

# SOBRE UNA SOLUCIÓN EXACTA NO LINEAL DE LA ECUACIÓN FOKKER-PLANCK CON TÉRMINO DE SUMIDERO

• Carlos Fuentes • Carlos Chávez •  
*Universidad Autónoma de Querétaro, México*

• Heber Saucedo •  
*Instituto Mexicano de Tecnología del Agua*

• Manuel Zavala •  
*Universidad Autónoma de Zacatecas, México*

## Resumen

Se resuelve de manera exacta la ecuación Fokker-Planck con un término de sumidero, utilizando la difusividad de Fujita y la relación de Parlange entre la conductividad y difusividad. Para obtener la solución, se introduce primero el potencial de Kirchhoff y enseguida la coordenada móvil de Fujita-Storm; la ecuación diferencial toma la forma de la ecuación de Burgers, que es lineal en el término difusivo. El coeficiente convectivo de esta última se sustituye por la transformación de Hopf-Cole, con la finalidad de deducir la ecuación lineal clásica del calor. Durante las transformaciones, el término de sumidero se define funcionalmente, de modo que el resultado final sea precisamente la ecuación de calor sin término de sumidero. La solución exacta del potencial de Hopf-Cole se obtiene con la transformada clásica de Laplace para algunas condiciones iniciales y de frontera de interés. La solución de la ecuación Fokker-Planck en el espacio físico se obtiene a través de la inversión de las transformaciones utilizadas. La solución incluye como casos particulares las soluciones de Sanders *et al.*, y de Broadbridge y White. La solución exacta puede ser utilizada para validar soluciones numéricas de la ecuación Fokker-Planck y en estudios sobre la extracción de agua por las raíces de las plantas.

**Palabras clave:** características de Fujita-Parlange, transformación de Kirchhoff, transformación de Hopf-Cole, ecuación de Burgers.

## Introducción

Considérese la ecuación Fokker-Planck del movimiento unidimensional del agua en el suelo:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] - \frac{dK}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} - \Upsilon(z, t) \quad (1)$$

que resulta de la combinación de la ecuación de continuidad implicada por el principio de conservación de la masa:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial z} - \Upsilon(z, t) \quad (2)$$

y de la ley de Darcy generalizada a los suelos no saturados:

$$q = -D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} + K(\theta) \quad (3)$$

en donde  $\theta$  es el contenido volumétrico de agua, también denominado contenido de humedad;  $q$ , el caudal de agua por unidad de superficie de suelo o flujo de Darcy;  $z$ , la coordenada vertical orientada positivamente hacia abajo;  $t$ , el tiempo;  $\Upsilon$ , un término de sumidero, como el volumen de agua extraído por las plantas por unidad de volumen de suelo en la unidad de tiempo;  $K(\theta)$ , la conductividad hidráulica no

saturada, y  $D(\theta)$  es la difusividad hidráulica definida por:

$$D(\theta) = K(\theta) \frac{d\psi}{d\theta} \quad (4)$$

en la cual  $\psi(\theta)$  es la presión del agua en el suelo como una función del contenido de humedad o curva de retención de humedad, y es expresada como la altura de una columna equivalente de agua.  $K(\theta)$ ,  $D(\theta)$  y  $\psi(\theta)$  son conocidas como las características hidrodinámicas del suelo.

Se han construido pocas soluciones analíticas exactas de la ecuación Fokker-Planck para características hidrodinámicas no lineales. Entre ellas está la solución en serie en la raíz cuadrada del tiempo presentada por Philip (1957) para características hidrodinámicas más o menos arbitrarias, y condiciones límites específicas, válida para tiempos cortos y de radio de convergencia desconocido.

También se cuenta con soluciones analíticas para condiciones límites específicas, válidas para todo tiempo, y que son exactas para características hidrodinámicas particulares, como la solución lineal (*e.g.* Philip, 1969); la solución de Knigh (1973), adaptada de una de las soluciones de la ecuación de Burgers (1948); la solución cuasi-lineal de Fuentes *et al.* (2001), que contiene como casos particulares las dos soluciones precedentes. En la solución cuasi-lineal se asume una difusividad hidráulica constante y una conductividad hidráulica, que resulta de una interpolación entre la variación lineal de la conductividad con respecto del contenido de humedad (suelo lineal) y de la variación cuadrática en relación con este contenido de humedad (suelo de Knigh).

Por otro lado, se cuenta con la solución analítica de Parlange *et al.* (1982), que es exacta cuando la difusividad es asimilada a una densidad de Dirac, y la conductividad representa, por un lado, una función lineal con respecto al contenido de humedad y, por el otro, cuando la derivada de la conductividad con respecto al contenido de humedad es también

asimilada a una densidad de Dirac. El primer caso corresponde a la solución clásica de Green y Ampt (1911), y el segundo a la solución de Talsma y Parlange (1972).

Fujita (1952) ha deducido una solución no lineal de la infiltración unidimensional horizontal, es decir, del movimiento del agua en ausencia de gradientes gravitacionales, conocido como absorción, representada por la ecuación (1), sin los términos segundo y tercero del miembro derecho  $\theta_t = [D(\theta)\theta_z]_z$ , donde los subíndices indican las variables con respecto de las cuales se lleva a cabo la diferenciación; la difusividad no lineal de Fujita contiene como casos particulares los comportamientos extremos, es decir, la difusividad constante y la difusividad de Dirac.

Bluman y Kumei (1980) han demostrado que la ecuación de la absorción es invariante bajo transformaciones de Lie-Bäcklund si y sólo si la difusividad es precisamente la de Fujita, y que cualquier ecuación diferencial invariante bajo estas transformaciones puede ser asociada con la correspondiente ecuación diferencial parcial lineal. Fokas y Yortsos (1982) han extendido estos resultados a la ecuación de flujo bifásico de la absorción  $\theta_t = [D(\theta)\theta_z]_z - v(t)f_z(\theta)$ , y deducen la solución para una condición de flujo constante; la función de fracción de flujo  $f(\theta)$  resulta proporcional a la integral de la difusividad de Fujita y  $v(t)$ , el flujo combinado de ambos fluidos considerados incompresibles, es tomado constante. Esta solución formalmente corresponde a la solución para flujo constante de la ecuación (1), con  $\Upsilon = 0$ , cuando  $dK/d\theta \propto D(\theta)$ , es decir, cuando  $K(\psi)$  es una función exponencial (Gardner, 1958).

En esta misma dirección, Rogers *et al.* (1983) extienden los resultados para deducir la solución para flujo constante de la ecuación de flujo bifásico en un campo gravitacional  $\theta_t = [D(\theta)\theta_z]_z - v f_z(\theta) - (K(\theta)[1-f(\theta)])_z$ ; los autores han asumido  $K(\theta) \propto \theta$  y  $v$  constante. Sanders *et al.* (1988) han adaptado la solución de Rogers *et al.* (1983), como una solución de la ecuación (1) con  $\Upsilon = 0$ , haciendo la equivalencia  $K'(\theta)$

$\sim v f'(\theta) + (K(\theta)[1 - f(\theta)])_{\theta}$ . La nueva función de conductividad permite llevar la ecuación Fokker-Planck a la forma de la ecuación de Burgers (1948), la cual puede ser linealizada con una transformación de Bäcklund; la función de conductividad obtenida, al igual que la difusividad de Fujita, es no lineal.

Broadbridge y White (1988) también adaptan la solución de Rogers *et al.* (1983) y presentan un análisis de las características hidrodinámicas. Esta solución ha sido extendida a condiciones iniciales de cierto interés práctico y al drenaje de una columna de suelo (Warrick *et al.*, 1990; Warrick y Parkin, 1995; Parkin *et al.*, 1995). La solución también se ha usado para validar soluciones cuasi-analíticas del fenómeno de la infiltración (Si y Kachanoski, 2000).

Sin embargo, con las características hidrodinámicas presentadas por Broadbridge y White (1988), no es posible representar, por ejemplo, el importante caso teórico extremo de Green y Ampt (1911); tampoco estas características contienen el suelo de Gardner (1958), de gran importancia teórica en el estudio del flujo monofásico multidimensional del agua en el suelo (Wooding, 1968). Estas características también inducen que la capacidad máxima de almacenamiento en el fenómeno de ascenso capilar no está acotada para todo tipo de medio.

El presente trabajo tiene como objetivos:

- Demostrar que las características hidrodinámicas resultantes del procedimiento de reducir la ecuación Fokker-Planck a la ecuación de Burgers corresponden a una relación entre la difusividad y la conductividad propuesta por Parlange *et al.* (1982), si en ésta se introduce la difusividad de Fujita (1952). Las características de Fujita y Parlange contendrán como casos particulares las utilizadas en el establecimiento de las soluciones cuasi-lineal y generalizada de Dirac de la infiltración.
- Establecer la forma requerida del término de sumidero en la ecuación Fokker-Planck,

de modo que ésta se reduzca siempre a la ecuación de Burgers.

