REVISTA MEXICANA DE FÍSICA S **53** (4) 33–36 AGOSTO 2007

Estructura hamiltoniana de la acción Dirac-Born-Infeld

M.A. Cruz Becerra
Facultad de Física e Inteligencia Artificial, Universidad Veracruzana,
91000, Jalapa, Veracruz, México,
e-mail: macruzb@gmail.com

Recibido el 1 de mayo de 2006; aceptado el 1 de noviembre de 2006

Se presenta el análisis geométrico para desarrollar el formalismo hamiltoniano de la dinámica de una p-brana al evolucionar y generar un volumen de mundo en un espacio de fondo fijo, descrito mediante la acción de Dirac-Born-Infeld (DBI) no polinomial.

Descriptores: D-branas; formalismo hamiltoniano.

We present the geometrical analysis to develop the hamiltonian approach of the dynamics of a p-brane that generates a worldvolume in its evolution in a fixed background and that is described by the nonpolynomial DBI action.

Keywords: D-branes; Hamiltonian formalism.

PACS: 11.10.Ef; 11.15.-q; 11.27.+d

1. Introducción

La electrodinámica no lineal iniciada en los años treinta del siglo pasado por Born e Infeld, en la actualidad está captando mayor atención después que se reconoció su aparición e importancia en teoría de cuerdas, especialmente en la teoría de Dp-branas [1, 2]. Importantes resultados se han obtenido al describir cuerdas y branas en términos de la acción DBI, el rol que juegan los campos del tipo Born-Infeld al describir Dp-branas es que estos mantienen la estabilidad de dichos objetos. Por ejemplo, en un contexto cosmológico algunas teorías de campo predicen la existencia de defectos topológicos como cuerdas y paredes de dominio con la habilidad de que algunos de estos puedan portar carga (objetos extendidos superconductores), los cuales son descritos por medio de DBI [3] así como su aparición en modelos refinados para la descripción de cuerdas relativistas cuya descripción involucre la curvatura extrínseca de la trayectoria recorrida por la cuerda [4], por citar algunos ejemplos.

En este trabajo se presenta la formulación hamiltoniana básica para estudiar la dinámica de la acción DBI y se estudia el álgebra de las constricciones de la teoría así como el efecto de ellas sobre el espacio fase. Por sencillez, sólo se consideran campos bosónicos y al final se comenta la extensión a otro tipo de interacciones.

2. La acción de Dirac-Born-Infeld

Consideremos una Dp-brana, denotada como Σ, de dimensión N inmersa en un espacio de fondo tipo Minkowski, cuya trayectoria conocida como volumen de mundo, m de dimensión $p+1$, es una superficie descrita por medio de la parametrización $x^\mu = X^\mu(\xi^a), (\mu = 0, 1, \ldots, N-1; a, b = 0, 1, ..., p)$. Supongamos que la acción que describe la dinámica de esta Dp-brana es la acción DBI,

$$S[X^\mu, A_a] = \alpha \int_m d^{p+1}\xi \, \sqrt{-\det(g_{ab} + F_{ab})} \qquad (1)$$

donde α es una constante que está relacionada con la tensión de la p-brana, $g_{ab} = \eta_{\mu\nu} X^\mu_{,a} X^\nu_{,b}$ es la métrica inducida sobre m, $F_{ab} = 2\partial_{[a} A_{b]}$ es el tensor de campo electromagnético asociado al campo de norma $U(1)$. El espacio de configuración $\mathcal{C}$ está dado por $\{X^\mu, A_a\}$. Solamente estamos considerando campos de norma A_a que viven en el volumen de mundo m. Por simplicidad en el cálculo en esta nota, introducimos la siguiente notación: $M_{ab} := g_{ab} + F_{ab}$ es una matriz compuesta, mientras que $(M^{-1})^{ab}$ denota su correspondiente matriz inversa y $M = \det(M_{ab})$.

3. Ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones de movimiento que surgen a partir de (1) pueden obtenerse a partir de un principio variacional y son [3, 5],

$$T^{ab} K^i_{ab} = 0, \qquad (2)$$

$$\nabla_a T^{ab} = 0, \qquad (3)$$

$$\nabla_a \mathcal{J}^{ab} = 0. \qquad (4)$$

donde ∇_a es la derivada covariante asociada a g_{ab}, $K^i_{ab} = -n^i \cdot \nabla_a X_b$ es la curvatura extrínseca de m, T^{ab} es el tensor de energía-momento asociado a m y $\mathcal{J}^{ab}$ es una bicorriente, definidos de la siguiente manera

$$T^{ab} = \alpha \frac{\sqrt{-M}}{\sqrt{-g}} (M^{-1})^{(ab)}, \qquad (5)$$

$$\mathcal{J}^{ab} = \alpha \frac{\sqrt{-M}}{\sqrt{-g}} (M^{-1})^{[ab]}. \qquad (6)$$

Mediante $(M^{-1})^{(ab)}$ denotamos a la parte simétrica de la matriz inversa $(M^{-1})^{ab}$ y $(M^{-1})^{[ab]}$ su correspondiente parte antisimétrica. Tenemos un conjunto de $N-p-1$ ecuaciones de movimiento independientes de segundo orden en las coordenadas X.

