

# Anisotropía en la propagación del sonido de un cristal fonónico desordenado

J. A. Vargas\*, J. Arriaga

*Instituto de Física, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla*

*Apartado postal J-48 72570, Puebla, México*

(Recibido: 28 de septiembre de 2008; Aceptado: 27 de febrero de 2008)

En este trabajo se presentan resultados de cálculos teóricos de la velocidad efectiva del sonido de un sistema bidimensional desordenado de cilindros de aluminio en aire en una estructura hexagonal. Al comparar con el caso simétrico se encuentra una ligera anisotropía inducida por el desorden. También se analiza el caso en el que el desorden se introduce mediante una variación aleatoria de los radios de los cilindros y se encuentra que la anisotropía es más marcada en este último caso. Utilizando el método de expansión de ondas planas en el límite de grandes longitudes de onda (homogenización) desarrollado previamente y, tomando una supercelda de 25 cilindros ligeramente desordenados, calculamos la velocidad del sonido en sistemas periódicos.

*Palabras clave:* Cristales fotónico; Homogeneización; Velocidad del sonido

We present theoretical results for the effective sound velocity of a two-dimensional disordered system composed by a hexagonal array of aluminum cylinders in air. Compared with the symmetric case we observe a small anisotropy induced by the disorder. We analyze a different type of disorder considering a random variation of the cylinders radii and we observe a bigger anisotropy for this case. Using the plane wave expansion method in the long wavelength limit (homogenization) previously developed together with a supercell containing 25 cylinders lightly disordered, we calculate the sound velocity in periodic systems.

*Keywords:* Phononic crystals; Homogenization; Sound velocity

## 1. Introducción

La propagación de ondas acústicas y elásticas en medios heterogéneos es un problema que desde hace muchas décadas ha mantenido un constante interés entre la comunidad científica [1 – 4]. Mucho del trabajo desarrollado ha sido el calcular y controlar los rangos de frecuencia dentro de los cuales se prohíbe la propagación de ondas acústicas. Sin embargo, mucho menos atención se le ha dedicado a las regiones muy por debajo de los gaps. En estas regiones, la relación de dispersión de las ondas es lineal,  $\omega = c_{eff} k$ ; siendo la constante de proporcionalidad, ( $c_{eff}$ ) la velocidad de propagación efectiva de la onda, ya que una longitud de onda cubre muchos períodos de la estructura y, por consiguiente, la onda se promedia en el medio inhomogéneo.

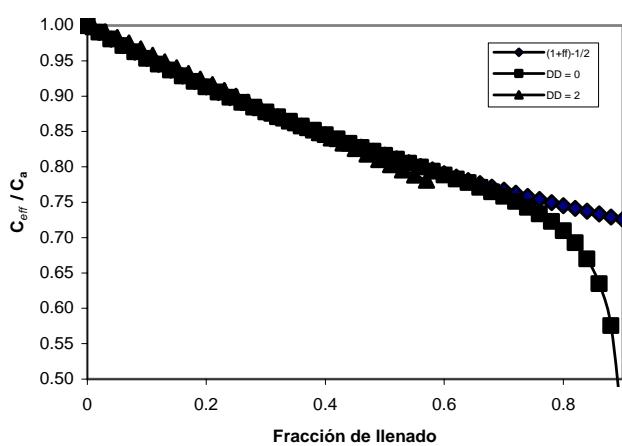
A bajas frecuencias (grandes longitudes de onda) un medio elástico in-homogéneo se comporta como un medio homogéneo. Las ondas elásticas propagándose en el medio actúan como si se propagaran en un medio homogéneo con ciertos parámetros característicos. Un problema fundamental en el estudio de estos sistemas ha sido el cálculo de dichos parámetros efectivos; es decir, velocidad del sonido efectiva y densidad de masa efectiva. Varios grupos utilizando diferentes métodos han reportado los valores de dichos parámetros característicos. Sin embargo, la mayoría de los resultados teóricos reportados no son capaces de reproducir totalmente los resultados experimentales [5 – 8].

