

Desarrollo de celdas lógicas por medio del espacio de estados en un sistema bidimensional

I. Campos-Cantón

Facultad de ciencias, Universidad Autónoma de San Luis Potosí,
Alvaro Obregón 64, San Luis Potosí, 78000, México.

Recibido el 8 de noviembre de 2010; aceptado el 11 de enero de 2011

Este artículo presenta la construcción de las celdas lógicas básicas OR y AND en un sistema bidimensional por medio del espacio de estados. Se analiza el caso particular de un sistema lineal estable con valores propios distintos.

Descriptores: Retrato de fase; electrónica analógica; ecuaciones diferenciales ordinarias.

This work shows the construction of the basic logic OR and AND gates in a bidimensional system with the use of the state space. The particular case of a stable linear system with distinct eigenvalues is analyzed.

Keywords: Linear functions; phase portrait; differential equations; logic gates.

PACS: 02.10.Yn; 02.60.Lj; 02.10.Ab; 84.30.Sk

1. Introducción

El desarrollo de nuevas ideas de cómputo es un paradigma a resolver en nuestros días. Una de las ideas de frontera es generar nuevos mecanismos con una arquitectura lógica dinámica. Es decir, generar estructuras flexibles que sean capaces de cambiar su respuesta de acuerdo a sus parámetros de control y reconfiguración de los mecanismos involucrados [1-3]. Por ejemplo, la emulación de compuertas lógicas que desempeñen diferentes operaciones aritméticas [4-6]. Así, una vez lograda la construcción de celdas lógicas básicas, estamos en la posibilidad de construir chips lógicos para una nueva generación de arquitecturas de cómputo [7]. En este sentido las celdas lógicas básicas son las compuertas OR, AND y NOT, las cuales realizan la operación de suma, multiplicación y negación lógica [8-10], que pueden usarse para implementar funciones lógicas de cualquier complejidad. La puesta en marcha de una función compleja puede requerir muchas de estas operaciones básicas.

El presente trabajo muestra la forma de diseñar las celdas lógicas básicas OR y AND en un sistema lineal con espacio de estados bidimensional, pudiéndose extender este concepto a la generación de las 16 combinaciones posibles basados en sistemas de dos entradas. A continuación se describe brevemente la estructura del presente trabajo: en la Sec. 2 se lleva a cabo el análisis del sistema bajo las diferentes combinaciones posibles de las entradas en forma binaria. En la Sec. 3 se desarrollan las celdas lógicas básicas OR y AND. En la Sec. 4 se finaliza con las conclusiones.

2. Análisis del sistema bidimensional

Considere un sistema lineal dado por

$$\dot{X} = AX + BU, \quad (1)$$

donde $X, U \in \mathbb{R}^2$ y $A, B \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ son matrices reales. También suponga que el sistema es estable y, sin pérdida de

generalidad [11], realizando transformaciones podemos tener los siguientes casos para la matriz A :

$$A_1 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \\ \text{ó} \quad A_3 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

En este trabajo analizamos sólo el caso para $A = A_1$ y $U \in \{0, 1\}$, las únicas entradas binarias permitidas por el sistema. Si λ y μ son valores positivos, entonces podemos reescribir el sistema explícitamente como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

el cual podrá tener los cuatro casos siguientes:

TABLA I. Combinación de las entradas al sistema lineal.

u_1	u_2	
0	0	caso 1
0	1	caso 2
1	0	caso 3
1	1	caso 4

que analizaremos a continuación.

CASO 1:

El sistema (2) presenta la siguiente estructura:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

