Avatares de la forma.
Tópicos del Seminario, 42.
Julio-diciembre 2019, pp. 79-99.

El modelo THK. Abordaje de la filosofía de las matemáticas desde un punto de vista sintético

Oscar Javier Pérez Lora
Universidad Nacional de Colombia

Introducción

¿Cómo puede la filosofía abordar el desarrollo de la matemática contemporánea? ¿Qué criterios debe desarrollar una filosofía de las matemáticas respecto al desarrollo de la matemática real de los últimos dos siglos? Similar a las demás ciencias, la matemática ha logrado un alto nivel de abstracción que impide visualizar sus resultados de forma intuitiva. Pero adicional a la profunda abstracción, otro factor determinante ha sido la explosiva producción matemática en el último siglo que hace imposible seguirle la pista, tanto por la cantidad como por la diversidad de problemáticas tratadas en sus distintas ramas, pues "la alta especialización de la matemática hace muy difícil obtener un panorama de lo que sucede al interior de la misma" (Odifreddi, 2006: 19-21).

Es razonable cuestionar si esta proliferación se da en el desarrollo de un organismo que adquiere con el tiempo mayor cohesión y unidad, o si, por el contrario, se está convirtiendo en una torre de Babel de disciplinas aisladas. ¿Puede caracterizarse a la matemática como una ciencia con un objeto y un método únicos?

"En una palabra ¿existe hoy *una* matemática o *varias* matemáticas?" (Bourbaki, 1962: 36). No interesa dar una respuesta a esta pregunta sino sólo evidenciar que la riqueza de la matemática contemporánea escapa hasta para las mentes más brillantes de esta disciplina. El filósofo, si es que se atreve a aventurarse en este terreno, ha de ser consciente de que se arroja a un inmenso océano en el que puede navegar sin buenos resultados y perder con facilidad la orientación. Pero como en los tiempos de los grandes descubrimientos, será necesaria la guía de puntos fijos en el cielo y un trabajo aunado con los matemáticos que hoy en día desarrollan esta área del conocimiento.

Hasta el momento, la filosofía analítica ha realizado un importante programa de investigación en la filosofía de la lógica. No obstante, el presente texto toma como punto de inicio el hecho de que la lógica es sólo una parte de la matemática y, en cuanto tal, es incapaz de capturar su riqueza, variedad y profundidad. La imagen de Bertrand Russell de la lógica como la niñez de la matemática, y ésta como la adultez de aquélla, se da en el contexto de la búsqueda de los "fundamentos" a finales del siglo XIX y principios del siglo XX. Justamente, el teorema de incompletitud de Kurt Gödel (1931) echa por tierra cualquier pretensión de fundamentar o reducir la matemática, bien sea en el intuicionismo, la axiomática o el logicismo de Russell y Whitehead.

El enfoque tradicional de la filosofía analítica presenta, al menos, dos creencias erróneas respecto a la naturaleza de las matemáticas. En primer lugar, el supuesto de *invariabilidad ontológica y epistemológica*. Esto es, suponer que aun cuando la matemática avance, sus tipos de objetos y métodos se mantienen invariables; de ser así baste con entender la teoría de conjuntos y la lógica de primer orden para abordar el estudio de las matemáticas. En segundo lugar, y consecuencia del anterior, ignorar los nuevos avances y métodos debido a la creciente complejidad y especialización de los conocimientos matemáticos.

Estos supuestos tienen sentido de manera parcial en contextos limitados a matemáticas elementales y teoría de conjuntos. El sistema de axiomas Zermelo-Fraenkel ha demostrado que cualquier construcción matemática puede representarse dentro de una adecuada teoría de conjuntos, a partir de la lógica clásica de primer orden. No obstante, tales resultados tienen un valor lógico mas no matemático. Es una falaz extrapolación que reduce la riqueza de los diferentes *modos de hacer* de otras construcciones matemáticas a la teoría de conjuntos. Esta reducción se apoya en el supuesto de que todas las proposiciones matemáticas, entendidas como tautologías, son equivalentes entre sí. Por tanto, basta estudiar el espectro de las proposiciones elementales (Zalamea, 2009, 25-26).

> Sin embargo, creemos que estos dos supuestos ubicuos —no distinguir matemáticas elementales y avanzadas; no asumir una dualidad de tránsitos e invarianzas en matemáticas— valen solo *parcialmente*, en contextos restrictivos determinados, y consideramos que extrapolar esos supuestos al conjunto "real" de las matemáticas (y, en particular, a las matemáticas contemporáneas) constituye un profundo error metodológico (Zalamea, 2009: 22).

La filosofía analítica pretende mostrar la matemática como una continuidad y, en esa medida, se restringe al estudio de la lógica de primer orden y a la teoría de conjuntos como imagen de la matemática en su totalidad. "There is, of course, no sharp separation between the philosophy of mathematics and the philosophy of logic. The main issues and views of either discipline permeate those of the other" (Shapiro, 2005: 15). Asume, en ese sentido, conexiones restringidas a lo implícito que habrían de hacerse explícitas, algo que no constituye novedad en el sentido kantiano de lo analítico: "La lógica y la matemática también son aprióricas, pero no intentan articular algo que ya sabemos, sino que preguntan qué está implícito en las conexiones que ya conocemos o que podemos suponer hipotéticamente" (Tugendhat, 2003: 22). Pero como bien lo expresara el filósofo francés Albert Lautman: “Las matemáticas se presentan así como síntesis sucesivas, donde cada etapa es irreducible a la etapa anterior” (Lautman, 2011: 137).