Entre los sistemas bidimensionales más estudiados, se encuentra la propagación del sonido a través de un sistema

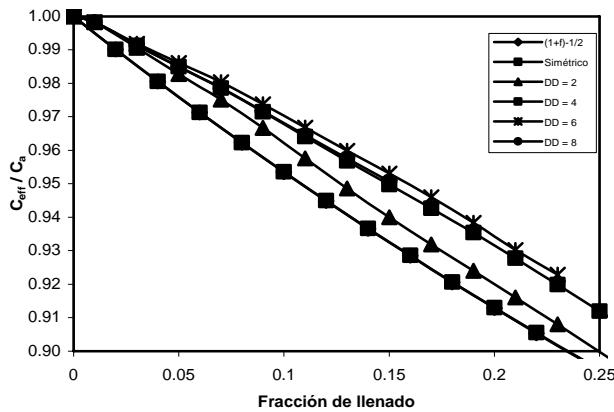
periódico de cilindros metálicos en aire. Incluso, se ha comenzado a explorar, teórica y experimentalmente [9,10], el efecto que tiene en la velocidad de propagación, el hecho de que el sistema se encuentre ligeramente desordenado. En esos trabajos se reporta el cambio que tiene la velocidad de propagación al desordenar el sistema, pero no se habla de una anisotropía inducida por el desorden. Además, los cálculos teóricos no reproducen satisfactoriamente los resultados experimentales en todo el rango de fracciones de llenado. En este trabajo utilizando los resultados de la teoría de homogeneización de sistemas periódicos bidimensionales reportada previamente [2], adaptamos los resultados para considerar un sistema desordenado tomando en cuenta una modificación aleatoria tanto de la posición de los cilindros dentro de la celda unitaria, como de los valores de los radios. De esta manera, somos capaces de considerar un sistema desordenado y estudiamos la velocidad efectiva de propagación del sonido en un arreglo de cilindros metálicos en aire. Analizamos la anisotropía en la velocidad de propagación debido al desorden.

## 2. Marco Teórico

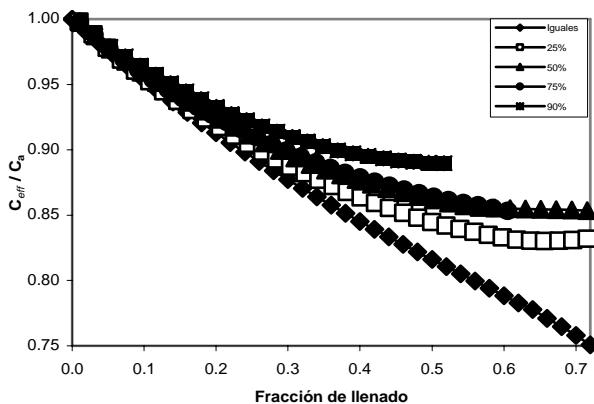
El estudio de la propagación de ondas acústicas en un arreglo periódico de cilindros de aluminio en aire se encuentra desarrollado en las referencias [1,2]. El análisis se basa en resolver la ecuación de onda (1) para los modos longitudinales (ya que los modos transversales no se propagan en el aire), la cual se escribe como,



**Figura 1.** Velocidad de propagación como función de la fracción de llenado calculada para el caso simétrico (cuadrados) y para el caso ligeramente desordenado (triángulos). Mostramos además la función  $(1+f)^{-1/2}$  (rombos), propuesta por Cervera *et al.* en la Ref. [9].



**Figura 2.** Velocidad de propagación como función de la fracción de llenado para diferentes grados de desorden. Ésta es una ampliación de la Figura 1.



