

IDEAS ACERCA DEL MOVIMIENTO DEL PÉNDULO

*Un estudio desde una perspectiva de modelación**

MARÍA TRIGUEROS GAISMAN

Resumen:

La perspectiva de la modelación brinda elementos para diseñar una metodología que promueve la reflexión de los estudiantes acerca de los conceptos importantes de la física y sobre su relación con las matemáticas. En este trabajo se reporta una experiencia enmarcada en un contexto específico de modelación. Se estudia el movimiento oscilatorio, en particular, el del péndulo. Los resultados obtenidos ponen de manifiesto las concepciones de los alumnos relativas a este tipo de movimiento, a las fuerzas, a la descomposición de vectores en componentes así como a la variación. También se reportan algunos ejemplos de la evolución conceptual de los participantes en el proyecto.

Abstract:

A modeling perspective offers elements for designing a methodology to promote students' reflection on the important concepts of physics and their relation to mathematics. This study reports on an experience within a specific context of modeling. A study is made of oscillatory movement, and in particular, of pendulum movement. The results reveal students' conceptions of this type of movement, the forces, the decomposition of vectors in components, and variation. Some examples of the conceptual evolution of the project's participants are also provided.

Palabras clave: enseñanza de las ciencias, física, matemáticas, educación superior, proceso del pensamiento, modelación, México

Key words: science teaching, physics, mathematics, higher education, thought process, modeling, Mexico.

María Trigueros Gaisman es profesora del Departamento de Matemáticas del Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM). Río Hondo número 1, colonia Progreso Tizapán, CP 01080, México, Distrito Federal. CE: trigue@itam.mx

* Esta investigación ha sido parcialmente apoyada por la Asociación Mexicana de Cultura, AC.

La sociedad y la tecnología actuales demandan, de manera importante, algunos conocimientos de física que los egresados de las universidades deben tener. Es de esperarse que los profesionistas modernos dispongan de conocimientos científicos y tecnológicos que les permitan desenvolverse en la vida diaria, resolver los problemas de sus disciplinas, comprender la tecnología que utilizan cotidianamente, tomar decisiones en sus distintas actividades y considerar a la ciencia como parte de la cultura. Las universidades, sin embargo, no han considerado a cabalidad esta demanda.

Si bien otros ciclos escolares han empezado a incorporar en su currículum los resultados de la investigación en enseñanza de la física (IEF), no así en la universidad, probablemente debido a que, como mencionan algunos autores, ello supone aceptar la existencia de problemas de instrucción en este nivel (Jaque, 1995; Pintó y Surinach, 2004 a y b; Guisasola *et al.*, 2004).

La enseñanza de las ciencias no ha cambiado sustancialmente: los estudiantes universitarios aprenden estas disciplinas con base en la memorización de definiciones y el uso de fórmulas. La investigación educativa en física es incipiente aun cuando, desde el punto de vista de ciertos estudiosos, “las investigaciones en enseñanza de la física hacen posible avanzar hacia el cuestionamiento de visiones, muchas veces desalentadoras o derrotistas, que suelen ser aceptadas como obvias e inevitables en el nivel universitario” (Guisasola *et al.*, 2004).

Actualmente es claro que los profesores mantienen temas de estudio y formas de actuar que la IEF ha cuestionado (MacDermott, 1990; Viennot, 1998). No toman en cuenta las preconcepciones de los estudiantes en sus estrategias de enseñanza (Almudí, 2002) y abordan la resolución de problemas a modo de ejemplos que se resuelven de manera lineal y que son lejanos a los que pueden encontrar en el trabajo o en la realidad (Gil y Martínez Torregrosa, 1984; Gil *et al.* 1999). En este nivel hace falta llevar a cabo más investigación sobre la comprensión de la física por parte de los estudiantes, así como de su capacidad para resolver problemas y utilizar herramientas matemáticas.

Las actividades de solución de problemas abiertos y de modelación parecen ser clave en la promoción de una comprensión de la naturaleza e importancia de esta materia en los estudiantes universitarios, para que aprendan a hacer las preguntas adecuadas, las hipótesis y las predicciones necesarias en una situación problemática, además de diseñar experimentos, analizar datos y comunicar resultados. Este tipo de actividades permiten, además, poner de

manifiesto las ideas y concepciones de los alumnos relativas a los temas de estudio (Scott *et al.*, 1994; Fazio *et al.*, 2005; Gilbert, Boulter y Rutherford, 1998; Islas y Pesa, 2002; Sperandeo- Mineo, 2002). Se ha encontrado también que aprenden más y con mayor profundidad conceptual en este tipo de cursos que en los tradicionales (Hake, 1998, 2002; Beichner y Saul, 2003; Dori y Belcher, 2004; Pollock, 2005; Hoellwarth, Moelter y Knight, 2005).

Por otra parte, en la literatura actual, se enfatiza en la necesidad de trabajar con mayor profundidad en los conceptos de la física y su relación con la matemática. Entre las capacidades que se intentan favorecer en los estudiantes se incluyen la búsqueda de patrones, el establecimiento de relaciones entre conceptos, la comunicación en forma conceptual y correcta, la capacidad de solución de problemas cotidianos, contextualizados y abiertos (National Council of Teachers of Mathematics, 2000; Michelsen, 2005; Goldin, 2004).

En este trabajo se parte de la hipótesis de que el conocimiento se desarrolla a través de la interacción de lo aprendido en la escuela –entre las diversas disciplinas– con el ambiente social. Es por ello que nos interesa analizar el conocimiento sobre la física que los estudiantes de ingeniería utilizan cuando modelan situaciones donde los conceptos aprendidos son fundamentales. Así, la contribución que este trabajo puede situarse, por una parte, en el análisis de las concepciones de los estudiantes universitarios de los conceptos físicos y, por otra, en los resultados que se obtienen mediante el uso de la modelación en un curso de este nivel.

Problema de investigación

Se aborda el análisis de las concepciones de los estudiantes sobre el movimiento armónico simple y las aportaciones de la modelación a su posible evolución conceptual. En particular:

- ¿Qué aspectos de la evolución conceptual de los estudiantes se ponen de manifiesto en el desarrollo de un proyecto en el que es necesario modelar una situación física, el movimiento de un péndulo, en términos matemáticos y comunicar los resultados obtenidos a sus compañeros y al profesor?
- ¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos universitarios acerca del movimiento de un péndulo se pueden recuperar a través de una metodología de enseñanza basada en modelación del fenómeno físico?

- ¿Qué dificultades muestran los alumnos con los conceptos de física relacionados con el movimiento de un péndulo y respecto de su relación con las matemáticas en el contexto de las ecuaciones diferenciales?

Marco teórico

La investigación que se presenta en este trabajo se enmarca dentro de aquellas posturas teóricas que consideran que la modelación tiene un papel importante en la enseñanza de las ciencias (Feurzeig y Roberts, 1999; Mellor y Bliss, 1994) y que es importante considerar el conocimiento de los estudiantes para tomarlo en cuenta durante el trabajo en clase y alinearlos con los propósitos y procesos de la física (Carey y Smith, 1993). Cuando hablamos de modelación en la enseñanza nos referimos a proporcionar a los estudiantes problemas suficientemente abiertos y complejos en los que puedan poner en juego su conocimiento previo y sus habilidades creativas para sugerir hipótesis y plantear modelos que expliquen el comportamiento del fenómeno en cuestión en términos matemáticos y mediante la revisión, la reflexión, la aplicación de sus conocimientos y la comunicación de sus resultados, con la idea de que se acerquen a los procesos que se llevan a cabo en la actividad científica (Lehrer y Schauble, 2000; Morgan y Morrison, 1999; Schwarz, y White, 2003; Smith, Snir y Grosslight, 1992; Spitulnik, Krajcik y Soloway, 1999; Felipe, Gallarreta y Merino, 2005; Lesh y Doerr, 2003; Fazio, Giangalanti, y Sperandeo-Mineo, 2002; Islas y Pesa, 2002; Sperandeo-Mineo, 2002; Schwarz, Meyer y Sharma, 2004). De acuerdo con estas posturas epistemológicas, los modelos han contribuido al desarrollo de las teorías científicas y son inherentes a su producción, a su divulgación y a la aceptación del conocimiento generado por ellas (Gilbert y Boulter, 1995; Nersessian, 1992; Norman, 1983; Gilbert, 2002; Gobert y Buckley, 2000).

Los modelos son “constructos humanos” y, por consiguiente, su existencia inicial está en el acuerdo social entre las personas y en el individuo mismo. Los constructos individuales (privados y personales) son denominados *modelos mentales* (Moreira, 1999). Gilbert y Boulter (1995) señalan que es imposible acceder de manera directa a los modelos mentales por lo cual resulta necesario diferenciarlos de los *modelos expresados*, que son aquellos colocados por un individuo o por una comunidad en el dominio público a través de alguna forma de expresión (discurso, escritura). Los modelos expresados se convierten en consensuados a partir de su discusión y aceptación por parte de un grupo social (Justi y Gilbert, 1999). Por su parte,

Ingham y Gilbert (1991) sostienen que un modelo es una representación simplificada de un sistema que concentra la atención en un aspecto específico; cada uno permite que ciertos aspectos (objetos, eventos o ideas) estén en una escala diferente de la que son normalmente percibidos, o bien que entidades abstractas puedan hacerse visibles. Por su parte, Cartier (2000) plantea que los modelos científicos son conjuntos de ideas que describen un proceso natural. Esta concepción es compartida por Giere (1988) y por Kitcher (1984). Un modelo científico concebido de esa manera puede ser utilizado durante los procesos didácticos, con ciertas limitaciones, para que los estudiantes aprovechen su capacidad para explicar o predecir fenómenos naturales.

El método más común de clasificar los modelos es según su tipo, forma y estrategia de utilización (Gilbert y Osborne, 1980; Grosslight *et al.*, 1991). Harrison y Treagust (2000) distinguen entre ellos: modelos a escala, pedagógico-analógicos, icónicos, simbólicos, teóricos, mapas, diagramas, tablas, de proceso y conceptos. Por su parte, Gobert y Clement (1994), los distinguen en estructurales, funcionales y espaciales. Buckley y colaboradores (1997) los clasificaron, por su parte, como dinámicos o estáticos, determinísticos o estocásticos, materiales o simbólicos.

