and saturated water content was  $\theta_s^*=0.4865 \text{ cm}^3\text{cm}^{-3}$ ; initial moisture was  $\theta_0=0.2479 \text{ cm}^3\text{cm}^{-3}$ , and unitary flow was  $q_0=0.032 \text{ m}^3\text{s}^{-1}\text{m}^{-1}$ .

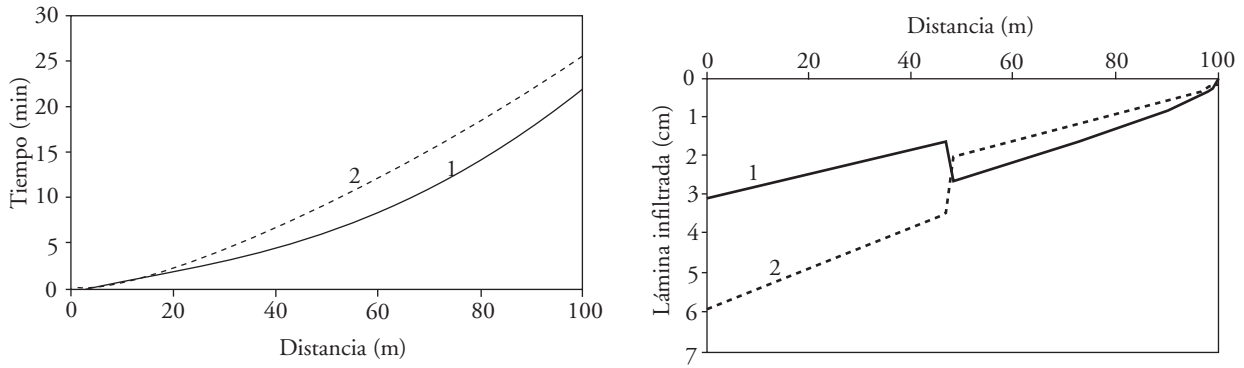
To select the parameters  $k$  and  $d$  of the law of hydraulic resistance, with equation (6) the Reynolds number was calculated  $Re=Uh/v=q/v$  to estimate the type of flow regime. With  $v=10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ,  $Re=3200$  was obtained, allowing use of the Law of Poiseuille ( $d=1$ ) of the depth regime (Sotelo-Ávila, 1997). The average value of the depth at the head of the border strip was  $h_0=2.07 \text{ cm}$ . With equations (8) and (9),  $k \cong 1/54$  y  $\bar{h} \cong 1.38 \text{ cm}$  were obtained.

The advance front simulated with the five correlated fields was similar to experimental data (Figure 6).

Despite the spatial variability of the correlated fields, reflected in the profile of infiltrated depths, the simulation of irrigation advance showed practically the same behavior. Thus, the application of correlated fields permits contributing to analysis of conditions for applying inverse methods in the characterization of soils with irrigation events.

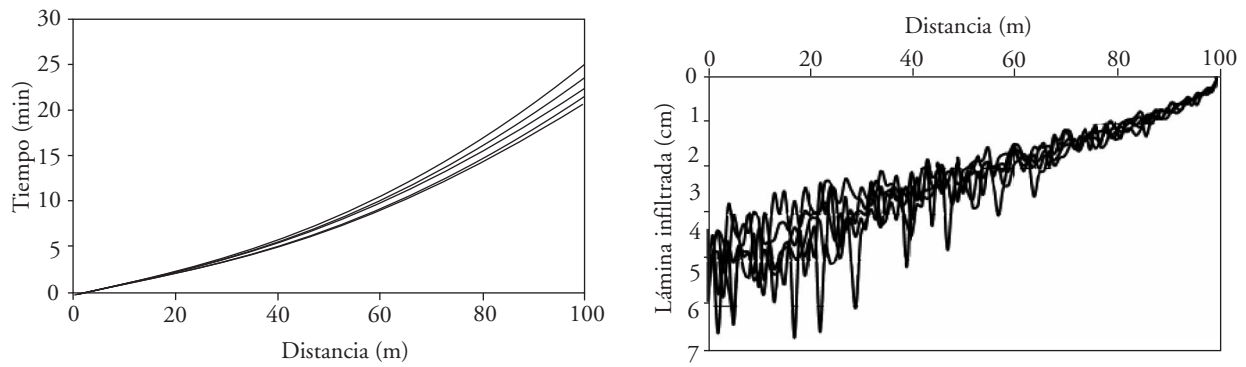
The probabilistic parameters were also used to study the general conditions that represent hydrodynamic properties by effective properties. This condition implies that the probabilistic distribution of hydrodynamic properties is unique in space. Modeling the advance is done by varying the number of soils from two up to one hundred. For each value of the number of soils, at least 10 replications are done of the advance modeling. In each replication, scale factors, whose number corresponds to the number of soils, are generated randomly; that is, each soil is represented by its scale factor.

