

Geometrizar

Patrick Popescu-Pampu
Universidad de Lille

Traducción de Arturo Romero Contreras

El presente artículo¹ es una continuación de mi artículo “Algebraizar”.² En él explicaba, por medio de un ejemplo simple, una manera general de abordar los problemas matemáticos: su “algebraización”. Aquí deseo ilustrar con otro ejemplo sencillo una segunda manera general de abordar esos problemas: la “geometrización”.

Numerosos libros de matemáticas recreativas contienen problemas sobre las maneras de atravesar un río: un cierto número de personajes debe atravesar el río con ayuda de una barca, res-

¹ Publicado originalmente bajo el título « Géométriser » (CNRS, 2014). Disponible en: <http://images.math.cnrs.fr/Geometriser>. Los editores agradecen al autor y al CNRS su autorización para reproducir y traducir este artículo en el presente volumen de *Tópicos*. Los diagramas fueron elaborados *ex profeso* por el traductor, con fidelidad a las imágenes que se muestran en el texto original.

² En el artículo se cita lo siguiente: “Algebraizar una cuestión significa reformularla de manera que se pueda tratar por medio de cálculos [...] algebraicos. Pero eso no implica necesariamente los números reales. Aquellos pueden operar con ‘números’ en un sentido generalizado. Uno de los retos de la algebraización consiste en encontrar, dado un problema, los tipos de ‘números’ que son apropiados para resolverlo por medio de cálculos” [N. del. T]. Popescu-Pampu (8 de noviembre 2013). Disponible en: <http://images.math.cnrs.fr/Algebriser.html>

petando ciertas restricciones. Este tipo de problemas tienen una edad venerable, ya que los ejemplos más antiguos que se conocen datan de la época de Carlomagno. En efecto, uno encuentra los tres problemas siguientes en las *Propositiones ad acuendos juvenes*,³ escrito por Alcuin.⁴

Proposición 17. De tres hombres y sus hermanas

Tres hombres, cada uno con una hermana, deben atravesar un río, evitando que un hombre esté en presencia de una mujer que no sea su hermana. No tienen más que un bote que no puede transportar más que dos personas.

¿Quién puede decir cómo pueden atravesar el río para que nunca una mujer sea dejada en compañía de otro hombre si su hermano no está presente?

Proposición 18. De un hombre, una cabra y un lobo

Un hombre debía atravesar un río con un lobo, una cabra y una canasta con coles. Había ahí una barca, pero tan pequeña que sólo podían pasar con él el lobo, la cabra o la canasta con coles. No quería dejar la cabra con el lobo o con la canasta.

Dígame quien pueda cómo se las arreglará el hombre para transportar sin problemas al lobo, la cabra y las coles.

Proposición 19. De un marido y su esposa

Un hombre y su esposa pesan cada uno tanto como una carreta cargada. Sus dos hijos pesan en conjunto lo mismo que la carreta

³ Título que se puede traducir como “Proposiciones para aguzar la perspicacia de los jóvenes”. Retomo esta traducción, así como la de los tres problemas presentados aquí, de Charles-E. Jean, tal como lo publicó en el sitio *Récréomath*.

⁴ Alcuin vivió aproximadamente entre el 730 y el 804 [N. del T].

vacía. Los cuatro deben atravesar un río. Encontraron un bote que podía llevar como máximo el peso de una carreta.

¿Cómo pueden atravesar el río sin naufragar?

De estos tres problemas, el más conocido es probablemente el segundo, y el más complicado el primero. Pero con un poco de paciencia se llega a resolverlo sin ningún conocimiento matemático, por ensayos sucesivos, con el fin de abrirse un camino a través de las diversas pistas que aparecen en cada etapa.

En la frase anterior, *abrirse camino* parece una expresión metafórica, utilizada para designar el proceso de ensayos y errores que llevan a una solución. Quisiera presentar aquí otro método, que pasa por la traducción del problema a aquello de *abrirse camino yendo de un punto a otro en un cierto espacio*.

He leído este método en el muy agradable libro *Aventuras matemáticas*⁵ de Miguel de Guzmán. Guzmán lo ilustra primero sobre el segundo problema de la lista precedente, luego sobre una variante más simple del primero, sobre la cual no hay más que dos parejas de hermanos y hermanas. Este es el caso que retomo aquí.

El grafo de posibilidades

El punto de partida del método consiste en construir un *espacio* subyacente al problema, que yo llamaría el *grafo de posibilidades*.