- Deducir de manera concisa la solución exacta de la ecuación Fokker-Planck, con las características hidrodinámicas de Fujita y Parlange, correspondiente a una condición de flujo constante en la superficie de una columna semi-infinita de suelo y a algunas condiciones de humedad inicial de interés.

### Las condiciones límite de la ecuación Fokker-Planck

Para resolver la ecuación (1) es necesario proporcionar las condiciones inicial y de frontera, y las características hidrodinámicas. La condición inicial en una columna semi-infinita de suelo tendrá la forma:

$$t = 0, \quad 0 < z, \quad \theta = \theta_i(z) \quad (5)$$

En la frontera superior puede especificarse el contenido de humedad o el flujo de Darcy, a saber:

$$t > 0, \quad z = 0, \quad \theta = \theta_{\text{sup}} \quad \text{o} \\ -D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} + K(\theta) = q_s \quad (6)$$

donde  $\theta_{\text{sup}}$  y  $q_s$  pueden ser funciones del tiempo.

En la frontera inferior de una columna semi-infinita la condición es:

$$t > 0, \quad \theta = \lim_{z \rightarrow \infty} \theta_i(z) \quad (7)$$

Las características hidrodinámicas se establecen en la siguiente sección.

### Las características hidrodinámicas de Fujita y Parlange

La difusividad hidráulica de Fujita (1952) puede ser escrita como (Fuentes *et al.*, 1992):

$$D(\Theta) = \frac{(K_s - K_o)\lambda_c}{\theta_s - \theta_o} \frac{1 - \alpha}{(1 - \alpha\Theta)^2}; \quad (8)$$

$$\Theta = \frac{\theta - \theta_o}{\theta_s - \theta_o}$$

donde  $\theta_s$  es el contenido de humedad a saturación y  $K_s = K(\theta_s)$  es la conductividad a saturación;  $\theta_o < \theta_s$  es un contenido de humedad de referencia y  $K_o = K(\theta_o)$  es la conductividad correspondiente;  $\Theta$  es un grado efectivo de saturación;  $\alpha$  es un parámetro adimensional;  $\lambda_c$  es la escala de Bouwer (1964), definida por:

$$\lambda_c = \frac{1}{K_s - K_o} \int_{\theta_o}^{\theta_s} D(\theta) d\theta \quad (9)$$

La relación esencial entre la conductividad y la difusividad hidráulicas propuesta por Parlange *et al.* (1982) es la siguiente (Fuentes *et al.*, 1992):

$$\frac{K(\theta) - K_o}{K_s - K_o} = \Theta \left[ 1 - \beta + \beta \int_{\theta_o}^{\theta} D(\bar{\theta}) d\bar{\theta} / \int_{\theta_o}^{\theta_s} D(\bar{\theta}) d\bar{\theta} \right] \quad (10)$$

donde  $\beta$  es un parámetro adimensional.

La introducción de la ecuación (8) en la ecuación (10) proporciona la siguiente función de la conductividad  $K(\Theta)$ :

$$K(\Theta) = K_o + (K_s - K_o) \frac{\Theta [1 - \beta + (\beta - \alpha)\Theta]}{1 - \alpha\Theta} \quad (11)$$

La función  $\psi(\theta)$  se obtiene mediante la sustitución de las ecuaciones (8) y (11) en la ecuación (4), y realizando la integración con la condición  $\psi(\theta_s) = \psi_s$ , una presión de burbuja en saturación que se asumirá, sin pérdida de generalidad, igual a cero. Cuando se toma  $\theta_o = \theta_r$ , donde  $\theta_r$  es el contenido de humedad residual definido, de modo que  $K(\theta_r) = 0$  y  $\psi(\theta_r) \rightarrow -\infty$  (Brooks y Corey, 1964), se obtiene la curva de retención siguiente:

$$\psi(\Theta) = \psi_c \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \ln \left[ \frac{1 - \alpha\Theta}{(1 - \alpha)\Theta} \right] + \frac{\beta - \alpha}{\beta(1 - \beta)} \ln \left[ \frac{1 - \beta + (\beta - \alpha)\Theta}{(1 - \alpha)\Theta} \right] \right\}; \quad \Theta = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \quad (12)$$

donde  $\psi_c = -\lambda_c$ .

Si se utiliza la notación  $\text{sol}(\alpha, \beta)$  para representar los diferentes suelos, el suelo cuasi-lineal corresponde a  $\text{sol}(0, \beta)$ , es decir a una difusividad constante  $D = K_s \lambda_c / (\theta_s - \theta_r)$  y a una conductividad de la forma  $K(\Theta) = K_s \Theta [1 - \beta + \beta\Theta]$ ; el suelo lineal es dado por  $\text{sol}(0, 0)$  y el suelo de Knigh (1973) por  $\text{sol}(0, 1)$ .

Cuando  $\alpha \rightarrow 1$ , la difusividad de Fujita se vuelve una densidad de Dirac. En efecto, haciendo  $\Theta = 1$  en la ecuación (8), la difusividad se concentra en saturación cuando  $\alpha \rightarrow 1$ ; se tendrá  $D(\theta) = K_s \lambda_c \delta(\theta_s - \theta)$ . El suelo generalizado de Dirac es representado por  $\text{sol}(1, \beta)$ ; de la ecuación (10) se deduce para esta difusividad que  $dK/d\Theta = K_s [1 + \beta\delta(1 - \Theta)]$ ; el suelo de Green y Ampt (1911) corresponde a  $\text{sol}(1, 0)$ , y el suelo de Talsma y Parlange a  $\text{sol}(1, 1)$ .

El suelo de Broadbridge y White (1988) es representado por  $\text{sol}(\alpha, 1)$ ; la difusividad es la de Fujita y la conductividad es  $K(\Theta) = K_s(1 - \alpha)\Theta^2 / (1 - \alpha\Theta)$ . La curva de retención se deduce de la ecuación (12):

$$\psi(\Theta) = \psi_c \left\{ \alpha \ln \left[ \frac{1 - \alpha\Theta}{(1 - \alpha)\Theta} \right] + \frac{1 - \Theta}{\Theta} \right\} \quad (13)$$

Es claro que este suelo no puede representar el suelo lineal ni el suelo de Green y Ampt, en los cuales  $\beta = 0$ . La solución no es tan versátil como han señalado los autores.

El suelo de Gardner (1958) es representado por  $\text{sol}(\alpha, \alpha)$ , es decir, por la difusividad de Fujita y por la conductividad  $K(\Theta) = K_s(1 - \alpha)\Theta / (1 - \alpha\Theta)$ . Con la curva de retención correspondiente  $\psi(\Theta) = \psi_c \ln[(1 - \alpha\Theta) / (1 - \alpha)\Theta]$ , se deduce la función propuesta por Gardner  $K(\psi) = K_s \exp(-\psi/\psi_c)$ , de importancia teórica en el estudio del flujo multidimensional del agua (Wooding, 1968)

y también de importancia práctica, ya que la solución de Wooding se usa para identificar parámetros del suelo a partir de pruebas de infiltración (Reynolds y Elrick, 1985).

En el fenómeno del ascenso capilar de agua en una columna semi-infinita de suelo con un contenido de humedad inicial constante ( $\theta_0$ ), las características de Fujita y Parlange proporcionan una capacidad de almacenamiento de agua en tiempos muy grandes acotada. La máxima capacidad de almacenamiento ( $M_\infty$ ) es dada por (Kunze *et al.*, 1985):

$$M_\infty = \int_{\theta_0}^{\theta_s} \frac{(\theta - \theta_0)D(\theta)}{K(\theta) - K_0} d\theta \quad (14)$$

La introducción de las ecuaciones (8) y (11) en la ecuación (14) proporciona la máxima capacidad de almacenamiento siguiente (Kunze *et al.*, 1985):

$$M_\infty = \frac{\lambda_c(\theta_s - \theta_0)}{\beta} \ln\left(\frac{1}{1-\beta}\right) \quad (15)$$

Es claro que las características de Broadbridge y White proporcionan una capacidad de almacenamiento no acotada para todos los suelos ( $\beta = 1$ ), a diferencia de las características de Fujita y Parlange. En particular, para el suelo de Green y Ampt ( $\beta = 0$ ), la ecuación (15) proporciona  $M_\infty = \lambda_c(\theta_s - \theta_0)$ .

Así, con este análisis se puede inferir que las características de Fujita y Parlange son más versátiles que las de Broadbridge y White. La pregunta que se plantea es que si las técnicas matemáticas —utilizadas para construir soluciones analíticas de la ecuación Fokker-Planck con las segundas— pueden ser aplicables en la construcción de soluciones con las primeras. En el apartado siguiente se demuestra que éste es el caso.

