

# ECUACIONES DINÁMICAS DE ÍNDICE DE SITIO PARA *Tectona grandis* EN CAMPECHE, MÉXICO

## DYNAMIC SITE INDEX EQUATIONS FOR *Tectona grandis* AT CAMPECHE, MEXICO

Juan C. Tamarit-Urias<sup>1</sup>, Héctor M. De los Santos-Posadas<sup>1\*</sup>, Arnulfo Aldrete<sup>1</sup>, José R. Valdez-Lazalde<sup>1</sup>,  
Hugo Ramírez-Maldonado<sup>2</sup>, Vidal Guerra-De la Cruz<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Postgrado Forestal, Campus Montecillo, Colegio de Postgraduados. km 36.5 Carretera México-Texcoco. 56230. Montecillo, Texcoco, Estado de México. <sup>2</sup>Universidad Autónoma Chapingo. km 38.5 Carretera México-Texcoco, Chapingo. 56230. Chapingo, Estado de México. <sup>3</sup>Sitio Experimental Tlaxcala, CIR-Centro, INIFAP. km 2.5 Carretera Tlaxcala-Santa Ana. 90800. Col. Industrial, Tlaxcala, Tlaxcala. (hmsantos@colpos.mx).

### RESUMEN

Un modelo de crecimiento en altura dominante y su correspondiente expresión de índice de sitio, permiten estimar la productividad de la masa forestal y ayuda a definir el régimen de manejo silvícola. El objetivo del presente estudio fue desarrollar, con datos de parcelas permanentes, un modelo de crecimiento en altura dominante invariante a la edad de referencia para plantaciones de *Tectona grandis* L. f. (teca) en Campeche, México. Los modelos de crecimiento base usados fueron los de Korf, Chapman-Richards y Hossfeld IV, que se reformularon como ecuaciones en diferencia algebraica generalizada para definir las mejores estructuras de índice de sitio. Éstas se ajustaron bajo mínimos cuadrados con una estructura de datos de pares no traslapados. Para estimar el crecimiento en altura dominante y clasificar la productividad de las plantaciones, la ecuación dinámica tipo Chapman-Richards se seleccionó con base en la bondad de ajuste y similitud entre el patrón de curvas de crecimiento y las tendencias observadas. Para mejorar la precisión de las estimaciones esta ecuación se ajustó mediante efectos mixtos, corrigiéndose por heterocedasticidad y autocorrelación. El modelo seleccionado es flexible y describe un patrón de curvas polimórficas con asíntotas múltiples, característica deseable para modelar una variedad amplia de tendencias de crecimiento. Tres patrones específicos de crecimiento para los sitios de plantación analizados fueron detectados.

**Palabras clave:** teca, polimorfismo asintótico, tasa de crecimiento, clasificación de la productividad.

\*Autor responsable ❖ Author for correspondence.

Recibido: julio, 2013. Aprobado: febrero, 2014.

Publicado como ARTÍCULO en *Agrociencia* 48: 225-238. 2014.

### ABSTRACT

A dominant height growth model and corresponding site index expression, allows estimating the productivity of forests stands and helps define the silvicultural management regime. The aim of this study was to develop, using data from permanent plots, a base-age invariant growth model for dominant height for *Tectona grandis* L. f. (teak) plantations at Campeche, Mexico. The base growth models used were those of Korf, Chapman-Richards and Hossfeld IV, which were reformulated as generalized algebraic difference equations to define the best site index structures. They were fitted under least squares with a data structure of non-overlapping pairs. To estimate the dominant height growth and classify plantation productivity, the dynamic equation type Chapman-Richards was selected based on the goodness of fit and similarity between the pattern of growth curves and observed trends. To improve the accuracy of the estimates this equation was fitted as a mixed effects model, correcting for heteroscedasticity and autocorrelation. The selected model is flexible and describes a pattern of polymorphic curves with multiple asymptotes, desirable characteristic to model a wide variety of growth patterns. Three specific growth patterns for the analyzed planting sites were detected.

**Key words:** teak, asymptotic polymorphism, growth rate, productivity classification.

### INTRODUCTION

Estimate with certainty the potential productivity of a stand in terms of timber volume per unit area and per unit time is key in forest management. To assess this potential the forester carefully measures the dominant height

## INTRODUCCIÓN

Estimar con certidumbre la productividad potencial de un rodal en términos de volumen maderable por unidad de superficie y por unidad de tiempo es clave en el manejo forestal. Para evaluar este potencial el silvicultor mide cuidadosamente el crecimiento en altura dominante. En un rodal, la altura dominante es una de las variables menos afectadas por cambios en la densidad y por tratamientos silvícolas; además, está estrechamente relacionada con el volumen total, por lo que es un indicador de la productividad sencillo y fácil de evaluar (Clutter *et al.*, 1983). El patrón de crecimiento “localizado” en un rodal, referido como productividad del sitio, se puede expresar mediante un valor (índice de sitio) que refleja la altura que alcanzan los árboles dominantes (altura dominante) en una masa forestal particular, a una determinada edad. El índice de sitio, como indicador de la productividad, es un atributo fijo y estable a lo largo del tiempo en un rodal. Para diferenciar entre productividades de sitio es necesario construir familias de curvas de índice de sitio desde un patrón de altura dominante observado (Pretzsch, 2009).

El crecimiento en altura dominante ( $Y$ ) con respecto a la edad se modela con funciones que caracterizan el estado actual de la variable bajo estudio para determinar su condición pasada o futura. Las ecuaciones dinámicas son un caso especial de este tipo de funciones, donde la altura dominante se estima en función de la edad actual de la masa y las condiciones iniciales de edad y altura. Una forma de uso frecuente para generar ecuaciones dinámicas se basa en el enfoque de diferencia algebraica generalizada (DAG) desarrollado por Cieszewski y Bailey (2000), las cuales se obtienen expandiendo un modelo de crecimiento base, permitiendo que dos parámetros del modelo varíen con las condiciones específicas de la calidad de sitio, y así generar familias de curvas polimórficas con múltiples asíntotas; ésta es una propiedad deseable para describir el crecimiento en altura dominante y para clasificar la productividad por calidad de sitio (Cieszewski y Strub, 2008).

Una ecuación formulada en DAG para describir la altura dominante promedio y de índice de sitio es invariante con respecto a la edad de referencia y de ruta de proyección, lo que da consistencia en las

growth. In a stand, the dominant height is one of the variables less affected by changes in density and silvicultural treatments; in addition, it is closely related to the total volume, so it is a simple and easy to evaluate indicator of productivity (Clutter *et al.*, 1983). The growth pattern “localized” in a stand, referred to as site productivity, can be expressed by a value (site index) that reflects the height reached by the dominant trees (dominant height) in a particular forest stand, to a certain age. The site index as an indicator of productivity is an attribute fixed and stable over time in a stand. To differentiate between site productivity it is necessary to construct families of site index curves from an observed pattern of dominant height (Pretzsch, 2009).

Dominant height growth ( $Y$ ) with respect to age is modeled with functions that characterize the current state of the variable under study to determine its past or future condition. The dynamic equations are a special case of this type of functions, where the dominant height is estimated based on the current age of the stands and the initial conditions of age and height. One way often used to generate dynamic equations is based on the generalized algebraic difference approach (GADA) developed by Cieszewski and Bailey (2000), which are obtained by expanding a base growth model, allowing that two model parameters vary with the specific conditions of the site quality, and generate families of polymorphic curves with multiple asymptotes; this is a desirable property to describe the dominant height growth and classify the productivity by quality of site (Cieszewski and Strub, 2008).