A partir de (3) y (4), se nota que tenemos aunado a las ecuaciones de movimiento anteriores, la conservación de los tensores T^{ab} y $\mathcal{J}^{ab}$, lo cual está relacionado con la invariancia bajo reparametrización del volumen mundo. De hecho la ecuación (4) conduce a las ecuaciones de Maxwell homogéneas e inhomogéneas que viven sobre el volumen de mundo [6].

4. Formulación hamiltoniana

Tomando como base la formulación ADM de la relatividad general [7,8], consideremos que m es generado por la evolución de Σ en un parámetro t, fijo. Para hacer el análisis hamiltoniano de la acción (1) la idea es descomponer la matriz compuesta $M_{ab} := g_{ab} + F_{ab}$ en sus componentes *espacial* y *temporal*. El espacio fase es $\Gamma = \{X, P; A, \pi\}$, donde P_μ son los momentos conjugados a X^μ y π^A son los momentos conjugados a A_a.

Los momentos conjugados al espacio de configuración $\mathcal{C}$ están dados por las siguientes expresiones [6],

$$P_\mu = \frac{\alpha(-\mathcal{M})}{\sqrt{-g}}\{\dot{X}_\mu - [(M^{-1})^{(AB)}N_A + (M^{-1})^{[AB]}F_A]X_{\mu B}\}, \tag{7}$$

$$\pi^A = \frac{\alpha(-\mathcal{M})}{\sqrt{-g}}[(M^{-1})^{[BA]}N_B + (M^{-1})^{(BA)}F_B], \tag{8}$$

$$\pi^0 = 0, \tag{9}$$

donde $\mathcal{M}$ es el determinante de la matriz

$$M_{AB} = h_{AB} + F_{AB} = X^a_A X^b_B(g_{ab} + F_{ab}),$$

$\dot{X}^\mu = N\eta^\mu + N^A X^\mu_A$, $\dot{X}^\mu$ es un vector de flujo temporal $(A, B = 1, 2, \ldots, p)$, N es la función de lapso y N^A es el vector de corrimiento de manera similar a la que ocurre en relatividad general. El significado geométrico del momento P es que es tangencial a m. El origen de (9) se debe a que no existe ningún término correspondiente a una derivada temporal de A_0 en la acción. Además, la densidad hamiltoniana canónica a partir de la transformación de Legendre es,

$$\mathcal{H}_0 = P_\mu \dot{X}^\mu + \Pi^a A_a - \mathcal{L}, \tag{10}$$

la cual se anula debido a que la acción (1) es invariante bajo reparametrizaciones del volumen de mundo.

4.1. Constricciones

A partir de la definición de los momentos (7), (8), (9) y algunas identidades básicas de la teoría de BI [i] se encuentran las constricciones de la teoría en Γ

$$\mathcal{C}_0 = \eta^{\mu\nu}P_\mu P_\nu + \pi^A\pi^B h_{AB} + \alpha^2\mathcal{M} = 0, \tag{11}$$

$$\mathcal{C}_A = P_\mu X^\mu_A + \pi^B F_{AB} = 0, \tag{12}$$

$$\mathcal{C}_0 = \pi^0 = 0. \tag{13}$$

Es conveniente convertir a estas constricciones primarias en funcionales del espacio fase por medio de multiplicadores de Lagrange λ, λ^A y Λ,

$$\mathcal{S}_\lambda = \int_\Sigma \lambda[\eta^{\mu\nu}P_\mu P_\nu + \pi^A\pi^B h_{AB} + \alpha^2\mathcal{M}], \tag{14}$$

$$\mathcal{V}_{\vec{\lambda}} = \int_\Sigma \lambda^A[P_\mu X^\mu_A + \pi^B F_{AB}], \tag{15}$$

$$\mathcal{O}_\Lambda = \int_\Sigma \Lambda\pi^0. \tag{16}$$

Nótese que λ es un multiplicador de Lagrange de peso -1.