**Figura 3.** Velocidad efectiva como función de la fracción de llenado, permitiendo que los radios de los cilindros cambien aleatoriamente de manera que el área su sección transversal se incremente o disminuya como máximo el porcentaje indicado.

$$\frac{1}{\lambda(\vec{r})} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} = \nabla \cdot \left( \frac{\nabla p}{\rho(\vec{r})} \right). \quad (1)$$

Debido a que el sistema es periódico, podemos utilizar el teorema de Bloch y expandir en series de Fourier los inversos de la densidad y el modulo de compresibilidad, como aparecen en las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda(\vec{r})} &= \sum_{\vec{G}} \gamma(\vec{G}) \exp(i\vec{G} \cdot \vec{r}) \\ \frac{1}{\rho(\vec{r})} &= \sum_{\vec{G}} \nu(\vec{G}) \exp(i\vec{G} \cdot \vec{r}) \\ p(\vec{r}, t) &= \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t) \sum_{\vec{G}} p_k(\vec{G}) \exp(i\vec{G} \cdot \vec{r}), \end{aligned} \quad (2)$$

de manera que  $\gamma(\mathbf{G})$ ,  $\nu(\mathbf{G})$  y  $p_k(\mathbf{G})$  son los coeficientes de Fourier respectivos y los vectores  $\mathbf{G}$  son los vectores de la red recíproca. Al introducir estas ecuaciones en (1), se obtiene una ecuación generalizada de eigenvalores para los coeficientes de Fourier de la presión, de la cual podemos obtener la relación de dispersión  $\omega = \omega_n(\mathbf{k})$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) siempre y cuando el sistema tenga soluciones no triviales. Es aquí cuando se toma el límite  $\omega, k \rightarrow 0$ , logrando así la homogenización. En este límite la velocidad de grupo es igual a la velocidad de fase la cual se calcula como  $c_{\text{eff}} = \omega/k$ . Una vez hecho lo anterior se obtiene la siguiente fórmula para la velocidad efectiva del sonido, ver referencias [1,2]:

$$c_{\text{eff}}^2(\hat{k}) = \frac{1}{\gamma} \left\{ \bar{\nu} - \sum_{\vec{G}, \vec{G} \neq 0} (\hat{k} \cdot \vec{G})(\hat{k} \cdot \vec{G}') \nu(\vec{G}) \nu(-\vec{G}') \right. \\ \left. \times [\vec{G} \cdot \vec{G}'] \nu(\vec{G} - \vec{G}') \right\} \quad (3)$$

la cual, depende no solo de los promedios sobre la estructura periódica de los inversos de los parámetros  $\bar{\nu}$  y  $\bar{\gamma}$  ( $\bar{\nu} = f/\rho_a + (1-f)/\rho_b$ ;  $\bar{\gamma} = f/\lambda_a + (1-f)/\lambda_b$ , siendo  $f$  la fracción de volumen ocupado por los cilindros), sino también de los detalles y la geometría de la celda unitaria a través de  $\nu(\mathbf{G})$ . Podemos notar que en general la velocidad de propagación es anisotrópica, ya que depende de la dirección de propagación ( $\hat{k}$ ). Por lo tanto, esta ecuación desarrollada por A. Krokhin *et al.* en [2], nos sirve para hacer el estudio de anisotropía que nos interesa.

El término de la sumatoria de la ecuación (3) representa la corrección al inverso de la densidad que se obtiene mediante este método, es decir,  $1/c_{\text{eff}}^2 = \bar{\nu} - \Sigma$ . Obteniendo así, también una expresión analítica para la densidad efectiva.

Para tomar en cuenta el desorden, lo que hacemos es utilizar una supercelda que contenga varios cilindros, los cuales movemos aleatoriamente a partir de una estructura hexagonal. Podemos inducir dos tipos de desorden: moviendo las posiciones de los cilindros o cambiando los

radios de estos. El efecto del desorden se refleja a través de  $v(\vec{G})$ , que se encuentra definido de la siguiente manera:

$$v(\vec{G}) = \frac{1}{A_C} \int_{A_C} \frac{1}{\rho(\vec{r})} \exp(-i\vec{G} \cdot \vec{r}) d\vec{r} \quad (4)$$