An equation formulated in GADA to describe the average dominant height and site index is invariant with respect to the reference age and path of projection, which gives consistency in predictions of dominant height and site index (Cieszewski and Bailey, 2000). This property implies that the estimate of its parameters should be performed using an adjustment method that is invariant of the reference age. Dieguez-Aranda *et al.* (2006) suggest using procedures to identify trends in individual and group growth represented in the observed data. A method that complies with what is said about estimating specific parameters of each individual and global parameters common to all individuals is the mixed-effects models (MEM) approach (Fang and Bailey, 2001). This is the common method

predicciones de la altura dominante y el índice de sitio (Cieszewski y Bailey, 2000). Esta propiedad implica que la estimación de sus parámetros se debe realizar usando un método de ajuste que sea invariante de la edad de referencia. Diéguez-Aranda *et al.* (2006) sugieren usar procedimientos que permitan identificar las tendencias de crecimiento individuales y grupales representadas en los datos observados. Un método que cumple lo referido al estimar parámetros específicos de cada individuo y parámetros globales comunes a todos los individuos es el enfoque de modelos de efectos mixtos (MEM) (Fang y Bailey, 2001). Éste es el método común para analizar datos de naturaleza longitudinal cuando son mediciones repetidas sobre la misma unidad experimental a lo largo del tiempo y donde la estructura de las observaciones es irregular y desbalanceada (Budhathoki *et al.*, 2008). Un MEM incluye en su formulación parámetros fijos comunes a toda la población y parámetros aleatorios específicos de cada unidad de muestreo; su ajuste permite obtener estimadores más eficientes, precisos y confiables de los parámetros fijos del modelo y predecir parámetros aleatorios específicos de cada unidad experimental, que reflejan el patrón de desviación con respecto de la media (De los Santos-Posadas *et al.*, 2006). Las ecuaciones de índice de sitio en DAG ajustadas con técnicas modernas como los MEM, forman una combinación poderosa que puede aplicarse con resultados altamente confiables y precisos a especies forestales en forma de plantaciones comerciales y de las cuales aún no tienen herramientas silvícolas para su manejo.

El objetivo de este estudio fue desarrollar un sistema de ecuaciones dinámicas utilizando el enfoque en DAG mediante un modelo de efectos mixtos para generar familias de curvas de índice de sitio que permitan describir el patrón de crecimiento de la altura dominante de plantaciones de *Tectona grandis* L. f. (teca) establecidas en Campeche, México.

## MATERIALES Y MÉTODOS

Para este estudio se usó una base de datos integrada con mediciones de altura total a diferentes edades, de 388 parcelas permanentes de crecimiento en 5000 ha de plantaciones comerciales de teca establecidas en el Valle de Edzná, estado de Campeche, México. El clima de la región es cálido, subhúmedo, con lluvias en verano, temperatura promedio anual de 26.6 °C, precipitación promedio anual de 1094.7 mm, con

to analyze data from longitudinal nature when there are repeated measurements on the same experimental unit over time and where the structure of the observations is irregular and unbalanced (Budhathoki *et al.*, 2008). A MEM includes in its formulation fixed parameters common to all the population and specific random parameters to each sampling unit; its adjustment allows obtaining more efficient estimators, accurate and reliable, of the fixed parameters of model and predict specific random parameters of each experimental unit, reflecting the pattern of deviation with respect to the mean (De los Santos Posadas *et al.*, 2006). The site index equations in GADA fitted with modern techniques, such as MEM, form a powerful combination that can be applied with highly reliable and accurate results to forest species in commercial plantations which do not yet have silvicultural tools for their management.

The objective of this study was to develop a system of dynamic equations using the GADA approach and mixed-effects models to generate families of site index curves that allow describing the pattern of dominant height growth of *Tectona grandis* L. f. (teak) plantations established in Campeche, Mexico.

## MATERIALS AND METHODS

For this study we used an integrated database with total height measurements at different ages, of 388 permanent growth plots in 5000 ha of commercial teak plantations established in the Valle of Edzná, state of Campeche, Mexico. The climate of the region is warm, subhumid, with summer rainfall, annual average temperature of 26.6 °C, average annual precipitation of 1094.7 mm, with six-month dry season from December to May. Plantations were established with the same seed source; the technique of planting site preparation, planting method and silvicultural management were also similar. The initial density was 1250 and 816 plants ha<sup>-1</sup>, with spacing 4×2 and 3.5×3.5 m, respectively. The plots comply with all conditions of growth in terms of age, density and site quality: 60, 74, 110 and 144 plots in four planting sites where plantations were grouped. The area of the plots was 800 and 1225 m<sup>2</sup> for a narrower and wider spacing, respectively; each plot included 100 trees. Total height (m) was measured annually from the first year of the plantation establishment and there were different intervals of measurement. Plantation age ranged from 12 to 96 months.

For the last measurement in each plot the heights of the 10 dominant and co-dominant trees were selected, thus optimizing

seis meses de sequía de diciembre a mayo. Las plantaciones se establecieron con la misma fuente de semilla; la técnica de preparación del sitio de plantación, el método de plantación y el manejo silvícola también fueron similares. La densidad inicial fue 1250 y 816 plantas  $\text{ha}^{-1}$ , con espaciamentos de  $4 \times 2$  y  $3.5 \times 3.5$  m, respectivamente. Las parcelas cubrieron todas las condiciones de crecimiento en términos de edad, densidad y calidad de sitio: 60, 74, 110 y 144 parcelas en cuatro sitios de plantación donde se agruparon las plantaciones. La superficie de las parcelas fue 800 y 1225  $\text{m}^2$  para un menor y mayor espaciamento, respectivamente; cada parcela incluyó 100 árboles. Las alturas totales (m) se midieron anualmente desde el primer año del establecimiento de la plantación y hubo diferentes intervalos de medición. La edad de las plantaciones varió de 12 a 96 meses.

Para la última medición en cada parcela se seleccionaron las alturas de los 10 árboles dominantes y codominantes, optimizando así la proporcionalidad y equivalencia de muestrear en promedio 100 árboles  $\text{ha}^{-1}$  (Assmann, 1970). Esos mismos 10 árboles por parcela fueron identificados en todas las mediciones previas y se obtuvo el promedio de la altura dominante para cada medición en cada parcela. Esta forma de seleccionar las alturas dominantes minimizó inconsistencias y reflejó una tendencia de crecimiento en altura biológicamente más realista con respecto a la edad.

De acuerdo con Diéguez-Aranda *et al.* (2006), toda ecuación dinámica en DAG tiene la forma general implícita  $Y = f(t, t_0, Y_0, B_1, B_2, B_m)$ , donde  $Y$  es la altura dominante promedio a estimar a la edad  $t$ ;  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_m$  son los parámetros globales;  $Y_0$  es la altura dominante observada a la edad  $t_0$ . Tanto  $Y_0$  como  $t_0$  quedan definidos como condiciones iniciales y  $Y_0$  se puede definir como parámetro durante el ajuste. Para generar la familia de curvas de índice de sitio, los pares de observaciones de altura dominante y edad de todas las parcelas con al menos dos mediciones se ajustaron a seis ecuaciones dinámicas (Cuadro 1) expresadas bajo la técnica de DAG (Cieszewski y Bailey, 2000). En todas las ecuaciones se combina el supuesto teórico de que tanto la tasa de crecimiento como el potencial máximo de crecimiento varían entre sitios (Cieszewski y Strub, 2008). Las ecuaciones 1 y 2 usan como modelo base el desarrollado por Korf (1939), expresado como  $Y = a \exp(-bt^{-c})$ ; las ecuaciones 3 y 4 toman como modelo base el generado por Chapman-Richards (Chapman, 1961; Richards, 1959), definido como  $Y = a(1 - \exp(-bt))^{-c}$ ; en tanto que las ecuaciones 5 y 6 utilizan el modelo base de Hossfeld IV (Cieszewski and Bella, 1989), indicado por  $Y = t^c / (b + at^c)$ , siendo  $a$ ,  $b$  y  $c$  parámetros de los modelos base y  $\exp(\cdot)$  representa la función exponencial.  $X$  es una variable teórica que representa la calidad de estación, sobre esta variable tienen efecto los parámetros globales  $B_i$ .

the proportionality and equivalence of sampling in average 100 trees  $\text{ha}^{-1}$  (Assmann, 1970). Those same 10 trees per plot were identified in all previous measurements and average of dominant height was obtained for each measurement in each plot. This way of selecting the dominant heights minimized inconsistencies and reflected a height growth trend biologically more realistic with respect to age.