El hamiltoniano que genera la evolución temporal en Γ es

$$H = \mathcal{S}_\lambda + \mathcal{V}_{\vec{\lambda}} + \mathcal{O}_\Lambda. \tag{17}$$

Para dos funcionales en el espacio fase, F y G, el paréntesis de Poisson entre ellas se define como

$$\{F, G\} = \int_\Sigma \frac{\delta F}{\delta X^\mu}\frac{\delta G}{\delta P_\mu} + \frac{\delta F}{\delta A_C}\frac{\delta G}{\delta \pi^C} - (F \leftrightarrow G).$$

La evolución de las constricciones primarias en el tiempo únicamente genera la constricción secundaria

$$\Upsilon = \mathcal{D}_A\,\pi^A, \tag{18}$$

que es la conocida ley de Gauss. No hay más constricciones en la teoría conocida, la constricción (11) genera difeomorfismos fuera de Σ, (12) genera difeomorfismos tangenciales a Σ y (13) además de (18) corresponden a las simetrías de $U(1)$. De manera similar, multiplicamos la ley de Gauss por un multiplicador de Lagrange, ϕ, para obtener la funcional del espacio fase,

$$\mathcal{G}_\phi = \int_\Sigma \phi\mathcal{D}_A\,\pi^A. \tag{19}$$

En el caso de DBI el conteo de grados de libertad es como sigue: $(1/2)[2(N+p+1)-2(p+3)] = N-2$, correspondiendo $N+p+1$ al número total de variables canónicas y $p+3$ al número de constricciones de primera clase que coincide con lo establecido [12].

El álgebra de constricciones de la teoría es la siguiente:

$$\{\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}, \mathcal{V}_{\vec{\lambda}'}\} = \mathcal{V}_{[\vec{\lambda},\vec{\lambda}']} + \mathcal{G}_{\lambda^*}, \tag{20}$$

$$\{\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}, \mathcal{S}_\lambda\} = -\mathcal{S}_{\mathcal{L}_{\vec{\lambda}}\lambda} - \mathcal{G}_\Lambda, \tag{21}$$

$$\{\mathcal{S}_\lambda, \mathcal{S}_{\lambda'}\} = -\mathcal{V}_{\vec{\Lambda}}. \tag{22}$$

donde,

$$\lambda^* = \lambda^A\lambda'^B F_{AB}, \tag{23}$$

$$\Lambda = 2\lambda\pi^A h_{AB}\lambda^B, \tag{24}$$

$$\Lambda^A = 4[\pi^A\pi^B + \alpha^2 M(M^{-1})^{(AB)}](\lambda\mathcal{D}_B\lambda' - \lambda'\mathcal{D}_B\lambda), \tag{25}$$

donde la derivada de Lie de una cantidad de peso $+1$, λ a lo largo de $\vec{\lambda}$ es $\mathcal{L}_{\vec{\lambda}}\lambda = \lambda^A \mathcal{D}_A \lambda - \lambda \mathcal{D}_A \lambda^A$.

Nótese que no tenemos un álgebra de Lie genuina debido a la presencia de funciones de estructura. Dichos resultados se han reportado en las Refs. 6, 9 y 10 por medio de otra técnica de cálculo. Las constricciones son de *primera clase*, en el lenguaje de sistemas constreñidos [11].

El hamiltoniano total de primera clase que genera la evolución temporal total es

$$H = \mathcal{S}_\lambda + \mathcal{V}_{\vec{\lambda}} + \mathcal{O}_\Lambda + \mathcal{G}_\phi. \tag{26}$$

Este hamiltoniano genera las ecuaciones de movimiento correctas.

4.2. Efecto sobre el espacio fase

El efecto sobre las variables del espacio fase que realizan las constricciones es el siguiente

$$\{\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}, X^\mu\} = \mathcal{L}_{\vec{\lambda}} X^\mu, \tag{27}$$

$$\{\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}, F_{AB}\} = \mathcal{L}_{\vec{\lambda}} F_{AB}, \tag{28}$$

$$\{\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}, P_\mu\} = \mathcal{L}_{\vec{\lambda}} P_\mu, \tag{29}$$

$$\{\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}, \pi^A\} = \mathcal{L}_{\vec{\lambda}} \pi^A - \lambda^A \partial_B \pi^B, \tag{30}$$

$$\{\mathcal{S}_\lambda, X^\mu\} = 2\lambda g^{\mu\nu} P_\nu, \tag{31}$$

$$\begin{aligned}\{\mathcal{S}_\lambda, P_\mu\} &= \mathcal{D}_A[2\lambda \pi^A \pi^B X_{\mu B}] \\ &\quad + \mathcal{D}_A[2\alpha^2 \lambda M (M^{-1})^{(AB)} X_{\mu B}],\end{aligned} \tag{32}$$

$$\{\mathcal{S}_\lambda, A_A\} = 2\lambda \pi^B h_{AB}, \tag{33}$$

$$\{\mathcal{S}_\lambda, \pi^A\} = \mathcal{D}_B[2\alpha^2 \lambda (M^{-1})^{[AB]}]. \tag{34}$$

Se puede notar que la constricción $\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}$ genera la invariancia bajo reparametrizaciones en Σ.