Interesa, por tanto, acercarse filosóficamente a esa matemática real, entendida como la urdimbre de conocimientos, métodos y problemas aceptados por la comunidad matemática con la que se enfrenta el matemático en la práctica diaria de su disciplina. Pero, ¿cómo hacerlo? El presente artículo expone el modelo THK desarrollado por Fernando Zalamea como marco analógico en la propuesta de una filosofía sintética de la matemática contemporánea. A partir del estudio de las polaridades y la dialéctica de la matemática (uno-múltiple, positivo-negativo, discreto-continuo, etc.), formula este modelo como analogía del quehacer de la matemática moderna y contemporánea en la dinámica de *obstrucción-tránsito* aplicado a los matemáticos más relevantes (Zalamea, 2017).

Un importante referente en la elaboración del modelo THK es Albert Lautman (1908-1944), un conocedor de las técnicas matemáticas más avanzadas de su tiempo y muy cercano al grupo de Bourbaki.

> Se trata de un programa de comprensión de la creatividad matemática que se ve inundado por una polaridad irreductible entre lo ideal y lo real, y que resulta sencillamente incomprensible desde las perspectivas de la filosofía analítica, donde las polaridades “ideal” y “real” se consideran como sombras ficticias elaboradas en el lenguaje (Zalamea, 2011: 28).

El desconocimiento de la obra de Lautman obedece, en parte, al dominio intelectual de la filosofía analítica en el periodo de posguerra, así como a la nada fácil exigencia de abordar la matemática moderna como requisito de lectura para entender su filosofía.

Por otro lado, su prematura muerte en el contexto de la Segunda Guerra Mundial impidió que impulsara su obra. Luego de la invasión alemana a Francia, Lautman se unió a la Resistencia pero fue posteriormente capturado y ejecutado por el régimen nazi en el año de 1944. Se han realizado algunas reivindicaciones esporádicas de su obra, como la de Giles Deleuze en *Diferencia y repetición* (Capítulo 4 en "Síntesis ideal de la diferencia" de 1968), así como en algunos trabajos de Jean Petitot y Alan Badiou. Actualmente, la edición más completa de su obra está a cargo de Fernando Zalamea, publicada en el año 2011 por la Universidad Nacional de Colombia en colaboración con la Embajada de Francia en Bogotá, Colombia.

El modelo THK se enmarca en el enfoque de la *filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas* desarrollado por el propio Zalamea (Zalamea, 2016a). El término *sintética* apunta "al entorno relacional conjuntivo de la creación matemática y de una realidad velada con la que la invención se contrasta" (Zalamea, 2009: 11). Esto, en tanto que la matemática es un acto de creatividad humana, que al contrastar con una realidad invisible se descubre como visible. El "acercamiento de dialéctica, metafísica y matemáticas no es una mera casualidad, sino uno de los motores necesarios de la cultura" (Zalamea, 2011: 32). Por *filosofía* se entiende el ejercicio reflexivo de la razón sobre la razón, esto es, reflexionar sobre la matemática como producto genuino de la razón. En relación con *matemáticas* se refiere al extenso ámbito de construcciones matemáticas, más allá de codificaciones lógicas o conjuntistas. Por último, el término *contemporánea* delimita el estudio filosófico a la matemática posterior a 1950 hasta nuestros días (Zalamea, 2009: 11).

1. La dialéctica en la matemática contemporánea

Profundas polaridades o dialécticas rigen el desarrollo de la matemática. Por un lado, está lo *puntual* que representa el descenso a lo local, esto es, lo analítico, lo diferencial, lo tipificado y la lógica clásica. Es aquello que se expresa en la multiplicidad, lo discreto y lo positivo. Por otro lado, está lo *reticular*, ascenso a lo global a través de la síntesis, lo integral, lo arquetípico y la lógica intuicionista que se expresa en lo uno, lo continuo y lo negativo. Como se observa, se conforman diversas dialécticas entre análisis *versus* síntesis, diferencial *versus* integral, tipificado *versus* arquetípico y lógica clásica *versus* lógica intuicionista.

Pero contrariamente a suponer que esto sea una dificultad o imperfección del saber matemático, es justamente esta dualidad lo que constituye el "péndulo del saber". Existe un movimiento de ascenso y descenso entre lo reticular y lo puntual en sus diversas manifestaciones, entre lo local y lo global. Este movimiento es precisamente lo que una filosofía de las matemáticas debe capturar para comprender el desarrollo matemático.

Lo local representa obstrucción mientras que lo global representa tránsito. Eso quiere decir que este movimiento dialéctico encuentra obstrucciones en su desarrollo, pero esta misma obstrucción constituye la semilla del tránsito:

> La matemática se mueve en una incesante oscilación pendular entre reconocer *singularidades y rupturas* dentro de un contexto dado y, luego, tratar de superarlas e integrarlas como *regularidades o continuidades* dentro de otro nuevo contexto ampliado (Zalamea, 2015).