La integral se hace sobre toda el área de la supercelda bidimensional, la cual tiene regiones metálicas y regiones de aire de densidades  $\rho_a$  y  $\rho_b$  respectivamente. De manera que los coeficientes  $v(\vec{G})$  se pueden rescribir de la siguiente forma:

$$v(\vec{G}) = \begin{cases} \bar{v} = \frac{f}{\rho_a} + \frac{1-f}{\rho_b} \\ \left( \frac{1}{\rho_a} - \frac{1}{\rho_b} \right) F(\vec{G}) \end{cases} \quad (5)$$

donde  $F(\vec{G})$  es lo que hemos llamado el factor de forma, que para el caso de una supercelda de  $N_R$  cilindros, el cálculo de la integral resulta:

$$F(\vec{G}) = 2f_0 \sum_{i=1}^{N_R} \frac{J_1(\vec{G}|r_i|)}{|\vec{G}|r_i|} \exp(-i\vec{G} \cdot \vec{R}_i) \quad (5')$$

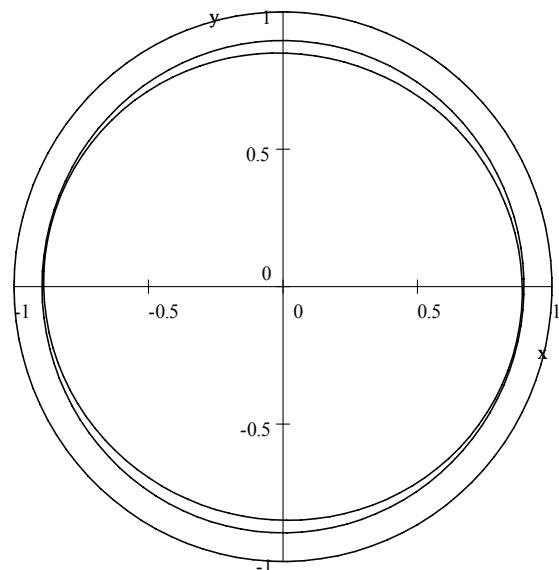
siendo  $R_i$  las posiciones de los centros de los cilindros dentro de la supercelda,  $r_i$  son los radios de cada uno de ellos y  $J_1$  es la función de Bessel de orden 1.

### 3. Resultados y discusión

Los cálculos se hicieron mediante un programa en Fortran 90 que tiene como datos de entrada: las densidades y los módulos de compresibilidad de ambos medios, el número de cilindros dentro de la supercelda, la constante de red, el número de ondas planas, el intervalo de la fracción de llenado a considerar, la dirección de propagación, el grado de desorden de las posiciones de los cilindros y el porcentaje máximo que puede cambiar el área de cada cilindro respecto del promedio. El programa genera primero los vectores de la red reciproca ( $\vec{G}$ ) y las posiciones aleatorias de los cilindros y calcula la velocidad efectiva mediante la ecuación (3), para cada una de las fracciones de llenado consideradas.

La supercelda se divide en  $N_R$  pequeñas celdas iguales, siendo  $N_R$  el número de cilindros. Las posiciones de los centros de los cilindros se mueven de tal manera que no se salgan de esas pequeñas celdas y el grado de desorden determina cuánto puede moverse aleatoriamente cada cilindro alrededor del centro de esas celdas. El grado de desorden lo introducimos a partir de una parámetro que varía entre 0 y 10. El máximo grado de desorden que consideramos corresponde a 10 y el cero corresponde al caso totalmente simétrico.

Primero analizamos el efecto que tiene mover aleatoriamente el centro de los cilindros dentro de sus



**Figura 4.** Velocidad de propagación en función de la dirección de  $\mathbf{k}$ . Se grafica un círculo de referencia para observar mejor la anisotropía de la velocidad efectiva inducida por el desorden.

pequeñas celdas. En la figura 1 mostramos la función  $(1 + f)^{-1/2}$ , que fue propuesta por Cervera *et al.* en la Ref. [9], la cual se mantiene pegada a la línea del cálculo del caso simétrico hasta una fracción de llenado de 0.6. Al desordenar ligeramente los cilindros ( $DD = 2$ ), la velocidad efectiva cruza la línea del caso ordenado, pues primero va por encima y a mayores fracciones de llenado queda por debajo. En la figura 2 se hace una ampliación del recuadro de la figura 1 incluyendo los cálculos para el mismo sistema cada vez más desordenado ( $DD = 2, 4, 6, 8$ ). En este rango, las líneas de los casos desordenados quedan por encima del caso simétrico, pero sigue estando por debajo de la velocidad del sonido en el aire, observando que los valores obtenidos para el caso más desordenado no son los que más se alejan del caso simétrico.