5. Campo de norma Kalb-Ramond

Consideremos ahora la acción DBI pero con la contribución del campo de norma Kalb-Ramond, $B_{\mu\nu}$ que tiene la propiedad de ser antisimétrico. Podemos expresar la acción (1) de la siguiente manera,

$$S[X^\mu, A_a] = \alpha \int_m d^{p+1}\xi \, \sqrt{-\det(g_{ab} + \mathcal{F}_{ab})}, \tag{35}$$

donde $\mathcal{F}_{ab} := F_{ab} + B_{ab}$ y $B_{ab} = B_{\mu\nu} X^\mu_a \wedge X^\nu_b$. De igual manera que el caso anterior, al aplicar un principio variacional las ecuaciones de movimiento obtenidas a partir de (35) tienen la misma estructura que (3), (2) y (4) excepto que ahora cambian la forma de T^{ab} y $\mathcal{J}^{ab}$.

Nuevamente, por simplicidad introducimos la siguiente notación: $\mathbb{M}_{ab} = g_{ab} + \mathcal{F}_{ab}$ que es la matriz compuesta ahora y $\mathbb{M} = \det(\mathbb{M}_{ab})$ su determinante. En este caso las definiciones de los tensores de energía-momento T^{ab} y bicorriente $\mathcal{J}^{ab}$ son las siguientes,

$$T^{ab} = \alpha \frac{\sqrt{-\mathbb{M}}}{\sqrt{-g}} (\mathbb{M}^{-1})^{(ab)}, \tag{36}$$

$$\mathcal{J}^{ab} = -\alpha \frac{\sqrt{-\mathbb{M}}}{\sqrt{-g}} (\mathbb{M}^{-1})^{[ab]}, \tag{37}$$

donde $(\mathbb{M}^{-1})^{(ab)}$ es la parte simétrica de la matriz inversa de $\mathbb{M}_{ab}$ y $(\mathbb{M}^{-1})^{[ab]}$ su parte antisimétrica.

6. Conclusiones

En este trabajo se desarrolló el formalismo hamiltoniano para la acción DBI de una manera geométrica sin la ayuda de campos auxiliares como ocurre en otras aproximaciones [12] y en donde el análisis se vuelve complicado. No sólo se obtuvieron las ecuaciones de movimiento para la Dp-brana con una estructura elegante sino que tambien se pueden identificar un par de cantidades conservadas que son el tensor energía-momento y la bicorriente. Nuestra ventaja reside en el uso de técnicas geométricas modernas las cuales simplifican el análisis. Se puede aplicar esta misma técnica para acciones que describen objetos cosmológicos descritos por un campo escalar y cuya acción sea del tipo DBI, además de incluir campos del tipo Kalb-Ramond y se obtienen resultados similares. Las ecuaciones de movimiento tienen la misma forma pero la definición del tensor energía - momento y bicorriente es distinta, es decir, la información de la contribución del nuevo campo está inmersa en la definición de dichos tensores y de la nueva matriz compuesta $\mathbb{M}_{ab}$.

Agradecimientos

El autor agradece a E. Rojas por dedicar parte de su tiempo en la realización de este trabajo. Este trabajo fue apoyado mediante el proyecto CO1-41639 CONACyT

i Estas son unas identidades útiles de la matriz M_{AB} que involucran el tensor de campo electromagnético F_{AB} y la métrica h_{AB},
$(M^{-1})^{(AC)} h_{CB} + \alpha (M^{-1})^{[AC]} F_{CB} = \delta^A_B$
$(M^{-1})^{[AC]} h_{CB} + \alpha (M^{-1})^{(AC)} F_{CB} = 0$.

1. C.V. Johnson, *D-Branes.* (Cambridge University Press, 2003).
2. J. Polchinski, *String Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1998).
3. R. Cordero y E. Rojas, *Gen. Relat. Grav.* **37** (2005) 659.
4. U. Lindstrom, *Int. J. Mod. Phys. A* **3** (1988) 2401.
5. R. Capovilla y J. Guven. *Phys. Rev. D* **21** (1995) 6736.

6. R. Cordero, A. Molgado y E. Rojas enviado para su publicación a JHEP (2006).
7. R. Arnowitt, S. Deser y C.W. Misner *Gravitation: an introduction to current research, Louis Witten ed.* (Wiley, New York, 1962).
8. R. Capovilla, J. Guven y E. Rojas. *Class. Quant. Grav.* **21** (2004) 5563.
9. U. Lindstrom y M. Zabzine, JHEP **03** (2001) 014.
10. U. Lindstrom y R. von Unge, *Phys. Lett. B* **403** (1997) 233.
11. P.A.M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics* (Belfer Graduate School of Science, New York, 1964).
12. Julian Lee, *Phys. Rev. D* **57** (1998) 5134.