

ÍNDICE DE PRODUCTIVIDAD DE SITIOS MULTIESPECÍFICOS A TRAVÉS DE FUNCIONES DE DISTANCIA EN SITIOS FORESTALES

PRODUCTIVITY INDEX FOR MULTI SPECIES SITES THROUGH DISTANCE FUNCTIONS IN FOREST SITES

Juan M. Torres-Rojo¹ y Arturo G. Valles-Gándara²

¹Centro de Investigación y Docencia Económicas. División de Economía. Carretera México-Toluca
Núm. 3655. 01210. Colonia Lomas de Santa Fé. México, D. F. (juanmanuel.torres@cide.edu).

²INIFAP. 34000. Durango, Durango. (agvalles@hotmail.com.mx)

RESUMEN

Con el propósito de estimar la productividad relativa de sitios con uso forestal y varias especies se describe una metodología basada en un índice de eficiencia derivado de funciones de distancia radiales y direccionales con referencia a una o varias especies. Además se presenta una metodología para aislar el efecto de la densidad en la estimación de la productividad de sitios, usada para comparar las estimaciones tradicionales de índice de sitio con las estimaciones de eficiencia relativa derivadas de funciones de distancia. Los resultados muestran que la evaluación de la productividad en rodales multiespecíficos es relativa a la composición del rodal dado que al aumentar la diversidad de especies el sitio tiende a usarse más eficientemente. Las estimaciones tradicionales de índice de sitio no son buenas estimaciones de la productividad total en sitios con varias especies y las mejores estimaciones de eficiencia en este tipo de sitios, en términos de su aproximación a la productividad real, son las derivadas de estimaciones de distancia radial usando todas las especies en el sitio.

Palabras clave: Eficiencia, funciones de distancia, índices de sitio interespecíficos, productividad forestal.

INTRODUCCIÓN

La productividad maderable de un terreno forestal se debe estimar usando como referencia la máxima cosecha maderable producida en un periodo de tiempo (Clutter *et al.*, 1983), lo que se conoce como calidad de sitio. Esta medida integra todos los factores bióticos y abióticos que influyen en el crecimiento del arbolado, por lo que se considera un fiel reflejo de la productividad maderable del sitio. El método más popular y práctico para aproximar esta productividad es el índice de sitio (IS), que consiste en evaluar la altura que lograrían los árboles dominantes o codominantes y sanos a una edad base (Payandeh y Wang, 1994). Dicho procedimiento tiene dos desventajas importantes: está

ABSTRACT

With the purpose of estimating the relative productivity of forest sites with timber use and various species, a methodology is described based on an efficiency index derived from radial and directional distance functions with reference to one or various species. In addition, a methodology is presented for isolating the effect of density on the estimation of site productivity, used to compare the traditional estimations of site index with the estimations of relative efficiency derived from distance functions. Results show that the evaluation of productivity in multi species stands is relative to the composition of the stand, given that the higher the diversity of species, the more efficiently the site tends to be used. The traditional estimations of site index are not good estimations of total productivity in sites with various species, and the best estimations of efficiency in this type of site, in terms of their approximation to real productivity, are those derived from estimations of radial distance using all of the species in the site.

Key words: Efficiency, distance function, inter species site index, forest productivity.

INTRODUCTION

The timber productivity of a forest site is estimated using as reference the maximum timber harvest produced over a period of time (Clutter *et al.*, 1983), which is known as site quality. This measurement integrates all of the biotic and abiotic factors that influence the growth of the stand, thus it is considered a true reflection of the timber productivity of the site. The most popular and practical method for approximating this productivity is the site index (SI), which consists in evaluating the height that would be reached by the dominant or co-dominant and healthy trees at a base age (Payandeh and Wang, 1994). This procedure has two important disadvantages: it refers to a single species, and has limitations when is used to estimate productivity during the first stages of development of the stand, given that the trees do not have sufficient size to compare the measurements of age and height of the young trees with those of the adult trees.

Recibido: Noviembre, 2006. Aprobado: Abril, 2007.

Publicado como ENSAYO en *Agrociencia* 41: 687-700. 2007.

referido a una sola especie, y tiene limitaciones para ser estimado durante las primeras etapas de desarrollo del rodal, dado que el arbolado no tiene el tamaño suficiente para comparar las medidas de edad y altura del arbolado joven con las del adulto.

La primera desventaja es relevante para estimar la productividad de sitios con mezclas de especies, debido a que se realiza con base en una sola especie que puede tener óptimas condiciones de crecimiento en un sitio donde se encuentre como dominante o única especie. Sin embargo, la producción maderable de toda la población en un sitio alterno donde esta especie no desarrolle adecuadamente podría ser igual o mejor que la del primero, dado que las otras especies podrían encontrar mejores condiciones de crecimiento cuando están mezcladas, ya sea por una diferencia en la competencia o por el temperamento. Lo anterior podría originar una inconsistencia en la estimación de la productividad con base en una sola especie (mediante IS) y la productividad maderable real del sitio (Oliver y Larson, 1996; Pretzsch, 2003; Zeide, 2004).

Olson y Della-Bianca (1959) resolvieron el problema de IS para poblaciones con múltiples especies a través de una función que relaciona el índice de una especie con otra dentro del sitio. El procedimiento se denomina estimación de IS interespecíficos (Avery y Burkhardt, 1994) y es usado por varios autores (Torres *et al.*, 1992). Sin embargo, presenta algunos problemas: 1) es posible hacer predicciones de IS con base en una especie cuando dadas las condiciones de sitio sea imposible contar con esa especie; 2) la estimación se hace por pares y cuando interviene una tercera especie es posible obtener estimaciones discordantes; 3) la relación entre IS adolece de un fuerte problema de endogeneidad por el hecho de que se supone erróneamente una relación de causalidad entre IS.

Una solución a estos problemas es ampliar la relación altura-edad para incluir alturas de varias especies, o ampliar la cantidad de insumos para evaluar la productividad. Tal representación puede realizarse con funciones de distancia que han evolucionado desde simples relaciones proporcionales entre productos o insumos (Debreu, 1951) hasta ser representaciones fieles de funciones de producción o costos de uno o varios insumos o productos (Shephard, 1970). Las funciones de distancia son los modelos más usados para evaluar productividad parcial y total de factores de producción en presencia de relaciones de producción con uno o varios insumos o productos (Nin *et al.*, 2003). Además, se han desarrollado varias metodologías para su estimación: 1) estrategias primarias (Just *et al.*, 1983; Dixon y Hornbaker, 1992); 2) estrategias duales (Paris, 1989); 3) estrategias con reglas de comportamiento y que suponen retornos de escala

The first disadvantage is relevant for estimating the productivity of sites with mixtures of species, because it is done based on a single species which can have optimum growth conditions in a site where it is found as the dominant or single species. However, the timber production of the entire population in an alternative site where this species does not develop adequately could be equal to or better than that of the first site, given that the other species could find better growth conditions when they are mixed, whether by a difference in competition or by shade tolerance. The above could cause an inconsistency in the estimation of the productivity based on a single species (through SI) and the real timber productivity of the site (Oliver and Larson, 1996; Pretzsch, 2003; Zeide, 2004).

Olson and Della-Bianca (1959) solved the problem of SI for populations with multiple species through a function that relates the index of a species with another within the site. The procedure is called inter species SI estimation (Avery and Burkhardt, 1994) and it has been used by various authors (Torres *et al.*, 1992). However, it presents some problems: 1) it is possible to make predictions of SI based on one species when given the site conditions it is impossible to count on this species; 2) the estimation is made by pairs and when a third species intervenes it is possible to obtain discordant estimations; 3) the relationship between SI presents a major problem of endogeneity due to the fact that a relationship of causality among SI is erroneously assumed.

One solution to these problems is to expand the height-age relationship to include heights of various species, or to increase the amount of input to evaluate productivity. This representation can be carried out with distance functions, which have evolved from simple proportional relationships among products or inputs (Debreu, 1951), to being faithful representations of production or costs functions of one or various products or inputs (Shephard, 1970). The distance functions are the models that are most often used to evaluate partial and total factor productivity in the presence of relationships of production with one or various inputs or products (Nin *et al.*, 2003). Furthermore, various methodologies have been developed for their estimation: 1) primary strategies (Just *et al.*, 1983; Dixon and Hornbaker, 1992); 2) dual strategies (Paris, 1989); 3) strategies with rules of behavior and which assume constant returns of scale with fixed input per unit of activity (Just *et al.*, 1990); 4) strategies with mathematical programming (Ray, 1985; Arnade, 1998;); 5) strategies based on entropy (Lence and Miller, 1998; Paris and Howitt, 1998).