En este artículo usamos la modelación en el sentido de la construcción de modelos formales y funcionales. En ellos se establece una situación problemática específica que puede ligarse a una estructura lógico-matemática a través de la formulación de relaciones entre variables que se consideran importantes y bajo la presencia de hipótesis sustentadas y presentadas explícitamente, para explicar el funcionamiento de uno o varios fenómenos específicos relacionados con la situación problemática. El interés de que los estudiantes formulen este tipo de modelos estriba en brindarles la oportunidad de expresar sus modelos mentales acerca de la situación en estudio en los expresados, según la denominación de Gilbert (2002), utilizando al mismo tiempo un modelo concreto material que permite expresar relaciones espaciales y temporales entre las entidades del modelo mental en construcción y validar las relaciones propuestas. Todo ello con la idea de que este tipo de trabajo incida, positivamente, en la formulación de modelos mentales potentes en términos explicativos por los estudiantes; la modelación será en el sentido del uso de problemas abiertos que les permitan aprovechar sus conocimientos de física y de matemáticas en su solución y que involucren el uso de ideas centrales y poderosas en ambas disciplinas

que hagan posible que los estudiantes se percaten de los alcances de su conocimiento y de sus necesidades de nuevo conocimiento en la explicación de fenómenos de interés.

Durante varios años un grupo de investigadores (Lesh y Kelly, 2000; Kelly y Lesh, 2001; Aliprantis y Carmona, 2003; Lesh y Doerr, 2003; McClain, 2003; Zawojewski *et al.*, 2003; Trigueros y Carmona, 2006) han generado una forma de trabajo en clase que ha mostrado su utilidad para desarrollar y poner en evidencia tanto el conocimiento de los alumnos como sus estrategias en la solución de problemas complejos. En sus ensayos, estos autores han demostrado que para analizar cómo los estudiantes abordan un problema es necesario diseñar situaciones donde los participantes se expresen en formas visibles para ellos mismos, los profesores y los investigadores. Estas actividades –cuando se diseñan de manera adecuada– evidencian el pensamiento de los alumnos durante todo el proceso de solución, ya que generan documentación pertinente donde su forma de pensar sobre el problema, en distintos momentos del proceso de solución, también se haga evidente.

Cuando los estudiantes resuelven un problema complejo, muy a menudo externan la forma en que están pensando en los momentos del proceso de solución. En estas ocasiones se ponen en evidencia también los constructos y sistemas conceptuales que utilizan, las relaciones entre conceptos que favorecen y la manera en la que los emplean. Para estos investigadores, los productos que los estudiantes generan se pueden considerar como encarnaciones de los sistemas conceptuales relevantes para la solución del problema. Así, conforme estas herramientas se prueban, se revisan y se redefinen, los sistemas conceptuales también atraviesan por distintas fases, que pueden ser seguidas de cerca por el investigador. Esto es especialmente cierto en el caso en que sea posible considerar los productos que los estudiantes entregan como “tecnologías conceptuales”, es decir, cuando no se limitan a mostrar únicamente el procedimiento para resolver el problema, sino que contienen formas de describir y explicar las situaciones donde las herramientas conceptuales pueden ser útiles.

En una obra posterior, el *International Handbook of Research Design in Mathematics Education* (Lesh y English, 2005), se introduce el término “investigación en diseño” para describir la forma de lograr diseños útiles para estudiar el conocimiento de los estudiantes. En los trabajos ahí reportados, se indica que los productos deben especificarse mediante criterios

claros para su uso y para que den lugar a productos que puedan ser evaluados y, sobre todo, que los propios alumnos puedan auto-evaluar. Para ello es necesario proporcionar criterios que permitan la obtención de retroalimentación formativa y de consensos para refinar el pensamiento y así producir, progresivamente, mejores juicios de valor que sean útiles a los participantes y que pongan en evidencia la necesidad de ir más allá de sus formas primitivas de pensamiento, que muestren las fortalezas y debilidades asociadas con maneras alternativas de pensar y que permitan plantear la necesidad de utilizar sistemas conceptuales que tengan la potencialidad de satisfacer la situación en estudio y de utilizarlos. Es importante que estos criterios se puedan compartir, volver a utilizar y sean transportables a otras situaciones. Es decir, tanto las herramientas como las formas de pensar que subyacen a ellas deben ser compatibles y generalizables.

Una consideración importante al utilizar el marco teórico de la modelación, en el sentido descrito anteriormente, consiste en que los procesos de diseño que se emplean deben ser tales que los participantes entiendan claramente, desde el inicio de la solución del problema propuesto, que ésta no se obtiene en un solo intento, sino que serán necesarios una serie de ciclos para producir resultados que sean suficientemente útiles. Cuando el diseño involucra una serie de pasos o de ciclos de revisión y prueba, y cuando los resultados intermedios se expresan en formas que pueden ser revisadas por un individuo externo al proceso de diseño –además de los mismos participantes– se producen trazas de documentación analizables que se generan de manera automática y revelan características importantes del pensamiento de los estudiantes y de su evolución. Así, el proceso de solución del problema contribuye, por una parte, al aprendizaje y produce, por otra, documentación útil para otros fines. Con el fin de incrementar la riqueza de la información producida, es importante que los procesos de solución de un problema promuevan las interacciones entre participantes que tengan distintas perspectivas y que involucren procesos en los que sea necesario ir logrando consensos.

Este marco teórico puede emplearse con éxito en la enseñanza, permite además poner de manifiesto el conocimiento de los estudiantes, sus dificultades y el tipo de estrategias que utilizan si se trabajan situaciones suficientemente complejas y, al mismo tiempo, simples para que sean capaces de llegar a una solución satisfactoria en el transcurso de un tiempo razonable.

En los cursos de matemáticas para ingenieros es necesario conectar los contenidos teóricos con problemas prácticos de aplicación y con otras materias, con el fin de que los alumnos integren los conocimientos y los puedan utilizar de manera eficaz. El curso de Ecuaciones diferenciales se presta especialmente a un tratamiento de esta naturaleza. Las herramientas que en él se estudian están íntimamente ligadas, histórica y conceptualmente, con el desarrollo de la física. Esta metodología se ha empleado de manera exitosa en este contexto, aunque no necesariamente en el marco de la física (Trigueros, 2004) y ha demostrado que, mediante su uso, es posible profundizar en las concepciones de los estudiantes sobre los conceptos en cuestión y poner en evidencia las estrategias que utilizan en la solución de problemas.

En la puesta en práctica de este marco teórico en el proyecto particular que se describe en este artículo, se consideraron también los resultados contenidos en la literatura sobre concepciones de los estudiantes relativas al uso de modelos que incluyen el del movimiento del péndulo. Se consideraron, en primer término, las aportaciones de Nola (2004) y Mathews (2004) sobre la idealización y concretización de los objetos que conforman los modelos teóricos, su validación en términos de lo que se observa y la importancia de ligar en la enseñanza la física con las matemáticas. En estas contribuciones, que concuerdan con lo expuesto, se considera que el método de modelación ideal utilizando matemáticas, acorde con el seguido por Galileo, provee de un recurso rico en la enseñanza de la física pues acerca a los estudiantes a la metodología de la ciencia.

En la literatura sobre enseñanza de la física no abundan las referencias a las ideas que los estudiantes manifiestan sobre el movimiento del péndulo; los pocos ensayos reportados indican que, a pesar de que el péndulo es un modelo recurrente en la mayoría de los textos de física para enseñar cuestiones relacionadas con mecánica, los estudiantes de secundaria o de preparatoria e, incluso aquellos que han iniciado estudios universitarios, muestran dificultades en su comprensión (Wolman, 1984; Czudkova y Musilova, 2000; Manabu, 2004). Entre los problemas reportados por estos autores destaca que no relacionan la longitud del péndulo con el periodo de oscilación o que consideran que entre más corto sea, oscilará más lentamente; piensan que la amplitud y la velocidad del movimiento del péndulo dependen de su peso; que el factor predominante para determinar el periodo de un péndulo es el peso y que se moverá más rápidamente en la Tierra que en la Luna.

mente si pesa más. Se destaca también que algunos estudiantes consideran que un factor importante es el material del que está construido y que el periodo es siempre el mismo, independientemente de la resistencia del aire, mientras que otros consideran que la forma del péndulo determina su velocidad.

Por otra parte, hay quienes no son capaces de distinguir los efectos de la gravedad, de la resistencia del aire y de la fricción de otros factores que afectan el periodo de un péndulo. Entre los autores que analizan las ideas de los estudiantes acerca del péndulo, algunos proponen ciertas estrategias didácticas a la vez; Czudkova y Musilova (2000) reportan una forma específica de introducirlo que consideran apropiada para los del nivel secundario y Denny (2002) sugiere la construcción de un reloj de péndulo para su estudio.

Metodología

La investigación se llevó a cabo en el contexto de un curso de Ecuaciones diferenciales en una universidad pequeña en la Ciudad de México. El grupo estaba formado por 24 estudiantes de cuarto semestre de la carrera de ingeniería. Los propósitos del curso hacen énfasis en el aprendizaje de los métodos de solución de las ecuaciones diferenciales y en su aplicación a la solución de problemas. Se diseñaron una situación problemática específica ligada a un problema real y los instrumentos que permitieran registrar los elementos de interés que aparecen en la búsqueda de la solución: presentaciones por escrito y orales y guiones para entrevista.

La situación que se trabajó con los estudiantes es la siguiente: “¿Qué tan efectivo es el uso de un péndulo como reloj? ¿Cómo podría probarse su efectividad si lo es? Construye un reloj de péndulo. Este reloj será mostrado en una exposición, por ello es necesario que vaya acompañado de una explicación de su funcionamiento a dos niveles, una comprensible para el público general y otra para los profesores de los departamentos de Ingeniería y Matemáticas”.