Un ejemplo quizá más palpable y cercano a la filosofía sea el caso de $\sqrt{2}$. En la escuela pitagórica todo ha de ser expresado como número o como fracción (razón) entre dos números. Sin embargo, de un triángulo rectángulo cuyos catetos son la unidad, no existe una razón que *conmesure* la hipotenusa. El descubrimiento de esta "inconmensurabilidad" da lugar a los irracionales, y tal como su nombre sugiere en este contexto, designa aquello que *no* es expresado por la razón (αλογος) o que *no* tiene razón (άρρητος) (Kline, 2016: 53-61).

Es difícil imaginar que se haya llegado a los números irracionales, y por extensión a la conformación de los números racionales, por otra vía que no fuera la obstrucción en los números naturales. En otras palabras, es imposible derivar los irracionales de los naturales porque los primeros "escapan" de los segundos;

constituyen la negación que emerge de su ámbito restringido (local). Así, los irracionales no son una continuidad de los naturales o enteros sino una ruptura que asciende a la conformación global de los reales. A su vez, el conjunto de los reales encontrará la obstrucción de $\sqrt{-1}$ que le llevará a los complejos. Este proceso de obstrucción/tránsito ocurre en los diferentes desarrollos y áreas de la matemática, y es preciso una filosofía de las matemáticas para identificar, caracterizar e interpretar este movimiento permanente. Existen *nuevos* elementos que escapan a través de la negación de sus componentes básicos. Esto quiere decir que tales componentes básicos son incapaces de contarnos toda la historia, y ello nos obliga a abandonar la orilla y sumergirnos en el vasto océano de las matemáticas.

2. Modelo THK de la filosofía matemática

El modelo THK ha presentado una evolución continua en su formulación. Nace como ejercicio de Fernando Zalamea en el *Seminario continuo de filosofía de las matemáticas. Epistemología e historia de las matemáticas*. La siguiente presentación del modelo THK se concentra en los desarrollos que se dieron en el Seminario durante el segundo semestre de 2016 y los dos semestres de 2017 (Zalamea, 2016b; Zalamea, 2017), principalmente. Este Seminario hace parte de un programa de largo aliento (2012-2018) con relación al estudio de las matemáticas modernas (1830-1950) y contemporáneas, desde 1950 al presente. El objetivo del Seminario consiste en producir nuevas aproximaciones al entendimiento de las génesis de la creatividad matemática avanzada. Para esto, el Seminario se divide en dos periodos: El primer periodo inicia en el año 2012 con el estudio del matemático francés Évariste Galois (2012-I). En lo sucesivo se ha realizado el estudio de los matemáticos más relevantes, en su orden: Riemann (2012-II), Poincaré (2013-I), Cantor (2013-II), Hilbert (2014-I), Gödel (2014-II) y Grothendieck. A este último el Seminario le dedicó tres semestres, del primero de 2015 al primero de 2016. Este periodo se dedica a la exploración *local* de los matemáticos más relevantes en el desarrollo de la disciplina.

En el segundo semestre de 2016 se inicia el segundo periodo del Seminario con el estudio de las polaridades de lo *múltiple* y lo *uno* (2016-II), lo *discreto* y lo *continuo* (2017-I), lo *negativo* y lo *positivo* (2017-II), *La creatividad matemática* (2018-I) y, para finalizar este *Seminario continuo*, la *Tipología creativa final. Concepciones de la matemática* (2018-II). Este periodo está "dedicado a reflexiones *globales* sobre formas plurales de creatividad, con énfasis en el estudio de *estratos, tramas y flujos intermedios* entre polaridades mayores" (Zalamea, 2016a).

Durante el segundo semestre de 2017 se amplió aún más el modelo THK con la inclusión de las *superficies de Riemann* (THK-R-). Esta ampliación se justifica en el intento por capturar los "puntos de ramificación" del modelo THK hacia la cultura (literatura, cine, artes plásticas y música). En lo que corresponde a esta presentación, nos limitamos por el momento a su formulación original.

La siguiente exposición del modelo THK tomará sus elementos esenciales sin entrar en los detalles técnicos, pues además de que alargaría innecesariamente este artículo, sería ineficaz para transmitir su valor filosófico.

Como se verá, el modelo THK se construye a partir de algunas de las herramientas más relevantes y avanzadas de la matemática contemporánea. Esto significa que en la base de la analogía se encuentran desarrollos con un alto nivel técnico. Sin embargo, y siendo nuestro interés divulgativo, no se hace necesario describir todo este aparataje. El objetivo será entonces comprender su aplicación al análisis filosófico de la matemática. En el desarrollo de las siguientes secciones se profundizará en algunos elementos técnicos cuando sea necesario.