En general, un *grafo* es un diagrama formado por *vértices* [o nodos] y *aristas* que los unen. En nuestro caso, cada vértice corresponde a una *configuración posible* de personajes, es decir, una configuración que respeta las restricciones del problema.

⁵ Se trata de una obra de matemáticas recreativas de nivel preparatoria publicado por Ediciones Pirámide de Madrid. Una traducción francesa con el título « Aventures Mathématiques » apareció en 1990 en Presses Polytechniques et Universitaires Romandes de « Laussane ». El método del cual hablo aquí es explicado en el capítulo 1 (Guzmán de Ozamiz, 1990).

Dos vértices se unen por una arista si uno puede pasar de una configuración a la otra en un solo viaje que respete las restricciones dadas.

Por ejemplo, la configuración inicial es aquella donde los cuatro personajes, *al igual que la barca* (¡que es un personaje del problema!) se encuentran en la orilla de partida. Otra configuración posible es aquella donde las damas se encuentran sobre la otra orilla con la barca y los caballeros sobre la orilla de partida. Se puede pasar de la configuración de partida a esta última en un solo viaje, por tanto, hay una arista que une los vértices asociados.

Designemos con D_1, D_2 a las dos damas y con M_1, M_2 a los caballeros (siendo M_i , claramente, el hermano de D_i). Designemos también la barca como B . Guzmán presenta cada configuración por un círculo dividido en dos con la ayuda del diámetro, donde las dos mitades representan las dos orillas y cada mitad contiene los nombres de los personajes que se encuentran en cada orilla. Así, las dos configuraciones del párrafo precedente están representadas por:

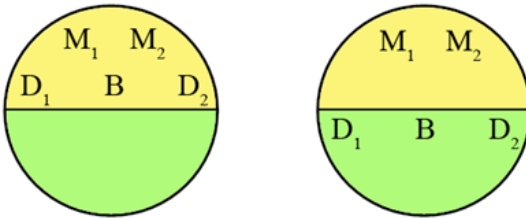


Figura 1.

Con un poco de trabajo, se puede dibujar entonces el grafo de nuestro problema. Para ello es conveniente colocar los discos de manera circular, luego trazar todos los segmentos que parten de una configuración dada hacia aquellas que le están asociadas en un viaje. Esto se realiza para cada configuración. La disposición

inicial de los discos es arbitraria, pero es bueno encontrar una manera sistemática de hacerlo, para estar seguros de que no se ha olvidado ninguna configuración.

He aquí el diagrama obtenido por Guzmán:

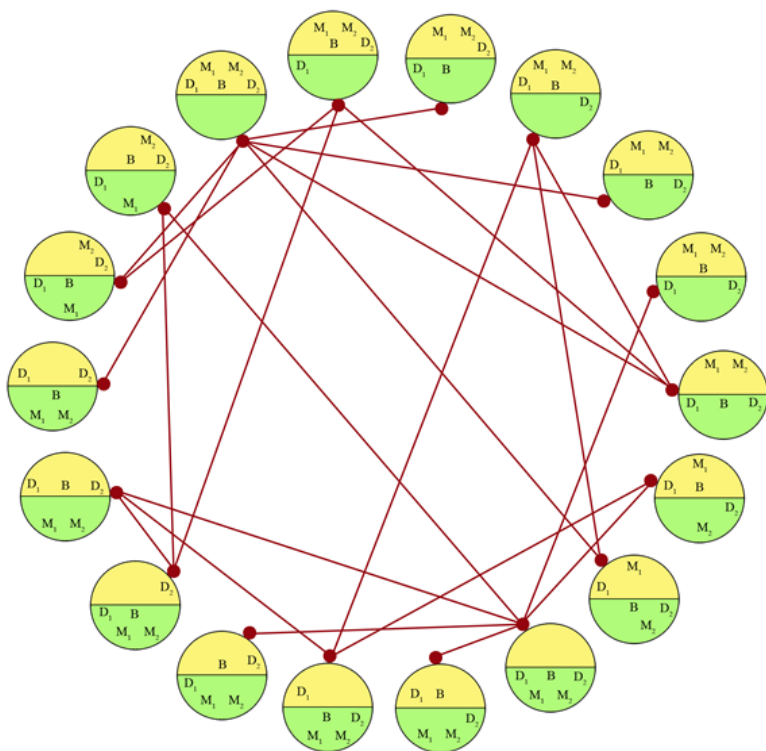


Figura 2

¿Comprende usted de qué manera dispuso los discos y cómo ello asegura que ninguna configuración haya sido olvidada? Tal vez usted los ha dispuesto de otra manera, pero no es grave, pues si ha trazado las aristas correctamente, el grafo obtenido es *el mismo*, eso que los matemáticos formulan diciendo que es *isomorfo* al grafo anterior. Más precisamente, el grafo de posibi-

