REVISTA MEXICANA DE FÍSICA S **53** (4) 155–158 AGOSTO 2007

Fluctones en la teoría de Yang-Mills

R. Cartas-Fuentevilla and J.M. Solano-Altamirano
Instituto de Física, Universidad Autónoma de Puebla,
Apartado postal J-48 72570 Puebla, Pue., México,
e-mail: jmsolano@sirio.ifuap.buap.mx

Recibido el 1 de mayo de 2006; aceptado el 1 de noviembre de 2006

Se estudia la física de las fases topológicas de la teoría de Yang-Mills. Proponemos a los *fluctones* como perturbaciones topológicas del vacío de la teoría sin que estas sean necesariamente auto-duales. Se tienen a los instantones como caso particular cuando los fluctones cumplen la condición de auto-dualidad. Proponiendo un complejo elíptico apropiado e invocando el teorema de Atiyah-singer, se calcula el *espacio moduli* de los fluctones, el cual proporciona el número de grados de libertad de los fluctones. Como resultado, se infiere que las fases del sector topológico de la teoría no dependen necesariamente de la condición de autodualidad, sino simplemente de la naturaleza suave de los campos definidos sobre las variedades. Se consideran a las variedades S^4, CP^2 y $K3$ como ejemplos para el calculo de la dimensión del espacio moduli de fluctones.

Descriptores: Teoría clásica de campos; acción topológica; espacio moduli; teorema de índices de Atiyah-Singer; instantones; fluctones.

The topological phases of Yang-Mills theory are studied. The authors propose the *fluctons* as the topological fluctuations of vacuum, which are not necessarily self-dual. Instantons can be reached as a particular case of fluctons if they fulfill the self-duality condition. By proposing an appropriate elliptic complex and invoking the Atiyah-Singer index theorem, the dimension of the moduli space of the fluctons is calculated. This dimension provides the number of degrees of freedom of the fluctons. The topological phases of the Yang-Mills theory are independent of the self-duality condition, but they depend on the smoothness of the fields that are defined over manifolds. As examples, S^4, CP^2 and $K3$ manifolds are considered to calculate the dimension of the moduli space of fluctons.

Keywords: Classical field theory; topological action; moduli space; Atiyah-Singer index theorem; instantons; fluctons.

PACS: 11.10.-z; 11.15.-q; 03.65.Vf; 03.50.-z

1. Introducción

Desde el descubrimiento de los instantones, a mediados de los setentas [1], estos han jugado un papel relevante en el estudio de las teorías de norma no abelianas. Entre muchos de los lugares donde se han utilizado, destancan los siguientes: el estudio de la estructura del vacío de la teoría, y como consecuencia de esta estructura, algunos aspectos fundamentales como la violación fuerte de CP [2, 3], el problema de $U(1)$ en QCD [4, 5], etc.; y desde luego, el uso de los instantones en la construcción de invariantes topológicos para clasificar variedades suaves de dimensión 4 [6].

En los casos anteriores, las propiedades de los instantones han sido atribuidas a la condición de autodualidad, a pesar de que tal condición impone restricciones fuertes sobre la naturaleza misma de la variedad. Por ejemplo, se requiere que la variedad de fondo sea en sí misma de carácter auto-dual, y que la parte anti-auto-dual del tensor de Weyl sea cero.

El orden de esta memoria es el siguiente. Comenzaremos con un breve repaso de lo conocido acerca de los instantones y el cálculo de la dimensión de su espacio moduli. Posteriormente haremos un estudio similar, pero considerando a los fluctones y también el cálculo de su espacio moduli. Continuaremos con algunas variedades de fondo como ejemplos y finalizaremos con algunas conclusiones.