To obtain the scale factors, probability values for the soils were generated randomly and, with the



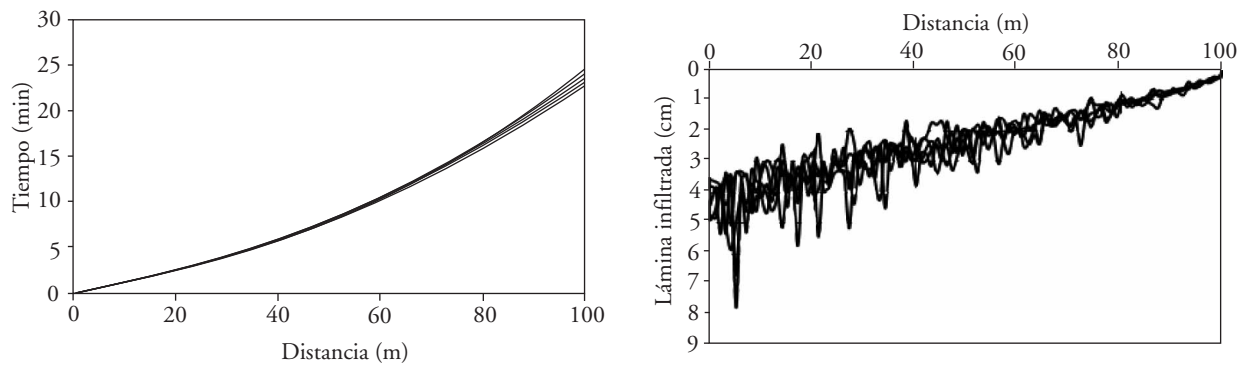
**Figura 7. Curva de avance y lámina infiltrada en una melga con dos combinaciones de suelos: 1) arcilloso-arenoso, y 2) arenoso-arcilloso.**

**Figure 7. Advance curve and infiltrated depth in a border strip with two soil combinations: 1) clay-sand and 2) sand-clay.**



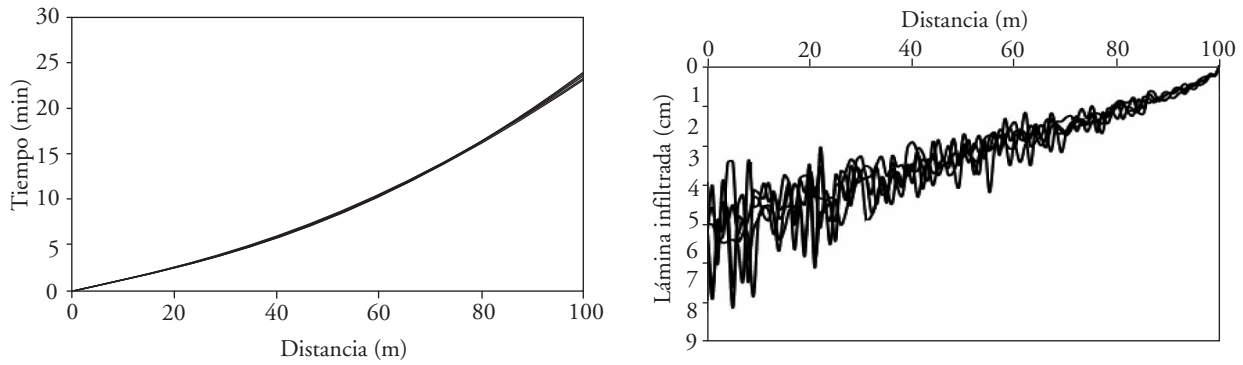
**Figura 8. Curva de avance y lámina infiltrada en una melga con veinte tipos de suelos.**