The objective of the present study was to present a strategy of qualification of relative productivity with

constantes con insumos fijos por unidad de actividad (Just *et al.*, 1990); 4) estrategias con programación matemática (Ray, 1985; Arnade, 1998); 5) estrategias basadas en entropía (Lence y Miller, 1998; Paris y Howitt, 1998).

El objetivo del presente trabajo fue mostrar una estrategia de calificación de la productividad relativa de rodales con varias especies a través de un índice de eficiencia derivado de funciones de distancia. El índice derivado es relativo a la máxima altura que puede alcanzar una o varias especies en el sitio dadas sus edades (o una variable que aproxime la edad –proxy– para las especies latifoliadas) y otros factores fijos asociados al sitio. La metodología es importante porque: 1) permite definir un indicador de productividad del suelo independiente de una especie de referencia; 2) el indicador de productividad mejora la estimación de la productividad total del sitio, entendiendo ésta como la producción maderable de toda la población en un rodal durante un periodo.

MATERIALES Y MÉTODOS

Marco teórico sobre funciones de distancia

Una relación de producción con varios productos se puede describir con un conjunto de funciones de producción sólo bajo ciertas circunstancias (Mittelhammer *et al.*, 1981). Pero una función de distancia proporciona una descripción más amplia de una función de producción de una unidad productiva (UP) dado uno o varios insumos, o bien, uno a varios productos. Para ilustrar una función de distancia considere una UP con tecnología S , que describe la posible transformación de un conjunto de N insumos $\mathbf{x} (\mathbf{x} \in \mathfrak{R}_+^N)$ en un conjunto de M productos $\mathbf{y} (\mathbf{y} \in \mathfrak{R}_+^M)$. En la Figura 1 se muestra el conjunto $P(\mathbf{x})$ de combinaciones de producción de 2 productos (y_1 y y_2) a partir de un conjunto de insumos \mathbf{x} . Las combinaciones eficientes de producción (A , B y D) están definidas por la línea límite (frontera de posibilidades de producción) del conjunto $P(\mathbf{x})$ de combinaciones, mientras que las ineficientes (*e.g.* C) están definidas al interior de la frontera.

La función de distancia de producto³ de Shephard (Shephard, 1970) se define como el recíproco de la máxima expansión de productos (\mathbf{y}) dada una cantidad de insumos \mathbf{x} ; esta expansión se expresa como: $D_O(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [\max \{ \delta : (\mathbf{x}, \delta \mathbf{y}) \in S \}]^{-1}$ (Cornes, 1992), donde δ es el coeficiente que divide al vector de productos \mathbf{y} para lograr la frontera de posibilidades de producción, que permite caracterizar toda la tecnología dado que puede definirse en forma continua (Färe y Primont, 1995). En la Figura 1, la máxima expansión proporcional de \mathbf{y} a partir de C se define por la razón OA/OC ; así, la distancia de C a la frontera es $D_O(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = OC/OA$. Esta relación radial se puede manejar en múltiples dimensiones (productos) y considerando uno o varios insumos.

³ Se puede realizar la misma representación en el espacio de insumos y se obtiene una función de distancia con base en insumos ♦ The same representation can be made in the inputs space, obtaining a distance function based on inputs.

stands with various species through an efficiency index derived from distance functions. The derived index is relative to the maximum height that can be reached by one or various species in the site given their ages (or a variable that approximates the age –proxy– for the hardwood species) and other fixed factors associated with the site. The methodology is important because: 1) it makes it possible to define an indicator of soil productivity independent of a reference species; 2) the indicator of productivity improves the estimation of the total productivity of the site, understanding this to be the timber production of the entire population in a stand during a given period.

MATERIALS AND METHODS

Theoretical framework of distance functions

A production relationship with various products can be described with a group of production functions only under certain circumstances (Mittelhammer *et al.*, 1981). However, a distance function provides a broader description of a production function of a productive unit (PU) given one or various inputs, or one to various products. To illustrate a distance function, consider a PU with technology S , that describes the possible transformation of a set of N inputs $\mathbf{x} (\mathbf{x} \in \mathfrak{R}_+^N)$ in a set of M products $\mathbf{y} (\mathbf{y} \in \mathfrak{R}_+^M)$. The set $P(\mathbf{x})$ of combinations of production of 2 products (y_1 and y_2) from a set of inputs \mathbf{x} is shown in Figure 1. The efficient combinations of production (A , B and D) are defined by the frontier line (production possibility frontier) of the set $P(\mathbf{x})$ of combinations, whereas the inefficient ones (*e.g.* C) are defined inside the frontier.

Shephard's product distance function³ (Shephard, 1970) is defined as the reciprocal of the maximum expansion of products (\mathbf{y}) given an amount of input \mathbf{x} ; this expansion is expressed as: $D_O(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [\max \{ \delta : (\mathbf{x}, \delta \mathbf{y}) \in S \}]^{-1}$ (Cornes, 1992), where δ is the coefficient that divides the vector of products \mathbf{y} to achieve the production possibility frontier, which makes it possible to characterize all of the technology, given that it can be defined continuously (Färe and Primont, 1995). In Figure 1, the maximum proportional expansion of \mathbf{y} from C is defined by the ratio OA/OC ; thus the distance from C to the frontier is $D_O(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = OC/OA$. This radial relationship can be used in multiple dimensions (products) and considering one or various inputs.

The simplest form to estimate the Shephard distance is with DEA type models (Simar, 1996) by solving the following linear programming problem (Färe *et al.*, 1994; Romero, 1985) for each PU (companies, industries, states):

$$D_O(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{\theta_k, \delta_{k^*}} \delta_{k^*} \quad (1)$$

La forma más simple para estimar la distancia de Shephard es con modelos de frontera tipo DEA (Simar, 1996) resolviendo el siguiente problema de programación lineal (Färe *et al.*, 1994; Romero, 1985) para cada UP (empresas, industrias, estados):

$$D_O(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{\theta_k, \delta_{k^*}} \delta_{k^*} \quad (1)$$

sujeto a,

$$\sum_{k=1}^N \theta_k y_{jk} \geq y_{jk}^* \delta_{k^*} \quad \forall j = 1, 2, \dots, J$$

$$\sum_{k=1}^N \theta_k x_{hk} \leq x_{hk}^* \quad \forall h = 1, 2, \dots, H$$

$$\sum_{k=1}^N \theta_k f_{lk} \leq f_{lk}^* \quad \forall l = 1, 2, \dots, L$$

$$\theta_k \geq 0, \delta_{k^*} \geq 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, N$$

donde, k es el conjunto de unidades productivas (UP's) cuya eficiencia se determinará (k^* es una UP particular, es decir, cuya eficiencia relativa se evaluará); j es el conjunto de productos; h es el conjunto de insumos asignables; l el conjunto de insumos fijos^[4]; θ_k es una variable decisional que representa una ponderación de la k -ésima UP; δ_{k^*} es el índice de eficiencia, que es igual a 1 si la UP tiene la máxima eficiencia, de otra forma es mayor a la unidad. Además, y_{jk}^* y x_{hk}^* representan la producción del j -ésimo producto y el uso del h -ésimo insumo de la UP.

Chambers *et al.* (1996) y Färe y Grosskopf (2000) extendieron el concepto de distancia radial modelando la expansión en la dirección de un solo producto (denominado producto guía), que definieron como distancia direccional (\bar{D}_O)^[5]. En la Figura 1 se muestra que la \bar{D}_O del punto C se puede medir sobre el producto y_1 (CD) o el y_2 (CB); para la \bar{D}_O está definida por $(OO_1 + CD)/OO_1$. La estimación de \bar{D}_O con modelos de frontera tipo DEA se realiza resolviendo el siguiente problema de programación lineal (Färe y Grosskopf, 2000)^[6]:

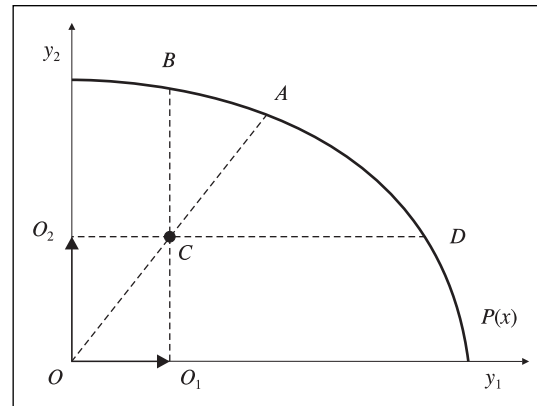


Figura 1. Frontera de posibilidades de producción y función de distancia.