2. Instantones

Es bien sabido que a partir de la acción de Yang-Mills [7]

$$S_{YM}(A) = -\int_M tr(F \wedge *F), \qquad (1)$$

utilizando el principio variacional, podemos obtener las ecuaciones de Yang-Mills

$$d_A^* F \equiv d^* F + A \wedge A = 0, \qquad (2)$$

donde A es la 1-forma de conexión, F es la 2-forma de curvatura ($F(A) = d_A A$), d_A es la diferencial exterior covariante, $\wedge$ es el producto exterior de formas diferenciales y $*$ representa el operador de Hodge. Por otro lado, debido a que $F(A)$ es la diferencial exterior covariante de la conexión, se cumplen las identidades de Bianchi

$$d_A F = d_A d_A A = 0. \qquad (3)$$

Resulta que para variedades de dimensión 4, con métrica Euclidiana y sobre 2-formas, el operador de Hodge cumple la relación $*^2 = 1$, por lo que la curvatura cumple la condición de (anti-)auto-dualidad ($^*F = -F$) $^*F = +F$. De la cual se puede inferir que las identidades de Bianchi implican las ecuaciones de Yang-Mills, y la acción se transforma en una de carácter topológico

$$S_{YMT}(A) = -\int_M tr(F \wedge F). \qquad (4)$$

Tanto las Ecs. (2) como las (3) son ecuaciones diferenciales de segundo orden no lineales, lo que hace muy difícil encontrar soluciones explícitas. De esta manera, se ha preferido utilizar la condición de autodualidad con el fin de reducirlas a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden no lineales.

Si se toma en cuenta la invariancia de norma de la teoría, las ecuaciones de Yang-Mills por sí mismas no forman un sistema de ecuaciones elíptico. Por ejemplo, si A es una solución suave de $d_A^* d_A A \equiv d_A^* F = 0$, entonces $A_g = g^{-1} A g + g^{-1} dg$ es también una solución a la ecuación anterior, pero no es necesariamente suave si g no es suficientemente suave. Para obtener un sistema elíptico, se fija la norma. Este hecho puede ser logrado mediante la restricción

$$d_A^* a = 0, \tag{5}$$

donde a representa una deformación al campo original A, siendo $A + a$ el campo perturbado.

Las Ecs. (2), junto con la restricción (5), forman un conjunto de ecuaciones elíptico. Notemos que hasta este punto, no necesitamos la condición de autodualidad.

Definiendo ahora los operadores π^+ (π^-), los cuales proyectan la parte auto-dual (anti-auto-dual) de cualquier 2-forma, podemos formar el siguiente complejo elíptico (C_e)

$$0 \longrightarrow \Lambda^0(M) \xrightarrow{d_A} \Lambda^1(M) \xrightarrow{d_A^-} \Lambda^2_-(M) \xrightarrow{\pi_+} 0, \tag{6}$$

donde $\Lambda^0(M)$ ($\Lambda^1(M)$) corresponde al espacio de las 0-formas (1-formas), $\Lambda^2_-(M)$ al espacio de las 2-formas autoduales, y $d_A^- \equiv \pi^- \circ d_A$.

Los grupos de cohomología del complejo son:

$$H^0(C_e) = ker d_A^{(0)},$$

$$H^1(C_e) = \frac{ker d_A^-}{Im d_A^{(0)}},$$

$$H^2(C_e) = \frac{ker \pi_+}{Im d_A}. \tag{7}$$

El índice analítico del complejo (I), se define de la siguiente manera

$$I \equiv \sum_p (-1)^p h_p, \tag{8}$$

siendo h_i el i-ésimo número de Betti, $h_i \equiv \dim H^i$.

El primer numero de Betti corresponde precisamente a la dimensión del espacio moduli de los instantones

$$h_1 = \dim \mathcal{M}_k, \tag{9}$$

donde $\mathcal{M}_k$ denota al espacio moduli, y la cual nos proporciona el número de grados de libertad de los instantones, y físicamente corresponde a las soluciones suaves, auto-duales e inequivalentes de norma de la teoría.

Por otro lado, el teorema de Atiyah-Singer nos dice *grosso modo* que el índice analítico del complejo es igual al índice topológico del mismo, es decir

$$I = \int_M ch\left(\sum_{i=0}^{4} \oplus (-1)^i E_i\right) \frac{\mathrm{Td}\left(\tau(M)^{\mathbb{C}}\right)}{e\big(\tau(M)\big)}, \tag{10}$$

para una variedad de dimensión 4 y donde sólo las 4-formas son retenidas en el integrando;

$$ch\left(\sum_{i=0}^{4} \oplus (-1)^i E_i\right)$$

es el caracter de Chern, $Td\left(\tau(M)^{\mathbb{C}}\right)$ es la clase de Todd y $e\big(\tau(M)\big)$ es la clase de Euler.