Trabajaron en grupos de cuatro alumnos durante cuatro clases y dos sesiones fuera de ellas. En las de clase el profesor se limitó a registrar datos durante sus visitas a los distintos grupos, sin intervenir en las discusiones de los estudiantes; en las explicaciones orales, el profesor actuó como moderador de las discusiones de los alumnos; sus intervenciones se limitaron a aclarar algunas preguntas y a evitar que la discusión perdiera el rumbo,

sin proporcionar respuesta alguna. En las sesiones fuera de clase el profesor entrevistó a los estudiantes, por equipos, para seguir su proceso de solución y aclarar cuestiones sugeridas durante el análisis en clase, en ellas dirigió, cuando lo consideró necesario, la atención hacia algún aspecto que les impedía continuar la solución. El propósito de estas intervenciones consistió en guiar a los estudiantes hacia la búsqueda de solución para sus dudas, tratando de guiar sin intervenir específicamente en el proceso de solución del problema que siguieron los alumnos. Es innegable que estas intervenciones del profesor y las de los compañeros contribuyen, de alguna manera, a orientar o desorientar el trabajo de los distintos grupos; sin embargo, en esta metodología se intenta dar cuenta de la evolución de los alumnos en la solución del problema a través de los ciclos de refinamiento en los que el acercamiento al problema se modifica y que se constituyen, a su vez, en fuentes de aprendizaje para los alumnos. El objetivo de este trabajo no consiste en dar cuenta de la evolución del acercamiento de los estudiantes al problema, de los conceptos que utilizan y de sus estrategias de validación de manera autónoma, sino como resultado de un proceso coordinado de intervención.

La solución a este problema involucra la necesidad de encontrar una relación dinámica entre variables y el uso de varios conceptos físicos. Para llegar al reporte final es necesario pasar por una serie de borradores en los que se pueden documentar fases sucesivas de la solución. Cada uno contenía el modelo utilizado, la forma de ajustarlo a una situación particular, de utilizarlo en la práctica y la justificación de su utilidad. Una característica importante del problema consistió en la necesidad de probar sus propias respuestas. Los datos a analizar provinieron del trabajo de los alumnos y los instrumentos diseñados para su análisis en cada ciclo, incluyendo las presentaciones, la grabación de las sesiones de clase y de presentación, las transcripciones de las entrevistas grabadas en audio y del análisis del proyecto final entregado.

Resultados

El trabajo en el modelo y su solución permitieron a los alumnos recorrer un ciclo en el que el problema a resolver, aun cuando era en esencia el mismo, requería de distintos acercamientos. En cada uno de ellos, el análisis puso de manifiesto diversos aspectos del conocimiento de los alumnos y de su evolución.

Resultados relativos a las dificultades de los estudiantes

La primera dificultad enfrentada consistió en la elección de la variable a estudiar. Dos grupos consideraron que la altura sobre el piso era más fácil de estudiar y de medir, “Lo que hay que ver es qué tanto se levanta de aquí en medio hasta el extremo...y ves que eso depende de qué tan lejos está del centro, del punto de equilibrio”; dos grupos centraron su atención sobre el desplazamiento horizontal del péndulo: “...sería mejor medir qué tanto se abre horizontalmente y cómo cambia al pasar el tiempo” y dos grupos consideraron que el ángulo era la variable apropiada a considerar. Uno de los primeros dos grupos consideró que la variable altura dependía del desplazamiento horizontal en lugar del tiempo. Fue hasta el momento de reconsiderar los cuestionamientos de sus compañeros, durante la primera presentación, cuando todos cambiaron su elección de variables al ángulo con la vertical con respecto al tiempo.

La determinación de las fuerzas que actúan sobre el péndulo resultó difícil para estos estudiantes. Varios grupos hicieron referencia al oscilador armónico y se hizo evidente que habían memorizado su solución, pero no podían utilizarla para el péndulo: “El: es como el resorte, ...era $F=-kx$... E2: pero aquí la fuerza es para abajo y cambia con la x ... E3: no cambia, es constante, siempre es la gravedad... E1: y ¿cómo podemos ver que y cambia con x ?” Todos los grupos identificaron a la fuerza de gravedad como el factor principal del movimiento y discutieron acerca de la fricción como otra fuerza importante: “Aquí tomamos en cuenta que, por un lado, está la fuerza de gravedad que apunta para abajo y por otra parte está la de fricción que apunta al contrario de donde va la dirección en que el péndulo se mueve”.

Otro grupo consideró que la fuerza de gravedad actuaba en la dirección del movimiento y que la de fricción actuaba en sentido contrario al movimiento, pero no consideró la tensión de la cuerda en su discusión. “Nosotros, más bien, consideramos que la fuerza de gravedad, bueno, una parte apunta hacia donde se mueve el péndulo, por eso se mueve, pero también la fricción actúa pero en sentido al revés, pero la de gravedad es más grande, por eso se mueve”. Los demás grupos propusieron, correctamente, la fuerza de gravedad en la dirección vertical y la tensión de la cuerda, pero enfrentaron serias dificultades al intentar descomponer las fuerzas: “Estas son las fuerzas, pero aunque así deben apuntar, como se muestra en la figura, no supimos cómo escribirlas en fórmulas porque no nos acordamos, eso lo tenemos que buscar”.

Uno de los estudiantes discutió vehementemente con su grupo. Su argumento: que no era posible descomponer la fuerza en componentes, pues en ese caso se tendrían más fuerzas distintas. La discusión llevó a la comparación del análisis de este movimiento con el tiro parabólico en el que la velocidad y la posición se descomponen en sus componentes perpendiculares. Pero el alumno siguió discutiendo la posibilidad de obtener el movimiento a través de esta descomposición: “Es imposible así; no se puede si no ves completo el movimiento, saber cómo se va a mover. Imagínate que pudieras adivinar si te dan las partes cómo se mueve... eso no se puede”. Durante la primera sesión hubo necesidad de apoyar a los estudiantes en la descomposición de las fuerzas; únicamente un grupo fue capaz de presentarla durante la presentación al final de la primera sesión. En ese momento, y dada su importancia en la solución del problema, el maestro decidió dedicar unos minutos a recordar lo que debieran saber sobre descomposición de vectores y su uso en el problema a resolver.

Durante la discusión del planteamiento del modelo de solución, varios de los estudiantes manifestaron la idea, bien documentada en la literatura, de que para poner en movimiento al péndulo hay que aplicar, necesariamente, una fuerza en la dirección del movimiento y que esa fuerza acompaña al péndulo en su movimiento hasta que éste se para: “Cuando lo jalas, lo tienes que empujar para que se mueva, así hay una fuerza para acá aparte de la gravedad”. Varios grupos se enfrentaron también a la dificultad que presenta la aparición de funciones trigonométricas en la descomposición vectorial. Este brete no necesariamente está relacionado con el uso de las funciones trigonométricas en sí, sino con la imposibilidad de continuar con el procedimiento dada la forma de la expresión a resolver.

La primera sesión terminó sin que los estudiantes pudieran resolver este problema. La búsqueda de bibliografía fuera de clase, les permitió llegar a la aproximación del seno del ángulo por el ángulo mismo, aunque muchos de ellos no comprendían el por qué: “E: Esto lo encontramos en un libro de física. El seno, si el ángulo es chico, se puede aproximar con el ángulo en sí. P: ¿Pueden explicar por qué? E: Eso dice el libro y lo tomamos así. P: Es importante entender por qué, a ver, traten de buscar una razón...”.

En las descripciones cualitativas y a través del planteamiento del modelo se hizo evidente la imposibilidad para diferenciar los conceptos de velocidad y aceleración, que también se ha reportado ampliamente en la literatura.

Una gran parte de los estudiantes mostraron dificultades con el hecho de que la velocidad se anula en los extremos de la trayectoria o que la máxima se alcanza en el punto de equilibrio: “E1: La aceleración siempre es hacia abajo, y como está con aceleración siempre hay velocidad...E2: Pero ahí no puede tener velocidad porque ahí es donde se regresa, se tiene que parar...E1: Disminuye, pero no se para se sigue moviendo...” Otra persistencia consistió en considerar que la aceleración se mantiene constante a lo largo del movimiento en el caso en el que no se toma en cuenta la fricción: “La fuerza es la misma, la gravedad. La aceleración también es la misma, la de la gravedad”.

Las ideas tomadas del sentido común obstaculizaron el análisis de la solución del problema; para ellos, un movimiento oscilatorio es tal si es posible observar el vaivén, cuando la fricción entra en juego, el modelo del oscilador predice la posibilidad de sobre amortiguamiento, y la de amortiguamiento crítico, donde el oscilador regresa lentamente a la posición de equilibrio. Para todos los estudiantes resultó sumamente difícil aceptar la no oscilación como un caso particular del problema cuando la fuerza de fricción es grande:

- E: Cuando resolvemos la ecuación esto es lo que obtenemos. Aquí hay una exponencial y luego la función trigonométrica.
- P: ¿Qué ocurre cuando la exponencial tiene exponente negativo y grande?
- E: Se va haciendo cada vez más chiquita la oscilación.
- P: A ver, grafiquen esa función que pusieron ahí...
- E: Sale nomás como exponencial.
- P: ¿Cómo interpretan esto?
- E: Eso no podría salir en un péndulo porque no oscilaría...

Para la mayor parte de los estudiantes la posibilidad de utilizar un péndulo en el diseño de un reloj se limita a uno ideal, dado que es en él donde la frecuencia del movimiento se mantiene constante, o cuando es posible diseñar un mecanismo que permita forzar al péndulo para obligarlo a mantener la frecuencia constante. La posibilidad de que la frecuencia se mantuviera constante en el caso con fricción les resultaba inaceptable, aun cuando fueron capaces de resolver el modelo en términos matemáticos y ahí se hacía patente la invariancia de la frecuencia. Para los estudiantes, este hecho provenía de un error en la solución: A1: “Esto indica la misma fre-

cuencia...” A3: “Si, siempre sale la misma frecuencia en la fórmula, pero en la práctica no es así porque se va frenando y la amplitud cambia y también la frecuencia”. Según los estudiantes debía haber una relación entre el periodo de oscilación y la amplitud inicial, a menor amplitud inicial menor periodo de oscilación: “...Depende de qué tanto se esté abriendo, de la amplitud. Si lo abres poquito, se tarda menos en ir desde un extremo a otro, si lo abres más se tarda más”. Para una parte, la necesidad de aplicar un mecanismo para mantener el periodo del péndulo constante representó un nuevo problema. Para ellos, la aplicación de una fuerza externa distinta a la fricción implicaba, necesariamente, un aumento lineal de la amplitud: “...entre más lo empujas más aumenta lo que se abre...”.