Figure 1. Production possibility frontier and distance function.

subject to

$$\sum_{k=1}^N \theta_k y_{jk} \geq y_{jk}^* \delta_{k^*} \quad \forall j = 1, 2, \dots, J$$

$$\sum_{k=1}^N \theta_k x_{hk} \leq x_{hk}^* \quad \forall h = 1, 2, \dots, H$$

$$\sum_{k=1}^N \theta_k f_{lk} \leq f_{lk}^* \quad \forall l = 1, 2, \dots, L$$

$$\theta_k \geq 0, \delta_{k^*} \geq 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, N$$

where k is the set of productive units (PU's) whose efficiency will be determined (k^* is a particular PU, that is, whose relative efficiency will be evaluated); j is the set of products; h is the set of assignable inputs; l is the set of fixed inputs^[4]; θ_k is a decisional variable that represents a weight of the k -th PU; δ_{k^*} is the efficiency index, which is equal to 1 if the PU has the maximum efficiency, otherwise it is greater than the unit. Furthermore, y_{jk}^* and x_{hk}^* represent the production of the j -th product and the use of the h -th input of the PU.

⁴ Los insumos fijos se usan indistintamente para generar todos los productos, mientras que los asignables están definidos para generar un producto en particular. \diamond Fixed inputs are used indistinctly to generate all products, while the assignable ones are designed to generate a particular product.

⁵ Una función de distancia direccional con referencia al i -ésimo producto $[\bar{D}_O(\mathbf{x}, y_i, \mathbf{y}_{-i}; \mathbf{g})]$ se define como:

$\bar{D}_O(\mathbf{x}, y_i, \mathbf{y}_{-i}; \mathbf{g}) = \max \{ \delta : (y_i, \mathbf{y}_{-i}) + \delta \mathbf{g} \in P(\mathbf{x}) \}$ donde, y_i denota el i -ésimo producto; \mathbf{y}_{-i} se refiere al vector de productos a excepción del i -ésimo; el vector \mathbf{g} denota las direcciones en las cuales los productos son expandidos. Para una evaluación en el i -ésimo producto, este vector se define como $\mathbf{g} = (y_i, 0)$ y las demás variables tienen la misma notación que en la definición de la distancia radial. \diamond A directional distance function with reference to the i th product $[\bar{D}_O(\mathbf{x}, y_i, \mathbf{y}_{-i}; \mathbf{g})]$ is defined as:

$\bar{D}_O(\mathbf{x}, y_i, \mathbf{y}_{-i}; \mathbf{g}) = \max \{ \delta : (y_i, \mathbf{y}_{-i}) + \delta \mathbf{g} \in P(\mathbf{x}) \}$ where, y_i is the i th product \mathbf{y}_{-i} refers to the vector of products, except the i th; the \mathbf{g} vector denotes the directions in which the products are expanded. For an evaluation in the i th product, this vector is defined as $\mathbf{g} = (y_i, 0)$ and the rest of the variables have the same notation as in the definition of radial distance.

⁶ Färe y Grosskopf (2000) muestran que existe una relación de equivalencia entre ambas medidas de distancia definida por: $D_O(\mathbf{x}, y, \mathbf{y}_{-i}) = 1 / [1 + \bar{D}_O(\mathbf{x}, y_i, \mathbf{y}_{-i}; y_i, \mathbf{y}_{-i})]$. \diamond Färe and Grosskopf (2000) show that there exist an equivalence relationship between both distance measures defined by $D_O(\mathbf{x}, y, \mathbf{y}_{-i}) = 1 / [1 + \bar{D}_O(\mathbf{x}, y_i, \mathbf{y}_{-i}; y_i, \mathbf{y}_{-i})]$.

$$\bar{D}_O(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i, \mathbf{y}_{-i}; \mathbf{g}) = \max_{\theta_k, \delta_{k^*}} \delta_{k^*} \quad (2)$$

sujeto a,

$$\sum_{k=1}^N \theta_k y_{jk} \geq y_{jk}^* (1 + \delta_{k^*}) \quad \forall j = 1, 2, \dots, J$$

$$\sum_{k=1}^N \theta_k x_{hk} \geq x_{hk}^* \quad \forall h = 1, 2, \dots, H$$

$$\sum_{k=1}^N \theta_k f_{lk} \geq f_{lk}^* \quad \forall l = 1, 2, \dots, L$$

$$\theta_k \geq 0, \delta_{k^*} \geq 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, N$$

donde las variables y coeficientes tienen la misma notación que en el problema (1).

**Aplicación de la función de distancia
en la estimación de calidad de sitio**

La estimación de productividad del sitio a través de IS se basa en el supuesto de que el crecimiento en altura es independiente de la densidad y está correlacionado con la producción maderable. En este sentido, el crecimiento en altura de cada especie puede considerarse como un producto, cuyos insumos fijos son las características del sitio disponibles para la producción de “altura” de todas las especies en el sitio, mientras que el insumo asignable para cada especie es el tiempo que tarda la especie en lograr la altura definida como producto. Con estas consideraciones es posible aplicar los mismos principios descritos en la sección anterior para calcular un indicador de eficiencia de cada rodal en la producción de altura de varias especies de árboles resolviendo la formulación 1 para estimar distancia radial, o la formulación 2 para la distancia direccional. En tales formulaciones sólo es necesario sustituir la altura de la *j*-ésima especie en el *k*-ésimo sitio por *y_{jk}*; la edad o Proxy de edad de la *h*-ésima especie en el *k*-ésimo sitio por *x_{hk}*; la disponibilidad de *l*-ésimo insumo fijo en el *k*-ésimo sitio por *f_{lk}*; el subíndice *k** representará productos e insumos del rodal analizado; *δ_{k*}* será el inverso de la distancia, esto es, el inverso de la eficiencia relativa del rodal para producir alturas de diferentes especies. De aquí, $\frac{1}{\delta_{k^*}}$ puede definirse como un estimador de la calidad del sitio considerando el crecimiento en altura de todas las especies en el sitio.

Los insumos fijos en el sitio pueden incluir pendiente, profundidad del suelo, cantidad de materia orgánica, o exposición, entre otros, hasta la composición química o características físicas del suelo en cada sitio. Para la edad (insumo asignable) se debe incluir una restricción para cada especie o grupo de especies que se analicen. En algunas especies es difícil estimar la edad y una variable aproximada (Proxy) es el diámetro medido a 1.3 m de altura (DAP). Sin embargo, esta variable no es independiente de la densidad por lo que se debe usar con cautela.

Chambers *et al.* (1996) and Färe and Grosskopf (2000) extended the concept of radial distance by modeling the expansion in the direction of a single product (called guide product), which they defined as directional distance (\bar{D}_O)^[5]. In Figure 1 it is shown that the \bar{D}_O of point *C* can be measured over the product *y₁* (*CD*) or the *y₂* (*CB*); for the \bar{D}_O it is defined by $(OO_1 + CD)/OO_1$. The estimation of \bar{D}_O with DEA type frontier models is carried out solving the following linear programming problem (Färe and Grosskopf, 2000)^[6]:

$$\bar{D}_O(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i, \mathbf{y}_{-i}; \mathbf{g}) = \max_{\theta_k, \delta_{k^*}} \delta_{k^*} \quad (2)$$

subject to,

$$\sum_{k=1}^N \theta_k y_{jk} \geq y_{jk}^* (1 + \delta_{k^*}) \quad \forall j = 1, 2, \dots, J$$

$$\sum_{k=1}^N \theta_k x_{hk} \geq x_{hk}^* \quad \forall h = 1, 2, \dots, H$$

$$\sum_{k=1}^N \theta_k f_{lk} \geq f_{lk}^* \quad \forall l = 1, 2, \dots, L$$

$$\theta_k \geq 0, \delta_{k^*} \geq 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, N$$

where the variables and coefficients have the same notation as in problem (1).

**Application of the distance function
in the estimation of site quality**

The estimation of site productivity through SI is based on the assumption that the growth in height is independent of density and is correlated to timber production. In this sense, the growth in height of each species can be considered as a product, whose fixed inputs are the characteristics of the site available for the production of “height” of all of the species of the site, whereas the assignable input for each species is the time that each species takes to reach the height defined as product. With these considerations, it is possible to apply the same principles described in the previous section to calculate an efficiency indicator of each stand in the production of height of various species of trees solving either formulation 1 for estimating radial distance, or formulation 2 for the directional distance. In these formulations it is only necessary to substitute the height of the *j*-th species in the *k*-th site by *y_{jk}*; the age or Proxy of age of the *h*-th species in the *k*-th site by *x_{hk}*; the availability of the *l*-th fixed input in the *k*-th site by *f_{lk}*; the subindex *k** will represent products and inputs of the stand being analyzed; *δ_{k*}* will be the inverse of the distance, that is, the inverse of the relative efficiency of the stand to produce heights of different species. From here, $\frac{1}{\delta_{k^*}}$ can be defined as an estimator of the quality of the site considering the height growth of all of the species in the site.