3. H: la lógica de los haces de estructuras de Caicedo

El haz matemático es el objeto por excelencia que evidencia el pliegue y despliegue entre los espacios de la matemática y la filosofía. La noción de haz sobre un espacio topológico fue introducida por Leray, Cartan y Lazard en los años cuarenta y cincuenta. El posterior trabajo de Grothendieck generalizó la noción de haz, y gracias a matemáticos como Lawvere y otros categoristas,

> ha salido a la luz el hecho fundamental de que los haces pueden verse como "conjuntos variables" los cuales obedecen a una lógica intrínseca propia, y que las categorías de haces constituyen universos alternos cada uno de los cuales permite hacer una matemática heterodoxa que ilumina y enriquece a la clásica (Caicedo, 1995: 569).

La *lógica de los haces* fue desarrollada por el matemático colombiano Xavier Caicedo.[1] Sin entrar en detalles técnicos, existen tres tipos de estructuras matemáticas: algebraicas, de orden, y topológicas. Sobre estas últimas, Caicedo formuló procedimientos para hallar teoremas lógicos a partir de este tipo de estructuras. Esta lógica de estructuras usa como modelo los *haces fibrados* sobre espacios topológicos. Los resultados de esta teoría de modelos encuentran interesantes conexiones entre la lógica y la geometría.

Una de las famosas paradojas de Zenón sobre la imposibilidad del movimiento y las unidades extensas pero indivisibles (el punto de la geometría), se refiere a la *paradoja de la flecha*. En esta paradoja se lanza una flecha que debe recorrer un espacio

---

[1] Xavier Caicedo es considerado el matemático más importante de Colombia. Ha sido por mucho tiempo docente de matemáticas en la Universidad Nacional de Colombia y en la Universidad de los Andes. Su trabajo en la mencionada *lógica de haces* lo convirtió en pionero del estudio y la aplicación de estructuras topológicas en diversas áreas de la matemática. En 1999 la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales le concedió el "Premio a la Obra" por sus aportes al desarrollo de la matemática colombiana.

entre el arquero y su objetivo. La velocidad es la razón entre el espacio recorrido y el tiempo que tarda en recorrerlo. Sin embargo, si el tiempo y el espacio están compuestos por pequeños intervalos indivisibles, necesariamente la flecha estará en reposo en el instante *i*, y como tal, en todos los instantes de su recorrido (Kline, 2016: 61-64). La física y la matemática moderna salvan esta paradoja gracias al concepto de *límite*. Así, la velocidad instantánea de la flecha es el límite matemático de las proporciones que son posibles de medir en intervalos alrededor de la coordenada tiempo t_0 y espacio x_0.

Si bien es una solución que resuelve en lo práctico esta cuestión, el contenido epistemológico de la velocidad instantánea sigue siendo una ficción. Cualquier observación, tan precisa como sea posible sobre un punto, se refiere en última instancia a una región o vecindad del punto. Esto es, un conjunto que contiene un disco de radio positivo alrededor de éste.

> Las nociones de *punto geométrico* e *instante temporal* son idealizaciones límite gracias a las cuales podemos construir nuestros modelos matemáticos del mundo. No es claro que podamos prescindir de las mismas o que ganásemos algo de poder hacerlo, aparte de complicar los modelos inmensamente. Sin embargo, las anteriores observaciones apuntan a la conveniencia de revisar la lógica que gobierna a las propiedades puntuales o instantáneas, las cuales deben ser también un límite de propiedades extensas. Precisamos una lógica adecuada para individuos extendidos, digamos sobre abiertos de un espacio topológico x (que podemos imaginar como el espacio-tiempo), cuyas propiedades puntuales cumplan el siguiente paradigma de continuidad veritativa: *Si una propiedad vale de un individuo en un punto de su dominio de extensión, entonces debe valer en toda una vecindad de dicho punto* (Caicedo, 1995: 571).

En tal sentido, los haces se definen como una función en la que cada punto *X* definido de un conjunto contiene una vecindad abierta p(*S)* para la que se cumple que es abierto en *X* y es un homeomorfismo. La palabra proviene del griego y significa *homoios* 'misma' y *morphé* 'forma'. Esto significa que dos espacios topológicos son iguales de acuerdo con determinadas propiedades topológicas. Si es posible deformar una figura hasta convertirla en otra figura y aun así conserva ciertas características, se dice entonces que ambas figuras son topológicamente idénticas. El ejemplo clásico es transformar una dona en una tasa, pues ambos objetos topológicos conservan un hoyo que las hace idénticas.

El conjunto *X* se define como la vecindad de cualquier punto *x*, el cual define un espacio que se secciona desde el *espacio X* (vecindad al punto *x*) al *espacio Ex* (vecindad del punto *e*). La Figura 1 representa estas ideas. La línea azul se denomina como el *haz* o la *fibra* que conecta ambas regiones, que en términos de la topología exhiben idénticas propiedades a pesar de pertenecer a dos espacios distintos.