Sus concepciones los llevaban a considerar que el peso del péndulo está relacionado con el periodo del movimiento. En sus argumentos utilizaban la regla de que el periodo del péndulo era inversamente proporcional al peso del mismo: es decir, a mayor peso, menor periodo. En sus primeros intentos de experimentación buscaban construir péndulos de materiales ligeros, considerando que ello haría el periodo más lento y, por consiguiente, más fácil de medir.

Los estudiantes que intentaron la solución del problema sobregeneralizando la ley de conservación de la energía al caso en el que se aplican fuerzas externas fue otra de las dificultades claramente detectadas. Los alumnos suponen que esta ley es un principio universal aplicable a toda clase de situaciones. Ignoran, así, la necesidad de que para que la conservación de la energía sea válida es necesario que el sistema en consideración sea cerrado.

Resultados relacionados con la relación de la física con las matemáticas

En los diversos productos entregados por los estudiantes se hizo patente que la mayoría no relaciona con las matemáticas lo que conoce de física. Si bien la solución de problemas de cálculo involucra frecuentemente el uso de la relación entre el ángulo y el segmento de arco de una circunferencia, ningún estudiante fue capaz de utilizarla en el planteamiento del modelo y, cuando la encontraron en los textos, mostraron dificultades para explicar su validez.

Los modelos y problemas resueltos en las clases previas al proyecto involucraron ecuaciones diferenciales de primer orden. Los estudiantes tuvieron, a pesar de ello, dificultades para relacionar el movimiento del péndulo con una expresión para la variación. La mayoría hizo referencia a la

aceleración como cambio de la velocidad como una regla memorizada pero carente de significado. Mostraron una tendencia a incluir las condiciones iniciales dentro de la ecuación diferencial. Sus argumentos pusieron en evidencia que aun en los casos en que pueden utilizar la variación en la modelación de una situación física, no es fácil para ellos pensar en la variación en términos generales.

La aparición de un modelo de segundo orden, la necesidad de resolverlo y darle sentido físico eran los objetivos del proyecto. Una vez que plantearon el modelo utilizando derivadas, encontraron nuevas dificultades con la variación ya que en la ecuación aparecen la aceleración, la velocidad y el desplazamiento simultáneamente. Solamente dos equipos pudieron expresar la ecuación diferencial en términos del desplazamiento. Algunos mantuvieron por separado la aceleración, en términos de la velocidad, de la de la fuerza. Con ello obtenían un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, pero no veían la relación entre las ecuaciones.

Si bien los estudiantes fueron capaces de utilizar la función exponencial para resolver la ecuación diferencial, este tipo de solución presentó un reto interesante a su comprensión: ¿Cómo era posible obtener oscilaciones a partir de ella? Tres de los grupos consideraron que esta función permitía resolver la ecuación de segundo orden, pero que la solución podría también expresarse en términos del seno o coseno. Estos estudiantes seleccionaron alguna de estas funciones en su solución pero, aunque funcionaban bien en el caso del péndulo simple, no eran adecuadas para el modelo general del péndulo. La introducción de la fórmula de Euler contribuyó a aminorar la oposición a la solución original, pero no a la posibilidad de explicar el comportamiento del péndulo al utilizarla.

Durante la realización del proyecto, los estudiantes tuvieron la necesidad de calcular el coeficiente de fricción del aire a partir de los datos experimentales; intentaron calcularlo utilizando dos datos experimentales o el promedio. Únicamente un equipo lo hizo con la técnica de mínimos cuadrados, estudiada en otro curso. Todo esto ejemplifica la dificultad de relacionar no únicamente materias distintas, sino conceptos estudiados en diversos cursos de la misma materia.

Resultados relativos a la evolución conceptual de los alumnos

Como se mencionó en los apartados anteriores, los alumnos iniciaron el proyecto con dificultad. La mayoría tenía un conocimiento fragmentado tanto

de física como de matemáticas. El planteamiento del proyecto no sugería el uso de ningún acercamiento específico, por lo que era indispensable recurrir a los conocimientos anteriores y encontrar la forma de relacionarlos. A pesar de ello, se interesaron por el proyecto, trataron de encontrar caminos en sus discusiones y acudieron al profesor para que les apoyara, quien no respondió directamente a las preguntas sino que se limitó a hacer cuestionamientos para encaminarlos; ante algunas de las dificultades, le pareció necesario intervenir y aclarar las dudas. Los alumnos comenzaron considerando el problema más complejo. Su experiencia con los relojes indicaba que debían incluir un mecanismo que mantuviera la oscilación del péndulo para contrarrestar la acción de la fricción. El profesor sugirió a todo el grupo comenzar por un caso más simple, independientemente de la estrategia que pensaban seguir, a manera de trabajar con un menor número de variables.

A través del trabajo colaborativo, de las sugerencias de los compañeros en las presentaciones y del estudio personal, los diferentes grupos fueron capaces de ir superando algunas de las dificultades conceptuales antes mencionadas. A continuación, a manera de estudio de caso, se detalla la evolución de conceptual de dos de los grupos.

La evolución del grupo A

Los alumnos que componían el grupo A iniciaron su trabajo en el proyecto con muchas dudas y dificultades, pero con una idea clara de cuáles eran las variables que convenía utilizar y mediante una estrategia basada en las fuerzas que actúan sobre el péndulo. Como se comentó anteriormente, este grupo comenzó abordando el problema en forma general:

A1: ...pero tienes que poner aquí, éste, con las fuerzas la fricción y también otra que es como la pila o la cuerda, para que no se pare.

A2: Ok, bueno, ya teníamos la fuerza de gravedad ahora le sumamos la fricción y esta otra, le pongo F porque no sé ni como vaya...

A1: Cambia F_g por mg porque ésa es la fuerza de gravedad, la fricción... ¿Qué hacemos con ella? porque no se cómo vaya, o sea su fórmula, habría que buscar eso... la otra... pues tampoco sé qué hacer o como escribirla...

En su primera presentación, mostraron el dibujo del péndulo con la fuerza de gravedad, la fricción apuntando en sentido contrario al movimiento con un vector fuerza en la dirección del movimiento a la que llamaron C,

a la que se referían como “la cuerda”. Ante las preguntas de sus compañeros que señalaban que las fuerzas que importaban actuaban en la dirección del movimiento, porque la lenteja del péndulo no se caía por acción de la gravedad, recapacitaron e incluyeron una fuerza en la dirección hacia arriba sobre el hilo que sostiene al péndulo:

A3: Si hacemos eso... mejor habría que poner el componente de la gravedad que actúa en la dirección del movimiento porque hay otro componente que se anula con ese que acabamos de poner... así [dibujando una flecha en la dirección del hilo pero en sentido contrario a la que acababan de poner] algo así como en el plano inclinado, entonces... este otro componente debe ir para allá [dibuja una flecha en la dirección del movimiento] para que los dos, sumados, den esta mg ...

A1: Es cierto. Entonces, esto hay que considerarlo así, éstas son las fuerzas porque estas dos no cuentan porque se anulan... [marca con líneas más gruesas la fuerza que acaban de agregar, la fricción y la que llamaron cuerda] ¿están de acuerdo? [dirigiéndose al resto de sus compañeros de clase].

Su descripción del movimiento del péndulo en esa presentación fue cualitativa. Además del dibujo y de las fuerzas se limitaron a incluir una explicación de cómo se debería mover el péndulo y la necesidad de buscar la forma de C para mantener constante el periodo.

Después de la sugerencia del profesor, de concentrarse en el caso más simple, los alumnos discutieron y retomaron el dibujo original, sin incluir la fuerza de fricción y la que llamaron cuerda. En él indicaron el ángulo del péndulo como función del tiempo y se concentraron en la posibilidad de expresar la fuerza en términos del ángulo:

A2: ...la fuerza es ma pero si hacemos los componentes, no me acuerdo cómo se hacía eso de los componentes sólo que uno era seno y otro coseno, pero no me acuerdo cómo

A4: Hacías un triangulito, así, este es el ángulo θ un cateto, este el adyacente es coseno y el otro es seno... pero con las fuerzas... le tienes que poner a ésta,...es que, ¿cuál de los dos es, el lado de aquí o el de acá?

A3: Por qué no pones el triángulo sobre el dibujo del péndulo... así como parádoto... ¿se podrá? Creo que sí, pues... entonces ésta que apunta para donde se mueve es la que importa ¿no? Y es, creo que el seno porque éste es el opuesto.

A1: Si escribimos esto aquí con la fuerza, ésta es la única porque no estamos tomando las otras, ¿verdad?... mmm... queda $F = ma = mg \sin \theta$, θ es lo que cambia en el tiempo.

A2: ...mejor cambia esa a , porque a es la velocidad entre el tiempo y no sé... pero cómo que nos queda v y también θ y eso está raro...

A4: A ver, tenemos que $F = mg \sin \theta$ y lo abriste un cierto ángulo, entonces la aceleración es $a = g \sin \theta$ y $a = v/t$, así que $v/t = g \sin \theta$

A2: pero esa fórmula... la de v/t sólo sirve cuando la velocidad es constante ¿no?

A1: mjmj

A2: tendríamos que usar de las otras de las de aceleración constante... uy... ya no entiendo porque aquí, si hicimos esto de las componentes, como que la aceleración no es constante, depende del ángulo, ya no sé qué hacer...

A1: a lo mejor... si mejor la derivada...

A3: si eso la hace diferencial, la aceleración es la segunda derivada de x ... bueno aquí no hay x pero es la derivada de θ ... pero ¿cómo?

A2: Mira... así la podemos poner, la aceleración del ángulo, o quién sabe qué se le pueda llamar, pero la segunda derivada θ'' eso es... $\theta'' = g \sin \theta$, pero ¿cómo se resuelve eso?

A1: Lo buscamos y ya... o a lo mejor, bueno, tiene que ir y venir, o sea se necesita una función periódica

A3: sí, como si proponemos que el $\theta(t) = \sin \theta$ su derivada es coseno y la segunda es otra vez seno...