El problema debe resolverse para cada rodal cambiando los elementos de la mano derecha de cada restricción $(x_{hk}^*, y_{jk}^* \text{ y } f_{jk}^*)$ de acuerdo a las características del rodal analizado. Para resolver el problema se elaboró un sistema de cómputo compuesto por una interfaz que define las características del problema (distancia radial o direccional) y el número de productos (y su tipo) e insumos a considerar. La interfaz genera una matriz de programación lineal en formato MPS con las especificaciones del problema; llama a las rutinas de programación lineal del sistema MINOS (Murtagh y Saunders, 1998), lee el resultado y lo registra en un archivo de salida donde, además de los valores de la función objetivo, se guardan los valores de las variables duales. Este procedimiento se realiza en forma iterativa para cada rodal de toda la base de datos. Una vez realizada la estimación para cada rodal se analizaron los índices de sitio relativos, para lo cual: 1) se compararon con los índices de sitio tradicionales; 2) se relacionaron con la producción bruta de cada rodal para verificar si reflejan su productividad.

Estimación de la producción bruta de los rodales muestra

La productividad de un sitio se define no sólo por sus insumos fijos sino por las características de la población, entre las que sobresalen, densidad, estructura y composición. La densidad y composición son las más relevantes en la determinación de la productividad. La composición se considera en la determinación de una medida de eficiencia que integra todas las especies; así, para efectos de comparación es muy importante controlar por densidad. Sin embargo, es prácticamente imposible encontrar rodales mezclados con la misma densidad y en diferentes condiciones de sitio a aquellos donde se ha monitoreado su productividad. Por tanto, se diseñó una estrategia basada en el procedimiento de la diferencia algebraica (Borders *et al.*, 1984) para aproximar el crecimiento de los rodales seleccionados a una densidad base. Para ello se supone un modelo de tendencia general que describe el crecimiento poblacional en volumen; en este caso se asumió el modelo logístico (Lotka, 1925):

$$\frac{dV}{dt} = rV \left[1 - \frac{V}{K} \right] \quad (3)$$

donde, la producción en volumen por unidad de tiempo (dV/dt) depende de la densidad (medida en términos del volumen -V-), y los parámetros, tasa intrínseca de crecimiento poblacional (r), y capacidad de carga (K). Siguiendo el procedimiento de la diferencia algebraica, se puede suponer que a una densidad base (V_0) el modelo puede describir apropiadamente el crecimiento:

$$\frac{dV_0}{dt} = rV_0 \left[1 - \frac{V_0}{K} \right] \quad (4)$$

Suponiendo una capacidad de carga constante para (3) y (4), se despeja K en (3) y se sustituye en (4), y se tiene:

The fixed inputs in the site can include slope, soil depth, amount of organic matter, or aspect, among others, even the chemical composition or physical characteristics of the soil in each site. For age (assignable input), a restriction should be included for each species or group of species to be analyzed. In some species it is difficult to estimate the age, and an approximate (Proxy) variable is the diameter measured at 1.3 m height (DBH). However, this variable is not independent of density, thus it should be used with caution.

The problem should be solved for each stand changing the elements on the right side of each restriction $(x_{hk}^*, y_{jk}^* \text{ and } f_{jk}^*)$ according to the characteristics of the stand being analyzed. To solve the problem, a computer system was made composed of an interface that defines the characteristics of the problem (radial or directional distance) and the number of products (and their type) and inputs to consider. The interface generates a linear programming matrix in MPS format with the specifications of the problem; it calls the routines of linear programming of the MINOS system (Murtagh and Saunders, 1998), reads the result and registers it in an exit file where, in addition to the values of the objective function, the values of the dual variables are recorded. This procedure is carried out in iterative form for each stand of the entire data base. Once the estimation has been made for each stand, the relative site indices are analyzed, for which: 1) they were compared with the traditional site indices; 2) they were related with the gross production of each stand to verify if their productivity is reflected.

Estimation of gross production of the sample stands

The productivity of a site is defined not only by its fixed inputs but also by the characteristics of the population, among which density, structure and composition are outstanding. Density and composition are the most relevant in the determination of productivity. Composition is considered in the determination of a measurement of efficiency that integrates all of the species; thus, for the purpose of comparison, control by density is very important. However, it is practically impossible to find mixed stands with the same density and under different site conditions from those in which productivity has been monitored. Therefore, a strategy was designed that was based on the procedure of the algebraic difference (Borders *et al.*, 1984) to approximate the growth of the selected stands at a base density. For this purpose, a general tendency model is assumed that describes the population growth in volume; in this case the logistic model was assumed (Lotka, 1925):

$$\frac{dV}{dt} = rV \left[1 - \frac{V}{K} \right] \quad (3)$$

where the production in volume per time unit (dV/dt) depends on the density (measured in terms of volume -V-), and the parameters, intrinsic rate of population growth (r), and carrying capacity (K). Following the procedure of the algebraic difference, it can be assumed that at a base density (V_0) the model can appropriately describe growth:

$$\frac{dV_0}{dt} = rV_0 \left[1 - \frac{V_0}{1 - \frac{dV}{dt} \left(\frac{1}{rV} \right)} \right] \quad (5)$$

$$\frac{dV_0}{dt} = rV_0 \left[1 - \frac{V_0}{K} \right] \quad (4)$$

que estima el crecimiento esperado (dV_0/dt) a la densidad base (V_0) de acuerdo al crecimiento (dV/dt) y volumen actuales (V). Esta expresión permite comparar las tasas de crecimiento de poblaciones con densidades diferentes, suponiendo que el crecimiento sigue el modelo logístico y que hay un buen ajuste del modelo (3).

Datos

Los datos provienen de 36 parcelas permanentes con dos remediciones (1982 y 1986) del área experimental Cielito Azul, ubicada entre 24° 22' y 24° 23' N y 105° 53' y 105° 54' O, en el municipio de San Dimas, Estado de Durango. La topografía del área es ondulada a plana, con una pendiente promedio de 15% y una altitud media de 2500 m. El sustrato se caracteriza por una asociación de cambisol éutrico, predominando suelos limo-arcillosos y limo-arenosos con pH de 5.0 y con un promedio de 5 cm de espesor de materia orgánica. El clima del área es templado semifrío subhúmedo, con lluvias en verano (800 mm promedio) y algunas precipitaciones invernales (10.2 mm). La vegetación arbórea está constituida por estratos con especies de los géneros *Quercus* y *Pinus*^[7], dominando sobre la mayoría de ellas *Pinus cooperi* Blanco y *Pinus durangensis* Mart., así como diversos géneros de vegetación arbustiva y herbácea. El bosque es de tipo incoetáneo con diámetros entre 5-80 cm y varias categorías sin frecuencias. El área basal promedio fluctúa entre 12 y 23 m² ha⁻¹.

El área tiene una superficie de 53 ha donde se establecieron 36 sitios permanentes de investigación silvícola (SPIS) divididos en cuatro cuadrantes de 25×25 m. Cada cuadrante se considera una parcela experimental donde se registra ubicación de cada árbol, especie y tipo, así como registro continuo de variables: diámetro normal, diámetro del tocón, grosor de la corteza, condición de daño, altura total, altura del fuste limpio, clase o dominancia, piso, vitalidad, tendencia dinámica y proyecciones de copa; además se registran variables de sitio (exposición, pendiente y profundidad del suelo). La exposición se midió en azimut; a fin de modelar la relación esperada (ya que las exposiciones noreste son más húmedas que las suroeste) el valor se transformó con la expresión:

$$\overline{\text{Exposición}} = \text{Sen}(\text{Radianes}(\text{Azimut} + 45)) + 1$$

Para este trabajo se derivaron otras variables como altura dominante por especie y edad, calculadas con el promedio de las alturas y edades del 10% de los árboles más altos de la especie o

Assuming a constant carrying capacity for (3) and (4), K is solved in (3) and is substituted in (4), and the following expression is obtained:

$$\frac{dV_0}{dt} = rV_0 \left[1 - \frac{V_0}{1 - \frac{dV}{dt} \left(\frac{1}{rV} \right)} \right] \quad (5)$$

which estimates the expected growth (dV_0/dt) at the base density (V_0) according to the current growth (dV/dt) and volume (V). This expression makes it possible to compare the growth rates of populations with different densities, assuming that the growth follows the logistic model and that there is a good fit of the model (3).

Data

The data from 36 permanent plots with two re-measurements (1982 and 1986) from the experimental area Cielito Azul, located between 24° 22' and 24° 23' N and 105° 53' and 105° 54' W, in the municipality of San Dimas, State of Durango were used. The topography of the area is undulated to flat, with an average slope of 15% and a mean altitude of 2500 m. The substrate is characterized by an association of eutric cambisol, predominating clay-loam and sandy-loam soils with pH of 5.0 and with an average thickness of 5 cm of organic matter. The climate of the area is sub-humid semi-cold temperate, with rains in summer (800 mm average) and some winter precipitations (10.2 mm). The arboreal vegetation is comprised of strata with species of the genera *Quercus* and *Pinus*^[7], predominating over most of these *Pinus cooperi* Blanco and *Pinus durangensis* Mart., as well as diverse genera of shrubs and herbaceous vegetation. The forest is uneven-aged with diameters between 5-80 cm and various categories without frequencies. The average basal area fluctuates between 12 and 23 m² ha⁻¹.