According to Diéguez-Aranda *et al.* (2006), all dynamic GADA equations have the general implicit form  $Y = f(t, t_0, Y_0, B_1, B_2, B_m)$ , where  $Y$  is the average dominant height to be estimated at age  $t$ ;  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_m$  are the global parameters;  $Y_0$  is the observed dominant height at age  $t_0$ . Both  $Y_0$  and  $t_0$  are defined as initial conditions and  $Y_0$  can be defined as a parameter to fit. To generate the family of site index curves, pairs of observations of dominant height and age of all plots with at least two measurements were fitted to six dynamic equations (Table 1) expressed under the GADA technique (Cieszewski and Bailey, 2000). In all the equations it is combined the theoretical assumption that both the growth rate and the maximum growth potential will vary between sites (Cieszewski and Strub, 2008). Equations 1 and 2 use as base model that developed by Korf (1939), expressed as  $Y = a \exp(-bt^{-c})$ ; the equations 3 and 4 take as base model that one generated by Chapman-Richards (Chapman, 1961; Richards, 1959), defined as  $Y = a(1 - \exp(-bt))^{-c}$ ; while equations 5 and 6 use the Hossfeld IV base model (Cieszewski and Bella, 1989), indicated by  $Y = t^c / (b + at^c)$ , being  $a$ ,  $b$  and  $c$  parameters of the base models and  $\exp(\cdot)$  represents the exponential function.  $X$  is a theoretical variable representing the site quality; the global  $B_i$  parameters have an effect on this variable.

The fit of the models was performed using data in non-overlapped pairs by nonlinear least squares, using the MODEL procedure of SAS/ETS<sup>®</sup> (SAS Institute Inc., 2008). To select the best model we considered as criteria for goodness of fit the coefficient of determination corrected by the number of parameters ( $R_{adj}^2$ ), the bias and root mean square error (RMSE). A graphic analysis was also performed, searching that the site index curves generated by each model follow the pattern of the dominant heights observed over time. To construct the family of curves a reference age of 90 months was used. The best model was one that maintained a balance between statistical and biological considerations.

The selected model was fitted by applying the technique of nonlinear mixed effects model (MEM) following the suggested procedure by Fang and Bailey (2001), for which the model was generated:

$$Y_{ij} = f(A_i \beta + B_i b_i, t_{ij}) + e_{ij} \quad (7)$$

**Cuadro 1. Formulaciones en DAG usadas para el ajuste de modelos de altura dominante.**  
**Table 1. GADA formulations used for fitting of models of dominant height.**

Parámetros relacionados al sitio	Solución para $X$ con valores iniciales en $t_0$ y $Y_0$	Ecuación dinámica
$a=X$ $b=B_1+1/X$	$L_0 = B_1(-1/t_0^{B_2}) - \ln(Y_0)$ $R_0 = \sqrt{L_0^2 - 4 \ln(\exp(-1/t_0^{B_2}))}$ $X_0 = 0.5(-L_0 + R_0)$	$Y = \exp(X_0) \exp(-1/t^{B_2})^{(B_1+1/X_0)}$
$a=\exp(X)$ $b=B_1+B_2/X$	$R_0 = \sqrt{(B_1 t_0^{-B_3} + \ln(Y_0))^2 + 4B_2 t_0^{-B_3}}$ $X_0 = 0.5B_1 t_0^{-B_3} + \ln(Y_0) + R_0$	$Y = \exp(X_0) \exp\left(\left(-B_1 + \frac{B_2}{X_0}\right) t^{-B_3}\right)$
$a=\exp(X)$ $c=B_2/X$	$L_0 = \ln(1 - \exp(-B_2 t_0))$ $R_0 = \sqrt{\ln(Y_0)^2 - 4B_3 L_0}$ $X_0 = 0.5(\ln(Y_0) + R_0)$	$Y = \exp(X_0) (1 - \exp(-B_2 t))^{(B_3/X_0)}$
$a=\exp(X)$ $c=B_2+B_3/X$	$L_0 = \ln(1 - \exp(-B_1 t_0))$ $R_0 = \sqrt{(\ln(Y_0) - B_2 L_0)^2 - 4B_3 L_0}$ $X_0 = 0.5(\ln(Y_0) - B_2 L_0 + R_0)$	$Y = Y_0 \left( \frac{1 - \exp(-B_1 t)}{1 - \exp(-B_2 t_0)} \right)^{(B_2+B_3/X_0)}$
$a=X$ $b=B_2/X$	$X_0 = (t_0^{B_2} / Y_0) / (B_2 + t_0^{B_3})$	$Y = \frac{t^{B_3}}{B_2 X_0 + X_0 t^{B_3}}$
$a=X$ $c=B_2/X$	$L_0 = 2B_2 Y_0 t_0^{-B_3}$ $R_0 = \sqrt{(Y_0 - B_1)^2 + L_0}$ $X_0 = (Y_0 - B_1) + R_0$	$Y = Y_0 \frac{t^{B_3} (t_0^{B_3} X_0 + B_2)}{t_0^{B_3} (t^{B_3} X_0 + B_2)}$

El ajuste de los modelos se realizó con las observaciones en pares no traslapados mediante mínimos cuadrados no lineales, utilizando el procedimiento MODEL de SAS/ETS® (SAS Institute Inc., 2008). Para seleccionar al mejor modelo se consideraron como criterios de bondad de ajuste el coeficiente de

where  $Y_{ij}$  is dominant height estimated in the  $i$ -th plot to the  $j$ -th age of measurement;  $f(\cdot)$  is the dynamic equation in GADA to be selected in the previous phase, in which is included  $A_i$  as the design matrix of size  $r \times p$  for parameters with fixed effects;  $\beta$  as the vector of size  $p \times 1$  containing the fixed effects parameters;  $B_i$

determinación corregido por el número de parámetros ( $R_{adj}^2$ ), el sesgo y la raíz del error cuadrático medio (RECM). También se realizó un análisis gráfico, buscando que las curvas de índice de sitio generadas por cada modelo siguieran la trayectoria de las alturas dominantes observadas en el tiempo. Para construir la familia de curvas se usó una edad de referencia de 90 meses. El mejor modelo fue aquel que mantuvo un balance entre consideraciones estadísticas y biológicas.

El modelo seleccionado fue ajustado aplicando la técnica de modelo de efectos mixtos (MEM) no lineales siguiendo el procedimiento sugerido por Fang y Bailey (2001), para lo cual se generó el modelo:

$$Y_{ij} = f(A_i\beta + B_i b_i, t_{ij}) + e_{ij} \quad (7)$$

donde  $Y_{ij}$  es la altura dominante estimada en la  $i$ -ésima parcela a la  $j$ -ésima edad de medición;  $f(\cdot)$  es la ecuación dinámica en DAG a seleccionar en la fase previa, en la que adicionalmente se incluyen a  $A_i$  como la matriz diseño de tamaño  $r \times p$  para los parámetros con efectos fijos;  $\beta$  como el vector de tamaño  $p \times 1$  que contiene los parámetros de efectos fijos;  $B_i$  es la matriz diseño de tamaño  $r \times q$  para el parámetro específico de sitio (efecto aleatorio);  $b_i$  es el vector de tamaño  $q \times 1$  que contiene el efecto aleatorio asociado a la  $i$ -ésima parcela;  $t_{ij}$  es la edad en meses de la  $i$ -ésima parcela observada en la  $j$ -ésima medición;  $r$  es de dimensión igual al número de parámetros con efectos fijos (globales),  $e_{ij}$  es el vector del término de error. Se asume que  $e_{ij} \sim N(0, R_i)$  y  $b_i \sim N(0, \varphi^2)$ , siendo  $R$  la matriz de varianza-covarianza del término de error y  $\varphi^2$  la matriz de varianza-covarianza de los parámetros aleatorios  $b_i$ . La ecuación dinámica 7 es una función de valor medio esperado, en la que se establecen condiciones iniciales a  $Y_0$  y  $t_0$ ; el parámetro local al que se asoció el único efecto aleatorio fue el parámetro  $Y_0$ , caracterizado por representar la condición inicial de altura, ser el más variable y menos lineal.