A4: sí pero, ¿y el signo?

A3: no pero, estás usando θ en la derivada y debe ser y o sea $\theta = \sin t$, t es la independiente... pero de cualquier forma no sale el signo.

Los alumnos llegaron a la segunda presentación con la ecuación correcta para el péndulo simple, incluyendo la función seno. Sugirieron en ella que experimentarían armando uno y tratarían de ver qué pasaba con θ al pasar del tiempo, aunque:

A4: bueno eso es para ver qué pasa porque de seguro se va a parar, no se va a quedar meciéndose para siempre y conforme se va parando se va abriendo menos y se mece más rápido cada vez... pero eso es lo que esperamos que salga.

E1: [de otro grupo de trabajo] pero tienes la ecuación de dos derivadas... sólo sabemos resolver la de una derivada, la de primer orden, ¿cómo le van a hacer?

A4: no sé... tratamos de adivinar la solución o algo así... pero no salió por un signo, casi sale...

P: A ver, dibuja la gráfica del sen... ahora piensa que el ángulo es chiquito, cómo se compara eso con el ángulo.

A4: se parece bastante

P: Les sugiero que para simplificar la ecuación consideren como una aproximación que $\sin \theta = \theta$

A4: Ok, entonces queda más fácil y hay que buscar una función que, derivada dos veces, te dé ella misma, pero... no sabemos qué hacer porque debe ir y venir y eso sería seno o coseno, pero al derivar dos veces cambia el signo y ya no es igual, ...vamos a tratar otra vez.

Durante el trabajo en casa, los estudiantes buscaron la forma de resolver la ecuación diferencial y enfrentaron el problema de que esa función no les da una solución periódica, pero superaron el problema cuando encontraron, en el texto, que una exponencial imaginaria se puede asociar con una función periódica.

En la entrevista con el profesor, los alumnos mostraron su péndulo. Habían medido la amplitud y el periodo para distintas amplitudes iniciales pero manifestaron su sorpresa de que la primera no aparecía cuando encontraban el periodo al resolver la ecuación, aunque la amplitud decrecía en el experimento:

A2: Algo que no sabemos qué hacer es que cuando medimos nos sale que no importa mucho cuánto abrimos el péndulo, el tiempo de la ida y regreso, el periodo es el mismo, pero eso como que no tiene sentido porque la amplitud se hace más chica y el péndulo debería moverse más rápido, pero creemos que eso es por la fricción, que no la tomamos en cuenta.

P: Bueno, ahora que han avanzado, pueden tomar en cuenta la fricción, y ver qué pasa. Otra cosa, ¿da igual que el péndulo tenga una longitud menor o mayor o que pese más o menos?

A1: Eso no checamos pero no sale tampoco en la solución, pero sí debería importar porque si es más largo...

A4: también si pesa más, debería ir más rápido...

A3: pero el ángulo es igual y eso es lo que estamos viendo en nuestra ecuación... es el ángulo... la variable... bueno, este...no sé pero creo que no importa porque no sale...

A2: Pero si tienes así un pendulito... ¿no debería mecerse más rápido que si tienes uno super largote? No sé, mejor lo hacemos... primero sin fricción, más fácil, ¿no?

Los alumnos regresaron a trabajar con los péndulos y en la presentación en la siguiente clase habían encontrado que el periodo de oscilación no depende de la amplitud; que la longitud de la cuerda del péndulo sí influye en la frecuencia de oscilación y que el peso no lo hace. Compararon la solución de la ecuación con sus datos y como conclusión dijeron:

Mientras no hay fricción, el péndulo funciona muy bien como péndulo..., bueno, cuando hay fricción también porque en el experimento lo que vimos es que no cambia tanto la frecuencia... pero no hicimos todavía lo de la fricción... pero, bueno, luego de todos modos se va a parar y ya no sirve, pero así, si supones que no se para pues sí sirve. Ahora haremos lo de considerar la fricción. En la gráfica que sacamos se ve que, sobre todo al principio, los datos se pegan a la curva bastante bien, o sea que el modelito funciona bien, luego ya no porque la amplitud aquí en el modelo se queda constante y en el péndulo no, pero eso es por la fricción.

Posteriormente los alumnos hicieron el caso del péndulo con fricción experimentalmente, nuevamente midieron las amplitudes y se dieron cuenta de que el periodo, como antes, casi no se ve afectado por la variación de la amplitud. Se enfrentaron con la dificultad de contar con una expresión para la fricción. Si bien encontraron en el texto que la fricción es proporcional a la velocidad, se acercaron al profesor a preguntar por qué. Su dificultad mayor fue, posteriormente, la matemática, dado que la solución de la ecuación diferencial se complica. Una vez que superaron este problema con ayuda del maestro y fueron capaces de encontrar la fricción usando la computadora, el maestro preguntó:

P: ¿Qué pasaría si la fricción es muy grande?

A1: Le costaría más trabajo moverse, iría más despacito.

P: Porque aquí en su ecuación, usando ese método qué significaría que la solución saliera solamente la exponencial real, una suma de exponenciales reales...

A1: No pueden salir los reales, es que eso no va a salir en el experimento...

P: ¿Están seguros?

A2: Quién sabe, pero el péndulo siempre oscila, siempre, entonces eso no podría salir...

P: pero su modelo lo predice, ¿puede ser que esté mal el modelo?

A3: No... mmm... este yo creo que no... porque eso sale, pero... si es un péndulo siempre oscila... está muy raro.

A2: Bueno... puede que sea como... como que sale de la ecuación pero no pasa en la realidad...

A3: y entonces..., ¿por qué sale? Si es el modelo del péndulo, con eso empezamos, no debía pasar porque eso no pasa un péndulo siempre se mueve así de ida y vuelta... Mejor lo pensamos luego.

P: Preferiría que lo tratáramos de aclarar ahorita, piénsenle, no tienen siempre que buscar en el libro...

A3: Ay profe... no sé... a ver...

A2: ¿Qué tendría que pasar para que ese caso de solución se diera? El valor del exponente que no sea imaginario, o sea, en la práctica...

[Después de alrededor de media hora de discusión]

A1: En el exponente... lo que sale aquí es que, antes de la raíz cuadrada, lo que aparece es esta b que le pusimos a la fricción... eso es lo que saldría... aquí en la raíz está la g y también la fricción... bueno parece que la fricción le tiene que ganar al otro para que la raíz sea positiva y con eso sí saldría real y sí se puede si la fricción es grande...

A3: Ah sí, ya sé... es que si la fricción es grande, pero mucho ¿eh?... muy grande... entonces lo que pasaría es que el péndulo se movería hacia adentro hasta que se para y lo iría deteniendo la fricción todo el tiempo y no lo dejaría vibrar, es como... como una puerta de esas que no se golpean, bueno, no sé si así es la puerta, pero así me lo imagino...

En su presentación al grupo explicaron claramente este punto usando la analogía de la puerta. Finalmente desarrollaron un experimento en el que con un metrónomo empujaban al péndulo para contrarrestar la fricción que funcionaba bien como forzado. El trabajo en el proyecto y el compromiso del grupo con su solución permitió a los estudiantes, así como a los de otros grupos, reconsiderar sus ideas acerca de las fuerzas, de la variación y de la relación del movimiento con la fricción. También relacionar de una manera fecunda la solución matemática del modelo con lo que debería suceder en el experimento. Si bien los estudiantes comenzaron utilizando un modelo que incluía su experiencia cotidiana y

concepciones limitadas de fuerza, fueron modificando sus concepciones paulatinamente hasta incluir en su modelo los distintos comportamientos que se pueden obtener al variar las condiciones experimentales. Fueron capaces, además, de verificar sus ideas sobre la variación del periodo con la amplitud hasta admitir su constancia. En su presentación final hicieron énfasis, justamente, en lo inesperado de este hecho. Utilizaron el péndulo como la base de un posible mecanismo para un reloj. Ni ellos ni los otros equipos construyeron el reloj de péndulo en forma global. Junto con el péndulo forzado incluyeron una presentación en video mostrando tres modelos distintos de relojes de péndulo, con la explicación de sus mecanismos.

La evolución del grupo B

Para los alumnos del grupo B el proyecto resultó difícil. Sus conocimientos previos de física se limitaban a unas cuantas fórmulas memorizadas que no podían utilizar con facilidad. Estos alumnos comenzaron discutiendo el problema simplificado que el profesor sugirió mediante el uso de fuerzas. Para ellos la única fuerza a considerar era la gravedad:

B1: ...siempre apunta hacia abajo, es g y siempre va hacia abajo todo el tiempo.

B2: Pero yo me acuerdo... no sé... si apunta hacia abajo se debería mover para abajo, ¿no? o sea caerse... porque... pero si la única fuerza es la gravedad...

B1: Es que la gravedad es el peso y, si no, ni modo que volara...[risas]...pero aquí está conforme el péndulo se mueve, siempre va así, para abajo [lo muestra en el dibujo]

B3: yo creo que Mariana tiene un punto, ¿no? porque, ¿cómo se mueve para los lados si no hay ninguna fuerza?

B1: Es que uno lo empujó, cuando lo abres y lo sueltas lo empujas aunque sea poquito

B2: entonces ésa sería otra fuerza, la de que lo empujas

B3: yo pienso que sí, que hay que ponerle otra aquí que apunta para allá hacia el centro [dibuja una fuerza en la dirección del movimiento]

B2: entonces ésta, del peso, y ésta, que pusiste, se combinan y eso es lo que hace que se mueva en circulito

B3: puede ser, sí, porque así también sabes por qué sigue una curva cuando se mueve.

Estos alumnos representan las dificultades que tuvieron varios de los grupos. El planteamiento del problema les resultó difícil debido a que el modelo que utilizaban para la fuerza de gravedad era el de la fuerza que apunta siempre hacia abajo. El posible conflicto de que el movimiento se realizara en una dirección diferente a la de la fuerza no los condujo a proponer la descomposición en componentes, sino que los llevó a considerar otra fuerza, ésta en la dirección del movimiento que conjuntamente con la gravedad, guiaba al péndulo por su trayectoria curva. La tensión de la cuerda no apareció en sus discusiones iniciales; ése fue el modelo que presentaron al resto del grupo.