The area has a surface of 53 ha where 36 permanent forest investigation sites were established (SPIS) divided into four squares of 25×25 m. Each square is considered an experimental plot where location of each tree, species and type are registered, as well as continuous registration of variables: normal diameter, stump diameter, bark thickness, damage condition, total height, clear stem height, class or dominance, canopy, vitality, dynamic tendency and crown projections; in addition, site variables were registered (aspect, slope and soil depth). Aspect was measured in azimuth; in order to model the expected relationship (given that the northeast aspects are more humid than the southeast ones), the value was transformed with the expression:

⁷ Las especies presentes en toda el área experimental se clasificaron dentro de los siguientes grupos: *Pinus cooperi* Blanco, *P. durangensis* Mart, *P. hartwegii* Lindl, *P. oocarpa* Schiede ex Schltdl., *P. ayacahuite* Ehrenb. ex Schltdl., *P. teocote* Schltdl. et Cham, *Alnus*, *Arbutus*, *Abies* y *Quercus* ❖ Species present in the whole experimental area were classified within the following groups: *Pinus cooperi* Blanco, *P. durangensis* Mart, *P. hartwegii* Lindl, *P. oocarpa* Schiede ex Schltdl., *P. ayacahuite* Ehrenb. ex Schltdl., *P. teocote* Schltdl. et Cham, *Alnus*, *Arbutus*, *Abies* and *Quercus*.

grupo de especies en el rodal. Para propósitos comparativos también se calculó IS según modelos definidos (Valles *et al.*, 1998) y el volumen total de cada parcela experimental. El crecimiento se estimó como la diferencia de volumen total entre mediciones sucesivas.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Funciones de distancia evaluadas

La distancia (eficiencia) se puede estimar con base en una sola especie (algo similar a la estimación con IS), un grupo de especies o todas las especies en la población. Además, se puede estimar considerando sólo las edades (o diámetros para algunas especies) como insumos asimilables por especie, o bien adicionando insumos fijos como características fisiográficas o del suelo (pendiente, exposición y profundidad del suelo). En el Cuadro 1 se muestran las distintas formulaciones del problema de estimación de la distancia que se consideraron.

El *Pinus cooperi* Blanco se tomó como especie guía por ser el pino más abundante en el área de estudio y porque 96% de los sitios contaba con una mínima proporción de esta especie, suficiente para estimar la eficiencia. Se dividió la estimación entre pinos y todas las especies dado que la edad en las especies de hojosas se aproximó a través del DAP y era importante identificar diferencias.

Efecto de insumos fijos

Las soluciones derivadas de formulaciones que incluyeron restricciones de insumos fijos tuvieron menor variación (para el valor de eficiencia δ_{j*}) y presentaron valores significativamente menores de eficiencia, independientemente del grupo de especies analizadas o del grupo de especies usadas como especie guía. La menor variación en las estimaciones se debe a dos efectos: primero, los insumos fijos son sustitutos entre

$$\overline{\text{Aspect}} = \text{Sen}(\text{Radians}(\text{Azimuth} + 45)) + 1$$

For this work other variables were derived such as dominant height per species and age, calculated with the average of the heights and ages of 10% of the highest trees of the species or group of species in the stand. For comparative purposes, SI was also calculated according to defined models (Valles *et al.*, 1998) and the total volume of each experimental plot. Growth was estimated as the difference of total volume among successive measurements.

RESULTS AND DISCUSSION

Distance functions evaluated

The distance (efficiency) can be estimated based on a single species (something similar to the estimation with SI), a group of species or all of the species in the population. In addition, it can be estimated considering only the ages (or diameters for some species) as allocatable inputs per species, or conditioning fixed input such as physiographic characteristics of the soil (slope, aspect and soil depth). The different formulations of the problem of estimation of distance that were considered are shown in Table 1.

Pinus cooperi Blanco was used as guide species because it is the most abundant pine in the area of study and because 96% of the sites had a minimum proportion of this species, enough to estimate efficiency. The estimation was divided among pines and all of the species given that the age in the hardwood species was approximated with the DBH, and it was important to identify differences.

Effect of fixed input

The solutions derived from formulations that included restrictions of fixed inputs had less variation

Cuadro 1. Restricciones probadas para resolver el problema de distancia.

Table 1. Restrictions tested for solving the problem of distance.

Clave de la formulación	Grupos de especies consideradas	Especies guía (direccional) como producto	Presencia de insumos fijos en la estimación
A	Sólo pinos	<i>Pinus cooperi</i> Blanco	No
B	Sólo pinos	<i>Pinus cooperi</i> Blanco	Sí
C	Sólo pinos	Todas las pináceas	No
D	Sólo pinos	Todas las pináceas	Sí
E	Hojosas y pinos	<i>Pinus cooperi</i> Blanco	No
F	Hojosas y pinos	<i>Pinus cooperi</i> Blanco	Sí
G	Hojosas y pinos	Todas las pináceas	No
H	Hojosas y pinos	Todas las pináceas	Sí
I	Hojosas y pinos	Todas las especies	No
J	Hojosas y pinos	Todas las especies	Sí

si; segundo, hay cierto grado de sustitución entre insumos fijos y edad de cada especie o grupo de especies. Estos dos efectos de sustitución hacen que la eficiencia estimada de cada sitio sea más alta a medida que se incorporan más especies al análisis, dado que una mayor cantidad de especies aprovecha más eficientemente los recursos de un sitio. La sustitución entre insumos fijos se puede apreciar en la Figura 2, donde se muestran los inversos de las variables duales (dw_{ff}/d_{j*}) para los insumos fijos pendiente y exposición. La relación es negativa y suponiendo una eficiencia constante ($d_{j*}=0$) se obtiene una tasa negativa de sustitución entre factores^[8].

La sustitución entre factores fijos y edad de cada especie o grupo de especies se puede comprobar observando que la presencia de insumos fijos hace que las restricciones asociadas con la edad de cada especie sean menos activas, dado que las variables duales (λ_{lk*})^[9] asociadas a estas restricciones tienden a ser más pequeñas (menos determinantes de la eficiencia), independientemente del grupo de especies analizadas o del grupo de especies usadas como especies guía.

Los dos efectos de sustitución muestran que si los insumos fijos no son limitantes en un sitio entonces es posible identificar mayores diferencias en productividad, que se pueden atribuir exclusivamente al desempeño intrínseco de la o las especies presentes en el sitio. En la Figura 3 se muestra λ_{lk*} para el insumo fijo pendiente del terreno en relación al valor de la pendiente, donde se aprecia que para valores de pendiente superiores a 10% este insumo pierde efecto como determinante de la eficiencia ($\lambda_{lk*} \rightarrow 0$). Sin embargo, cuando este insumo es relativamente abundante (pendiente menor a 10%) tiene mayor impacto en la determinación de la eficiencia (λ_{lk*} crece), aunque este impacto es más variable. Tal variación está relacionada a que diferentes combinaciones de especies aprovechan de forma diferente los recursos, por lo que unas condiciones de sitio son apropiadas para algunas especies pero inapropiadas para otras (Pretzsch, 2003; Zeide, 2004). Esto se puede verificar al contrastar las Figuras 3b y 3d donde, a medida que la estimación de eficiencia se direcciona a más especies, la variación en eficiencia se reduce notablemente.

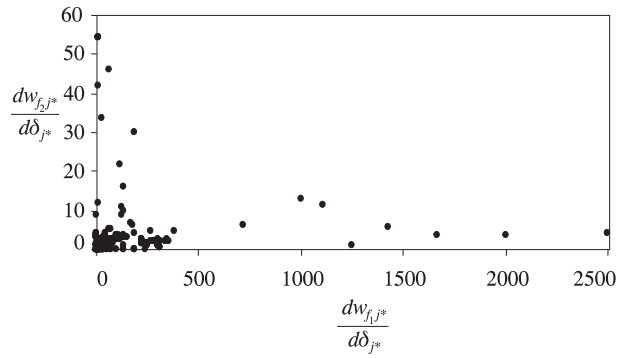


Figura 2. Sustitución entre factores fijos: f_{1k} =pendiente, y f_{2k} =exposición.
Figure 2. Substitution among fixed factors: f_{1k} =slope, and f_{2k} =aspect.