## Resolución de la ecuación Fokker-Planck

La resolución analítica de la ecuación Fokker-Planck será grandemente simplificada con la introducción de las variables adimensionales, definidas como sigue:

$$\theta_* = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_s - \theta_0}, \quad D_* = \frac{\theta_s - \theta_0}{(K_s - K_0)\lambda_c} D, \quad (16)$$

$$K_* = \frac{K - K_0}{K_s - K_0}$$

$$z_* = \frac{z}{\lambda_c}, \quad t_* = \frac{K_s - K_0}{(\theta_s - \theta_0)\lambda_c} t, \quad \Upsilon_* = \frac{\lambda_c}{K_s - K_0} \Upsilon \quad (17)$$

Las ecuaciones (1), (2) y (3) permanecen invariantes; las variables tendrán asteriscos. Las ecuaciones (8) y (11) se transforman en:

$$D_*(\theta_*) = \frac{1 - \alpha}{(1 - \alpha\theta_*)^2} \quad (18)$$

$$K_*(\theta_*) = \frac{\theta_* [1 - \beta + (\beta - \alpha)\theta_*]}{1 - \alpha\theta_*} \quad (19)$$

Para facilitar la escritura de las ecuaciones, se prescindirá de los asteriscos, en el entendido de que se trata de variables adimensionales hasta que no se diga lo contrario.

Se introduce el potencial de Kirchhoff:

$$\mu(\theta) = \int_0^\theta D(\bar{\theta}) d\bar{\theta} \quad (20)$$

el cual satisface  $\mu(1) = 1$ , para escribir la ecuación (3) como sigue:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = D(\mu) \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} - D(\mu) \frac{dK}{d\mu} \frac{\partial \mu}{\partial z} - D(\mu) \Upsilon(z, t) \quad (21)$$

La coordenada de Storm (1951) y Fujita (1952) definida por:

$$\zeta(z, t) = \int_0^z f[\theta(\bar{z}, t)] d\bar{z} \quad (22)$$

permite linealizar el término difusivo de la ecuación (21), siempre y cuando  $f(\theta) \propto 1/\sqrt{D(\theta)}$ . Se demostrará que esta transformación linealiza la ecuación diferencial sólo en el caso de la difusividad de Fujita.

De la ecuación (25) se deducen las reglas:

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial t}\right)_z = \left(\frac{\partial \mu}{\partial t}\right)_\zeta + \left(\frac{\partial \mu}{\partial \zeta}\right)_t \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)_z \quad (23)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right) \frac{\partial}{\partial \zeta} = f[\theta(z, t)] \frac{\partial}{\partial \zeta} \quad (24)$$

La ecuación (21) deviene:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = \begin{cases} D(\mu) f^2(\theta) \frac{\partial^2 \mu}{\partial \zeta^2} - D(\mu) \frac{dK}{d\mu} f(\theta) \frac{\partial \mu}{\partial \zeta} - D(\mu) \Upsilon(z, t) + \\ f(\theta) f'(\theta) \left(\frac{\partial \mu}{\partial \zeta}\right)^2 + \frac{\partial \mu}{\partial \zeta} \int_0^z f'[\theta(\bar{z}, t)] \left[\frac{\partial q}{\partial \bar{z}} + \Upsilon(\bar{z}, t)\right] d\bar{z} \end{cases} \quad (25)$$

en donde se ha utilizado la ecuación (2) y  $f'(\theta) = df/d\theta$ . El flujo de Darcy ( $q$ ) está definido por la ecuación (3).

Para linealizar el término difusivo se debe tener  $D(\mu) f^2(\theta) = \kappa^2$ , donde  $\kappa$  es una constante. En virtud de las ecuaciones (2), (20) y (24),  $q = -f(\theta) \partial \mu / \partial \zeta + K(\mu)$ ; en consecuencia, para eliminar el cuadrado de la derivada en la ecuación (25), se debe asumir que  $df/d\theta = -c_1$ , donde  $c_1$  es una constante. Se deduce  $f(\theta) = c_2(1 - \alpha\theta)$ , donde  $c_2$  es una constante de integración y  $\alpha = c_1/c_2$ , y por lo tanto  $D(\theta) = \kappa^2/c_2^2(1 - \alpha\theta)^2$ . El potencial de Kirchhoff se deduce de la ecuación (20):  $\mu(\theta) = \kappa^2\theta/c_2^2(1 - \alpha\theta)$ , y puesto que  $\mu(1) = 1$ , se tiene  $\kappa^2/c_2^2 = 1 - \alpha$ . De este modo se obtiene  $D(\theta) = (1 - \alpha)/(1 - \alpha\theta)^2$ , la cual corresponde a la difusión de Fujita (1952), en escritura adimensional definida por la ecuación (18). Además:

$$\mu(\theta) = \frac{(1 - \alpha)\theta}{1 - \alpha\theta}; \quad \theta(\mu) = \frac{\mu}{1 - \alpha + \alpha\mu} \quad (26)$$

$$f(\theta) = \frac{\kappa}{\sqrt{D(\theta)}} = \kappa \left[ \frac{1 - \alpha\theta}{\sqrt{1 - \alpha}} \right] \quad (27)$$

$$f(\mu) = \kappa \left[ \frac{\sqrt{1 - \alpha}}{1 - \alpha + \alpha\mu} \right]$$

Con la ecuación (27), la ecuación (25) se simplifica a:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = \begin{cases} \kappa^2 \frac{\partial^2 \mu}{\partial \zeta^2} - \frac{\kappa}{\sqrt{1 - \alpha}} \left[ \frac{d}{d\mu} [(1 - \alpha + \alpha\mu)K(\mu)] \right] \\ - \alpha q_s \left[ \frac{\partial \mu}{\partial \zeta} - D(\mu) \Upsilon(z, t) \right] \\ - \kappa \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha}} \frac{\partial \mu}{\partial \zeta} \int_0^z \Upsilon(\bar{z}, t) d\bar{z} \end{cases} \quad (28)$$

donde  $q_s(t) = q(z = 0, t)$  es el flujo de Darcy en la frontera superior.

La ecuación (28) puede ser llevada a la forma de la ecuación de Burgers (1948) si los coeficientes del término convectivo tienen un comportamiento lineal en  $\mu$ . Haciendo  $d[(1 - \alpha + \alpha\mu)K(\mu)]/d\mu = \beta_c + 2\beta\mu$ , donde  $\beta_c$  y  $\beta$  son parámetros, se deduce:

$$K(\mu) = \frac{\mu(1 - \beta + \beta\mu)}{1 - \alpha + \alpha\mu} \quad (29)$$

en donde se han utilizado las condiciones  $K(0) = 0$  y  $K(1) = 1$ , que resultan en  $\beta_c = 1 - \beta$ .

La introducción de la ecuación (26) en la ecuación (29) conduce a la conductividad  $K(\theta) = \theta[1 - \beta + (\beta - \alpha)\theta]/(1 - \alpha\theta)$ , la cual es precisamente la ecuación (19), que resulta de la relación entre la conductividad y difusividad, propuesta por Parlange et al. (1982), cuando se introduce la difusividad de Fujita.

Siguiendo con el mismo razonamiento, si la integral en la ecuación (28) tiene la forma  $\alpha_s - \gamma\mu(z, t)$ , entonces se debe tener  $\alpha_s = \gamma\mu(0, t)$  para que la integral se anule en  $z = 0$ ;  $\gamma$  es un parámetro adimensional. Denotando

$\mu_s(t) = \mu(0, t)$ , a la evolución del potencial de Kirchhoff en la superficie de la columna, se puede establecer:

$$\int_0^z \Upsilon(\bar{z}, t) d\bar{z} = -\gamma[\mu(z, t) - \mu_s(t)], \quad (30)$$

$$\Upsilon(z, t) = -\gamma \frac{\partial \mu}{\partial z}$$

es decir, en la ecuación (28) se tiene también:

$$D(\mu) \Upsilon(\zeta, t) = -\frac{\kappa}{\sqrt{1-\alpha}} \gamma(1-\alpha + \alpha\mu) \frac{\partial \mu}{\partial \zeta} \quad (31)$$

La ecuación (28), considerando las ecuaciones (29), (30) y (31), se transforma en la ecuación de Burgers (1948) siguiente:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = \kappa^2 \frac{\partial^2 \mu}{\partial \zeta^2} - \kappa[2a\mu + b - cq_0] \frac{\partial \mu}{\partial \zeta} \quad (32)$$

donde:

$$a = \frac{\beta - \gamma\alpha}{\sqrt{1-\alpha}}, \quad b = \frac{1 - \beta - \gamma(1-\alpha)}{\sqrt{1-\alpha}}, \quad (33)$$

$$c = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha}}$$

$$q_0 = q_s - \gamma\mu_s \quad (34)$$

El parámetro  $\kappa$ , siendo arbitrario, puede ser tomado como la unidad (Fuentes, 1992) o ser seleccionado de modo que la lámina de agua almacenada en la columna de suelo  $l(t)$  sea igual a la lámina almacenada en la 'columna de Kirchhoff-Fujita':

$$l(t) = \int_0^{\infty} \theta(z, t) dz = \int_0^{\infty} \mu(\zeta, t) d\zeta \quad (35)$$

en tal caso  $\kappa = 1/\sqrt{1-\alpha}$ .