Después de las primeras presentaciones en clase, el maestro consideró conveniente tener una entrevista con los dos grupos que consideraban no habían avanzado suficiente en el planteamiento del problema. En esta entrevista, el profesor cuestionó las ideas sobre las fuerzas que los estudiantes tenían y trató, mediante preguntas, de conducirlos a considerar la descomposición en componentes del problema. En el momento de esta entrevista habían ya consultado libros y planteado el problema de manera correcta utilizando el arco que recorre el péndulo; sin embargo, sus explicaciones sobre las fuerzas seguían mostrando que el modelo original de fuerzas seguía presente:

P: A ver, este modelo ya no es el mismo de antes, del que presentaron. ¿Me pueden explicar cómo están pensando ahora?

B4: Lo vimos en el libro de física, en el de la prepa... ¿verdad? Entonces nos dimos cuenta de que no lo teníamos bien, que para que se mueva se necesita una fuerza en la dirección del movimiento y que se tenía que dividir el peso en dos partes.

P: Esta fuerza que habían puesto antes, ¿ya no es necesaria?, ¿por qué?

B1: No, sí se necesita, pero es que ya queda con esta otra, la de la gravedad.

P: No entendí.

B1: O sea, ésta, de la gravedad, se divide en dos: una que va para acá y se contrarresta con la de la cuerda y otra para acá, hacia adentro, que comprende a una parte de la gravedad y otra la de que lo empujamos

P: ¿Y si no lo empujo?, ¿si sólo lo abro y lo suelto?

B1: De todos modos algo lo empujas, aunque sea así, sin querer, lo empujas.

B2: No sé, creo que no, pero no sé cómo explicarlo... se me hace que ya con esa fuerza es lo que se necesita, la de la gravedad, digo... ésa que es un pedazo de la gravedad, la componente.

El modelo de fuerza para la situación que los estudiantes empleaban seguía siendo el mismo, únicamente incorporaron la descomposición en componentes según lo que el libro decía, y aunque podían explicar dicha descomposición en términos matemáticos, no en términos físicos. Además, el cambio del ángulo –como variable dependiente del arco de circunferencia– tampoco les resultaba claro.

P: Veo, además, que aquí tienen una nueva variable, esta s , en lugar del ángulo, ¿por qué cambiaron?, ¿qué representa esa s ?

B3: Es que en el libro ésa es la variable que usan

B4: también la vimos en internet y era como en el libro.

P: Ok, pero, ¿qué representa y por qué es mejor que el ángulo?

B3: Bueno, es lo que recorre, la distancia recorrida y es mejor porque así tienes la distancia en el tiempo... y el ángulo, bueno, al principio no lo teníamos ni siquiera, pero como que pensamos que sería más fácil, pero al ver que sí se podía usar la distancia pensamos que era mejor.

B2: Además la distancia te da luego la amplitud que es lo que queremos para el reloj...

P: De acuerdo, pero el ángulo también cambia y eso era lo que consideraron antes.

B2: Sí, pero en el libro no está así y puedes encontrar esta fórmula que te dice que la longitud con el ángulo dan la s ... entonces pensamos que en el experimento sería también cosa de ver si cuando cambias lo largo del péndulo, qué pasa con la amplitud...

P: Esa idea es buena, ver qué pasa para péndulos de distintas longitudes. Pero ahora quiero que me expliquen la relación entre s y el ángulo, pero es importante que entiendan lo que van haciendo.

Los alumnos fueron capaces de explicar, con dificultades, la relación en términos matemáticos, aunque de su discurso parece ser que la toman como distancia recorrida en el sentido horizontal, pero no hay suficiente información para asegurararlo.

Prosiguieron su trabajo concentrándose en la parte experimental. Tuvieron, nuevamente, dificultades al tratar de relacionar la solución al modelo del péndulo simple con los datos experimentales. Su atención se fijó en la amplitud y no en el periodo; en la conclusión de esta primera parte del proyecto escribieron:

El péndulo simple no es muy útil como reloj porque en el experimento se puede ver que para distintos pesos y para distintas longitudes, la amplitud siempre disminuye y el péndulo se para después de un tiempo. Eso no permite medir el tiempo.

La oportunidad de estos estudiantes de escuchar las presentaciones de otros compañeros los indujo a reconsiderar esta opinión y a tomar en consideración el periodo del péndulo como la variable que podía dar cuenta de si éste sería o no un buen reloj. Después de esta presentación, se limitaron a utilizar los procedimientos planteados por sus compañeros en su propio trabajo. Al final del proyecto, en la entrevista con el profesor se constata que los alumnos cambiaron sus ideas sobre la fuerza:

B2: Al principio pusimos la fuerza que empuja, pero después vimos que no era necesaria porque era la acción de la gravedad la que hacía que se moviera en esa dirección, porque la otra no actúa porque se equilibra con la del hilo que lo detiene.

B3: También pensábamos que, al abrirlo y soltarlo a fuerzas, lo empujas y hay una fuerza, y eso sí puede ser como cuando empujas el columpio o en el experimento que empujamos el péndulo al ritmo de la música para mantenerlo en movimiento, pero sí sólo lo abres y lo dejas, no necesariamente hay fuerza.

B2: Bueno la fricción... [se ríen]... pero no la estábamos tomando en esa parte, era la simplificada.

P: Bien, y ¿qué me dicen de la relación entre el periodo y la amplitud?

B2: En las matemáticas, en la solución en los distintos casos, no sale el periodo, nos costó trabajo ver qué era, hasta que lo vimos con los demás que no dependen, pero yo pienso que sí dependen pero que no sale así...

P: ¿Cómo está eso?

B2: Si funciona el experimento que la amplitud baja y la frecuencia casi no cambia, pero sí cambia con la longitud, pero creo que no encontramos que no cambia porque el modelo te da como una aproximación, o sea no es idéntico a lo que pasa en realidad.

B4: Bueno, es que casi no cambia, pero si lo vieras con mucho cuidado y con aparatos seguramente cambiaría

P: Pero concluyen que el péndulo puede servir como reloj, pero no lo creen ¿qué pasa? [ríen].

B3: Bueno, sí sirve, porque si tienes el mecanismo para mantenerlo, pues se mantiene, pero si no tiene el mecanismo no va a ser muy bueno.

Este grupo es representativo de más de la mitad de los estudiantes de la clase. En su trabajo se muestra poca claridad en los conceptos y una tendencia a dejarse llevar por los métodos memorizados o tomados del texto como solución sin hacer una clara relación con el fenómeno que se modela. Aun en estos casos, se evidenció que sus modelos conceptuales cambiaron gracias a su participación en el proyecto y mediante la discusión con compañeros que lograron una mayor comprensión de la situación. En particular se registró un viraje en su modelo para la fuerza que incluye la necesidad de la descomposición en componentes. No lograron, sin embargo, modificar muchas de sus concepciones originales sobre el movimiento del péndulo, aun cuando su solución a las ecuaciones del modelo era correcta. En la presentación final mostraron el péndulo que utilizaron en su experimentación, un cartel en el que incluyeron sus explicaciones y una fotografía de un reloj de péndulo junto a la que explicaron “entender el péndulo es importante para entender cómo funcionan estos relojes, pero para construirlos se necesita incluir también conocimiento sobre otros mecanismos que hacen que las manecillas den vuelta, por ejemplo, pero es el péndulo el que es importante para que se mantenga el ritmo correcto para marcar el tiempo.”

A lo largo del proyecto mostraron grandes dificultades para relacionar los términos del modelo matemático con el comportamiento físico del fenómeno. Esto actuó siempre como un obstáculo en la posibilidad de cambio de sus modelos conceptuales sobre el movimiento del péndulo. Es interesante notar que, a lo largo del proyecto, varios de los grupos, como éste, mantuvieron modelos del péndulo que, si bien incluían algunos modelos físicos correctos, guardaban varias características de los derivados de su experiencia cotidiana con el movimiento oscilatorio.

Discusión y conclusiones

Los resultados obtenidos en esta experiencia ponen de manifiesto los patrones de razonamiento seguidos por los estudiantes y las dificultades conceptuales que enfrentan. Entre los aspectos de su conocimiento relacionados con el movimiento del péndulo es interesante notar, en primer término, que si comparamos los resultados encontrados en este trabajo con las ideas previas detectadas por algunos investigadores y mencionadas en el marco teórico, los alumnos universitarios manifiestan muchas de las que han sido reportadas en la literatura y que corresponden a estudiantes novatos. Entre ellas, que no relacionan la longitud del péndulo con el periodo de

oscilación, que la amplitud y la velocidad del movimiento dependen de su peso. Se encontraron además otras notables como la imposibilidad de modelar utilizando la idea de variación, las dificultades asociadas con la introducción de las condiciones iniciales en el modelo y las que algunos estudiantes tuvieron con la descomposición de los vectores en componentes. En ocasiones, son capaces de utilizar las ideas correctas o, cuando analizan los textos, pueden detectar sus errores. Pero este no es el caso para todos los estudiantes. Parece ser que al enfrentar un contexto nuevo, las ideas previas resurgen y sus estrategias de pensamiento no son lo suficientemente fuertes como para utilizar comparaciones y analogías con casos de problemas en los que estas ideas no se presentan. Por ejemplo, al discutir la velocidad en los extremos de la trayectoria del péndulo, un estudiante comparó la situación de la velocidad del péndulo con la de un objeto en movimiento parabólico cuando se encuentra en el punto más alto de la trayectoria, pero tuvo problemas en su explicación y no fue capaz de convencer a sus compañeros de su argumento.

Los patrones de razonamiento de los estudiantes son guiados, en un primer momento, principalmente por lo que son capaces de observar. Los resultados de este trabajo muestran que la mayoría tiene dificultades para utilizar argumentos conceptuales como el tipo de movimiento o la ecuación que lo gobierna para clasificar al movimiento y para utilizar los resultados que conocen en casos específicos. Esto se muestra con claridad en el problema para considerar el movimiento del péndulo con fricción como un caso particular del movimiento oscilatorio. Otro patrón de razonamiento detectado en el trabajo de los estudiantes fue la sobregeneralización de ciertos principios como el de la conservación de la energía o el de la proporcionalidad en la relación entre variables. Parece que la idea de variación lineal es fuerte entre los estudiantes y romper con ella provoca dificultades.