(for the efficiency value δ_{j*}) and presented efficiency values that were significantly lower, regardless of the group of species analyzed or of the group of species used as guide species. The lower variation in the estimations is due to two effects: first, the fixed inputs being substitutes among each other, second, there is a certain degree of substitution among fixed inputs and age of each species or group of species. These two effects of substitution cause the estimated efficiency of each site to be higher as more species are incorporated into the analysis, given that a higher amount of species makes more efficient use of the resources of a site. The substitution among fixed inputs can be observed in Figure 2, where the inverses of the dual variables (dw_{ff}/d_{j*}) for the fixed inputs slope and aspect are shown. The relationship is negative, and assuming a constant efficiency ($d_{j*}=0$), a negative substitution rate is obtained among factors^[8].

The substitution among fixed factors and age of each species or group of species can be confirmed by observing that the presence of fixed inputs causes the restrictions associated with the age of each species to be less active, given that the dual variables (λ_{lk*})^[9] associated with these restrictions tend to be smaller (fewer determinants of efficiency), regardless of the group of species analyzed or the group of species used as guide species.

The two effects of substitution show that if the fixed inputs are not limiting in a site, then

⁸ Si se supone que estas dos variables tienen una relación lineal $\frac{df_{2k}^*}{d\delta_{j*}} = \alpha - \beta \frac{df_{1k}^*}{d\delta_{j*}}$, entonces para un valor de eficiencia constante, esto es $d\delta_{j*}=0$ se obtiene que la tasa de sustitución entre estos dos factores es negativa y constante: df_{1k}^*/df_{2k}^* . ❖ If it is assumed that these two variables have a linear relationship $\frac{df_{2k}^*}{d\delta_{j*}} = \alpha - \beta \frac{df_{1k}^*}{d\delta_{j*}}$, then for a constant efficiency value, that is $d\delta_{j*}=0$ it is obtained that the substitution rate between these two factor is negative and constant: df_{1k}^*/df_{2k}^*

⁹ La variable dual se define como: $d\delta_{k*}/df_{lk}^* = \lambda_{lk*}$. ❖ The dual variable is defined as: $d\delta_{k*}/df_{lk}^* = \lambda_{lk*}$

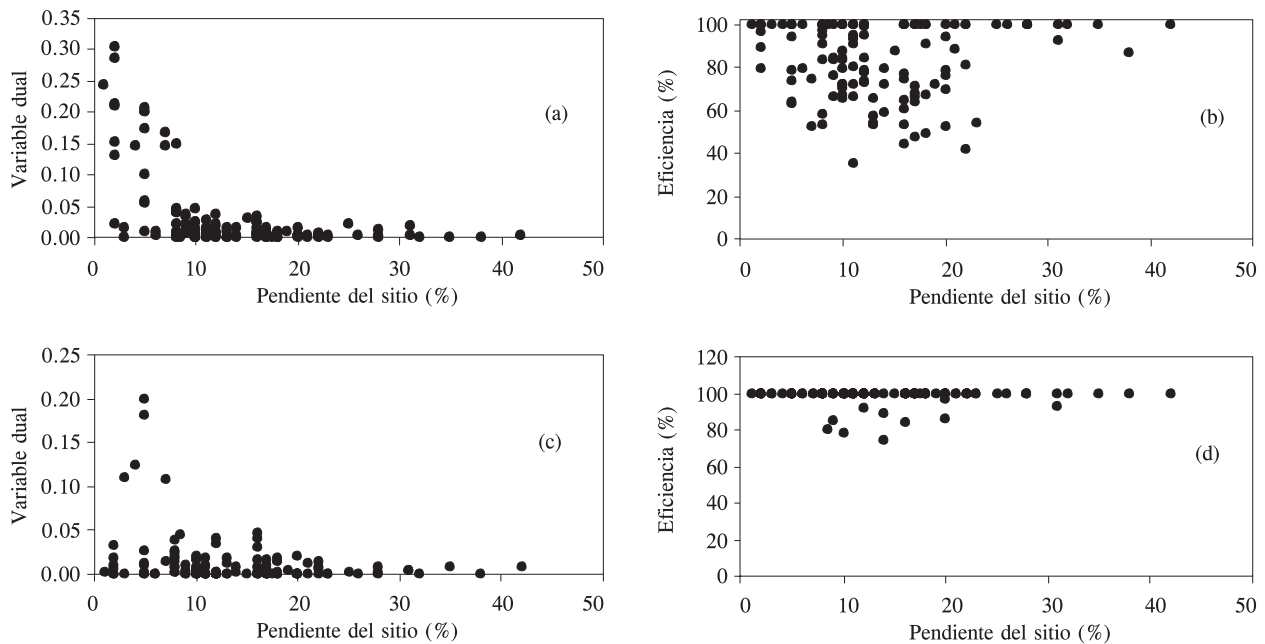


Figura 3. Variable dual y eficiencia en relación a la cantidad de insumo fijo para estimaciones de eficiencia direccional a una especie de pino (a y b) y a todas las especies de pino (c y d).

Figure 3. Dual variable and efficiency in relation to the amount of fixed input for efficiency estimations directed toward one pine species (a and b) and toward all pine species (c and d).

Lo anterior ofrece dos resultados de interés: 1) la inclusión de insumos fijos reduce el efecto de la relación altura-edad en la estimación de eficiencia; 2) a medida que la estimación se direcciona a más especies guía, se aprecia un mejor uso de los recursos fijos haciendo más difícil diferenciar la productividad entre sitios, efecto que se amplifica por la sustitución entre factores fijos y cuando éstos son abundantes.

Efecto de la especie guía y especies consideradas en la formulación

Los resultados del análisis sobre el efecto de los insumos fijos en la determinación de la productividad muestran que se obtiene una mejor discriminación entre sitios si no se incluyen los insumos fijos. Por ello, en el siguiente análisis sólo se consideran las soluciones a los problemas A, C, E, G e I definidos en el Cuadro 1.

Cuando las formulaciones usan todas las especies como producto, las soluciones (estimaciones de productividad) presentan mayor variación a medida que se emplean menos especies guía (formulaciones E, G e I en el Cuadro 2). Este resultado es similar cuando sólo se emplean las especies de pino como producto (formulaciones A y C en el Cuadro 2). El resultado es concordante en el sentido de que la distancia a la frontera de posibilidades de producción será más variable a medida que se usen menos especies guía,

it is possible to identify greater differences in productivity, which can be attributed exclusively to the intrinsic performance of the one or more species present in the site. In Figure 3 it is shown λ_{lk^*} for the fixed input slope of the terrain in relation to the value of the slope, where it is observed that for slope values slope of more than 10%, this input loses effect as determinant of the efficiency ($\lambda_{lk^*} \rightarrow 0$). However, when this input is relatively abundant (slope less than 10%), it has greater impact on the determination of the efficiency (λ_{lk^*} grows) although this impact is more variable. This variation is related to the fact that different combinations of species use the resources differently, thus some site conditions are appropriate for some species but are inappropriate for others (Pretzsch, 2003; Zeide, 2004). This can be verified by contrasting Figures 3b and 3d, where, as the efficiency estimation points toward more species, the variation in efficiency is noticeably reduced.

The above offers two results of interest: 1) the inclusion of fixed inputs reduces the effect of the relationship height-age in the estimation of efficiency; 2) as the estimation points toward more guide species, a better use of the fixed resources is observed, making it more difficult to differentiate the productivity among sites, effect that is amplified by the substitution among fixed factors and when they are abundant.

Cuadro 2. Indicadores de bondad de ajuste de la relación lineal entre eficiencia y productividad a una edad base.
Table 2. Goodness of fit statistics for the linear relationship between efficiency and productivity at a base age.

Clave de la formulación	Relación eficiencia-producción por periodo		Varianza del modelo
	β (significancia)	R ²	
A	0.498 (NS)	0.001	25.05
C	9.189 (**)	0.105	22.28
E	6.201 (NS)	0.004	24.78
G	3.225 (**)	0.044	23.79
I	3.117 (**)	0.045	23.65
Índice de sitio	0.002 (NS)	0.001	25.08

dado que la representación de la distancia es más pobre. El caso extremo ocurre cuando el sitio se califica usando una sola especie guía que crece en condiciones poco apropiadas. El resultado es un valor muy alto de distancia originado por una alta ineficiencia del sitio para mantener a esa especie, aunque ello no significa que las otras especies tengan el mismo bajo desempeño en ese sitio.

Las estimaciones de eficiencia direccional usando una especie o grupo de especies guía regularmente tienen el mismo sentido (eficiente o no eficiente), aunque el orden de magnitud varía directamente de acuerdo a la cantidad de especies involucradas como productos. Así, las soluciones con mayor número de especies presentan mayor variación en la estimación (comparando las soluciones de la formulación A con la E), aunque el valor promedio resultó muy similar (Cuadro 2). Comparando las formulaciones C y G se obtiene el mismo resultado, la variación para G es mayor que para C. Una explicación de este resultado es que al existir más especies la distancia direccional debe representar la distancia sobre un mayor número de planos, resultando en una mayor variación.