La ecuación de Burgers puede ser llevada a la forma de la ecuación lineal del calor, efectuando una sustitución no lineal debida

a Hopf (1950) y Cole (1951), inicialmente propuesta para el caso de  $q_0$  constante o  $c = 0$ , restricciones no consideradas aquí. Esta transformación reemplaza el coeficiente del término convectivo de la ecuación (32), con la ayuda de una nueva variable ( $u$ ), llamada potencial de Hopf-Cole:

$$\kappa(2a\mu + b - cq_0) = -2\kappa^2 \frac{\partial \ln(u)}{\partial \zeta} \quad (36)$$

esta transformación es un caso particular de las transformaciones de Bäcklund.

La ecuación (32) se transforma en:

$$\kappa \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \frac{1}{u} \left( \frac{\partial u}{\partial t} - \kappa^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \right) \right] = \frac{c}{2} \frac{dq_0}{dt} \quad (37)$$

de donde:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \frac{c}{2\kappa} \frac{dq_0}{dt} [\zeta + F(t)] u \quad (38)$$

en la cual  $F(t)$  es una función desconocida del tiempo.

El paso de la solución de la ecuación (38),  $u(\zeta, t)$ , a la solución de la ecuación (32),  $\mu(\zeta, t)$ , se realiza a través de la ecuación (36), a saber:

$$\mu(\zeta, t) = \frac{1}{2a} \left\{ cq_0 - b - 2\kappa \frac{\partial}{\partial \zeta} \ln[u(\zeta, t)] \right\} \quad (39)$$

Para contar con la solución  $u(z, t)$  es necesaria la relación entre  $z$  y  $\zeta$ . Ésta se encuentra mediante la inversión de la ecuación (22), considerando las ecuaciones (27) y (39):

$$z(\zeta, t) = \frac{1}{\kappa} \int_0^{\zeta} \sqrt{D[\mu(\bar{\zeta}, t)]} d\bar{\zeta}$$

$$= \frac{1}{\kappa} \left[ \sqrt{1-\alpha} + \frac{c(cq_0 - b)}{2a} \right] \zeta + \frac{c}{a} \ln \left[ \frac{u(0, t)}{u(\zeta, t)} \right] \quad (40)$$

Cuando  $q_0$  es una constante, la ecuación (38) se simplifica considerablemente, a saber:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \quad (41)$$

la cual corresponde a la ecuación lineal del calor.

De acuerdo con la ecuación (34), el flujo de Darcy en la frontera está dado por  $q_s = q_o + \gamma \mu_s$ , en donde se ha supuesto que  $q_o$  sea constante para deducir la ecuación (41). Si no hay término de sumidero ( $\gamma = 0$ ), las soluciones de la ecuación (41) serán aplicables para un flujo constante en la superficie ( $q_s = q_o$ ), ya sea positivo (lluvia) o negativo (evaporación). Cuando existe el sumidero descrito por la ecuación (30) ( $\gamma \neq 0$ ), estas soluciones son aplicables al caso particular en que el flujo de Darcy en la superficie varíe como  $q_s = q_o + \gamma \mu_s$ .

Para resolver la ecuación (41) es necesario transformar las condiciones límite. La condición de frontera en  $z = 0$  es definida por la ecuaciones (6), (20) y (27):  $q_s \sqrt{D(\mu)} = -\kappa \partial \mu / \partial \zeta + K(\mu) \sqrt{D(\mu)}$ . Obteniendo  $\partial \mu / \partial \zeta$  de la ecuación (36), utilizando las características hidrodinámicas, la propia ecuación (41) y considerando que  $\mu_s(t) = \mu(0,t)$ , se deduce:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{4} [b^2 + 2(2a\sqrt{1-\alpha} - bc)q_o + (cq_o)^2] u = 0 \quad (42)$$

La condición inicial se deduce de la propia ecuación (36):

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{1}{2\kappa} [2a\mu_s(\zeta) + b - cq_o] u = 0 \quad (43)$$

Así, el problema consiste en resolver la ecuación (41), sujeta a la condición de frontera:

$$u(0,t) = \exp(\lambda^2 t) \quad (44)$$

y a la condición inicial:

$$u(\zeta,0) = \exp[A(\zeta)] \quad (45)$$

ya que estas dos últimas ecuaciones satisfacen, respectivamente, las ecuaciones (42) y (43) con:

$$\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + 2(2a\sqrt{1-\alpha} - bc)q_o + (cq_o)^2} \quad (46)$$

$$A(\zeta) = \frac{1}{2} \left\{ cq_o \zeta - \int_0^\zeta [2a\mu_s(\bar{\zeta}) + b] d\bar{\zeta} \right\} \quad (47)$$

La resolución se vuelve simple, se descompone la función  $u$  en la suma de dos funciones que satisfacen la propia ecuación (41) (Carslaw y Jaeger, 1959):

$$u = u_f + u_c \quad (48)$$

La primera está sujeta a las condiciones inicial y de frontera:

$$u_f(\zeta,0) = 0 ; u_f(0,t) = \exp(\lambda^2 t) \quad (49)$$

y la segunda está sujeta a las condiciones:

$$u_c(\zeta,0) = \exp[A(\zeta)] ; u_c(0,t) = 0 \quad (50)$$

La solución del primer sistema se obtiene utilizando la transformada de Laplace y es (Carslaw y Jaeger, 1959, p. 64):

$$u_f(\zeta,t) = \frac{1}{2} e^{-(\lambda/\kappa)\zeta + \lambda^2 t} \operatorname{erfc} \left( \frac{\zeta}{2\kappa\sqrt{t}} - \lambda\sqrt{t} \right) + \frac{1}{2} e^{(\lambda/\kappa)\zeta + \lambda^2 t} \operatorname{erfc} \left( \frac{\zeta}{2\kappa\sqrt{t}} + \lambda\sqrt{t} \right) \quad (51)$$

donde  $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$  es la función complementaria de los errores y  $\operatorname{erf}(x)$  es la función de los errores (Abramowitz y Stegun, 1970).

La solución del segundo sistema (Carslaw y Jaeger, 1959, p. 59) se expresa como:

$$u_c(\zeta,t) = \frac{1}{2\kappa\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \exp[A(\bar{\zeta})] \left\{ \exp \left[ -\frac{(\zeta - \bar{\zeta})^2}{4\kappa^2 t} \right] - \exp \left[ -\frac{(\zeta + \bar{\zeta})^2}{4\kappa^2 t} \right] \right\} d\bar{\zeta} \quad (52)$$



De las ecuaciones (51) y (52) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_f}{\partial \zeta} = & -\frac{\lambda}{2\kappa} e^{-(\lambda/\kappa)\zeta + \lambda^2 t} \operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta}{2\kappa\sqrt{t}} - \lambda\sqrt{t}\right) \\ & + \frac{\lambda}{2\kappa} e^{(\lambda/\kappa)\zeta + \lambda^2 t} \operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta}{2\kappa\sqrt{t}} - \lambda\sqrt{t}\right) \\ & - \frac{1}{\kappa\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{4\kappa^2 t}\right) \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_c}{\partial \zeta} = & -\frac{1}{4\kappa^3 t^{3/2} \sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{A(\bar{\zeta})} \left\{ (\zeta - \bar{\zeta}) \exp\left[-\frac{(\zeta - \bar{\zeta})^2}{4\kappa^2 t}\right] \right. \\ & \left. - (\zeta + \bar{\zeta}) \exp\left[-\frac{(\zeta + \bar{\zeta})^2}{4\kappa^2 t}\right] \right\} d\bar{\zeta} \end{aligned} \quad (54)$$

Considerando las ecuaciones (26), (39), (40), (44), (48), (51), (52), (53) y (54), la solución está formada por:

$$\theta(\zeta, t) = \frac{\mu(\zeta, t)}{1 - \alpha + \alpha\mu(\zeta, t)} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \mu(\zeta, t) = & \frac{1}{2a} \left\{ cq_0 - b \right. \\ & \left. - \frac{2\kappa}{u_f(\zeta, t) + u_c(\zeta, t)} \left[ \frac{\partial u_f(\zeta, t)}{\partial \zeta} + \frac{\partial u_c(\zeta, t)}{\partial \zeta} \right] \right\} \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} z(\zeta, t) = & \frac{1}{\kappa} \left[ \sqrt{1 - \alpha} + \frac{c(cq_0 - b)}{2a} \right] \zeta \\ & + \frac{c}{a} \ln \left[ \frac{\exp(\lambda^2 t)}{u_f(\zeta, t) + u_c(\zeta, t)} \right] \end{aligned} \quad (57)$$

La solución de la ecuación Fokker-Planck  $\theta = \theta(z, t)$  tiene la forma paramétrica  $\theta = \theta(\zeta, t)$  y  $z = z(\zeta, t)$ , donde  $\zeta$  es el parámetro y  $q_0$  el flujo efectivo.