lidades debe ser pensado en tanto que objeto *abstracto*, vivo en sí mismo, no en un ordinario y más familiar espacio ambiente. El dibujo en el plano no es sino una sombra. Sobre esta sombra ve uno los cruces entre las aristas que no están presentes en el grafo de posibilidades abstracto, y que no tendremos en cuenta para la solución de nuestro problema.

Ahora resulta fácil encontrar visualmente un camino que lleva de la configuración donde los personajes se encuentran en una orilla a aquella donde todos se encuentran en la otra orilla. Por ejemplo:

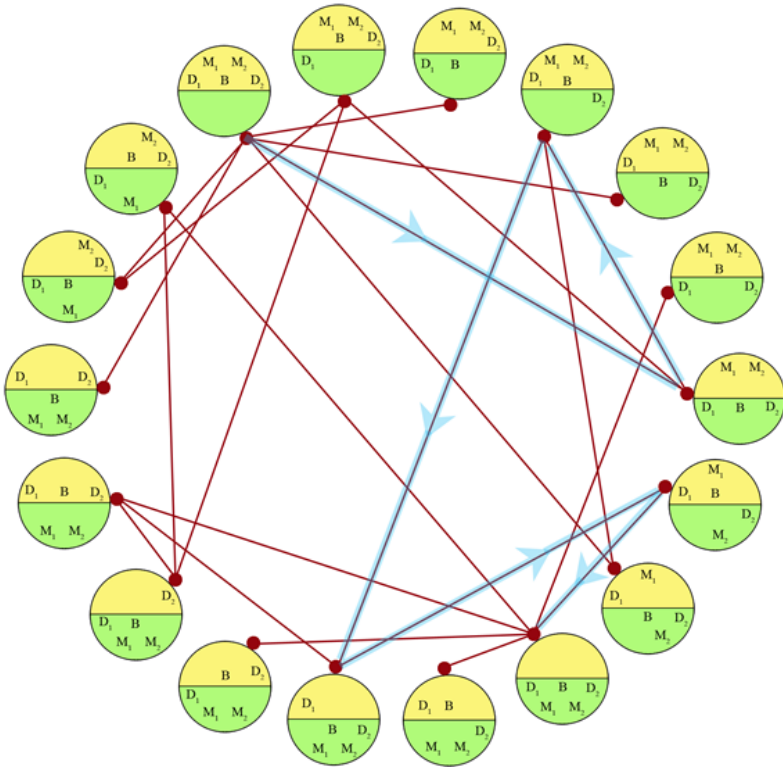


Figura 3.

Retorno al sentido de la “geometrización”

La solución anterior procede de la “geometrización” del problema. Pero, ¿qué significa eso en general? En el *Tesoro de la lengua francesa* encontramos las definiciones siguientes:

Definición: *Geometrizar: volver geométrico.*

¡Ah! Hay que buscar también “geométrico”:

Definición: *Geométrico: A. Que se relaciona con la geometría. B. Que se caracteriza por formas relacionadas con la geometría.*

Bueno, hace falta todavía buscar el sentido de “geometría”:

Definición: *Geometría: Parte de las matemáticas que tiene por objeto el estudio del espacio y de las figuras que lo pueden ocupar.*

Estoy de acuerdo. Pero ¿qué es el “espacio”? Pues bien, es una noción que ha evolucionado increíblemente durante los dos últimos siglos. Si alrededor de 1800 se podía decir frecuentemente que se trataba del *espacio* de la geometría de Euclides, en nuestros días hay una plétora de objetos que los matemáticos han sido llevados a llamar por ese nombre.

¿Qué es aquello que hace que uno decida, en un momento dado, que un objeto de nuestro pensamiento pueda ser llamado “espacio”?