**Figure 8. Advance curve and infiltrated depth in a border strip with twenty soil types.**

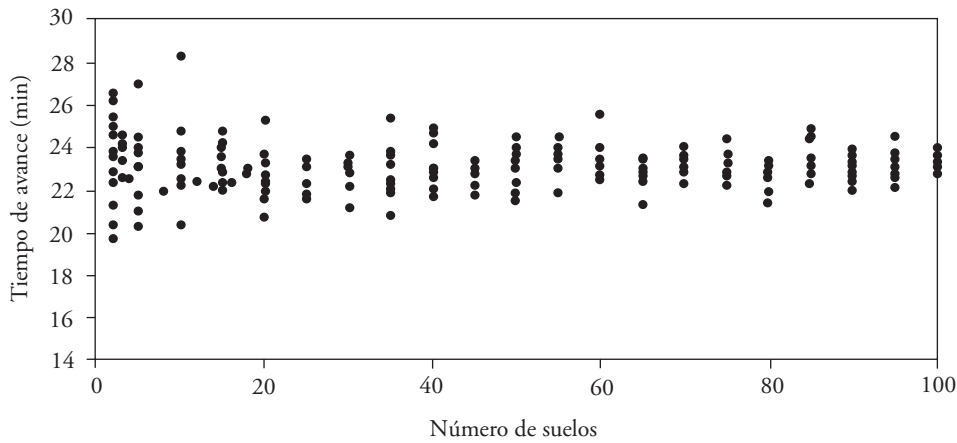


**Figura 9. Curva de avance y lámina infiltrada en una melga con cincuenta suelos.**

**Figure 9. Advance curve and infiltrated depth in a border strip with fifty soils.**



**Figura 10. Curva de avance y lámina infiltrada en una melga con cien suelos.**  
**Figure 10. Advance curve and infiltrated depth in a border strip with 100 soils.**



**Figura 11. Tiempo total de avance de riego obtenido a partir de la modelación y generación sintética de suelos.**  
**Figure 11. Total irrigation advance time obtained from modeling and synthetic generation of soils.**

tividad hidráulica saturada en dos formas. Una con la creación de campos correlacionados que conservan la distribución de probabilidad y la estructura espacial a través de un método fundamentado en el análisis espectral; y dos, con la generación aleatoria mediante la misma distribución de probabilidad. Con ambos procedimientos fue posible confirmar que es válido utilizar parámetros equivalentes de las propiedades hidrodinámicas de los suelos cuando la distribución de probabilidad es única en el espacio. Esta conclusión es importante ya que aún en suelos con variabilidad espacial pueden determinarse parámetros equivalentes que permiten predecir el flujo y distribución del agua en un evento de riego. Para tal

accumulated probability function, the logarithm values of the scale factors were obtained. The same reference soil as in previous cases was used. The values were placed, as they were being generated, over the 100 m border strip and discretized for modeling in 100 nodes. Intake flow rate was  $3.2 \text{ ls}^{-1}\text{m}^{-1}$ . The number of nodes per soil resulted from dividing the total number of nodes by the number of soils.