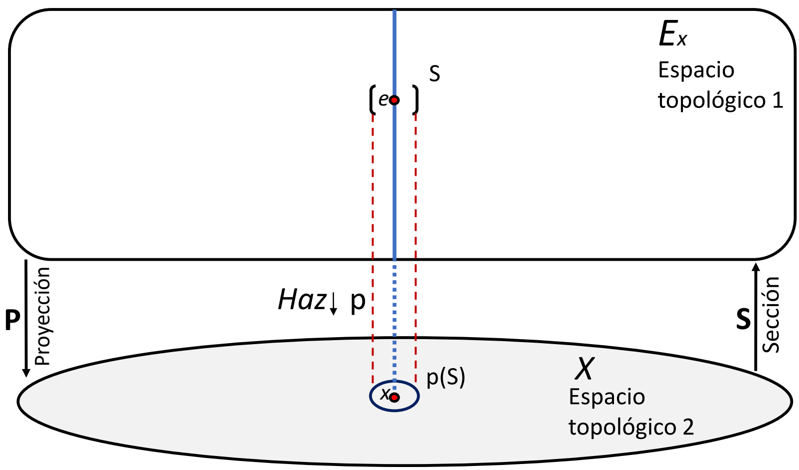

Figura 1. Haz matemático sobre espacios topológicos.

Pero el haz matemático no se limita a una simple colección de fibras. Las vecindades abiertas de la definición establecen conexiones "horizontales" entre las fibras cercanas. Así, por ejemplo, dos vecindades en *X*(*x1*, *x2*) que no tienen conexión en el espacio *X*, pero que se conectan por medio de las fibras en el *espacio Ex*. Esta unión horizontal se denomina *sección de H* y se define como una función continua que conecta ambos puntos en el espacio. Una sección se dice *global* si su dominio es todo el espacio *X*, y se dice *local* en el caso contrario (Caicedo, 1995: 569). En la Figura 2 se observa cómo desde el *espacio X* dos vecindades *x1* y x*2* aparentemente inconexas se proyectan sobre el *espacio Ex* y allí encuentran una conexión novedosa.

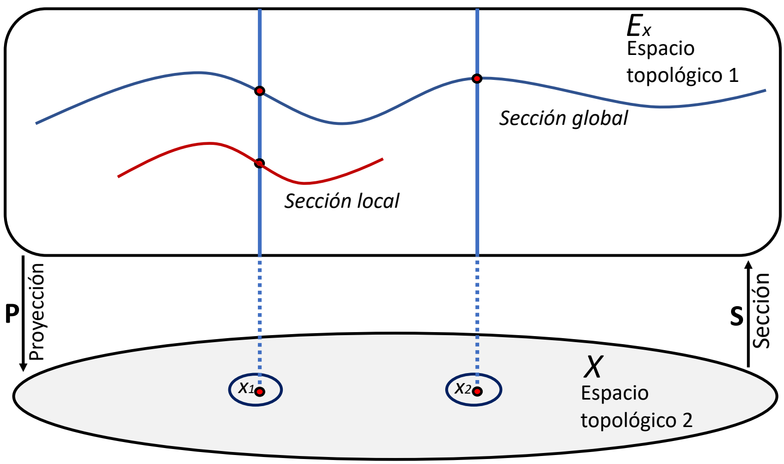

Figura 2. Sección local y global.

Se han resaltado hasta aquí los puntos esenciales de los conceptos de haces subyacentes a la lógica desarrollada por Caicedo (1995), sin entrar en la mayoría de sus desarrollos técnicos. Pero lo dicho es suficiente para entender el significado de la H en el modelo THK. Zalamea adopta este desarrollo de la lógica y la topología como analogía para hacer filosofía sintética de las matemáticas. Es importante remarcar el carácter analógico del modelo THK, pues a partir de lo técnico se permite pensar en lo metodológico, formas de pensar la matemática contemporánea.

Por lo anterior, el espacio topológico X se identifica con el espacio de la técnica matemática (MAT), mientras que el espacio topológico E corresponde al espacio del pensamiento o filosofía (FIL). Desde la educación secundaria se suele considerar la matemática como un campo independiente de la filosofía y de otras ramas del saber, con un objeto de estudio propio, una metodología particular y unos problemas que le son exclusivos como disciplina. Esta noción como campo de conocimiento es correcta, pero imitada a su propio espacio "topológico". Justamente, el modelo THK quiere representar las conexiones de la matemática más allá del campo disciplinar y de la técnica. Son conexiones y construcciones que escapan de la técnica pero que en lo profundo se relacionan y se transforman mutuamente.

La Figura 3 representa esta analogía, en donde $p(s)$ es la vecindad sobre el punto de la técnica (teoremas, definiciones o pruebas), y la fibra sobre este punto es el *despliegue* que tiene la técnica sobre el espacio de la filosofía. "Ideas que se proyectan y se pliegan sobre la técnica" (Zalamea, 2016b). Los fragmentos locales de las fibras no son vacías, es decir, hay una "fuerza conglomerada de ideas detrás de las técnicas" (Zalamea, 2016a: 7). Se identifica entonces un ir y venir entre técnica y pensamiento. En otras palabras, hay un homeomorfismo entre matemáticas y filosofía.