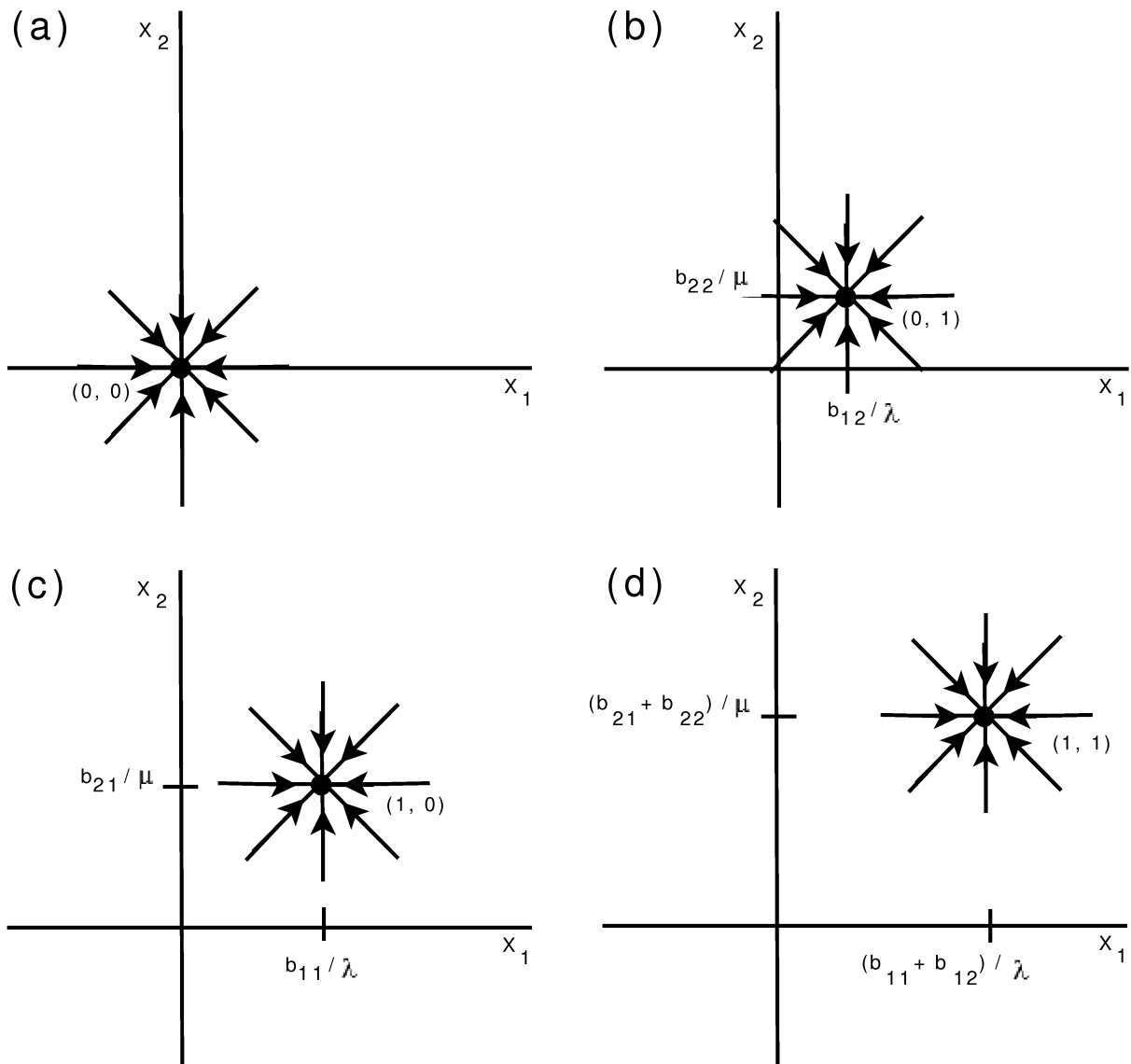


FIGURA 1. Nodo estable en: a) $(0,0)$, b) $(b_{12}/\lambda, b_{22}/\mu)$, c) $(b_{11}/\lambda, b_{21}/\mu)$ y d) $((b_{11} + b_{12})/\lambda, (b_{21} + b_{22})/\mu)$.

y su solución es

$$x_1 = x_{10}e^{-\lambda t}, \quad x_2 = x_{20}e^{-\mu t},$$

con las condiciones iniciales x_{10} y x_{20} . Su representación en el espacio de estados se muestra en la Fig. 1(a), el cual es un nodo estable en el origen.

CASO 2:

El sistema (2) se escribe como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

y la solución es

$$\begin{aligned} x_1 &= \left(x_{10} - \frac{b_{12}}{\lambda} \right) e^{-\lambda t} + \frac{b_{12}}{\lambda} \\ x_2 &= \left(x_{20} - \frac{b_{22}}{\mu} \right) e^{-\mu t} + \frac{b_{22}}{\mu} \end{aligned}$$

por ejemplo, si b_{12} y b_{22} toma valores positivos, su diagrama en el espacio de estados sera el mostrado en la Fig. 1(b) con el centro del nodo ubicado en $(b_{12}/\lambda, b_{22}/\mu)$.