Es importante señalar que las estimaciones de eficiencia radial (formulaciones C e I) tienen la más alta relación en el orden de magnitud y el sentido (correlación=0.38). Por el contrario, las estimaciones de eficiencia direccional son muy dispares con relación tanto al número de especies involucradas como con las estimaciones de eficiencia radial.

Selección del mejor estimador de eficiencia

Dada la alta variación entre las estimaciones de eficiencia para las diferentes formulaciones fue necesario tener un criterio de comparación de acuerdo al objetivo primario de la evaluación de la calidad de sitio. Para ello se siguió el procedimiento de estimación de productividad a una densidad base definido en Materiales y Métodos. El ajuste del modelo logístico generó estimadores altamente significativos con las siguientes características:

Effect of the guide species and species considered in the formulation

The results of the analysis on the effect of the fixed inputs in the determination of productivity demonstrate that a better discrimination among sites is obtained if the fixed inputs are not included. Therefore, in the following analysis only the solutions to problems A, C, E, G and I, defined in Table 1, are considered.

When the formulations include all of the species as product, the solutions (estimations of productivity) present higher variation as fewer guide species are used (formulations E, G and I in Table 2). This result is similar when only the pine species are used as product (formulations A and C in Table 2). The result concurs in the sense that the distance to the production possibility frontier will be more variable as fewer guide species are used, given that the representation of distance is poorer. The extreme case occurs when the site is qualified using only one guide species that grows under inappropriate conditions. The result is a very high value of distance caused by a high inefficiency of the site for maintaining this species, although this does not mean that the other species have the same low performance in this site.

The estimations of directional efficiency using a species or group of guide species regularly have the same direction (efficient or inefficient), although the order of magnitude varies directly according to the amount of species involved as products. Thus, the solutions with the highest number of species present the highest variation in the estimation (comparing the solutions of formulation A with E), although the average value was very similar (Table 2). Comparing formulations C and G, the same result is obtained, the variation for G is higher than for C. One explanation for this result is that with the existence of more species, the directional distance should represent the distance over a higher number of planes, resulting in greater variation.

It is important to point out that the estimations of radial efficiency (formulations C and I) have

$$\frac{dV}{dt} = 0.0774 V \left[1 - \frac{V}{665.3212} \right] \quad (**)$$

La bondad de ajuste del modelo fue relativamente alta con una R^2 ajustada=0.65, suma de cuadrados del error=1120 y un tamaño de muestra $n=117$. Con estos datos se calcularon los valores de crecimiento esperado (dV_0/dt) a la densidad base ($V_0=150$)^[10] y dados el crecimiento y volumen ($dV/dt, V$) en la primera medición (1982). Luego, se compararon estos valores con las estimaciones de eficiencia a través de un modelo lineal simple:

$$\frac{dV_0}{dt} = \alpha + \beta \delta_{k*} \quad (6)$$

donde, α y β son parámetros del modelo y las demás variables tienen la misma nomenclatura. Para comparar el IS se sustituyó δ_{k*} por el valor de IS en el modelo (6). En el Cuadro 2 se muestra el resumen de los indicadores de bondad de ajuste para las combinaciones probadas. En este Cuadro resalta la nula relación entre el IS y la productividad total maderable del sitio (Figura 4a); incluso, es muy inferior a cualquiera de los índices de eficiencia estimados con diferentes formulaciones.

Al comparar sólo los índices de eficiencia es relevante que aquellos direccionados a una sola especie guía (formulaciones A y E), también tuvieron poca relación con la estimación de la productividad de todas las especies. Esto refuerza el resultado de que el uso de una especie guía mediante IS o funciones de distancia, sólo es buen estimador de la productividad del sitio en rodales uniespecíficos. En el Cuadro 2 se muestra que las formulaciones G e I son muy similares en cuanto a

the highest relationship in the order of magnitude and direction (correlation=0.38). In contrast, the estimations of directional efficiency are very different with respect to both the number of species involved and the estimations of radial efficiency.

Selection of the best estimator of efficiency

Given the high variation among the estimations of efficiency for the different formulations, it was necessary to have a criterion of comparison according to the primary objective of the evaluation of the site quality. For this purpose, the productivity estimation procedure was followed at a base density defined in Materials and Methods. The fit of the logistic model generated estimators that were highly significant with the following characteristics.

$$\frac{dV}{dt} = 0.0774 V \left[1 - \frac{V}{665.3212} \right] \quad (**)$$

The goodness of fit of the model was relatively high with an adjusted $R^2=0.65$, sum of squares of the error=1120 and a sample size $n=117$. With this data the expected growth values were calculated (dV_0/dt) at the base density ($V_0=150$)^[10] and given the growth and volume ($dV/dt, V$) in the first measurement (1982). Then, these values were compared with the estimations of efficiency by means of a simple linear model:

$$\frac{dV_0}{dt} = \alpha + \beta \delta_{k*} \quad (6)$$

where, α and β are parameters of the model and the other variables have the same nomenclature. To

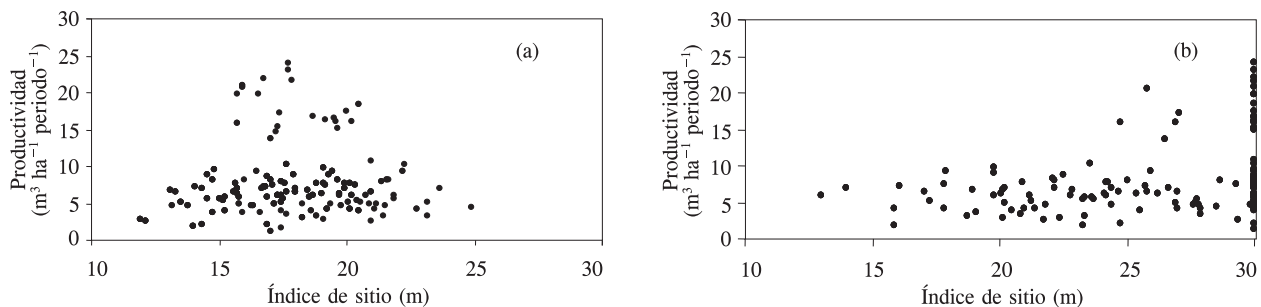


Figura 4. Relación entre el estimador de productividad (m³ ha⁻¹ periodo⁻¹) con índice de sitio (a) y eficiencia (b).
Figure 4. Relationship between the estimator of productivity (m³ ha⁻¹ period⁻¹) with site index (a) and efficiency (b).

¹⁰ La densidad se definió de acuerdo al promedio de densidad de todos los rodales en la muestra y está medida en m³ ha⁻¹ ❖ Density was defined according with average density of all the stands in the sample and is measured in m³ ha⁻¹.

ajuste, aunque difieren en que existe mayor variación en las estimaciones con la formulación I. Gran parte de esta variación adicional se debe a que en los tres grupos de latifoliadas (*Alnus*, *Arbutus* y *Quercus*) no existe una aproximación apropiada de la edad y en cambio se usó el DAP como variable aproximada, lo cual introduce mayor variación dado que esta variable es altamente dependiente de la densidad. Esto se hace más evidente cuando se comparan las estimaciones obtenidas con las formulaciones G y C que colocan a ésta última como la mejor formulación para estimar la productividad de los sitios. En la Figura 4b se muestra la relación entre productividad maderable total del sitio y la estimación de eficiencia con la formulación C, con una clara correlación positiva entre ellas, la que aumenta en su varianza al calificarse el sitio como más eficiente. Esta variación se esperaba, ya que muestra que otras variables como composición (en términos de la proporción de especies) y estructura tienen también un efecto importante en definir la eficiencia.

El resultado parece aún más lógico si se considera que en promedio los sitios muestra tienen una baja composición de especies latifoliadas (33% en número de individuos, 21% en área basal y 13% en volumen total). Así, su omisión en la estimación de la productividad total del sitio no es muy relevante.

CONCLUSIONES

La medida de eficiencia relativa como estimador de la calidad de sitio en rodales multiespecíficos a través de funciones de distancia proporciona una mejor estimación de la productividad del sitio que las estimaciones tradicionales de IS. La comparación entre diferentes estimaciones de productividad mostró que al aumentar la diversidad de especies el sitio tiende a usarse más eficientemente. Así, la evaluación de la calidad de sitio de rodales multiespecíficos debe ser relativa a la composición del rodal y no a una sola especie. Este efecto se agudiza porque algunas especies que integran al rodal pueden sustituir la abundancia de algún insumo fijo por la escasez de otro (sustitución entre factores fijos). Lo anterior muestra que para tener una buena estimación de calidad de sitio en presencia de varias especies es necesario incorporar la composición y quizá la estructura del sitio en la estimación. Sin embargo, ello requiere más estudios ya que el grado de sustitución entre insumos de acuerdo a la combinación de especies existentes incorpora un nivel adicional de complejidad al tratar de aislar el efecto.