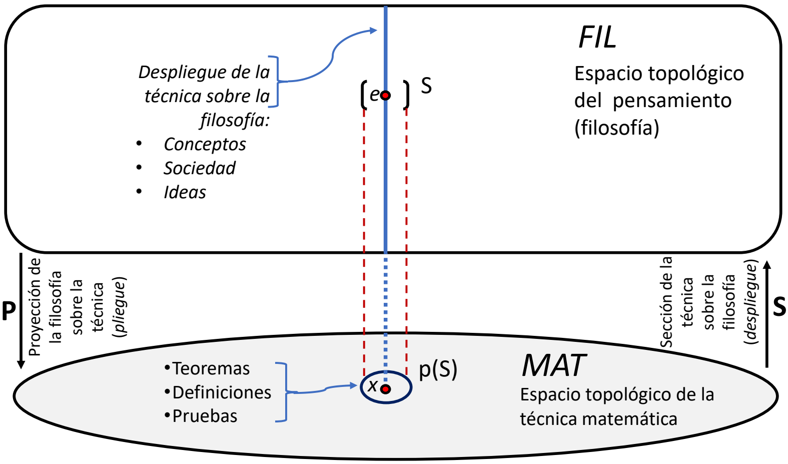

Figura 3. Haces de la filosofía de las matemáticas.

La problemática esencial consiste, por tanto, en tener ciertas informaciones locales obstructivas (MAT), cierta vecindad y la proyección de $p(s)$ que arroja determinada curva (FIL). Pero, ¿cómo pasar de estas variedades locales a una globalidad? ¿Existen secciones globales? ¿Cómo se agregan o "pegan" las secciones locales? La sección global se conforma a partir del despliegue del conjunto de técnicas sobre el espacio del pensamiento. Esto quiere decir que detrás de la multiplicidad de obstrucciones y tránsitos en el espacio de la técnica, se encuentran insospechadas conexiones que conforman las diversas secciones globales de la matemática, tanto en un autor en específico, como en el conjunto de las matemáticas. Algunos esbozos de sección global en las matemáticas contemporáneas son la geometrización, el sincretismo aritmético, la deformación/fluxión, y la esquematización, entre otras (Zalamea, 2016b: 8) (Figura 4).

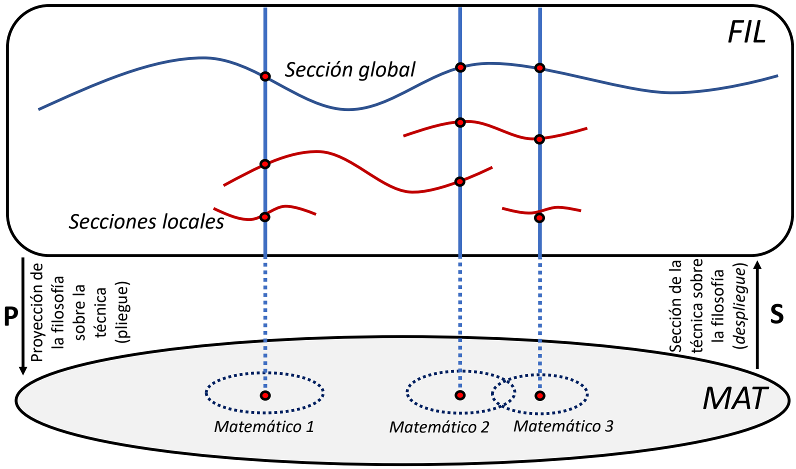

Figura 4. Secciones locales y globales en la filosofía de las matemáticas.

En la Figura 4 se asumen tres hipotéticos matemáticos. Sobre el espacio de la técnica (MAT) el dos (2) y el tres (3) presentan una intersección parcial en sus respectivos trabajos, mientras que el uno (1) más bien parece independiente respecto de los otros dos. No obstante, el despliegue al espacio del pensamiento (FIL) evidencia que entre los matemáticos uno (1) y dos (2) existe una sección local que los relaciona, así como con los matemáticos dos (2) y tres (3). Si bien no hay relación directa entre el matemático uno (1) y el tres (3), existen relaciones mediadas por dos (2). Estas secciones locales, a su vez, responden a una sección global que cubre todo el dominio de MAT.

4. K: los modelos de Kripke

En el transcurso del *Seminario continuo*, la anterior analogía con la lógica de haces se desarrolló en el segundo semestre de 2016. Para el primer semestre de 2017 hay una exigencia por ampliar este modelo, en concreto, introducir el tiempo para capturar el "saber matemático evolutivo". Para representar el desarrollo temporal de un objeto se establecen los modelos de Kripke (1959) de la lógica intuicionista. Esta inclusión corresponde a la K del modelo THK, y es a su vez otro espacio topológico que representa las continuidades, vecindades y conexiones entre momentos específicos en la obra de un matemático. Sobre cada uno de estos momentos (puntos) es posible construir un haz que se despliega sobre el campo de la filosofía.

La relación entre estos modelos de Kripke y los haces sobre espacios topológicos se enmarca en otro trabajo desarrollado por Xavier Caicedo, titulado *Conectivos intuicionistas sobre espacios topológicos* (1997). Interesa conocer este trabajo que presenta una axiomatización completa de la lógica modal intuicionista trivalente. Los conectivos son preservados por homeomorfismos locales, siendo la escogencia uniforme de éstos para cada espacio de una categoría de espacios topológicos.