El modelo 7 se ajustó primero para toda la plantación de tecla en general, para realizar predicciones globales. Después se evaluó el efecto en el crecimiento de la altura dominante entre cuatro sitios de plantación (I, II, III y IV) donde están distribuidas las plantaciones, para lo cual en el modelo 7 se incluyeron tres variables dicotómicas con efecto aditivo sobre los parámetros fijos, y la estructura se expresa como  $Y_{ij} = f(A_i\beta_i I_k + B_i b_i, t_{ij}) + e_{ij}$ , donde  $I_k$  es la variable dicotómica que toma el valor de 1 si las observaciones corresponden al sitio  $k$  y 0 de otra forma, es decir,  $\beta_i I_k = \beta_{i0} + \beta_{i1} I_1 + \beta_{i2} I_2 + \beta_{i3} I_3$ ; este modelo se denominó 7-A. Como los datos son de tipo longitudinal y existe desbalance en el número de observaciones por parcela y edad, para compensar posibles pérdidas en grados de libertad y lograr una convergencia más rápida y estable, el modelo se ajustó usando máxima verosimilitud restringida (De los Santos-Posadas *et al.*,

is the design matrix of size  $r \times q$  for the site-specific parameter (random effect);  $b_i$  is the vector of size  $q \times 1$  containing the random effect associated with the  $i$ -th plot;  $t_{ij}$  is age in months of the  $i$ -th plot observed in the  $j$ -th measurement;  $r$  is the dimension equal to the number of parameters with fixed effects (global),  $e_{ij}$  is the vector of error terms. It is assumed that  $e_{ij} \sim N(0, R_i)$  and  $b_i \sim N(0, \varphi^2)$ , being  $R$  the variance-covariance matrix of the error term and  $\varphi^2$  the variance-covariance matrix of the random parameters  $b_i$ . The dynamic equation 7 is a function of expected average value, where initial conditions are established to  $Y_0$  and  $t_0$ ; the local parameter to which the only random effect was associated was the parameter  $Y_0$ , characterized by representing the height initial condition, being the most variable and less linear.

Model 7 was first fitted for all teak plantation in general, to perform global predictions. Then the effect on growth of dominant height among four planting sites (I, II, III and IV) where plantations are distributed, was evaluated, so in model 7 three dichotomous variables with additive effect on the fixed parameters were included and the structure is expressed as  $Y_{ij} = f(A_i\beta_i I_k + B_i b_i, t_{ij}) + e_{ij}$ , where  $I_k$  is the dichotomous variable that takes the value of 1 if observations correspond to the site  $k$  and 0 otherwise, that is,  $\beta_i I_k = \beta_{i0} + \beta_{i1} I_1 + \beta_{i2} I_2 + \beta_{i3} I_3$ ; this model was called 7-A. Since data are of longitudinal type and there is imbalance in the number of observations per plot and age, to compensate possible losses in degrees of freedom and achieve a more rapid and stable convergence, the model was fitted using restricted maximum likelihood (De los Santos-Posadas *et al.*, 2006), using the NLME library of free statistical program R version 2.14.0 (<http://www.r-project.org>, R Development Core Team 2009).

In the fitting of model 7 for the whole plantation, the autocorrelation was corrected by modeling the error term ( $e_{ij}$ ) using a continuous autoregressive structure of first order (CAR (1)) expressed as  $e_{ij} = \psi_1 \rho_1^{t_{ij} - t_{ij-1}} e_{ij-1} + \varepsilon_{ij}$ , where  $\psi_1 = 1$  for  $j > k$  and is zero for  $j = 1$ ,  $\rho_1$  is the autoregressive parameter of order 1 to be estimated and  $t_{ij} - t_{ij-1}$  is the distance separating the observations  $j$  and  $j-1$  within each plot,  $\varepsilon_{ij}$  is the error term under the condition of independence. When model 7 was fitted differentiating by planting site, heteroscedasticity was corrected by modeling and weighting the variance of the errors using the power function power, the weighting factor was on the fitted values ( $\hat{Y}$ ), the function was structured as  $w(Y_0, t, t_0, \Phi) = \hat{Y}^\Phi$ , being  $\Phi$  the variance parameter to be estimated; this model was called 7-B and when the autocorrelation was corrected in the previously mentioned manner was called 7-C. The formulations of the indicated structures, available in Pinheiro and Bates (2000), were fitted simultaneously with the model in GADA.

2006), usando la librería NLME del programa estadístico libre R versión 2.14.0 (<http://www.r-project.org>, R Development Core Team 2009).

En el ajuste del modelo 7 para toda la plantación, la autocorrelación se corrigió modelando el término de error ( $e_{ij}$ ) usando una estructura continua autoregresiva de primer orden (CAR(1)) expresada como  $e_{ij} = \psi_1 \rho_1^{t_{ij} - t_{ij-1}} e_{ij-1} + \varepsilon_{ij}$ , donde  $\psi_1 = 1$  para  $j > k$  y es cero para  $j = 1$ ,  $\rho_1$  es el parámetro autoregresivo de orden 1 a ser estimado y  $t_{ij} - t_{ij-1}$  es la distancia que separa las observaciones  $j$  y  $j-1$  dentro de cada parcela.  $\varepsilon_{ij}$  es el término del error bajo la condición de independencia. Cuando el modelo 7 se ajustó diferenciando por sitio de plantación, la heterocedasticidad se corrigió modelando y ponderando la varianza de los errores usando la función potencia, el factor de ponderación fue sobre los valores ajustados ( $\hat{Y}$ ), la función quedó estructurada como  $w(Y_0, t, t_0, \Phi) = \hat{Y}^\Phi$ , siendo  $\Phi$  el parámetro de varianza a ser estimado; este modelo se denominó 7-B y cuando se corrigió la autocorrelación en la forma ya referida se denominó 7-C. Las formulaciones de las estructuras indicadas, disponibles en Pinheiro y Bates (2000), fueron ajustadas simultáneamente con el modelo en DAG. Para verificar que las correcciones fueran adecuadas se realizó la prueba de razón de verosimilitud entre los modelos sin y con corrección, además de analizar los estadísticos de ajuste  $-2\text{Log Verosimilitud (LogLik)}$ , criterio de información de Akaike (AIC) y el criterio bayesiano de Schwartz (BIC) (Fang y Bailey, 2001).

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los parámetros de los modelos ajustados por mínimos cuadrados no lineales se presentan en el Cuadro 2. Con base en los criterios de bondad de ajuste (Cuadro 3), los mejores modelos en orden de ajuste fueron el 2, 6 y 3 ya que comparativamente presentan los valores más altos en  $R_{adj}^2$ , la más alta precisión en las estimaciones dado sus valores menores en la RECM, tienen los valores de verosimilitud más altos y los sesgos menores. Desde un punto de vista estadístico, tales modelos pueden considerarse aceptables para describir el patrón de crecimiento en altura dominante.

Los modelos 2, 3 y 6 también presentaron el mejor comportamiento gráfico, ya que al sobreponer las curvas de índice de sitio con las alturas dominantes observadas, describen trayectorias de crecimiento similares (Figura 1). Un análisis más detallado de las tendencias de crecimiento de cada modelo, evidencia que el modelo 2 describe aceptablemente las alturas dominantes en los primeros meses de crecimiento,

To verify that corrections were appropriate the likelihood ratio test was performed between models with and without correction, as well as analyzing the statistical fitting  $-2\text{Log Likelihood (LogLik)}$  Akaike information criterion (AIC) and the Schwartz Bayesian Criterion (BIC) (Fang and Bailey, 2001).