Después de hacer el cálculo del índice topológico se llega a que

$$I = -p_1(Pad_{\mathbb{C}}) + \frac{\dim G}{2}\Big(\chi(M) - \tau(M)\Big), \tag{11}$$

donde $p_1(ad_{\mathbb{C}})$ es la primera clase de Pontrjagin con respecto al haz principal adjunto complejificado ($ad_{\mathbb{C}}$), G es el grupo de simetría que actúa sobre los haces, $\tau(M)$ es la signatura topológica de M y $\chi(M)$ es la característica de Euler.

Juntando las Ecs. (8) y (9) y considerando que $h_0 = 0 = h_2$ [7], tenemos la expresión final

$$\dim \mathcal{M}_k = p_1(Pad_{\mathbb{C}}) - \frac{\dim G}{2}\Big(\chi(M) - \tau(M)\Big). \tag{12}$$

donde k indica el segundo número de Chern y caracteriza las clases de equivalencia de los instantones.

Es muy importante notar que para que $h_2 = 0$ se requiere un teorema de desvanecencia, el cual a su vez, requiere que M sea una variedad autodual con curvatura escalar positiva y que la parte anti-auto-dual del tensor de Weyl sea cero.

Para el caso de instantones $SU(2)$ sobre una variedad S^4 ó CP^2, la ecuación (12) se reduce a la bien conocida expresión

$$\dim \mathcal{M}_k = 8k - 3. \tag{13}$$

3. Fluctones

La idea principal que motivó el estudio de los fluctones es la siguiente: cuando se impone la condición de autodualidad sobre la curvatura de Yang-Mills, la acción (1) se *tuerce* hasta alcanzar un carácter topológico. Luego, nosotros pretendemos partir directamente de la acción topológica

$$S_{YMT}(A) \equiv \frac{1}{8\pi^2} \int\limits_M tr(F \wedge F), \tag{14}$$

donde $1/8\pi^2$ es un factor de normalización; sin requerir condición de auto-dualidad y analizar las pseudo-partículas que pueden *vivir* en esta fase de la teoría.

Desde esta perspectiva, podemos comenzar utilizando el principio variacional sobre la acción (14), obteniendo de este proceso las identidades de Bianchi, las cuales son satisfechas por cualquier curvatura que sea la diferencial exterior covariante de una conexión. Si bien esto puede parecer poco atractivo a primera vista, continuaremos con el desarrollo del análisis de estos campos de carácter topológico.

De manera análoga a los instantones, requerimos la condición (5) para asegurarnos que solamente sean tomados en cuenta los campos inequivalentes de norma y que sean suaves. Con esto en mente, proponemos que el complejo elíptico de los fluctones sea

$$0 \longrightarrow \Lambda^0(M) \xrightarrow{d_A} \Lambda^1(M) \xrightarrow{d_A^*} 0. \tag{15}$$

Definimos los grupos de cohomología

$$H^0 = \ker d_A, \qquad H^1 = \frac{\ker d_A^*}{\mathrm{Im} d_A}, \tag{16}$$

con sus correspondientes números de Betti $h_i \equiv \dim H^i$. Por lo que el índice analítico del complejo es

$$h_0 - h_1, \tag{17}$$

siendo h_0 exactamente el mismo que en el caso de los instantones y por lo tanto igual a cero, ya que este corresponde al espacio de secciones [7]. En este caso h_1 corresponde a la dimensión del espacio moduli de los fluctones $\dim \mathcal{N}_k$, donde k es nuevamente el segundo número de Chern y en este caso caracteriza a las clases de equivalencia de los fluctones.