El uso de los modelos de Kripke se justifica en el hecho de que es el concepto/objeto más simple para capturar lógicas dinámicas. Sobre el tiempo representado en un espacio topológico se identifica un "instante de tiempo en *k*", y sobre éste se definen "mundos de verdades en el instante *k*" (Figura 5). Cada mundo de verdad tiene la posibilidad de construir un haz, tal y como se ha definido anteriormente. A diferencia de la lógica clásica en la que la negación de la negación resulta en identidad, la negación en lógica intuicionista es una dinámica que involucra *todo* el futuro. La negación es entonces un concepto más rico y denso que permite representar los procesos (no lineales, con quiebres y rupturas) de la creatividad matemática en el tiempo (Zalamea, 2017).

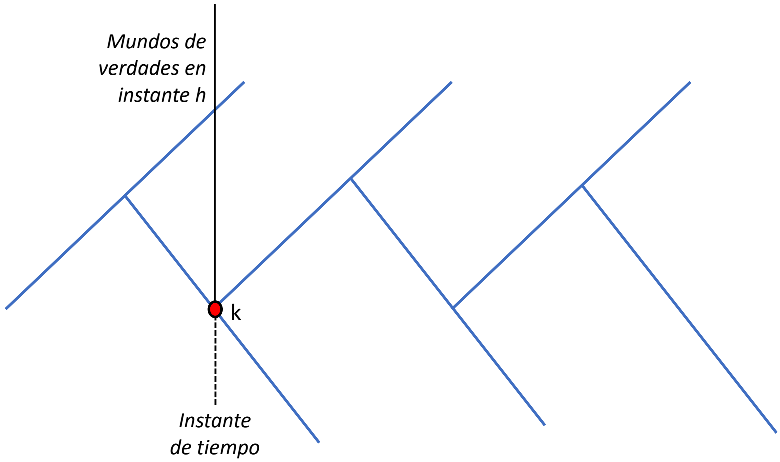

Figura 5. Representación del modelo de Kripke.

Se da, por lo tanto, la relación entre la realización temporal del trabajo de un matemático en correspondencia con los haces que capturan el movimiento de la técnica con el pensamiento (Figura 6). El conjunto de los haces sobre el espacio de Kripke aporta el desenvolvimiento temporal de la relación entre la técnica y las ideas, lo que se denomina una "historia internalista". Ahora bien, esto no es suficiente, pues será necesario establecer las relaciones de obstrucción y tránsito entre los diferentes haces, ello con el objeto de estructurar una "historia externalista". Esto es, evidenciar las relaciones entre los diferentes haces (Zalamea, 2017).

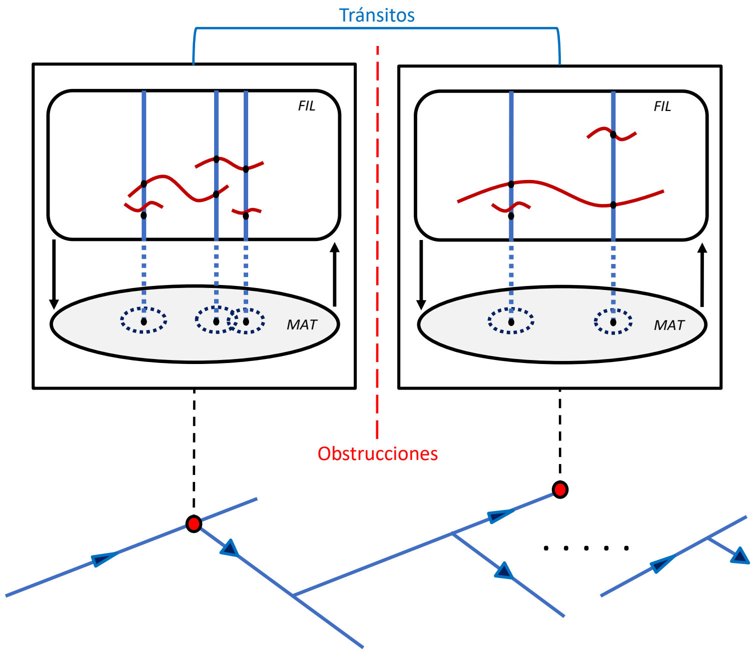

Figura 6. Modelo de Kripke y haces en la filosofía de las matemáticas.

Así, la analogía se extiende al considerar el tiempo. El quehacer del matemático no es de ninguna manera lineal ni unidireccional. Los fracasos y las obstrucciones hacen parte del descubrimiento de la matemática, pues clausuran caminos y abren nuevas perspectivas sin las que no serían posibles los espectaculares desarrollos que ha logrado esta disciplina en el pensamiento humano.

5. T: los *topos* de Grothendieck

El último componente del modelo THK se refiere a encontrar el *topos* de todos los haces sobre el modelo de Kripke. Esto es, agrupar en un concepto global los diferentes espacios de la matemática y de la filosofía, junto con los tránsitos y las obstrucciones que se desenvuelven en el tiempo como unidad temática. En otras palabras, entender de manera global el modo en que se desarrolla el aspecto técnico de la matemática junto con las ideas filosóficas que éstas implican.