## RESULTS AND DISCUSSION

Parameters of the models fitted by nonlinear least squares are presented in Table 2. Based on the criteria of goodness of fit (Table 3), the best models in the order of fitting were 2, 6 and 3 since they comparatively present the highest values in  $R_{adj}^2$ , the highest precision in the estimates given their lower values for the RECM have the highest likelihood values and lower bias. From a statistical point of view, such models can be considered acceptable to describe the growth pattern in dominant height.

Models 2, 3 and 6 also showed the best graphic behavior since overlapping the site index curves on the observed dominant heights, they describe similar growth trajectories (Figure 1). A more detailed analysis of growth trends of each model, evidence that model 2 describes acceptably the dominating heights in the first months of growth, but tends to underestimate them at ages located at the upper end of the range analyzed, especially for highest site indexes. In addition, this model showed slight problems of convergence and marginal significance in two of its parameters. In contrast, Model 6 tends to overestimate heights at early ages.

Model 3 best describes the growth pattern especially at older ages, covering the whole range of heights observed, in addition, comparatively shows the lowest standard errors in its parameters and high significance. Therefore, an analysis that involves a balance between statistical fit criteria with biologically realistic graphic height growth pattern, leads to select model 3 for describing and predicting teak dominant height growth and qualify productivity levels via site index. This model has biologically realistic characteristics and attached to the conditions of the plantations, generates asymptotic polymorphism, performs consistently the predictions are base-age and path invariant, and is parsimonious with only two parameters. Moreover, the same dynamic equation can be used as a reciprocal function to predict either the average dominant height growth of a plot or its corresponding site index. The dominant height  $Y$  at

**Cuadro 2. Parámetros estimados, significancia y estadísticos de los modelos en DAG ajustados.**  
**Table 2. Estimated parameters, significance and statistics of the models fitted in GADA.**

Modelo	Parámetro	Estimador	Error estándar	Valor de $t$	Significancia
1	B <sub>1</sub>	0.1605	0.0428	3.75	0.0002
	B <sub>2</sub>	6.1294	0.7813	7.85	<0.0001
2	B <sub>1</sub>	-1.10E+08	6.61E+7	-1.66	0.0962
	B <sub>2</sub>	3.89E+08	2.33E+08	1.67	0.0956
	B <sub>3</sub>	0.417556	0.0260	16.06	<0.0001
3	B <sub>2</sub>	0.012414	0.0019	6.24	<0.0001
	B <sub>3</sub>	2.206382	0.0576	38.31	<0.0001
4	B <sub>1</sub>	0.017675	0.0055	3.20	0.0014
	B <sub>2</sub>	0.845429	0.7504	1.13	0.2601
	B <sub>3</sub>	2.002643	0.1953	10.26	<0.0001
5	B <sub>2</sub>	5.75E+63	1.99E-80	2.89E+143	<0.0001
	B <sub>3</sub>	0.571974	0.0097	58.81	<0.0001
6	B <sub>1</sub>	39.07336	4.292	9.10	<0.0001
	B <sub>2</sub>	-544.098	111.20	-4.89	<0.0001
	B <sub>3</sub>	0.83363	0.0347	24.05	<0.0001

**Cuadro 3. Comparativo y criterios de bondad de ajuste de los modelos en DAG probados.**

**Table 3. Comparative and criteria of goodness of fit of the models in GADA tested.**

Modelo	R <sup>2</sup> ajustada	LogLik <sup>†</sup>	Sesgo	RECM <sup>‡</sup>
1	0.8732	-1777	0.2363	1.1387
2	0.8978	-1653	0.1668	1.0222
3	0.8870	-1711	0.1851	1.0751
4	0.8874	-1708	0.1789	1.0731
5	0.8717	-1784	0.2254	1.1452
6	0.8911	-1688	0.1259	1.0550

<sup>†</sup>LogLik: verosimilitud, <sup>‡</sup>RECM: raíz del error cuadrático medio ❖ <sup>†</sup>LogLik: verisimilitude, <sup>‡</sup>RMSE: root mean square error.

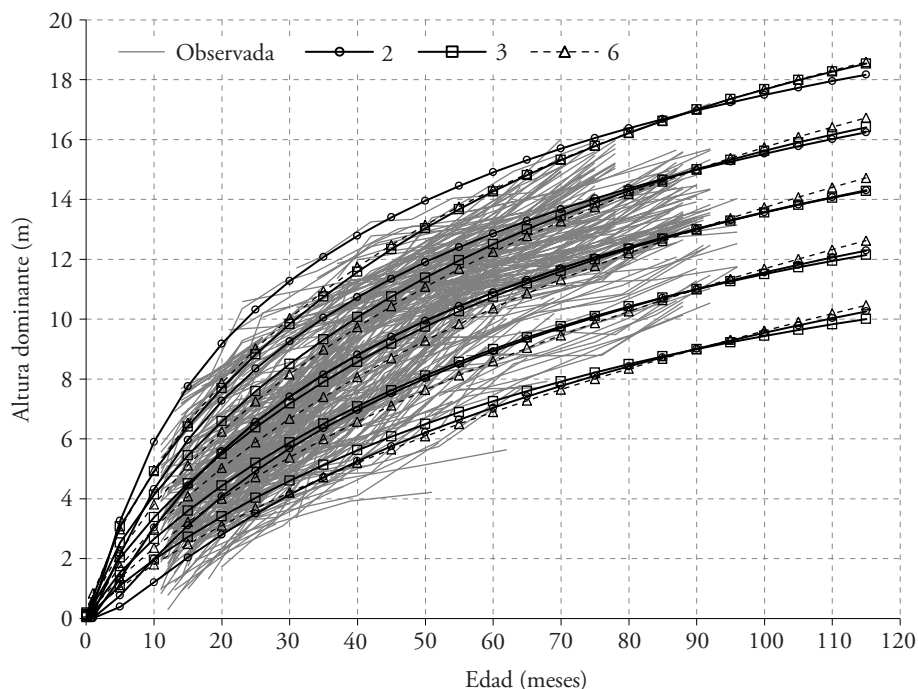
pero tiende a subestimarlas a edades en el extremo superior del rango analizado, sobre todo para los índices de sitio más altos. Además, este modelo presentó problemas ligeros de convergencia y significancia marginal en dos de sus parámetros. Por el contrario, el modelo 6 tiende a sobrestimar las alturas a edades tempranas.

El modelo 3 describe mejor el patrón de crecimiento sobre todo a edades superiores, cubriendo

an age  $t$  can be estimated from the dominant height  $Y_0$  observed at age  $t_0$ . To estimate the  $SI$  at the age of reference  $t_r$ , chosen from height  $Y_0$  at age  $t_0$ , then  $SI$  should be replaced by  $Y$  and  $t_r$  by  $t$ . Height  $Y$  can also be estimated at age  $t$  from the  $SI$  and its respective reference age  $t_r$ , by replacing  $SI$  by  $Y_0$  and  $t_r$  by  $t_0$ .