Una solución cerrada puede ser obtenida cuando  $A(\zeta)$  presenta un comportamiento

lineal, para ello es suficiente considerar que la función  $\theta_i(z)$  en la ecuación (5) es una constante.

La solución incluye el caso  $q_s > 0$  (lluvia),  $\theta_i(z)$  una constante y  $\beta = 1$ , presentado por Broadbridge y White (1988). Para la condición inicial, estudiada para  $\beta = 1$ , propuesta por Warrick et al. (1990):

$$\theta_i(z) = \begin{cases} \theta_1 & ; 0 < z < z_1 \\ \theta_2 & ; z_1 \leq z \end{cases} \quad (58)$$

permite integrar la ecuación (52) de manera cerrada.

La coordenada de Fujita  $\zeta_1$ , correspondiente a  $z_1$ , se deduce de la ecuación (22):

$$\zeta_1 = \kappa \frac{1 - \alpha\theta_1}{\sqrt{1 - \alpha}} z_1 \quad (59)$$

La función  $A(\zeta)$ , considerando la ecuación (47), queda definida por:

$$A(\zeta) = \begin{cases} (A_1/\kappa)\zeta & ; 0 < \zeta < \zeta_1 \\ (A_1/\kappa)\zeta_1 + (A_2/\kappa)(\zeta - \zeta_1) & ; \zeta_1 \leq \zeta \end{cases} \quad (60)$$

donde:

$$\begin{aligned} A_1 = & \frac{1}{2} [cq_0 - (2a\mu_1 + b)]; \\ A_2 = & \frac{1}{2} [cq_0 - (2a\mu_2 + b)] \end{aligned} \quad (61)$$

en las cuales los potenciales de Kirchhoff  $\mu_1$  y  $\mu_2$  corresponden, respectivamente, a  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , y son calculados con la ecuación (26). La función  $A(\zeta)$  incluye el caso de un contenido de humedad constante en toda la columna ( $\theta_i$ ); es suficiente hacer  $z_1 = 0$  y  $\theta_2 = \theta_i$ .

La introducción de la ecuación (60) en la ecuación (52) permite encontrar la función  $u_c(\zeta, t)$  siguiente:

$$\begin{aligned}
 u_c(\zeta, t) = & \frac{1}{2} \exp[(A_1/\kappa)\zeta + A_1^2 t] \left[ \operatorname{erfc} \left( \frac{\zeta - \zeta_1}{2\kappa\sqrt{t}} + A_1\sqrt{t} \right) \right. \\
 & \left. - \operatorname{erfc} \left( \frac{\zeta}{2\kappa\sqrt{t}} + A_1\sqrt{t} \right) \right] \\
 & + \frac{1}{2} \exp[-(A_1/\kappa)\zeta + A_1^2 t] \left[ \operatorname{erfc} \left( \frac{\zeta + \zeta_1}{2\kappa\sqrt{t}} - A_1\sqrt{t} \right) \right. \\
 & \left. - \operatorname{erfc} \left( \frac{\zeta}{2\kappa\sqrt{t}} - A_1\sqrt{t} \right) \right] + \frac{1}{2} \exp\{[(A_1 - A_2)/\kappa]\zeta_1 \\
 & + (A_2/\kappa)\zeta + A_2^2 t\} \operatorname{erfc} \left[ \frac{\zeta_1 - \zeta}{2\kappa\sqrt{t}} - A_2\sqrt{t} \right] \\
 & - \frac{1}{2} \exp\{[(A_1 - A_2)/\kappa]\zeta_1 - (A_2/\kappa)\zeta \\
 & + A_2^2 t\} \operatorname{erfc} \left[ \frac{\zeta_1 + \zeta}{2\kappa\sqrt{t}} - A_2\sqrt{t} \right] \quad (62)
 \end{aligned}$$

y de aquí se deduce la derivada  $\partial u_c / \partial \zeta$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_c}{\partial \zeta} = & \frac{A_1}{2\kappa} \exp[(A_1/\kappa)\zeta + A_1^2 t] \left[ \operatorname{erfc} \left( \frac{\zeta - \zeta_1}{2\kappa\sqrt{t}} + A_1\sqrt{t} \right) \right. \\
 & \left. - \operatorname{erfc} \left( \frac{\zeta}{2\kappa\sqrt{t}} + A_1\sqrt{t} \right) \right] \\
 & - \frac{A_1}{2\kappa} \exp[-(A_1/\kappa)\zeta + A_1^2 t] \left[ \operatorname{erfc} \left( \frac{\zeta + \zeta_1}{2\kappa\sqrt{t}} - A_1\sqrt{t} \right) \right. \\
 & \left. - \operatorname{erfc} \left( \frac{\zeta}{2\kappa\sqrt{t}} - A_1\sqrt{t} \right) \right] \\
 & + \frac{A_2}{2\kappa} \exp\{[(A_1 - A_2)/\kappa]\zeta_1 + (A_2/\kappa)\zeta \\
 & + A_2^2 t\} \operatorname{erfc} \left[ \frac{\zeta_1 - \zeta}{2\kappa\sqrt{t}} - A_2\sqrt{t} \right] \\
 & + \frac{A_2}{2\kappa} \exp\{[(A_1 - A_2)/\kappa]\zeta_1 - (A_2/\kappa)\zeta \\
 & + A_2^2 t\} \operatorname{erfc} \left[ \frac{\zeta_1 + \zeta}{2\kappa\sqrt{t}} - A_2\sqrt{t} \right] + \frac{1}{\kappa\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{4\kappa^2 t}\right) \quad (63)
 \end{aligned}$$

ambas expresiones necesarias para contar con la solución exacta planteada en las ecuaciones (55), (56) y (57).

La función de sumidero se obtiene de la ecuación (34), considerando las ecuaciones (26) y (31), a saber:

$$\Upsilon(\zeta, t) = -\gamma\kappa \frac{\sqrt{1-\alpha}}{1-\alpha + \alpha\mu(\zeta, t)} \frac{\partial \mu(\zeta, t)}{\partial \zeta} \quad (64)$$

La derivada se obtiene de la ecuación (45):

$$\frac{\partial \mu}{\partial \zeta} = \frac{\kappa}{a} \left[ \left( \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right)^2 - \frac{1}{u} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \right] \quad (65)$$

Es claro que aparte de la primera derivada  $\partial u / \partial \zeta = \partial u_f / \partial \zeta + \partial u_c / \partial \zeta$ , se requiere de la segunda derivada de las funciones  $u_f(\zeta, t)$  y  $u_c(\zeta, t)$ . Éstas se obtienen de las ecuaciones (53) y (63), respectivamente:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u_f}{\partial \zeta^2} = & \frac{\lambda^2}{2\kappa^2} e^{-(\lambda/\kappa)\zeta + \lambda^2 t} \operatorname{erfc} \left( \frac{\zeta}{2\kappa\sqrt{t}} - \lambda\sqrt{t} \right) \\
 & + \frac{\lambda^2}{2\kappa^2} e^{(\lambda/\kappa)\zeta + \lambda^2 t} \operatorname{erfc} \left( \frac{\zeta}{2\kappa\sqrt{t}} - \lambda\sqrt{t} \right) \quad (66) \\
 & + \frac{\zeta}{2\kappa^3 \sqrt{\pi t^3}} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{4\kappa^2 t}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u_c}{\partial \zeta^2} = & \frac{A_1^2}{2\kappa^2} \exp[(A_1/\kappa)\zeta + A_1^2 t] \left[ \operatorname{erfc} \left( \frac{\zeta - \zeta_1}{2\kappa\sqrt{t}} + A_1\sqrt{t} \right) \right. \\
 & \left. - \operatorname{erfc} \left( \frac{\zeta}{2\kappa\sqrt{t}} + A_1\sqrt{t} \right) \right] \\
 & + \frac{A_1^2}{2\kappa^2} \exp[-(A_1/\kappa)\zeta + A_1^2 t] \left[ \operatorname{erfc} \left( \frac{\zeta + \zeta_1}{2\kappa\sqrt{t}} - A_1\sqrt{t} \right) \right. \\
 & \left. - \operatorname{erfc} \left( \frac{\zeta}{2\kappa\sqrt{t}} - A_1\sqrt{t} \right) \right] \\
 & + \frac{A_2^2}{2\kappa^2} \exp\{[(A_1 - A_2)/\kappa]\zeta_1 + (A_2/\kappa)\zeta \\
 & + A_2^2 t\} \operatorname{erfc} \left[ \frac{\zeta_1 - \zeta}{2\kappa\sqrt{t}} - A_2\sqrt{t} \right] \\
 & - \frac{A_2^2}{2\kappa^2} \exp\{[(A_1 - A_2)/\kappa]\zeta_1 - (A_2/\kappa)\zeta \\
 & + A_2^2 t\} \operatorname{erfc} \left[ \frac{\zeta_1 + \zeta}{2\kappa\sqrt{t}} - A_2\sqrt{t} \right] \\
 & + \frac{A_2 - A_1}{2\kappa^2 \sqrt{\pi t}} \exp\left[-\frac{(\zeta - \zeta_1)^2}{4\kappa^2 t} + \left(\frac{A_1}{\kappa}\right)\zeta_1\right] \\
 & + \frac{A_1 - A_2}{2\kappa^2 \sqrt{\pi t}} \exp\left[-\frac{(\zeta + \zeta_1)^2}{4\kappa^2 t} + \left(\frac{A_1}{\kappa}\right)\zeta_1\right] \\
 & - \frac{\zeta}{2\kappa^3 \sqrt{\pi t^3}} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{4\kappa^2 t}\right) \quad (67)
 \end{aligned}$$