CASO 3:

Para este caso la Ec. (2) toma la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

TABLA II. Tabla de verdad para una función lógica arbitraria Y , OR y AND.

u_1	u_2	Y	OR	AND
0	0	0	0	0
0	1	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	1	1

de donde

$$x_1 = \left(x_{10} - \frac{b_{11}}{\lambda} \right) e^{-\lambda t} + \frac{b_{11}}{\lambda},$$

$$x_2 = \left(x_{20} - \frac{b_{21}}{\mu} \right) e^{-\mu t} + \frac{b_{21}}{\mu},$$

y si $b_{11} > b_{12}$ y $b_{21} > b_{22}$ se encuentra el siguiente diagrama de fase del nodo con centro en $(b_{11}/\lambda, b_{21}/\mu)$ Fig. 1(c).

Finalmente para la última combinación de las entradas que es el caso 4 se tiene.

CASO 4:

Podemos escribir (2) como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} + b_{12} \\ b_{21} + b_{22} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

así

$$x_1 = \left(x_{10} - \frac{b_{11} + b_{12}}{\lambda} \right) e^{-\lambda t} + \frac{b_{11} + b_{12}}{\lambda}$$

$$x_2 = \left(x_{20} - \frac{b_{21} + b_{22}}{\mu} \right) e^{-\mu t} + \frac{b_{21} + b_{22}}{\mu}$$

dando su diagrama fase en la Fig. 1(d). Con el centro del nodo ubicado en $((b_{11} + b_{12})/\lambda, (b_{21} + b_{22})/\mu)$.

Como se puede apreciar en la Fig. 1, dependiendo de la combinación de las entradas se generan cuatro nodos estables en el espacio de estados $x_1 - x_2$, residiendo en una, dos, tres o cuatro posiciones diferentes según se escojan los valores de los parámetros de la matriz B .

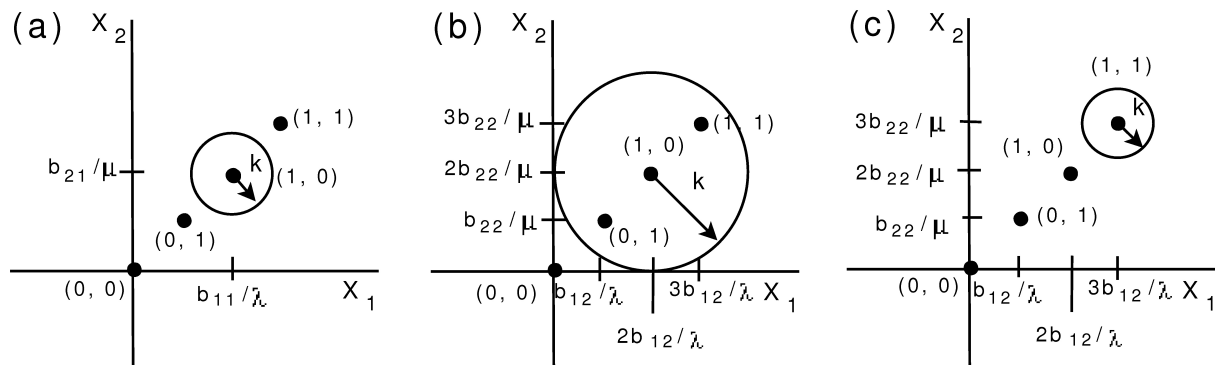


FIGURA 3. Ubicación de los diferentes nodos y región cerrada para: a) función lógica arbitraria, b) OR y c) AND.

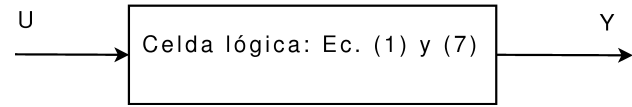


FIGURA 2. Celda lógica.

La salida del sistema la podemos definir con la siguiente ecuación:

$$Y(X) = \begin{cases} 1, & \text{si } |X - C| < K; \\ 0, & \text{de otra forma.} \end{cases} \quad (7)$$

Es decir, $Y(X)$ definirá una región cerrada del espacio de estados con centro en C . Así, dependiendo si se está dentro de esa región, la salida del sistema dará el valor de uno (nivel alto) y, si estamos en el complemento, es decir fuera de la región cerrada, la salida proporcionará un cero (nivel bajo). Lo cual completa la estructura entrada-salida de una celda lógica Fig. 2.