Model 7, which corresponds to 3 now fitted as a global model under the MEM approach corrected by autocorrelation, showed high significance in its





**Figura 1. Patrón del crecimiento en altura dominante observado y tendencias de las curvas con los índices de sitio de 9, 11, 13, 15 y 17 m generadas con los modelos 2, 3 y 6.**  
**Figure 1. Observed growth pattern in dominant height and trends of curves with site indices 9, 11, 13, 15 and 17 m generated by models 2, 3 and 6.**

todo el rango de alturas observado; además, comparativamente presenta los menores errores estándar en sus parámetros y significancia alta. Por lo tanto, un análisis que implica un balance entre criterios de ajuste estadístico con el patrón gráfico de crecimiento en altura biológicamente realista, conduce a seleccionar al modelo 3 para describir y predecir el crecimiento en altura dominante de teca y para calificar niveles de productividad vía la clasificación por índice de sitio. Este modelo tiene características biológicamente realistas y apegadas a las condiciones de las plantaciones, genera polimorfismo asintótico, realiza predicciones consistentes e invariantes de la edad base y de la ruta en la estimación, y es parsimonioso con sólo dos parámetros. Además, la misma ecuación dinámica puede usarse como una función recíproca para predecir el crecimiento promedio en altura dominante de un determinado lote de manejo o su correspondiente índice de sitio. La altura dominante  $Y$  a una edad  $t$  puede estimarse a partir de la altura dominante  $Y_0$  observada a la edad  $t_0$ . Para estimar el  $IS$  a la edad de referencia  $t_r$  elegida a partir de la altura  $Y_0$  a la edad  $t_0$ , entonces debe sustituirse  $IS$  por  $Y$  y  $t_r$  por  $t$ . También puede estimarse la altura  $Y$  a la edad  $t$  a partir del

parameters and narrow confidence intervals, besides the site index curves generated, they describe adequately the growth pattern observed (Table 4 and Figure 2A). The general fitting conditions for criteria AIC, BIC, LogLik and  $R^2$  fitted were 5065.71, 5097.72, -2526.85 and 0.9607. This global model estimates the dominant height and site index without differentiating between planting sites. The average maximum height that the model predicts at the estimated harvest age (19 years) for the highest quality site (17 m) is 19.63 m, and is considered conservative compared with the observed heights when differentiating per planting site.

The inclusion of dichotomous variables in the model fit by means of MEM, called 7-A, detected different growth rates in dominant height among the four plantation sites. The likelihood ratio test (RV) and the AIC and BIC values (Table 5) indicate that the model corrected by heteroscedasticity and autocorrelation (7-C) is better than the one corrected by heteroscedasticity (7-B) and superior than uncorrected model 7-A. Statistically significant difference was detected between sites III and IV

IS y su respectiva edad de referencia  $t_r$ , sustituyendo IS por  $Y_0$  y  $t_r$  por  $t_0$ .

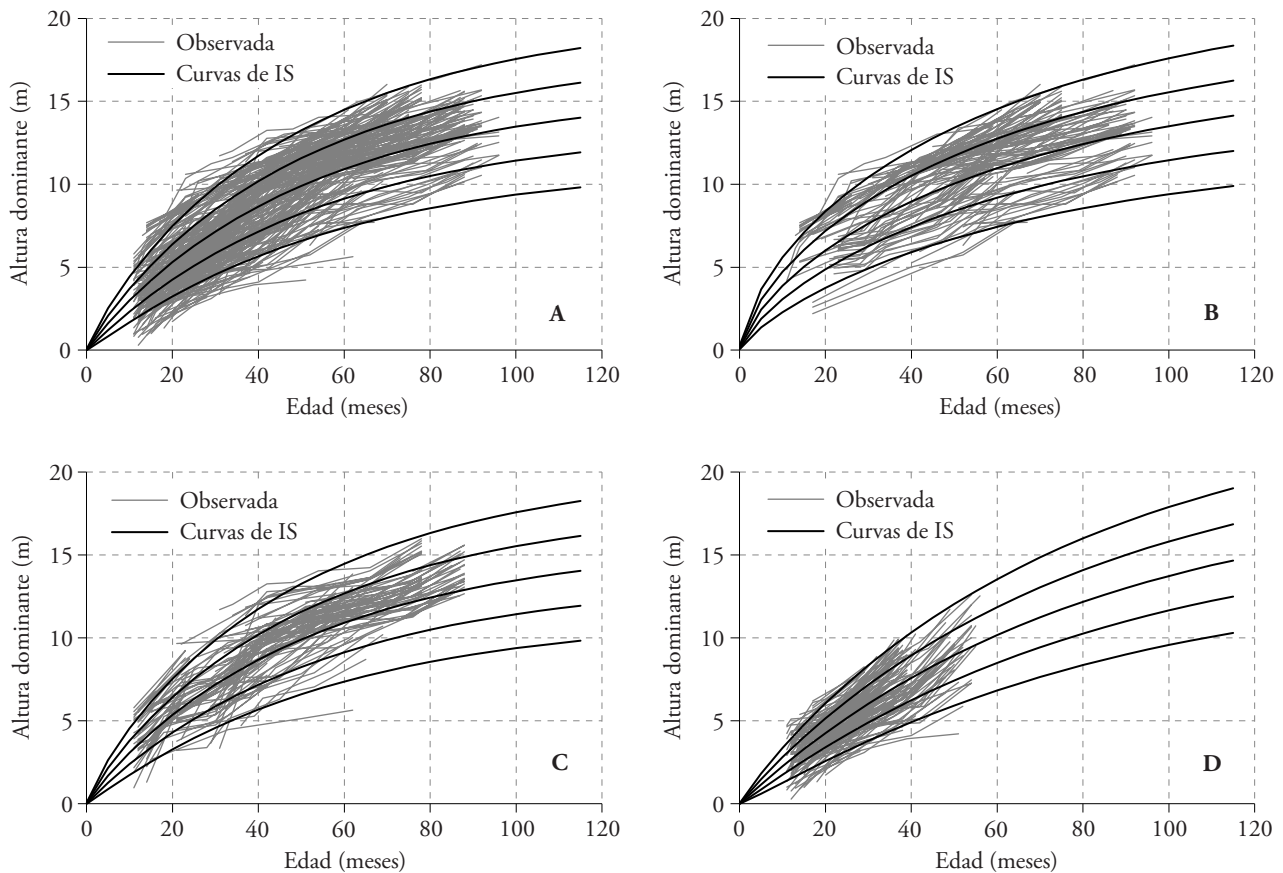
El modelo 7, que corresponde al 3 ahora ajustado como modelo global bajo el enfoque de MEM corregido por autocorrelación, mostró alta significancia en sus parámetros e intervalos de confianza estrechos, además de que las curvas de índice de sitio que genera, describen en forma adecuada el patrón de crecimiento observado (Cuadro 4 y Figura 2A). Las condiciones generales de ajuste para

with respect to sites I and II, but the latter were not different (Table 6). The 7-C model improved the description of the growth pattern in dominant height by planting site (Figures 2B-D). These results suggest that it is not possible to apply a single model for all sites, being necessary to generate specific site index curves for each. The residuals versus the predicted values and age for both the global model and the planting site models (Figure 3) show a homoscedastic behavior without any abnormal trend.

**Cuadro 4. Parámetros estimados, significancia e intervalos de confianza del modelo 7 global.**  
**Table 4. Estimated parameters, significance and confidence intervals of the global model 7.**

Parámetro	Estimado	Error estándar	GL <sup>†</sup>	Valor de $t$	Significancia	LI <sup>‡</sup>	LS
$B_2$	0.01913	0.00161	1146	11.9092	0.0001	0.0159	0.0223
$B_3$	2.60441	0.08245	1146	31.5868	0.0001	2.4426	2.7662

<sup>†</sup>GL: grados de libertad, <sup>‡</sup>LI, LS: límites superior e inferior <sup>‡</sup>GL: degrees of freedom, <sup>‡</sup>LI, LS: upper and lower limits.



**Figura 2. Crecimiento observado y estimado con el modelo 7 ajustado vía MEM y corregido para la plantación en general (A), para los sitios de plantación I y II (B), sitio III (C) y sitio IV (D).**

**Figure 2. Observed and estimated growth with Model 7 fitted via MEM and corrected for plantation in general (A) for the planting sites I and II (B), site III (C) and site IV (D).**

los criterios AIC, BIC, LogLik y  $R^2$  ajustada fueron 5065.71, 5097.72, -2526.85 y 0.9607. Este modelo global estima la altura dominante e índice de sitio sin diferenciar entre sitios de plantación. La altura promedio máxima que el modelo predice a la edad de cosecha programada (19 años) para la calidad de sitio más alta (17 m) es 19.63 m, y se considera conservadora comparada con las alturas observadas al diferenciar por sitio de plantación.