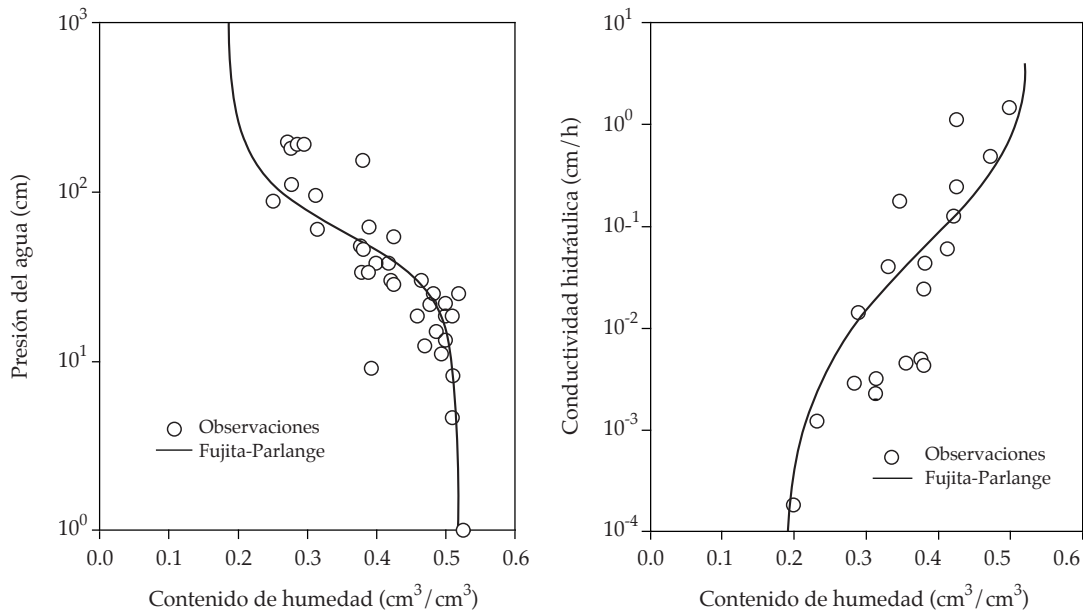


Figura 1. Las curvas de retención de humedad y de conductividad hidráulica de un suelo de Montecillo, México. Las características de Fujita y Parlange están definidas por las ecuaciones (11) y (12).

Nótese que a partir de la segunda derivada espacial se puede calcular, considerando la ecuación (41), la derivada temporal:  $\partial u/\partial t = \kappa^2(\partial^2 u_f/\partial \zeta^2 + \partial^2 u_c/\partial \zeta^2)$ .

### Aplicaciones

La solución exacta es ilustrada en un suelo de Montecillo, México. De acuerdo con la clasificación textural americana, es un suelo franco arenoso. Este suelo fue caracterizado hidrodinámicamente con el método del drenaje interno por Cano (1990).

En la figura 1 se muestran las características hidrodinámicas experimentales, así como las características de Fujita y Parlange, definidas por las ecuaciones (11) y (12), con parámetros:  $\theta_s = 0.520 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$ ,  $\theta_r = 0.185 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$ ,  $|\psi_d| = 13.5 \text{ cm}$ ,  $|\psi_s| = 0 \text{ cm}$ ,  $K_s = 2.5 \text{ cm/h}$ ,  $K_o = 0 \text{ cm/h}$ ,  $\alpha = 0.969$ ,  $\beta = 0.998$ . Se observa que las características teóricas representan de manera aceptable las características experimentales.

En la figura 2, la solución es mostrada para una precipitación constante  $q_s = 2 \text{ cm/h}$ . En la parte (a) se muestra la evolución del perfil de humedad en una columna de suelo, con un contenido de humedad inicial constante  $\theta_o = 0.250 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$  a todo lo largo de la misma. En la parte (b) se muestra la evolución del perfil de humedad, pero cuando la columna tiene dos contenidos de humedad, a saber  $\theta_1 = 0.250 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$  en  $0 < z < z_1$  y  $\theta_2 = 0.500 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$  en  $z_1 \leq z$ , donde  $z_1 = 25 \text{ cm}$ ; la gráfica muestra que el agua de la zona más húmeda se distribuye hacia arriba por ascenso capilar y hacia abajo por efectos gravitacionales.

Cuando el flujo adimensional de Darcy en la superficie de la columna tiene la expresión  $q_s^* = q_o^* + \gamma \mu_s^*$ , que resulta de la ecuación (34), la solución se muestra en las figuras 3 y 4. Con los valores de  $q_o = 2 \text{ cm/h}$  y  $\gamma = 0.015$ , en la parte (a) de la figura 3 se tiene la evolución del perfil de humedad en una columna con un contenido de humedad inicial  $\theta_o = 0.250 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$  y en

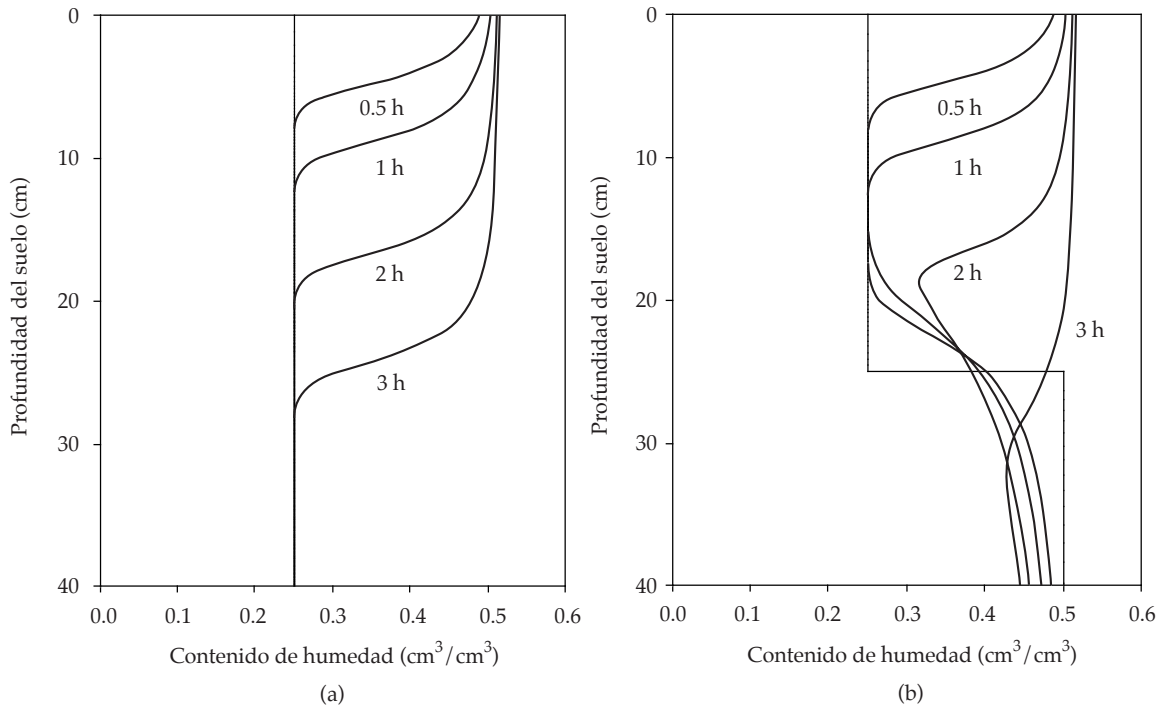


Figura 2. La solución exacta no lineal, precipitación constante  $q_s = 2$  cm/h. Humedad inicial: a)  $\theta_0 = 0.250$  cm<sup>3</sup>/cm<sup>3</sup>,  $0 < z$ ; b)  $\theta_1 = 0.250$  cm<sup>3</sup>/cm<sup>3</sup> en  $0 < z < z_1$  y  $\theta_2 = 0.500$  cm<sup>3</sup>/cm<sup>3</sup> en  $z_1 \leq z$ , donde  $z_1 = 25$  cm.