Otra forma de obtener desorden en el sistema es variando aleatoriamente los radios de los cilindros dentro de cierto rango, manteniendo sus centros en las posiciones simétricas. En la figura 3 mostramos los resultados obtenidos. Observamos que la velocidad efectiva está por encima del caso en el que todos los radios son iguales y se alcanza una estabilización en el valor de la velocidad efectiva a mayores fracciones de llenado. Recordemos que la fracción de llenado se ve limitada por el contacto de al menos dos cilindros. Entre mayor es la libertad de variación de las áreas transversales, mayor es la diferencia entre las velocidades efectivas al ir aumentando la fracción de llenado.

Como mencionamos en la sección II, en general, la velocidad del sonido será anisotrópica, es decir, su valor depende de la dirección de propagación  $\vec{k}$ . En la figura 4 mostramos la velocidad efectiva para el caso con mayor anisotropía en los cálculos que realizamos. Esto lo obtenemos al permitir que las áreas transversales de los cilindros cambien hasta en un 90 %. La velocidad efectiva

(graficada en rojo) de la figura 4 corresponde al punto señalado con una flecha en la figura 3. Cabe señalar que las velocidades efectivas graficadas en las figuras 1, 2 y 3 fueron con  $\hat{k}$  paralelo al eje de las x, pero también presentaban una ligera anisotropía.

#### 4. Conclusiones

Estudiamos como se ve afectada la velocidad de propagación del sonido en un sistema de cilindros metálicos que se desordenan a partir de un sistema periódico hexagonal. En este modelo, la velocidad efectiva de propagación de ondas acústicas tiene una dependencia de la dirección de propagación, por lo que se puede estudiar la anisotropía inducida por el desorden.

Se analizaron dos formas de generar desorden: mover aleatoriamente los cilindros dejando sus radios iguales y; cambiar aleatoriamente los radios de los cilindros, dentro de cierto rango, dejando sus centros en sus posiciones siméticas. Se observa un mayor efecto sobre la velocidad efectiva en el segundo caso. La anisotropía inducida por el desorden es ligeramente más marcada cuando se cambian los radios, que cuando se mueven los centros de los cilindros. En el caso más general, en el que se desordena el sistema de las dos formas simultáneamente, la anisotropía

será aún más marcada. Esto es un trabajo que estamos desarrollando actualmente.

Los resultados de este trabajo pueden dar mayor confianza a los experimentales, pues les dan cierto rango de confiabilidad a los estudios de sistemas periódicos, a pesar de que estos no sean “perfectos”. También les pueden servir para saber de que orden son las variaciones en la velocidad efectiva al desordenar el sistema.

#### Referencias

- [1]A. Krokhin, P. Halevi and J. Arriaga, Phys. Rev. B **65**, 115208 (2002).
- [2]A. Krokhin, J. Arriaga and L. Gumen, Phys. Rev. Lett. **91**, 264302 (2003).
- [3]Lord Rayleigh “*Theory of Sound*”, Dover, New York, 1945
- [4]P. M. Morse and K. U. Ingaard, “*Theoretical Acoustics*”, McGraw-Hill, New York, 1968.
- [5]M. Kafesaki, R. S. Penciu, and E. N. Economou, Phys. Rev. Lett. **84**, 6050 (2000).
- [6]Q. Ni and J. Cheng, Phys. Rev. B **72**, 014305 (2005).
- [7]D. Torrent and J. Sanchez-Dehesa, Phys. Rev. B **74**, 224305 (2006)
- [8]J. Mei, Z. Liu, W. Wen, and P. Sheng, Phys. Rev. Lett. **96**, 024301 (2006).
- [9]Cervera et al., Phys. Rev. Lett. **88**, 023902 (2002).
- [10] D. Torrent, A. Hakansson, F. Cervera, and J. Sanchez-Dehesa, Phys. Rev. Lett. **96**, 204302 (2006).