La incorporación de variables dicotómicas en el ajuste del modelo mediante MEM, denominado 7-A, detectó diferentes tasas de crecimiento en altura dominante entre los cuatro sitios de plantación. La prueba de razón de verosimilitud (RV) y los valores de AIC y BIC (Cuadro 5) indican que el modelo corregido por heterocedasticidad y autocorrelación (7-C) es mejor que el solo corregido por heterocedasticidad (7-B) y superior al modelo 7-A sin corregir. Hubo diferencia estadística significativa entre los sitios III y IV con respecto a los sitios I y II, pero estos últimos no fueron diferentes (Cuadro 6). El modelo 7-C mejoró la descripción del patrón de crecimiento en altura dominante por

When comparing growth rates per plantation site (Figures 2B-D), it was determined that site IV is the superior followed by sites I and II which can be integrated into one group, while the site III has the lowest values in dominant heights projected up to an age of 115 months. The referred pattern is consistent and maintained for projections at older ages, even to ages close to the planned harvest at 19 years.

Due to the fact that the seed source, land preparation practice and silvicultural management are similar, differences in dominant height growth detected among planting sites can be attributed to the characteristics of soil. According to Montero *et al.* (2001), differences in soil physics and chemistry, in addition to factors such as depth, compaction, drainage, stoniness, among others, would explain the different growth patterns between sites.

The maximum dominant heights estimated both with the global model as the specific ones per site are similar to those reported by Bermejo *et al.* (2004) and Jerez-Rico *et al.* (2011), in the sense that teak tends to stabilize its maximum height at relatively early ages of about 20 to 25 years, which is close to the planned

**Cuadro 5. Prueba de razón de verosimilitud y estadísticos del modelo 7 sin y con corrección al evaluar el efecto del sitio de plantación.**

**Table 5. Likelihood ratio test and statistics of model 7 without and with correction to evaluate the effect of planting site.**

Modelo	GL <sup>†</sup>	AIC <sup>‡</sup>	BIC <sup>§</sup>	LogLik <sup>¶</sup>	Prueba	RV <sup>□</sup>	Valor de p
1 (7-A)	8	4574.353	4617.023	-2279.177			
2 (7-B)	9	4557.661	4605.664	-2269.831	1 vs 2	18.692	<0.0001
3 (7-C)	10	4436.374	4489.711	-2208.187	2 vs 3	123.287	<0.0001

<sup>†</sup>GL: grados de libertad, <sup>‡</sup>AIC: criterio de información de Akaike, <sup>§</sup>BIC: criterio bayesiano de Schwartz, <sup>¶</sup>LogLik: verosimilitud, <sup>□</sup>RV: razón de verosimilitud ❖ <sup>†</sup>GL: degrees of freedom, <sup>‡</sup>AIC: Akaike information criterion, <sup>§</sup>BIC: Schwartz Bayesian criterion, <sup>¶</sup>LogLik: likelihood, <sup>□</sup>RV: likelihood ratio.

**Cuadro 6. Parámetros estimados, significancia e intervalos de confianza del modelo 7-C diferenciando por sitio de plantación.**

**Table 6. Estimated parameters, significance and confidence intervals of the 7-C model differentiated per planting site.**

Parámetro	Estimado	Error estándar	GL <sup>†</sup>	Valor de t	Significancia	LI <sup>‡</sup>	LS
$B_{20}$	0.0126	0.0016	1143	8.0223	0.0000	0.0095	0.0157
$B_{22}$	0.0057	0.0022	1143	2.5867	0.0098	0.0014	0.0099
$B_{30}$	1.9632	0.0758	1143	25.8967	0.0000	1.8145	2.1120
$B_{32}$	0.5657	0.1505	1143	3.7573	0.0002	0.2703	0.8611
$B_{33}$	0.9969	0.0777	1143	12.8243	0.0000	0.8444	1.1495

<sup>†</sup>GL: grados de libertad; <sup>‡</sup>LI, LS: límites superior e inferior ❖ <sup>†</sup>GL: degrees of freedom, <sup>‡</sup>LI, LS: upper and lower limits.

sitio de plantación (Figuras 2B-D). Éstos resultados sugieren que no es posible aplicar un modelo único para todos los sitios, siendo necesario generar curvas de índice sitio específicas para cada uno. Los residuales frente a los predichos y a la edad, tanto del modelo global como por sitio de plantación (Figura 3), muestran un comportamiento homoceástico y sin ninguna tendencia anormal.

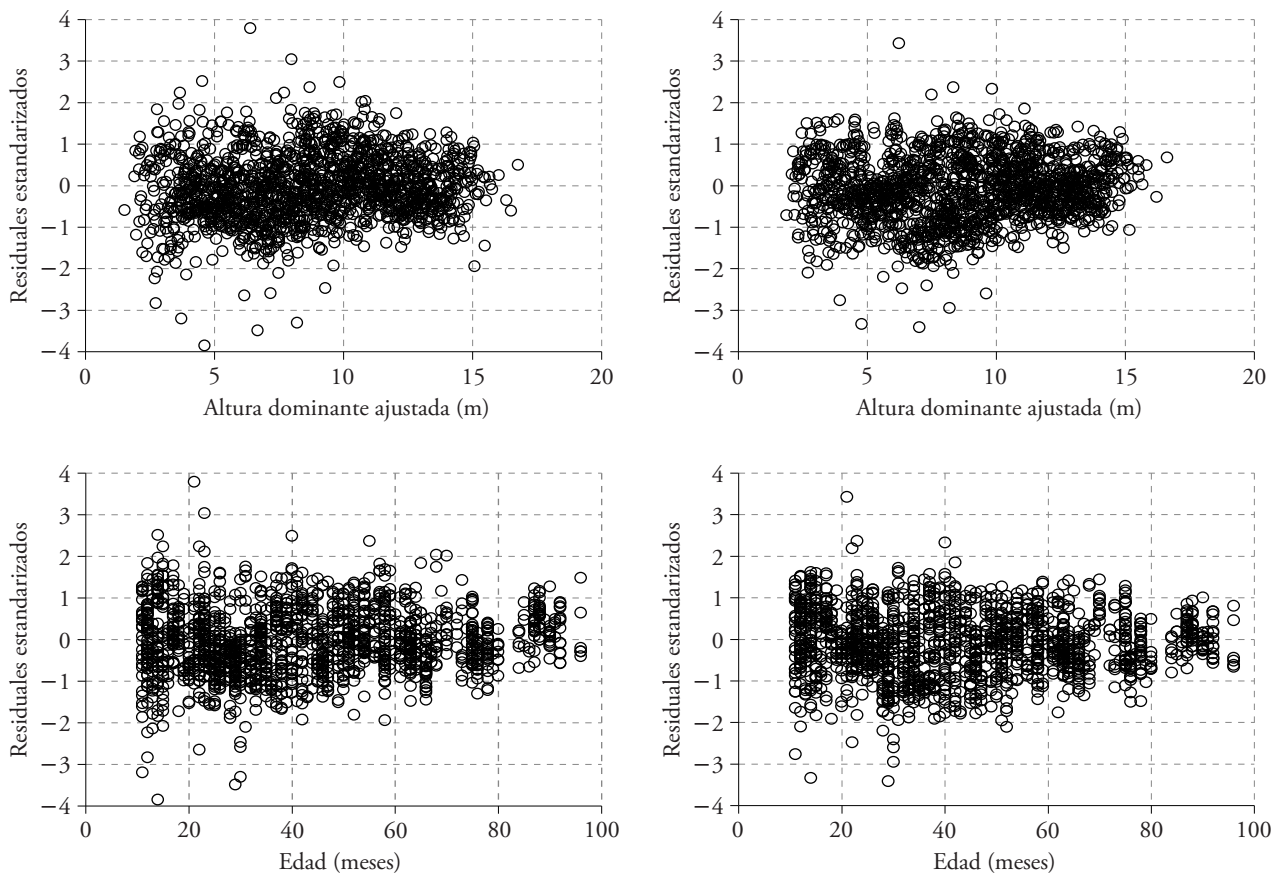
Al comparar las tasas de crecimiento por sitio de plantación (Figuras 2B-D), se determinó que el sitio IV es superior seguido de los sitios I y II que pueden integrarse en un solo grupo, en tanto que el sitio III tiene los más bajos valores en las alturas dominantes proyectadas hasta una edad de 115 meses. El patrón referido es consistente y se mantiene para proyecciones a edades mayores, incluso para edades próximas a la cosecha planeada a 19 años.