Una respuesta posible es:

Principio: *Se puede decir que un objeto es un “espacio” si se reconocen analogías suficientemente importantes entre ese objeto y el espacio euclidiano.*

Por ejemplo, si ahí se detectan figuras especiales, análogas a puntos, a rectas, a planos o a esferas en el espacio euclidiano. O bien, si uno puede desplazarse ahí de forma gradual.

Estos dos criterios son verificados por los grafos: poseen “puntos” (sus *vértices*) y “rectas” (sus *aristas*). Uno puede desplazarse aquí de manera gradual, circulando a lo largo de las aristas. ¡Basta ello para decretar que un grafo es un “espacio”!

De una cierta manera los grafos son los espacios más simples posibles: incluso si están constituidos por segmentos, que son de dimensión uno, se puede pensar que no tienen sino un conjunto finito de puntos, puesto que sus aristas materializan justamente las transiciones permitidas entre un punto y otro.⁶ Pero, tanto para el plano euclidiano, como para cualquier otro espacio, contemplarlos hace surgir una pregunta tras otra.

He aquí algunas a las cuales se puede responder jugando con la gráfica precedente:

- ¿Cuál es el número mínimo de viajes necesarios para que todo el mundo pase de una orilla a la otra? En otros términos, ¿cuál es la distancia entre los dos vértices correspondientes?
- ¿De cuántas maneras se puede hacer una travesía semejante de forma mínima?
- ¿Cuál es el *diámetro* del grafo, es decir, la más grande distancia entre dos vértices?
- ¿Se puede encontrar una representación en el plano de este grafo en la cual no aparezcan cruces suplementarios?
- (Para lectores más eruditos) ¿Cuál es el grupo de simetría del grafo?

La noción de *distancia* introducida en la primera pregunta pone en evidencia otra analogía de los grafos con el espacio de la geometría euclidiana: en ambos casos se puede definir la longitud de los caminos yendo de un punto a otro. En lo que concierne a los grafos, es posible hacerlo atribuyéndole a cada arista una longitud, luego sumando las longitudes de las aristas recorridas por el trayecto.

En la gráfica precedente de posibilidades, se atribuye a cada arista la longitud de 1. Esta convención hace suponer que el río

⁶ Se puede ver también sobre este tema el ejemplo de las cadenas de Markov, en: <http://images.math.cnrs.fr/Markov-et-la-Belle-au-bois-dormant.htm>

es atravesado cada vez en intervalos de tiempo de la misma duración. Pero se puede igualmente variar el problema teniendo en cuenta que las duraciones dependen de la persona que reme. Además, a cada arista se le asocia una longitud que represente la duración del viaje hecho con el remador asociado. Por ejemplo, si esta persona no sabe remar, se atribuye a la arista correspondiente una longitud infinita... lo que significa eliminar simplemente la arista del grafo.

Pero regresemos al caso más simple, donde no se toman en cuenta tales sutilezas ligadas a la diversidad de remadores. Si uno dibuja los grafos correspondientes a los tres problemas de pasajes de río planteados por Alcuin, se comprende visualmente por qué se podría tener la sensación de que el primer problema es el más difícil: se trata de un grafo que posee el número más grande de aristas.

Las dificultades de los problemas pueden entonces compararse gracias a su geometrización, comparando diversas características de los espacios asociados.

Retorno a los problemas de Alcuin

Los tres problemas de travesías de río planteados por Alcuin pueden complicarse a voluntad, aumentando el número de personajes presentes o las reglas de compatibilidad entre ellas e introduciendo eventualmente algunas islas en las cuales ciertos personajes pueden ser colocados temporalmente. Se podrá encontrar tales ejemplos en el capítulo “El juego de travesías en bote” del primer volumen de *Récreations mathématiques* de Lucas (1882).⁷ Cada uno de estos problemas puede geometrizarde la misma manera que en el ejemplo de Guzmán, traduciéndolo en la búsqueda de un camino que una dos vértices dados en un

⁷ Ya he hablado sobre un problema extraído de esta obra aquí: <http://images.math.cnrs.fr/L-eventail-mysterieux.html>

grafo. Pero los grafos asociados se vuelven rápidamente muy complicados y es imposible ingeniárselas para dibujarlos.