La alternativa de evaluar eficiencia en presencia de varias especies es buena y más efectiva que usar el IS referido a una sola especie. Además, la estimación

compare the SI, δ_{k*} was substituted by the value of SI in model (6). The summary of the indicators of goodness of fit for the combinations tested is shown in Table 2. In this table, the null relationship between the SI and the total timber productivity of the site is outstanding (Figure 4a); which furthermore, is much lower than any of the efficiency indices estimated with different formulations.

When only the efficiency indices are compared, it is relevant that those directed towards a single guide species (formulations A and E) also had little relationship to the estimation of productivity of all of the species. This strengthens the result that the use of a guide species through SI or distance functions, is only a good estimator of the site productivity in unispecific stands. In Table 2 it is shown that formulations G and I are very similar with respect to adjustment, although they differ in that there is greater variation in the estimations with formulation 1. A large part of this additional variation is due to the fact that in the three groups of hardwoods (*Alnus*, *Arbutus* and *Quercus*), there is no appropriate approximation of age, and instead, the DBH was used as a proxy variable, which introduced greater variation given that this variable is highly dependent on density. This becomes more evident when a comparison is made of the estimations obtained with formulations G and C which places the latter as the best formulation for estimating productivity of the sites. In Figure 4b it is shown the relationship between total timber productivity of the site and the estimation of efficiency with formulation C, with a clear positive correlation among them, which increases in variance as the site is qualified as more efficient. This variation was expected, given that it shows that other variables such as composition (in terms of the proportion of species) and structure also have an important effect in defining efficiency.

The result seems even more logical if it is considered that on the average, the sites have a low composition of hardwood species (33% in number of individuals, 21% in basal area and 13% in total volume). Thus their omission in the estimation of total productivity of the site is not very relevant.

CONCLUSIONS

The measurement of relative efficiency as estimator of site quality in multi species stands through distance functions provides a better estimation of the productivity of the site than the traditional SI estimations. The comparison among different productivity estimations showed that with the increase of diversity of species, the site tends to be used more efficiently. Thus, the

radial usando todas las especies dentro del sitio como especies guía es significativamente mejor que cualquier otra estimación de distancia. Sin embargo, en rodales con mayor composición de especies latifolias es importante encontrar una variable o conjunto de variables que aproximen apropiadamente la edad del arbolado dominante, de otra forma las estimaciones podrían no ser tan favorables.

LITERATURA CITADA

- Arnade, C. 1998. Using a programming approach to measure international agricultural efficiency and productivity. *J. Agric. Econ.* 49:67-84.
- Avery, T. E., and H. E. Burkhardt. 1994. *Forest Measurements*. 4th Edition. McGraw Hill, Inc. New York. 475 p.
- Borders, B. E., R. L. Bailey, and K. D. Ware. 1984. Slash pine site index from polymorphic model by joining (splining), nonpolynomial segments with an algebraic difference method. *For. Sci.* 30(2): 411-423.
- Chambers, R. G., Y. H. Chung, and R. Färe. 1996. Benefit and distance functions. *J. Econ. Theory*: 407-419.
- Clutter, J. L., J. C. Fortson, J. C. Piennar, L. V. Brister and R. L. Bailey. 1983. *Timber Management: A Quantitative Approach*. Wiley. New York. 333 p.
- Cornes, R. 1992. *Duality and Modern Economics*. Cambridge Univ. Press. 290 p.
- Debreu, G. 1951. The coefficient of resource utilization. *Econometrica* 19: 273-292.
- Dixon, B. L., and R. H. Hornbaker. 1992. Estimating the technology coefficients in linear programming models. *Am. J. Agr. Econ.* 74: 280-290.
- Färe R., and D. Primont. 1995. *Multi-Output Production and Duality: Theory and Applications*. Kluwer Academic Pub. Boston, USA. 263 p.
- Färe, R., and S. Grosskopf. 2000. Theory and applications of directional distance functions. *J. Productivity Analysis* 13: 93-103.
- Färe, R., S. Grosskopf, M. Norris, and Z. Zhang. 1994. Productivity growth, technical progress and efficiency change in industrialized countries. *Am. Econ. Review* 84: 66-83.
- Just, R. E., D. Zilberman, and E. Hochman. 1983. Estimation of multicrop production functions. *Am. J. Agr. Econ.* 65: 770-780.
- Just, R. E., D. Zilberman, E. Hochman, and Z. Bar-Shira. 1990. Input allocation in multicrop systems. *Am. J. Agr. Econ.* 72: 200-209.
- Lence, S. H., and D. J. Miller. 1998. Recovering output-specific inputs from aggregate input data: A generalized cross-entropy approach. *Am. J. Agr. Econ.* 80: 852-857.
- Lotka, A. J. 1925. *Elements of Physical Biology*. Williams and Wilkins, Baltimore. 219 p.
- Mittelhammer, R. C., S. C. Matulich, and D. Bushaw. 1981. On implicit forms of multiproduct-multifactor production functions. *Am. J. Agric. Econ.* 63: 164-168.
- Murtagh, B. A., and M. A. Saunders. 1998. *MINOS 5.5. User's Guide*. Department of Operations Research, Stanford University, Stanford, USA. 150 p.
- Nin, A., Ch Arndt, T. W. Hertel, and Paul V. Preckel. 2003. Bridging the gap between total and partial factor productivity measures using directional distance functions. *Am. J. Agr. Econ.* 85(4): 928-942.
- Oliver, C. D., and B. C. Larson. 1996. *Forest Stand Dynamics*. McGrawHill. New York. 467 p.
- Olson, D. F., and L. Della-Bianca. 1959. Site index comparisons for several tree species in the Virginia-Carolina Piedmont. evaluation of site quality of multi species stands should be relative to the composition of the stand and not to a single species. This effect is magnified because some species that integrate the stand can substitute the abundance of some fixed input with the scarcity of another (substitution among fixed factors). The above shows that to have a good estimation of site quality in the presence of various species, it is necessary to incorporate the composition and perhaps the structure of the site in the estimation. However, this requires more studies, given that the degree of substitution among inputs according to the combination of existing species incorporates an additional level of complexity when trying to isolate the effect.
- The alternative of evaluating efficiency in the presence of various species is good and more effective than using the SI referred to a single species. Furthermore, radial estimation using all of the species within the site as guide species is significantly better than any other distance estimation. However, in stands with a higher composition of hardwood species, it is important to find a variable or group of variables that appropriately approximate the age of the dominant trees, otherwise, the estimations might not be so favorable.
- End of the English version—
- *—
- USDA For. Serv., Southeast For. Exp. Stn. Sta. Paper 104. 9 p.
- Paris, Q. 1989. A sure bet on symmetry. *Am. J. Agr. Econ.* 71: 344-351.
- Paris, Q., and R. E. Howitt. 1998. An analysis of ill-posed production problems using maximum entropy. *Am. J. Agr. Econ.* 80: 124-138.
- Payandeh, B., and Y. Wang. 1994. Relative accuracy of a new base-age invariant site index model. *For. Sci.* 40(2): 341-358.
- Pretzsch, H. 2003. The elasticity of growth in pure and mixed stands of Norway spruce (*Picea abies* [L.] Karst.) and common beech (*Fagus sylvatica* L.). *J. For. Sci.* 49(11): 491-501.
- Ray, S. 1985. Methods for estimating the input coefficients for linear programming models. *Am. J. Agr. Econ.* 67: 660-665.
- Romero, C. 1985. Multi-objective and goal programming approaches as a distance function model. *J. Opt. Res. Soc.* 36(3): 249-251.
- Shephard, R. W. 1970. *Theory of Cost and Production Functions*, Princeton University Press. Princeton. New Jersey. 247 p.
- Simar, L. 1996. Aspects of statistical analysis in DEA-type frontier models. *J. Productivity Analysis* 7(2-3): 177-185.
- Torres R., J. M., O. S. Magaña T., y C. Rodríguez F. 1992. Evaluación de la productividad forestal. *In: Reporte Técnico, Programa de Modernización del Segundo Estudio Dasonómico de los Bosques del Estado de México. PROBOSQUE, Rancho Guadalupe, Edo. de México.* pp: 237-269.
- Valles G., A. G., J. M. Torres R., A. Velázquez M., y C. Rodríguez F. 1998. Relación de nueve índices de competencia con el crecimiento en diámetro de *Pinus cooperi* Blanco. *Agrociencia* 32(3): 255-260.
- Zeide, B. 2004. Optimal stand density: a solution. *Can. J. For. Res.* 34: 846-854.