In a border strip with two soils with hydrodynamic contrasting characteristics, half the border strip was clay soil ( $r=1.434$ ) and the other half was sandy soil ( $r=0.678$ ). In the first case, the clay soil was placed at the beginning of the border strip, and for the second, sandy soil was placed at the beginning. Advance

efecto, pueden utilizarse métodos inversos con modelos basados en las ecuaciones de Barré de Saint-Venant para el flujo superficial y de Richards para el flujo subsuperficial, o con formas simplificadas de las mismas, a través de pruebas hidrodinámicas de riego y considerando los aspectos inherentes a los métodos inversos, los cuales implican la estimación de los parámetros minimizando una función objetivo con un algoritmo de optimización sobre las desviaciones entre las variables de flujo observadas y simuladas.

## LITERATURA CITADA

- Angulo-Jaramillo, R., J.-P. Vandervaere, S. Roulier, J.-L. Thony, J.-P. Gaudet, and M. Vauclin. 2000. Field measurement of soil surface hydraulic properties by disc and ring infiltrometers: A review and recent developments. *Soil Till. Res.* 55:1-29.
- Bautista, E., and T. S. Strelkoff. 2009. Soil and crop hydraulic properties in surface irrigation. *J. Irrig. Drain. Eng.* 135:523-524.
- Castanedo, V., H. Saucedo, y C. Fuentes. 2013. Comparación entre un modelo hidrodinámico completo y un modelo hidrológico en riego por melgas. *Agrociencia* 47: 209-223.
- Durner, W., U. Jansen, and S.C. Iden. 2008. Effective hydraulic properties of layered soils at the lysimeter scale determined by inverse modelling. *J. Soil Sci.* 59: 114-124.
- Falconer, K. 1990. *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley & Sons. England. 288 p.
- Fuentes, C., B. de León, H. Saucedo, J.-Y. Parlange, y A.C.D. Antonino. 2004. El sistema de ecuaciones de Saint-Venant y Richards del riego por gravedad: 1. La ley potencial de resistencia hidráulica. *Ingeniería Hidráulica en México* 19: 65-75.
- Green, W. H., and G. A. Ampt. 1911. Studies in soil physics, 1: the flow of air and water through soils, *J. Agric. Sci.* 4: 1-24.
- Journel, A. G. and Ch. J. Huijbregts. 1978. *Mining Geostatistics*. Academic Press, New York. 612 p.
- Jury, W. A., D. Or, Y. Pachepsky, H. Vereecken, J. W. Hopmans, L. R. Ahuja, B. E. Clothier, K. L. Bristow, G. J. Kluitenberg, P. Moldrup, J. Šimůnek, M. Th. van Genuchten, and R. Horton. 2011. Kirkham's legacy and contemporary challenges in soil physics research. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 75:1589-1601.
- Kutilek, M., and D. R. Nielsen. 1994. *Soil Hydrology*. CATENA VERLAG. Germany. 370 p.
- Lewis, M. R., and W. E. Milne. 1938. Analysis of border irrigation, *Trans. of ASAE* 19: 267-272.
- Mejía, G., and I. Rodríguez-Iturbe. 1974. On the synthesis of random fields from the spectrum: An application to the generation of hydrologic spatial processes. *Water Resour. Res.* 10: 705-711.
- Mesgouez, A., S. Buis, S. Ruy and G. Lefeuvre-Mesgouez. 2014. Uncertainty analysis and validation of the estimation of effective hydraulic properties at the Darcy scale. *J. Hydrol.* 512:303-314.
- Miller, E. E., and R. D. Miller. 1956. Physical theory for capillary flow phenomena. *J. Appl. Phys.* 27: 324-332.

time was higher in the second case due to the greater volume that infiltrated (Figure 7).

In modeling with 20, 50 and 100 soils, we observed that when the number of soils increased, the advance curves were more similar (Figures 8, 9 and 19). When the number of soils increased, total advance time oscillated, converging to a single value (Figure 11).