Debido a que la fuente de semilla, las prácticas de preparación del terreno y el manejo silvícola son

harvest age for Campeche. However, the maximum dominant height that can be projected on the highest site index and the best planting site is 23 m at harvest age, which is slightly lower than that reported by Keogh (1982), who fitted a Schumacher model in plots without remeasurements for teak planted in Central America, the Caribbean, Venezuela and Colombia. It is also lower with respect to maximum dominant heights estimated with a Hossfeld model and fitted by Bermejo *et al.* (2004) for teak planted in the region of Guanacaste, Costa Rica.

### CONCLUSIONS

The dynamic equation 3 derived under generalized algebraic difference approach from the Chapman-Richards base model and fitted with the mixed effects model approach, generates site index curves with asymptotic polymorphism, curves



**Figura 3. Residuales frente a predichos (fila 1) y contra la edad (fila 2) del modelo 7 global (columna 1) y del específico por sitio (columna 2) ambos corregidos.**

**Figure 3. Residuals versus predicted (row 1) and against age (row 2) of global model 7 (column 1) and of the specific one per site (column 2) both corrected.**

similares, las diferencias de crecimiento en altura dominante detectadas entre sitios de plantación puede atribuirse a las características de suelo. De acuerdo con Montero *et al.* (2001), diferencias en la física y química del suelo, además de factores como profundidad, compactación, drenaje, pedregosidad, entre otros, explicarían los diferentes patrones de crecimiento entre sitios.

Las máximas alturas dominantes estimadas tanto con el modelo global como las específicas por sitio, son similares a las reportadas por Bermejo *et al.* (2004) y Jerez-Rico *et al.* (2011), en el sentido de que teca tiende a estabilizar su altura máxima a edades relativamente tempranas, de alrededor de 20 a 25 años, que es próxima a la edad de cosecha planeada para las plantaciones de Campeche. Sin embargo, la máxima altura dominante que puede proyectarse en el más alto índice de sitio y en el mejor sitio de plantación, es de 23 m a la edad de cosecha, la cual es ligeramente inferior a la reportada por Keogh (1982), quien ajustó el modelo de Schumacher en parcelas sin remedios para teca plantada en América Central, el Caribe, Venezuela y Colombia. También es menor respecto a las alturas dominantes máximas que estima el modelo de Hossfeld ajustado por Bermejo *et al.* (2004) para teca plantada en la región de Guanacaste, Costa Rica.

## CONCLUSIONES

La ecuación dinámica 3 bajo diferencia algebraica generalizada, derivada del modelo base de Chapman-Richards y ajustada con el enfoque de modelo de efectos mixtos, genera curvas de índice de sitio con polimorfismo asintótico, curvas que son estadísticamente válidas para las plantaciones de teca establecidas en Campeche, México de las cuales se tomaron los datos para este ajuste. La ecuación desarrollada cubre la ausencia de este tipo de herramienta silvícola que permita hacer una primera aproximación para clasificar la productividad maderable de las plantaciones estudiadas y podría incorporarse en un modelo para estimar el crecimiento y rendimiento maderable.

## LITERATURA CITADA

Assmann, E. 1970. *The Principles of Forest Yield Study*. Pergamon Press Ltd. Oxford, England. 506 p.  
 Bermejo, I., I. Cañellas, and A. San Miguel. 2004. Growth and yield models for teak plantations in Costa Rica. *For. Ecol. Manage.* 189: 97-110.

which are statistically valid for teak plantations in Campeche, Mexico from which the data were taken for this fitting. The equation developed covers the absence of this type of silvicultural tool allowing a first approximation to classify timber productivity studied and could be incorporated into a model for estimate the timber growth and yield.

—End of the English version—



Budhathoki, B. C., T. B. Lynch, and J. M. Guldin. 2008. A mixed-effects model for the dbh-height relationship of shorleaf pine (*Pinus echinata* Mill). *South. J. Appl.* 32: 5-11.  
 Chapman, D. G. 1961. Statistical problems in population dynamics. In: Neyman, J. (ed). *Proceedings of fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. University of California Press. Berkeley, CA. pp: 153-168.  
 Cieszewski, C. J., and R. L. Bailey. 2000. Generalized algebraic difference approach: theory based derivation of dynamic equations with polymorphism and variable asymptotes. *For. Sci.* 46: 116-126.  
 Cieszewski, C. J., and I. E. Bella. 1989. Polymorphic height and site index curves for lodgepole pine in Alberta. *Can. J. For. Res.* 19: 1151-1160.  
 Cieszewski, C. J., and M. Strub. 2008. Generalized algebraic difference approach derivation of dynamic site equations with polymorphism and variable asymptotes from exponential and logarithmic functions. *For. Sci.* 54: 303-315.  
 Clutter, J. L., J. C. Forston, L. V. Pienaar, G. H. Brister, and R. L. Bailey. 1983. *Timber Management: A Quantitative Approach*. John Wiley & Sons, Inc. New York. 333 p.  
 De los Santos-Posadas H. M., M. Montero-Mata, y M. Markku. 2006. Curvas dinámicas de crecimiento en altura dominante para *Terminalia amazonia* (Gmel.) Excell en Costa Rica. *Agrociencia* 40: 521-532.  
 Diéguez-Aranda, U., H. E. Burkhart, and R. L. Amateis. 2006. Dinamic site model for Loblolly Pine (*Pinus taeda* L.) plantations in the United States. *For. Sci.* 52: 262-272.  
 Fang, Z., and R. L. Bailey. 2001. Nonlinear mixed effects modeling for slash pine dominant height growth following intensive silvicultural treatments. *For. Sci.* 47: 287-300.  
 Jerez-Rico, M., A. Y. Moret-Barillas, O. E. Carrero-Gómez, R. E. Macchiavelli, y A. M. Quevedo-Rojas. 2011. Curvas de índice de sitio basadas en modelos mixtos para plantaciones de teca (*Tectona grandis* L. F.) en los Llanos de Venezuela. *Agrociencia* 45: 135-145.  
 Keogh, M. R. 1982. Teak (*Tectona grandis* Linn. F.) provisional site classification chart for the Caribbean, Central America, Venezuela and Colombia. *For. Ecol. Manage.* 4: 143-153.  
 Korf, V. 1939. A mathematical definition of stand volume growth law. *Lesnicka Prace* 18: 337-379.  
 Montero, M., M., L. Ugalde, y M. Kanninen. 2001. Relación del índice de sitio con los factores que influyen en el crecimiento

- de *Tectona grandis* L. F. y *Bombacopsis quinata* (Jacq.) Dugand, en Costa Rica. *Rev. For. Centroam.* 35: 13-18.
- Pinheiro, J. C., and D. M. Bates. 2000. *Mixed Effects Models in S and S-plus*. Springer. New York. 528 p.
- Pretzsch, H. 2009. *Forest Dynamics, Growth and Yield. From Measurement to Model*. Springer. Berlin, Germany. 664 p.
- R Development Core Team. 2009. *R: a language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org>
- Richards, F. J. 1959. A flexible growth function for empirical use. *J. Exp. Bot.* 10: 290-300.
- SAS Institute Inc. 2008. *SAS/STAT® 9.2 User's Guide*. Cary, NC: SAS Institute Inc.