En la analogía del modelo THK es necesario entonces adecuar una idea matemática que englobe los desarrollos matemáticos. Tradicionalmente la matemática se ha construido a través de la teoría de conjuntos y las funciones. Sin embargo, un concepto muy importante en la matemática contemporánea es el de *topos* que, gracias al trabajo de Grothendieck (1962) y de su posterior revisión por parte de Lawvere (1970), se entiende como pensar el espacio *en otro* y no *en sí*. Esto quiere decir, en función del modelo THK, trabajar con todos los haces matemáticos (multiplicidad) de la Figura 6, es decir, reunirlos en el *topos* como una sola estructura topológica (Figura 7). Este componente corresponde, entonces, a la letra T del modelo (Zalamea, 2017).

La Figura 7 configura, finalmente, el modelo THK como analogía para la filosofía matemática. De abajo hacia arriba, hay una historia en el desarrollo de la matemática o, en otras palabras, la matemática es un proceso creativo que se desenvuelve en el tiempo que es capturado por el modelo de Kripke. De modo contrario a una historia lineal, el modelo de Kripke evidencia que este proceso creativo presenta quiebres, rupturas y bifurcaciones. Sobre cada momento importante en esa creación matemática se construye un haz, el cual revela el pliegue y despliegue entre el espacio de la técnica (MAT) y el espacio de la filosofía (FIL) que se configura en la *historia internalista*. Los haces sobre el espacio topológico encuentran, a su vez, obstrucciones y tránsitos en lo que se conforma como *historia externalista*.

Por último, el conjunto de todos los haces (múltiple) como epistemología constituye el *topos* como superestructura (uno). El *topos* es la "unidad superior detrás de la diversidad" en la búsqueda de arquetipos e invarianzas en la metafísica (Zalamea, 2016b: 11). En suma, la invención matemática se contrasta con una realidad velada que se hace visible. El modelo THK, como filosofía de las matemáticas, captura entonces la fenomenología del pliegue y despliegue de la creatividad matemática (H) que se desarrolla en el tiempo (K), en contraste con los arquetipos e invarianzas de la metafísica (T).

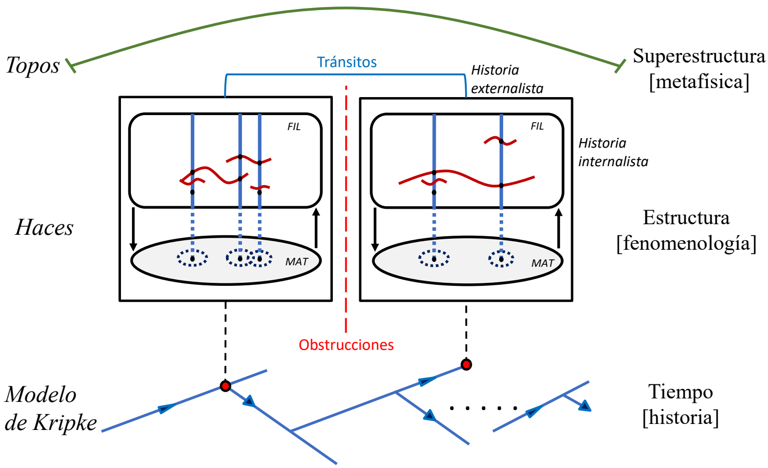

Figura 7. Modelo THK de la filosofía matemática.

Referencias

Bourbaki, Nicolás (1962). “La arquitectura de las matemáticas”. En François Le Lionnais (ed.). *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*. Buenos Aires: Eudeba, pp. 36–49.

Caicedo, Xavier (1995). “Lógica de los haces de estructuras”. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, vol. 19, núm. 74, pp. 569–86.

___________ (1997). “Conectivos intuicionistas sobre espacios topológicos”. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, vol. 21, núm. 81, pp. 503–19.

Kline, Morris (2016). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Madrid: Alianza Editorial.

Lautman, Albert (2011). *Ensayos sobre la dialéctica, estructura y unidad de las matemáticas modernas*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Odifreddi, Piergiorgio (2006). *La matemática del siglo xx. De los conjuntos a la complejidad*. Katz Editores.

Shapiro, Stewart (ed.) (2005). *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*. Oxford: Oxford University Press.

Tugendhat, Ernst (2003). *Introducción a la filosofía analítica*. Barcelona: Gedisa.

Zalamea, Fernando (2009). *Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas*. Bogotá: Universidad Nacional. Disponible en: http://www.revistas.unal.edu.co-/index.php/idval/article/view/36646/38553.

___________ (2011). "Estudio introductorio". *Ensayos sobre la dialéctica. Estructura y unidad de las matemáticas modernas*. Bogotá: Universidad Nacional, pp. 13–74.

___________ (2015). *Fundamentos de matemáticas*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

___________ (2016a). *Epistemología e historia de las matemáticas. Seminario continuo de filosofía de las matemáticas 2016-I*. Bogotá: Universidad Nacional.

___________ (2016b). *Epistemología e historia de las matemáticas. Seminario continuo de filosofía de las matemáticas 2016-II*. Bogotá: Universidad Nacional.

___________ (2017). *Seminario continuo de filosofía de las matemáticas. Recordatorio: El Modelo THK* (*Topos de haces sobre modelos de Kripke*). Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.