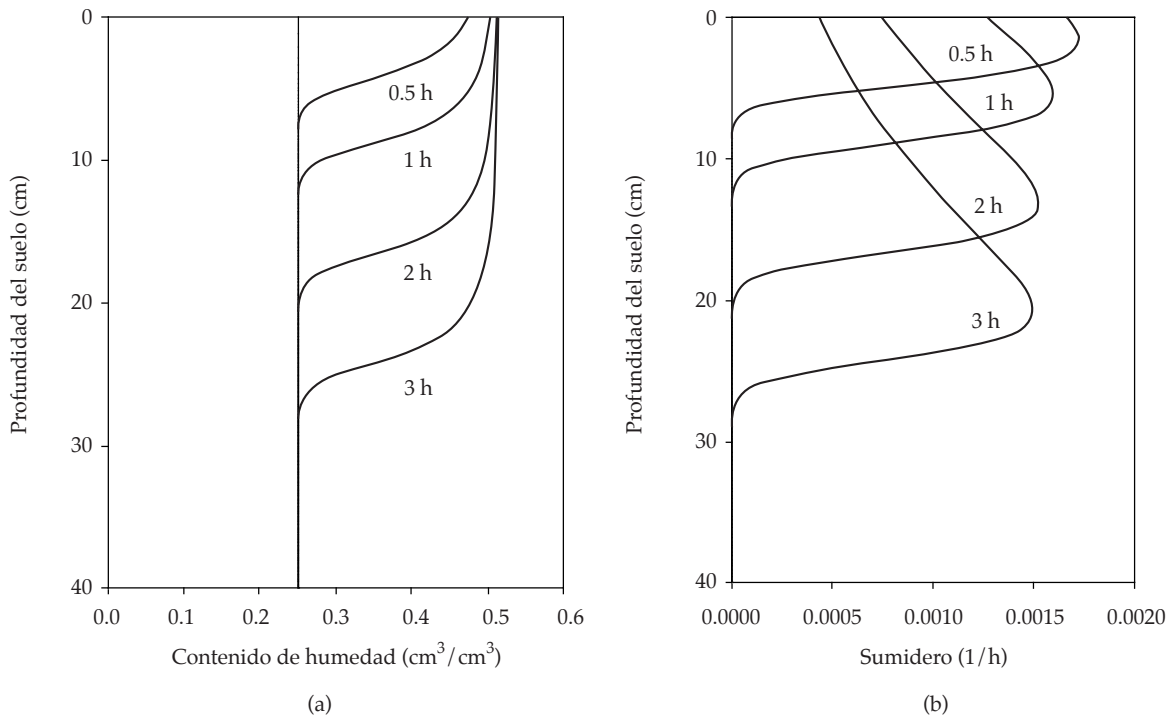


Figura 3. La solución exacta no lineal con término de sumidero, con parámetros  $q_0 = 2$  cm/h y  $\gamma = 0.015$  y condición inicial  $\theta_0 = 0.250$  cm<sup>3</sup>/cm<sup>3</sup>,  $0 < z$ : a) evolución del contenido de humedad y b) evolución del término de sumidero.

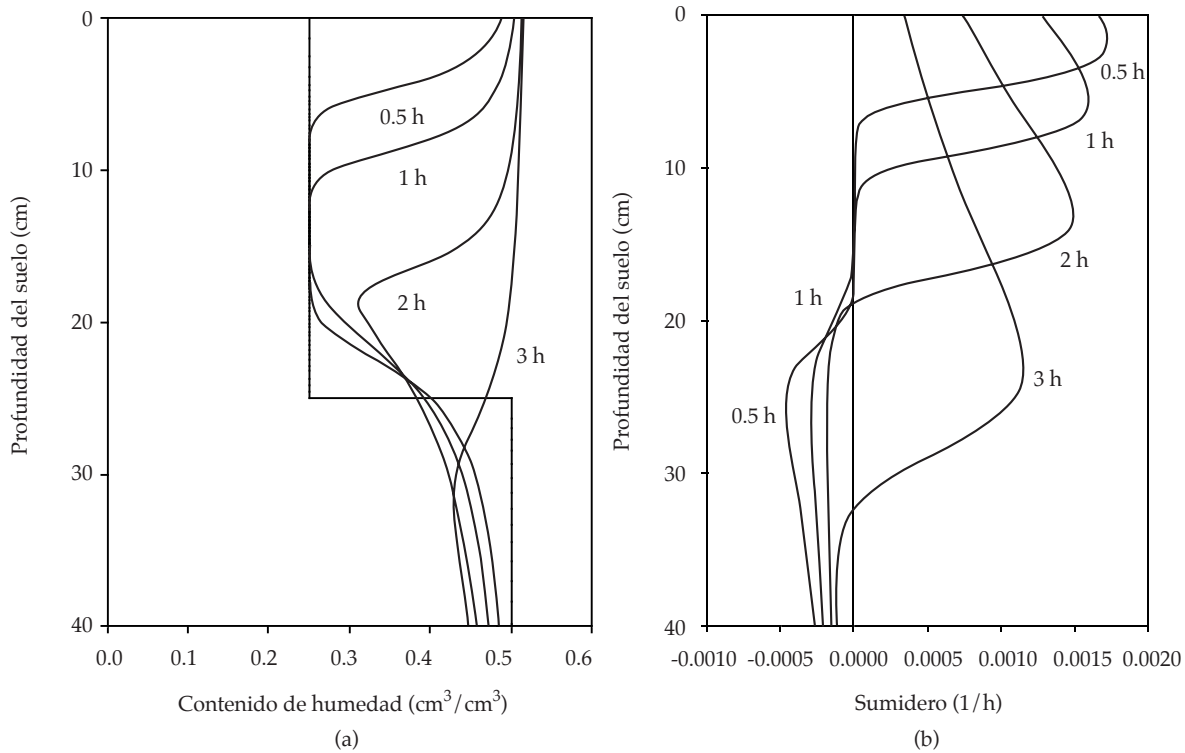


Figura 4. La solución exacta no lineal con término de sumidero, con parámetros  $q_o = 2$  cm/h y  $\gamma = 0.015$ , y condición inicial  $\theta_1 = 0.250$  cm<sup>3</sup>/cm<sup>3</sup> en  $0 < z < z_1$  y  $\theta_2 = 0.500$  cm<sup>3</sup>/cm<sup>3</sup> en  $z_1 \leq z$ : a) evolución del contenido de humedad y b) evolución del término de sumidero.

la parte (b), la evolución correspondiente del término de sumidero.

En la figura 4 se toma como condición inicial  $\theta_1 = 0.250$  cm<sup>3</sup>/cm<sup>3</sup> en  $0 < z < z_1$  y  $\theta_2 = 0.500$  cm<sup>3</sup>/cm<sup>3</sup> en  $z_1 \leq z$ , donde  $z_1 = 25$  cm; la parte (a) muestra la evolución del contenido de humedad, mientras que la parte (b) muestra la evolución del término de sumidero. Se debe observar en este caso que el término de sumidero toma tanto valores positivos como negativos debido a que es proporcional al gradiente del potencial de Kirchhoff y, en consecuencia, al gradiente de humedad, como se deduce de la ecuación (30).

### Conclusiones

Se han planteado las ecuaciones diferenciales del flujo del agua en el suelo. Las trans-

formaciones para resolver la ecuación de flujo han sido expuestas y desarrolladas, remarcando el significado físico de las mismas. De manera sistemática se han expuesto las características hidrodinámicas que han permitido la reducción de la ecuación Fokker-Planck de la infiltración a la ecuación de Burgers de la aerodinámica. Ellas han sido establecidas por Sanders *et al.* (1988) en la adaptación de la solución de la ecuación de Burgers a los medios porosos.

La aplicabilidad de las transformaciones demanda características hidrodinámicas específicas, es decir, la difusividad de Fujita (1952) y la relación entre la conductividad y la difusividad propuesta por Parlange *et al.* (1982). Se demuestra que en el fenómeno del ascenso capilar, estas características proporcionan un volumen almacenado acotado en tiempos

grandes, a diferencia del volumen infinito que se obtiene con las características de Broadbridge y White (1988).