Resulta necesario programar una computadora para buscar semejante camino en nuestro lugar. Ello requiere *algebraizar*, por su parte, el problema geométrico, con el fin de volverlo calculable por una máquina.⁸

Llego así a un aspecto esencial de mi objetivo: los procesos de algebraización y de geometrización no bastan en general de manera aislada para resolver un problema. Hace falta combinarlos juiciosamente, realizando numerosas algebraizaciones y geometrizaciones sucesivas del problema de partida, o bien, de sus sub-problemas. Esto vale incluso si uno se ocupa de problemas etiquetados de manera diferente, por ejemplo, como “teoría de números”, “probabilidades” o “ecuaciones de derivadas parciales”. Geometrizar implica percibir aquí espacios subyacentes, algebraizarlos implica percibir los aspectos calculables.

Lo curioso es que la mayor parte de los matemáticos prefiere netamente uno de los dos métodos: sea que tienen un gusto pronunciado por las estructuras algebraicas y los algoritmos pero no “ven” geoméricamente, sea que no se sientan dichosos sino en tanto saben pensar un problema y su solución con la ayuda de un cierto tipo de espacio.

Adivine usted de qué lado se situaba Herman Weyl (1939: 500), quien escribió: “En este tiempo el ángel de la topología⁹ y el diablo del álgebra abstracta luchan por el alma de cada disciplina matemática”.¹⁰

⁸ Un método tal de algebraización es explicado en Borndörfer, R., Grötschel, M. & Löbel, A. (1995: 379-409).

⁹ La topología es la rama de la geometría que estudia los “espacios topológicos”. Sobre este tema se sugiere consultar varios artículos disponible en el sitio Images des Mathématiques: <http://images.math.cnrs.fr/Triangulations-de-la-terre-au.html>, <http://images.math.cnrs.fr/La-bande-que-tout-le-monde-connaît.html>, <http://images.math.cnrs.fr/La-conjecture-de-Poincaré.html>, <http://images.math.cnrs.fr/La-dualité-de-Poincaré.html>.

¹⁰ En el original en inglés: “In these days the angel of topology and the devil of abstract algebra fight for the soul of every individual discipline of mathematics” [N. del T.]

¡Por fortuna los gustos son variados! Es así solamente, después de haber experimentado múltiples algebraizaciones y geometrificaciones finas, permitiendo cada una descomponer el problema dado en sub-problemas, o de relacionarlo con otros problemas que parecían totalmente diferentes al inicio, que los problemas más profundos se ven finalmente resueltos por los esfuerzos combinados de generaciones de matemáticos más bien inclinados a la algebraización, o bien, a la geometrización. Estos esfuerzos dejan tras de sí vastas perspectivas de nuevos espacios, de nuevas estructuras algebraicas o de nuevos algoritmos, que engendran nuevas preguntas, que exigirán ser geometrizados, luego algebraizados, luego...

Pero ¿puede ser que estos métodos generales de transformación de problemas no basten y que sea necesario a veces aritmetizarlos o probabilizarlos? Seguramente, y puede ser que un voluntario nos explique en un café en qué consista ello...¹¹

Referencias

- BORNDÖRFER, Ralf; LOBEL, Andreas & Grötschel (1995). "Alcuin's transportation problems and integer programming". En P. L. Butzer, H. Th. Jongen, W. Oberschelp (eds.). *Charlemagne and His Heritage: 1200 Years of Civilization and Science in Europe*, vol. 2. The Mathematical Arts. Brepols/Turnhout/Bélgica. Konrad-Zuse-Zentrum Berlín.
- GUZMÁN OZAMIZ, Miguel de (1990). *Aventures Mathématiques*. Lausanne : Presses Polytechniques et Universitaires Romandes. [Versión en español: *Aventuras matemáticas. Una ventana hacia el caos y otros episodios*, 1987, Madrid, Ediciones Pirámide].
- LUCAS, Édouard (1882). *Récréations Mathématiques*, vol. 1. París: Gauthier-Villars.

¹¹ Efectivamente, mientras tanto, Nils Berglund propuso una explicación del procedimiento de probabilización. Disponible en: <http://images.math.cnrs.fr/Probabiliser> [N. del T].

POPESCU-PAMPU, Patrick (noviembre 2013). « Algébriser ». *Images des Mathématiques*. CNRS. Disponible en: <http://images.math.cnrs.fr/Algebriser.html?lang=fr>

_____ (2014). « Géométriser ». *Images des Mathématiques*. CNRS. Disponible en: <http://images.math.cnrs.fr/Geometriser>.

WEYL, H. (1939). “Invariants”. *Duke Mathematical Journal*, núm. 5, pp. 489–502.