Durante el proceso de solución del problema, sin embargo, el razonamiento de los estudiantes fue evolucionando de los aspectos concretos del problema a los más abstractos. La forma de las ecuaciones y su solución pasó al primer plano aunque, en ocasiones, desprovista del significado físico que podría tener, y al final del proyecto, las presentaciones exhibieron una mayor solidez en el manejo de los conceptos y de sus relaciones.

El trabajo de un proyecto de física dentro de una clase de matemáticas permitió poner de manifiesto de manera clara la compartimentación del conocimiento de los estudiantes. Para la mayoría de los que participaron en

este curso, las dos disciplinas son ajenas entre sí. A pesar de haber estudiado el péndulo en sus clases de física, a casi todos los estudiantes les fue difícil, de entrada, acceder a su propio conocimiento. La posibilidad de utilizar nuevas técnicas matemáticas, recientemente estudiadas, no se evidenció para la mayoría de los equipos. Un resultado que parece ser relevante es la dificultad que mostraron para utilizar la noción de variación en la modelación del problema. Como se describió en la sección de resultados, varios de los grupos introdujeron las condiciones iniciales en el modelo original y su resistencia a no incluirlas fue fuerte, ello provee un indicador importante de que el concepto de modelación –utilizando diferencias y razones de cambio– debe trabajarse con ellos con mayor insistencia.

La posibilidad de trabajar con datos generados por los propios estudiantes constituyó una fuente de aprendizaje para el grupo. El hecho de pasar por el ciclo completo de modelación les permitió considerar las dificultades implicadas en la generación y el análisis de datos, además de aprender técnicas y conceptos nuevos. Entre éstos destacan la necesidad de utilizar todos los datos en el proceso de aproximación de los parámetros del modelo, el de mínimos cuadrados y el estudio de la oscilación amortiguada, tanto desde el punto de vista de la física como de las matemáticas.

Los datos de esta experiencia ponen de manifiesto la utilidad del empleo de modelos durante la enseñanza. A pesar de que esta metodología de trabajo no garantiza un contundente éxito con todos los estudiantes, durante el proyecto permitió poner al descubierto sus ideas con respecto a los problemas que se van presentando en la evolución de sus propuestas de solución, además de que proporcionó oportunidades de presentación y discusión en las que los alumnos justificaron sus puntos de vista así como confrontaron, reconsideraron y modificaron sus ideas. Fueron capaces de poner en juego los recursos conceptuales de los que disponen y combinarlos con libertad. El progreso de cada grupo y el nivel de solidez de sus proyectos finales correspondieron a sus propias necesidades y posibilidades de avance pero, en general, se puede decir que todos los grupos evolucionaron en sus conocimientos acerca de las dos disciplinas y de su relación.

Las estrategias de los estudiantes del grupo mostraron que, si bien la mayoría de los modelos iniciales sobre la fuerza, la variación y el movimiento oscilatorio pueden considerarse distantes de aquéllas que se pretende lograr mediante la enseñanza formal, es posible lograr que se apropien de los modelos dinámicos. El trabajo en el proyecto brindó a los estudiantes una oportu-

nidad para utilizar lo aprendido, para relacionar lo estudiado en cursos diferentes y para poner en juego sus ideas sobre la naturaleza misma del trabajo científico a través de la experimentación y de la comunicación.

El trabajo de los estudiantes en la solución de este modelo les brindó asimismo varias oportunidades de reconsiderar sus concepciones sobre conceptos fundamentales de la física como el de fuerza y el de variación, además de establecer relaciones entre ésta y las matemáticas, disciplinas que para ellos parecen estar desconectadas. La mayoría mostró avances en su forma de argumentar, pasó del uso ciego de fórmulas o resultados de su experiencia cotidiana a consideraciones críticas basadas en principios físicos y avanzó en la posibilidad de interpretación física de los fenómenos descritos mediante relaciones matemáticas.

Es claro que el tiempo dedicado a un proyecto de la naturaleza del discutido aquí es insuficiente para superar todos los obstáculos que se presentan a los estudiantes, pero es importante considerar que aun en ese breve periodo tuvieron la oportunidad de reflexionar sobre sus concepciones y de interiorizar y establecer relaciones entre conceptos que, de otra manera, sería difícil lograr. Si bien esta forma de trabajo e investigación puede ser de gran utilidad, para que esta metodología funcione es necesario que el maestro dedique mucho tiempo a la atención de los estudiantes.

En este trabajo encontramos que –a través del enfrentamiento con un problema que permite vías distintas de acercamiento y cuya solución se va construyendo mediante la discusión en grupos– en la argumentación de los acercamientos y de las técnicas empleadas, los estudiantes de este grupo tomaron a su cargo el reto que el problema implicaba, ampliaron su visión de lo que significa el uso de las matemáticas y de la física en la solución de problemas reales.

La necesidad de argumentar sus procedimientos y sus conclusiones les permitió, además, profundizar en sus conocimientos y modificar o aclarar las propias ideas que formularon inicialmente. La posibilidad de utilizar recursos tanto computacionales como matemáticos que les eran desconocidos posibilitó el aprender conceptos nuevos, además de valorar sus posibilidades de incrementar, por sí mismos, sus conocimientos y herramientas conceptuales. Lo que a su vez permite, desde nuestro punto de vista, que los estudiantes empiecen a comprender que lo que han aprendido en la escuela puede utilizarse para enfrentar nuevos retos y problemas. La solución usando modelación ayudó a la mayor parte de los estudiantes a sentirse más seguros de su propio conocimiento y a que valoraran de una

manera diferente la función de los cursos escolares. Por otra parte, les permitió valorar las limitaciones de este tipo de modelación.

Así, en el proceso de evolución conceptual manifestado a través de los ciclos de refinamiento del modelo destaca la revisión de las ideas previas, la posibilidad de contrastarlas tanto experimentalmente con datos como con opiniones de sus compañeros, modelar usando la noción de variación y las técnicas de representación y manipulación de datos para obtener conclusiones.

La inmersión de los estudiantes dentro de un ciclo completo de un proceso de modelación los acercó, además, a vivir en cierta forma algunos de los procesos involucrados en el quehacer científico y a apreciar los procesos que conducen a la obtención de los resultados finales de la ciencia. La secuencia seguida en la elaboración del modelo facilitó también la integración de conceptos y de las dos disciplinas y el uso de distintas representaciones para comprender el funcionamiento del fenómeno, así como el trabajo en estrategias para lograr la comunicación de sus resultados. Todo ello favorece una formación más integral de los estudiantes.

El diseño de las situaciones constituye un elemento central para que el uso de la modelación tenga éxito. Un problema planteado en buenos términos favorece el compromiso de los estudiantes en su solución, evidentemente no todos los estudiantes avanzaron de la misma manera, ni lograron profundizar en los conceptos como sería deseable, pero puede decirse que tanto el problema planteado como los resultados obtenidos en el desarrollo de este proyecto fueron efectivos para despertar el interés de los alumnos y el maestro por continuar utilizando este tipo de acercamiento. El trabajo cercano con cada uno de los equipos dificulta utilizar este acercamiento como base de una metodología de trabajo constante en el aula. Sin embargo las posibilidades de aprendizaje y de comprensión por parte del investigador de las formas de trabajo de los alumnos, hacen que el uso de modelos, aunque sea en forma parcial en la enseñanza, valga la pena.

Referencias

- Aliprantis, A. D. y Carmona, G. (2003). "Introduction to an economic problem: a models and modelling perspective", en Lesh y Doerr (eds.) *Beyond constructivism: Models and modelling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching*, Mahawah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, pp. 255-265.
- Almudí, J.M. (2002). *Introducción del campo magnético en primer ciclo de universidad: Dificultades de aprendizaje y propuesta de enseñanza alternativa de orientación constructivista*, tesis doctoral, Departamento de Física Aplicada I, Universidad del País Vasco.

- Beichner, R.J y Saul, J.M. (2003). "Introduction to the SCALE-UP (Student-Centered Activities for Large Enrollment Undergraduate Programs) Project", *Proceedings of the International School of Physics: Enrico Fermi*, Varenna.
- Buckley, B.C.; Boulter, C. y Gilbert, J. (1997). *Towards a typology of models for science education*, Reino Unido: Faculty of Education and Community Studies, The University of Reading.
- Carey, S. y Smith, C. (1993). "On understanding the nature of scientific knowledge", *Educational Psychologist*, 28(3), 235-251.
- Cartier, J. (2000). "Assessment of explanatory models in genetics: Insights into Students' Conceptions of Scientific Models", *Report núm. 98-1, NCISLA/Mathematics & Science*, Madison:University of Wisconsin
- Czudkova, L. y Musilova, J. (2000). "The pendulum: A tumbling block of secondary school mechanics", *Physics Education* 35(6), 428-435.
- Denny, M. (2002). "The pendulum clock", *European Journal of Physics*, 23(4), 449-458.
- Dori, Y.J. y Belcher, J. (2004). "How does technology-enabled active learning affect undergraduate students' understanding of electromagnetism concepts?" *The Journal of the Learning Sciences* 14(2).
- Fazio, C.; Guastella, I.; Tarantino, G. (2005). "Designing and validating a teaching/learning sequence about elastic waves propagation; the role of pedagogical tools", *Proceedings of ESERA 2005 Conference*, vol V, Barcelona, pp. 633-636.
- Fazio, C.; Giangalanti, G. y Sperandeo-Mineo, R. (2002). "Modeling phenomena in various experimental fields: the framework of negative and positive feedback systems", en Michelini y Cobal (eds.) *Developing Formal Thinking in Physics*, Forum Editrice, Udine: Universidad de Udine.
- Felipe, E. A.; Gallarreta, S. y Merino, G., (2005). "La modelización en la enseñanza de la biología del desarrollo", *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, vol. 4, núm. 3.
- Feurzeig, W. y Roberts, N. (1999). *Modeling and simulation in science and mathematics education*, Nueva York: Springer.
- Giere, R. (1988). *Explaining science: A cognitive approach*, Chicago:University of Chicago Press.
- Gil, D. et al. (1999) "¿Tiene sentido seguir distinguiendo entre aprendizaje de conceptos, resolución de problemas de lápiz y papel y realización de prácticas de laboratorio?", *Enseñanza de las Ciencias*, 17, 311-320.
- Gil, D. y Martínez Torregrosa, J. (1984) "Problem solving in physics: A critical analysis", *Research on Physics Education*, París: CNRS editors.
- Gilbert, J.K. (2002). "Moving between the modes of representation of a model in science education: some theoretical and pedagogic implications", conferencia en *Philosophical, Psychological, Linguistic Foundations for Language and Science Literacy Research*, Victoria: University of Victoria.
- Gilbert, J.K. y Boulter, C. (1995). "Stretching models too far", *Proceedings of the Annual Conference of the American Educational Research Association*, San Francisco.
- Gilbert, J.K.; Boulter, C. y Rutherford, M. (1998). "Models in explanations, part. 1: Horses for courses?" *International Journal of Science Education*, 20(1), 83-97.
- Gilbert, J.K., y Osborne, R.J. (1980). "The use of models in science and science teaching", *European Journal of Science Education*, 2(1), 3-13.