A continuación se mostrará como se construyen las celdas lógicas OR y AND.

3. Celdas lógicas OR y AND

Tomemos primero el sistema constituido por el par de Ecs. (2) y (7) bajo el comportamiento descrito anteriormente y definamos una región cerrada, por ejemplo, de forma circular con centro en $(b_{11}/\lambda, b_{21}/\mu)$ y radio k menor que las distancias a los nodos estables más cercanos como se aprecia en la Fig. 3(a).

Por lo tanto, para alguna combinación de las entradas dadas, la salida de la celda lógica podrá ser la que se muestra en la columna Y de la Tabla II

Celda lógica OR

Esta celda se puede generar si definimos una región cerrada con centro en $(b_{11}/\lambda, b_{21}/\mu)$. Por ejemplo, continuemos con un círculo bajo las especificaciones siguientes: tomemos los $b_{ii} > 0$ con $i \in \{1, 2\}$, $b_{12} = b_{22}$, $b_{11} = 2b_{12}$, $b_{21} = 2b_{22}$ y

un radio $k < \sqrt{(2b_{12}/\lambda)^2 + (2b_{22}/\mu)^2}$ como se muestra en la Fig. 3(b). Por lo tanto Ec. (7) se expresa como sigue:

$$Y_{OR}(X) = \begin{cases} 1, & \text{si } \left(x_1 - \frac{b_{11}}{\lambda}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{b_{21}}{\mu}\right)^2 < k; \\ 0, & \text{de otra forma.} \end{cases} \quad (8)$$

Dando como resultado la función lógica OR como se puede apreciar de la columna OR de la Tabla II.

Celda lógica AND

Manteniendo los parámetros b_{ii} anteriores pero ubicando ahora el centro de la circunferencia en $(3b_{12}/\lambda, 3b_{22}/\mu)$ y radio $k < \sqrt{(b_{12}/\lambda)^2 + (b_{22}/\mu)^2}$ como se muestra en la Fig. 3(c), la Ec. (7) se escribe como

$$Y_{AND}(X) = \begin{cases} 1, & \text{si } \left(x_1 - \frac{3b_{12}}{\lambda}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{3b_{22}}{\mu}\right)^2 < k; \\ 0, & \text{de otra forma.} \end{cases} \quad (9)$$

El resultado de la celda lógica se da en la columna AND de la Tabla II.

4. Conclusiones

Se desarrolla la posibilidad de construir funciones lógicas binarias, bajo el uso de sistemas lineales bidimensionales. Como caso específico se trató un sistema con valores propios reales distintos $(-\lambda, -\mu)$ para la generación de las funciones lógicas OR y AND. Con este esquema entrada-salida se está en la posición de generar diferentes funciones con dos entradas (por ejemplo, 16 funciones lógicas) y una salida. Basados en este enfoque estamos en la posibilidad de generar prototipos físicos que desemboquen en circuitos lógicos.

-
1. S. Sinha y W. Ditto, *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 2156.
 2. D. Kuo, *IEEE Potentials* **24** (2005) 13.
 3. S. Sinha y W. Ditto, *Phys. Rev. E* **60** (1999) 363.
 4. T. Munakata, S. Sinha y W. Ditto, *IEEE Trans. Circuits Syst. I: Fundam. Theory Appl.* **49** (2002) 1629.
 5. I. Campos-Cantón, E. Campos-Cantón, J.A. Pecina-Sanchez y H.C. Rosu, *Int. J. Bif. and Chaos* **20** (2010) 2547; to appear.
 6. K. Murali, S. Sinha, W.L. Ditto y A.R. Bulsara, *Phys. Rev. Lett.* **102** (2009) 104101.
 7. K. Murali, A. Miliotis, W.L. Ditto y S. Sinha, *Phys. Lett. A* **373** (2009) 1346.
 8. K. Murali, S. Sinha y I.R. Mohamed, *Phys. Lett. A* **339** (2005) 39.
 9. K. Murali, S. Sinha y W.L. Ditto, *Int. J. Bif. and Chaos* **13** (2003) 2669.
 10. H. Peng, Y. Yang, L. Li y H. Luo, *Chaos* **18** (2008) 033101.
 11. I. Campos-Cantón, S. Tesheira, C. Jiménez-Calvillo y E. Campos-Cantón, *Rev. Mex. Fís.* **54** (2008) 468.