Las mismas transformaciones han permitido la proposición de la variación posible del término de sumidero de la ecuación de Fokker-Planck. Las soluciones de la ecuación de Burgers han sugerido que el término de sumidero puede tener un comportamiento lineal en el potencial de Kirchhoff.

La solución general aquí obtenida ha sido ilustrada en el suelo Montecillo, asimilando el término de sumidero a la extracción de agua por las raíces de las plantas. Por otra parte, la solución exacta construida puede ser útil en la validación de soluciones numéricas de la ecuación de transferencia del agua en los suelos.

Recibido: 17/02/09  
Aprobado: 03/06/10

## Referencias

- ABRAMOWITZ, M. and STEGUN, I.A. *Handbook of mathematical functions*. New York: Dover Publications, Inc., 1970, 1046 pp.
- BLUMAN, G. and KUMEL, S. On the remarkable nonlinear diffusion equation  $(\partial/\partial x)[a(u+b)^{-2}(\partial u/\partial x)] - (\partial u/\partial t) = 0$ . *J. Math. Phys.* Vol. 21, 1980, pp. 1019-1023.
- BROADBRIDGE, P. and WHITE, I. Constant rate rainfall infiltration: A versatile nonlinear model, 1. Analytic solution. *Water Resources Res.* Vol. 24, 1988, pp. 145-154.
- BROOKS, R.H. and COREY, A.T. *Hydraulic properties of porous media*. Hidrol. Pap. 3. Fort Collins: Colorado State University, 1964.
- BURGERS, J.M. A mathematical model illustrating the theory of turbulence. *Adv. Appl. Mech.* Vol. 1, 1948, pp. 171-179.
- CANO, M.A. *Caracterización hidrodinámica del suelo in situ y cálculo de percolación y evapotranspiración en riego por goteo*. Tesis de Maestría en Ciencias. Montecillo, México: Centro de Hidrociencias del Colegio de Postgraduados, 1990.
- COLE, J.D. On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics. *Q. Appl. Math.* Vol. 9, 1951, pp. 225-236.
- FOKAS, A.S., and YORTSOS, Y.C. On the exactly solvable equation  $S_t = [(\beta S + \gamma)^{-2} S_x]_x + \alpha(\beta S + \gamma)^{-2} S_x$  occurring in two-phase flow in porous media. *SIAM. J. Appl. Math.* Vol. 42, 1982, pp. 318-332.
- FUENTES, C. *Approche fractale des transferts hydriques dans les sols non-saturés*. Tesis de Doctorado. Grenoble : Université Joseph Fourier de Grenoble, Francia, 1992, 267 pp.
- FUENTES, C., HAVERKAMP, R. and PARLANGE, J.-Y. Parameter constraints on closed-form soil-water relationships. *Journal of Hydrology*. Vol. 134, 1992, pp. 117-142.
- FUENTES, C., PARLANGE, J.Y., HAVERKAMP, R. y VAUCLIN, M. La solución cuasi-lineal de la infiltración vertical. *Ingeniería hidráulica en México*. Vol. XVI, núm. 4, octubre-diciembre de 2001, pp. 25-33.
- FUJITA, H. The exact pattern of a concentration-dependent diffusion in a semi-infinite medium, part I. *Textile Research Journal*. Vol. 22, 1952, pp. 757-761.
- GARDNER, W.R. Some steady-state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from a water table. *Soil Sci.* Vol. 85, 1958, pp. 228-232.
- GREEN, W.H. and AMPT, G.A. Studies in soil physics, 1: the flow of air and water through soils. *J. Agric. Sci.* Vol. 4, 1911, pp. 1-24.
- HOPF, E. The partial differential equation  $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ . *Commun. Pure Appl. Math.* Vol. 3, 1950, pp. 201-230.
- KUNZE, R.J., PARLANGE, J.-Y. and ROSE, C.W. A comparison of numerical and analytical techniques for describing capillary rise. *Soil Sci.* Vol. 139, 1985, pp. 491-496.
- PARLANGE, J.-Y., BRADDOCK, R.D., LISLE, I. and SMITH, R.E. Three parameter infiltration equation. *Soil Sci.* Vol. 111, 1982, pp. 170-174.
- PHILIP, J.R. Theory of infiltration. *Adv. In Hydrosoci.* Vol. 5, 1969, pp. 215-296.
- PARKIN, G.W., WARRICK, A.W., ELRICK, D.E. and KACHANOSKI, R.G. Analytical solution for one-dimensional drainage: Water stored in a fixed depth. *Water Resour. Res.* Vol. 31, 1995, pp. 1267-1271.
- REYNOLDS W.D. and ELRICK, D.E. In situ measurement of field - saturated hydraulic conductivity, sorptivity and the  $\alpha$  -parameter using the Guelph permeameter. *Soil Sci.* Vol. 140, No. 4, 1985, pp. 292-302.
- ROGERS, C., STALLYBRASS, M.P. and CLEMENTS, D.L. On two-phase filtration under gravity and with boundary infiltration; Application of a Bäcklund transformation. *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.* Vol. 7, 1983, pp. 785-799.
- TALSMA, T. and PARLANGE, J.-Y. One-dimensional vertical infiltration. *Aust. J. Soil. Res.* Vol. 10, 1972, pp. 143-150.
- SANDERS, G.C., PARLANGE, J.-Y., KÜHNEL, V., HOGART, W.I., LOCKINGTON, D. and O'KANE, J.P.J. Exact nonlinear solution for constant flux infiltration. *Journal of Hydrology*. Vol. 97, 1988, pp. 341-346.
- SI, B.C. and KACHANOSKI, R.G. A new solution for water storage to a fixed depth for constant infiltration. *Soil Sci. Soc. Am. J.* Vol. 64, 2000, pp. 24-29.

STORM, M. L. Heat conduction in simple metal. *J. Appl. Phys.* Vol. 22, 1951, pp. 940.

WARRICK, A.W., LOMEN, D.O. and ISLAS, A. An analytical solution to Richards' equation for a draining soil profile. *Water Resour. Res.* Vol. 26, 1990, pp. 253-258.

WARRICK, A.W. and PARKING, G.W. Analytical solution for one-dimensional drainage: Burgers' and simplified forms. *Water Resour. Res.* Vol. 31, 1995, pp. 2891-2894.

WOODING, R.A. Steady infiltration from a shallow circular pond. *Water Resour.* Vol. 4, 1968, pp. 1259-1273.

## Abstract

FUENTES, C., CHÁVEZ, C., SAUCEDO, H. & ZAVALA, M. On an exact solution of the non-linear Fokker-Planck equation with sink term. *Water Technology and Sciences, formerly Hydraulic engineering in Mexico (in Spanish)*. Vol. II, No. 1, January-March, 2011, pp. 117-132.

The Fokker-Planck equation with a sink term is resolved exactly, using the Fujita diffusivity and Parlange relationship between conductivity and diffusivity. In order to obtain the solution, the Kirchhoff potential and the Fujita-Storm mobile coordinate are introduced. The differential equation takes the form of the Burgers equation, which is linear in the diffusive term. The convective coefficient of the latter is replaced by the Hopf-Cole transformation for the purpose of deriving the classical linear heat equation. During the transformation, the sink term is defined functionally, so that the end result is precisely the heat equation without sink term. The exact solution of the Hopf-Cole potential is deduced by using the classical Laplace transform for certain initial and boundary conditions of interest. The solution of the Fokker-Planck equation in the physical space is obtained through the inverse transformations. The solution includes as particular cases both the Sanders et al. and Broadbridge and White solutions. The exact solution can be used to validate numerical solutions of the Fokker-Planck equation and in studies on water extraction by plant roots.

**Keywords:** Fujita-Parlange characteristics, Kirchhoff transformation, Hopf-Cole transformation, Burgers equation.

## Dirección institucional de los autores

Dr. Carlos Fuentes

Dr. Carlos Chávez

Facultad de Ingeniería  
Universidad Autónoma de Querétaro  
Cerro de las Campanas  
76010 Santiago de Querétaro, Querétaro, México  
Teléfono: +52 (442) 1921 200, extensión 6036  
Fax: +52 (442) 1921 200, extensión 6006  
cfuentes@uaq.mx  
chagcarlos@gmail.com

Dr. Heber Saucedo

Subcoordinación de Contaminación y Drenaje Agrícola  
Coordinación de Riego y Drenaje  
Instituto Mexicano de Tecnología del Agua  
Paseo Cuauhnáhuac 8532  
62550 Jiutepec, Morelos, México  
Teléfono: +52 (777) 3293 600, extensión 443 y 3293 659  
Fax: +52 (777) 3293 659  
hsaucedo@tlaloc.imta.mx

Dr. Manuel Zavala

Facultad de Ingeniería  
Universidad Autónoma de Zacatecas  
Jardín Juárez 147  
Centro Histórico  
98000 Zacatecas, México  
Teléfono: +52 (492) 1354 512  
mzavala73@yahoo.com.mx