Modeling with two soils, interchanging their position, showed a large difference in advance times. With the increase in number of soils, advance time converged into a single value. This confirmed that, to model the advance phase in surface irrigation, effective hydrodynamic properties exist when their probability distribution is unique.

## CONCLUSIONS

Analysis of the conditions in which the advance phase in surface irrigation can be modeled with effective hydrodynamic properties was approached by reproducing spatial variability of saturated hydraulic conductivity in two ways. One, with the creation of correlated fields that conserve the probability distribution and spatial structure through a method grounded in spectral analysis; and two, with random generation using the same probability distribution. With both procedures, it was possible to confirm that it is valid to use equivalent parameters of hydrodynamic properties of the soils when the probability distribution is unique in space. This conclusion is important since even in soils with spatial variability, equivalent parameters can be determined to permit prediction of flow and distribution of water in an irrigation event. For this purpose, inverse methods can be used with models based on the equations of Barré de Saint-Venant for surface flow and of Richards for subsurface flow, or with their simplified forms using hydrodynamic irrigation tests and considering the aspects inherent to inverse methods, which involve estimation of parameters, minimizing one objective function with an optimization algorithm over the deviations between observed and simulated flow variables.

—End of the English version—

-----\*-----

- Nielsen, D. R., J. W. Biggar, and K. T. Erh. 1973. Spatial variability of field measured soil-water properties. *Hilgardia* 42: 215-259.
- Parlange, J.-Y., R. D. Braddock, I. Lisle, and R.E. Smith. 1982. Three parameter infiltration equation. *Soil Sci.* 111: 170-174.
- Parlange, J.-Y., R. Haverkamp, and J. Touma. 1985. Infiltration under ponded conditions: 1. Optimal analytical solution and comparison with experimental observations. *Soil Sci.* 139: 305-311.
- Rendón, L., C. Fuentes, y G. Magaña. 1997. Diseño del riego por gravedad. In: *Manual para el Diseño de Zonas de Riego Pequeñas*. Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, México.
- Rice, S. O. 1954. *Mathematical analyses of random noise. Selected papers on noise and stochastic processes*. N. WAX Dover, New York.
- Richards, L. A. 1931. Capillary conduction of liquids through porous mediums. *Physics* 1: 318-333.
- Saucedo, H., C. Fuentes, y M. Zavala. 2006. El sistema de ecuaciones de Saint-Venant y Richards del riego por gravedad: 3. verificación numérica de la hipótesis del tiempo de contacto en el riego por melgas. *Ing. Hidrául. Méx.* 21: 135-145.
- Sharma, M. L., G. A. Gardner, and C. G. Hunt. 1980. Spatial variability of infiltration in watershed. *J. Hydrol.* 45: 101-122.
- Shinozuka, M., and C. M. Jan. 1972. Digital simulation of random processes and its applications. *J. Sound. Vib.* 25: 111-128.
- Sotelo-Ávila, G. 1997. *Hidráulica general*. ed. Limusa, México. 561 p.
- Strelkoff, T.S., A.J. Clemmens, and E. Bautista. 2009b. Estimation of soil and crop hydraulic properties. *J. Irrig. Drain. Eng.* 135: 537-555.
- Vauclin, M. 1982. Méthodes d'étude de la variabilité spatiale des propriétés d'un sol. In: *Variabilité spatiale des processus de transfert dans les sols, Colloque S.H.F.-I.N.R.A.* 15: 9-43.
- Warrick, A. W., and A. Amoozegard-Fard. 1979. Infiltration and drainage calibration using a similar media concept. *Water Resour. Res.* 13: 355-362.
- Zhu, J., and B. Mohanty. 2006. Effective scaling factor for transient infiltration in heterogeneous soil. *J. Hydrol.* 319:96-108.
- Zataráin, F., C. Fuentes, L. Rendón, y M. Vauclin. 2003. Propiedades hidrodinámicas efectivas del suelo en el riego por melgas. *Ing. Hidrául. Méx.* 18: 5-15.