- Gobert, J. y Buckley, B. (2000). "Introduction to model-based teaching and learning in science education", *International Journal of Science Education*, 22(9), 891-894.
- Gobert, J. y Clement, J. (1994). "Promoting causal model construction in science through student-generated diagrams", *Proceedings of the annual meeting of the American Educational Research Association*, Nueva Orleans.
- Goldin, G. A. (2004). "Representations in mathematical learning and problem solving" en English, L. (ed.) *Handbook of international research in mathematics education*, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, pp. 517-547.
- Grosslight, L., et al. (1991). "Understanding models and their use in science: Conceptions of middle and high school students and expert", *Journal of Research in Science Teaching*, 28 (9), 799-822.
- Guisasola, J. et al. (1998). "Interactive-engagement vs traditional methods: A six-thousand-student survey of mechanics test data for introductory physics courses," *Am J Phys*, 66: 64-74.
- Guisasola, J. et al. (2004). "La enseñanza universitaria de la física y las aportaciones de la investigación en didáctica de la física", *Revista Española de Física*, 18 (2), 15-16.
- Hake, R.R. (1998). "Interactive-engagement methods in introductory mechanics courses" (disponible en <http://www.physics.indiana.edu/~sdi/IEM-2b.pdf>).
- Hake, R.R. (2002). "Lessons from the physics education reform effort," *Ecology and Society* 2: 28-36.
- Harrison, A. G. y Treagust, D. F. (1998). "Modeling in science lessons: Are there better ways to learn with models?", *School Science and Mathematics*, 98(8), 420-429.
- Harrison, A. y Treagust, D. (2000). "A typology of school science models", *International Journal of Science Education*, 22 (9), 1011-1026.
- Hoellwarth, C.; M. J. Moelter, y R.D. Knight. (2005). "A direct comparison of conceptual learning and problem solving ability in traditional and studio style classrooms", *American Journal of Physics* 73(5): 459-463.
- Ingham, A. y Gilbert, J. (1991). "The use of analogical models by students of chemistry at higher education's level", *International Journal of Science Education*, 13 (2), 193-202.
- Islas, S. M. y Pesa, M. A., (2002). "The learning of modeling: a scientist vision", en Michelini y Cobal (eds.) *Developing Formal Thinking in Physics*, Forum Editrice, Udine: Universidad de Udine.
- Jaque, F. (1995) "Deficiencias en los conocimientos de la física al llegar a la Universidad", *Tarbiya* 10, 121-126.
- Justi, R. y Gilbert, J. (1999). "A case of a historical science teaching: the use of hybrid models", *Science Education*, 83 (2), 163-177.
- Kelly, A. E., y Lesh, R. A. (2001). *Reconsidering Design Experiments: 3 yr Research Program of the NSF*. Santa Fe, NM.
- Kitcher, P. (1984). "1953 and all that. A tale of two sciences", *The Philosophical Review*, 93, 335-373.
- Lehrer, R., y Schauble, L. (2000). "Modeling in mathematics and science", en Glaser (ed.) *Advances in instructional psychology: volume 5. Educational design and cognitive science*, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum, pp. 101-159.

- Lesh, R. *et al.* (2000) "Principles for developing thought revealing activities for students and teachers", en Lesh y Kelly (eds.) *Research design in Mathematics and Science Education*, Mahawah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, pp. 647-664.
- Lesh, R. y Doerr, H. M. (2003) "Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning and problem solving", en Lesh y Doerr (eds.) *Beyond constructivism: Models and modelling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching*, Mahawah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, pp. 3-35.
- Lesh, R. y English, L. (2005) "Trends in the evolution of models and modeling perspective on mathematical learning and problem solving", *International Reviews on Mathematical Education*, 37(6), 487-489.
- Lesh, R. y Kelly, A. (2000) "Multitiered teaching experiments", en Lesh y Kelly (eds.) *Research design in Mathematics and Science Education*, Mahawah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, pp. 197-230.
- Manabu, S. (2004). "The reproduction of scientific understanding about pendulum motion in the public", *Science and Education*, 13(4 y 5), 473-492.
- Mathews, M. R. (2004). "Idealization and Galileo's pendulum discoveries: historical, philosophical and pedagogical considerations", *Science and Education*, 13 (7), 689-715.
- McClain, K. (2003) "Task analysis cycles as tools for supporting students' mathematical development", en Lesh y Doerr (eds.), *Beyond constructivism: Models and modelling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching*, Mahawah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, pp. 175-191.
- McDermott, L.C. (1990). "A perspective on teacher preparation in physics and other sciences: The need for special science courses for teachers", *American Journal of Physics* 58, 734- 742.
- Mellar, H. y Bliss, J. (1994) "Introduction: modeling and education", en Mellar *et al* (eds.) *Learning with Artificial Worlds: computer based modeling in the curriculum*, Londres: The Falmer Press, pp. 1-7.
- Michelsen, C. (2005). "Expanding the domain variables and functions in an interdisciplinary context between mathematics and physics", *Proceedings of the I International Symposium on Mathematics and its Connections to the Arts and the Sciences*, Schwäbisch Gmünd: The University of Education, pp. 201-214.
- Moreira, M. A. (1999). *Modelos mentales*, texto de apoyo núm. 8. Programa Internacional de Doctorado en Enseñanza de las Ciencias, Burgos: Universidad de Burgos.
- Morgan, M. S. y Morrison, M., (1999). *Models as mediators: Perspectives on natural and social science*. Cambridge: Cambridge University Press.
- National Council of teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*, Reston, VA.
- Nersessian, N. (1992). "Constructing and instructing: the role of abstraction techniques" en Duschl y Hamilton (eds.) *Creating and learning physics, philosophy of Sc. cognitive psychology and educational theory and practice*, Nueva York, pp. 48-67.
- Nola, R. (2004). "Pendula, models, constructivism and reality", *Science and Education*, 13, 349-377.
- Norman, D.A. (1983). "Some observations on mental models", en Gentner y Stevens (eds.). *Mental models*, pp. 6-14. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

- Pintó, R. y Surinach, S. (2004a). *Physics teacher education beyond 2000*, París: Elsevier.
- Pintó, R. y Surinach, S. (2004b). "Puede ayudar la investigación en enseñanza de la física a mejorar su docencia en la universidad?" *Rev Bras Ens Fís*, vol. 26, núm 3, San Pablo.
- Pollock, S. (2005). "No single cause: learning gains, student attitudes, and the impacts of multiple effective reforms, 2004 Physics Education Research Conference: AIP Conference Proceeding", vol. 790; J. Marx, P. Heron, & S. Franklin, eds., pp. 137-140.
- Schwarz, C.; Meyer, J. y Sharma, A., (2004). "Creating epistemologically-rich learning environments: computer modeling tools for pre-service elementary and middle school science teachers", *Proceedings of AERA Conference*.
- Schwarz, C., y White, B., (2003). "Developing a model-centered approach to science education", *Cognition and Instruction*, 23(2) 265-205.
- Scott, P. H. y Driver, R. H. (1998). "Learning about science teaching: perspectives from an action research project", en Fraser y Tobin (eds.), International survey of mechanics test data for introductory physics courses, *Am J. Physics*, 66, 64-74.
- Smith, C., Snir, J., y Grosslight, L. (1992). "Using conceptual models to facilitate conceptual change: The case of weight-density differentiation", *Cognition and Instruction*, 9, 221-83.
- Sperandeo-Mineo, R., (2002). "Learning physics via model construction", en Michelini y Cobal (eds.) *Developing Formal Thinking in Physics*, Udine: Forum Editrice, Universidad de Udine.
- Spitulnik, M., Krajcik, J., y Soloway, E., (1999). "Construction of models to promote scientific understanding" en Feurzeig y Roberts (eds.), *Modeling and simulation in science and mathematics education*, Nueva York: Springer-Verlag, pp. 70-94.
- Trigueros, M. (2004). "Innovación en evaluación: un enfoque basado en la perspectiva de modelos", *Enseñanza de la Química*, vol. 15, pp. 129-141.
- Trigueros, M. y Carmona. G. (2006) "Nuevas perspectivas de evaluación", en Rojano (ed.), *La tecnología en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas con Tecnología: Modelos de transformación de las prácticas y la interacción social en el aula*, México: Subsecretaría de Educación Básica-SEP, pp. 231-241.
- Viennot, L. (1998) "Former en didactique, former sur le contenu? Principes d'élaboration et éléments d'évaluation d'une formation en didactique de la physique en deuxième année d'IUFM", *Didaskalia* 10, 75-96.
- Wolman, W. (1984). "Models and procedures: teaching for transfer of pendulum knowledge", *Journal of Research in Science Teaching*, 21(4), 399-415.
- Zawojewski, J. S.; Lesh, R. y English, L. (2003). "A models and modelling perspective on the role of small group learning activities", en Lesh y Doerr (eds.), *Beyond constructivism: Models and modelling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching*, Mahawah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, pp. 337-358.

Artículo recibido: 7 de febrero de 2006

Dictamen: 11 de mayo de 2006

Segunda versión: 13 de junio de 2006

Aceptado: 21 de junio de 2006