Invocando ahora el teorema de Atiyah-Singer y considerando $h_0 = 0$, obetenemos la expresión

$$h_1 = \dim \mathcal{N}_k = -\int_M ch\left(\sum_{i=0}^{4} \oplus (-1)^i E_i\right) \times \frac{\mathrm{Td}\left(\tau(M)^{\mathbb{C}}\right)}{e\big(\tau(M)\big)}, \tag{18}$$

Realizando el cálculo, llegamos a la expresión

$$\dim \mathcal{N}_k = p_1(Pad_{\mathbb{C}}) - \frac{\dim G}{2}(\chi(M) - b_2), \tag{19}$$

donde b_2 es el segundo número de Betti del complejo de de Rham, el cual puede expresarse en términos de la signatura topológica $\tau(M) = b_2^+ - b_2^-$, con el fin de poder hacer una comparación directa

$$\dim \mathcal{N}_k = p_1(Pad_{\mathbb{C}}) - \frac{\dim G}{2}\Big(\chi(M) - \tau(M)\Big) + b_2^- \dim G. \tag{20}$$

por lo que

$$\dim \mathcal{N}_k = \dim \mathcal{M}_k + b_2^- \dim G. \tag{21}$$

De esta expresión y del hecho de que $b_2^- \geq 0$, podemos deducir que, en general, el espacio de los instantones es un subconjunto del espacio de los fluctones.

Consideremos ahora algunos ejemplos, tomando en cuenta que en todos ellos se consideran haces $SU(2)$. Comenzamos con las variedades de fondo S^4 y CP^2; en ambos casos $b_2^- = 0$, por lo que la dimensión del espacio moduli se puede calcular mediante la Ec. (21) reduciéndose a

$$\dim \mathcal{N}_k = 8k - 3. \tag{22}$$

En estos casos, el espacio moduli de fluctones coincide con el de los instantones. Aún así, este hecho no deja de ser sorprendente, ya que en la construcción del espacio moduli de los fluctones no requerimos la condición de autodualidad y no obstante obtenemos el mismo número.

Sin embargo, analicemos el caso donde la variedad de fondo es una superficie de tipo $K3$. Para este caso, la expresión (12) no es válida ya que es vital que la parte anti-autodual del tensor de Weyl sea cero. Empero, esto no sucede así para las superficies $K3$ [8]. Luego, la única manera es utilizar directamente la expresión (20), obteniendo

$$\dim \mathcal{N}_k = 8k - 3. \tag{23}$$

Este resultado, además de la coincidencia con los resultados anteriores, tiene la cualidad de ser exclusiva de fluctones, ya que la dimensión del espacio moduli de los instantones sobre $K3$ no puede ser determinada ya que el tensor de Weyl de $K3$ no es puramente auto-dual.

4. Conclusiones

La condición de auto-dualidad impone severas restricciones sobre las variedades de fondo, por lo que en algunas variedades no puede calcularse la dimensión del espacio moduli de instantones. Sin embargo, es posible retirar la condición de autodualidad y determinar el espacio moduli de fluctones fijándose solamente en la naturaleza suave de los campos.

A primera vista, el número de grados de libertad para haces $SU(2)$ suaves es siempre $8k - 3$, no obstante, debemos tomar esto con cautela. Por otra parte, el hecho de que la dimensión del espacio moduli de los haces $SU(2)$ sea finita, no es consecuencia de la condición de autodualidad, sino del carácter suave de estos haces.

Finalmente, es posible que en el caso de gravedad topológica se pueda prescindir también de la condición de autodualidad. Pero esto se dejará para el futuro.

Agradecimientos

Este trabajo esta apoyado por el Sistema Nacional de Investigadores y CONACyT, México.

1. A. Belavin, A. Polyakov, A. Schwarz y S. Tyupkin, *Phys. Lett. B* **59** (1975) 85.
2. C. Callan, R. Dashen y D. Gross, *Phys. Lett. B* **63** (1976) 334.
3. R. Jackiw y C. Rebbi, *Phys. Rev. Lett.* **37** (1976) 172.
4. G. 't Hooft, *Phys. Rev. Lett.* **37** (1976) 8.
5. G. 't Hooft, *Phys. Rev. D* **14** (1976) 3432.
6. S. Donaldson y P. Kronheimer, *The geometry of four-manifolds* (Oxford University Press, 1990).
7. C. Nash, *Differential topology and quantum field theory* (London Academic, 1991).
8. T. Eguchi, P.B. Gilkey y A.J. Hanson, *Phys. Rep.* **66** (1980) 213.