

# Nota sobre la naturaleza del calor en la termodinámica relativista

A. Sandoval-Villalbaz

*Departamento de Física y Matemáticas, Universidad Iberoamericana,  
Prolongación Paseo de la Reforma 880, México D.F. 01210, México.*

L.S. García-Colín

*Departamento de Física, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa,  
Av. Purfísima y Michoacán S/N, México D.F. 09340, México.*

*Also at El Colegio Nacional, Luis González Obregón 23, Centro Histórico, México D. F. 06020, México.*

Recibido el 1 de mayo de 2006; aceptado el 1 de noviembre de 2006

Un argumento muy simple muestra que la inclusión del flujo de calor en el tensor ímpetu-energía relativista tiene limitaciones que provienen de la existencia de un término proporcional a la aceleración hidrodinámica. Más aún, su justificación a partir de la teoría cinética relativista limita su validez sólo al fluido ideal.

*Descriptores:* Relatividad general; teoría cinética; irreversibilidad.

It is shown by means of a simple argument that the introduction of the heat flux in the relativistic energy-momentum tensor yields certain limitations that can be traced back to the existence of a term proportional to the hydrodynamic acceleration. Moreover, this acceleration term can only be properly justified in the case of a simple ideal fluid.

*Keywords:* General relativity; kinetic theory; irreversibility.

PACS: 04.20.-q; 51.10.+y; 05.70.Ln

## 1. Introducción

La termodinámica relativista posee, en su versión comúnmente aceptada, rasgos que no aparecen en su contraparte no relativista. En este contexto, y de acuerdo a la teoría de Eckart, la aparición de un término proporcional a la aceleración hidrodinámica, acoplado a la conductividad térmica en la expresión correspondiente al flujo de calor, resulta de especial interés. En este trabajo se analizan críticamente las ideas que llevan al establecimiento de este término, tanto en el formalismo fenomenológico, como en la teoría cinética relativista.

## 2. Formalismo fenomenológico

El punto de partida usual en la termodinámica irreversible relativista es el tensor de esfuerzos:

$$T_{\beta}^{\alpha} = \frac{n\rho}{c^2} u^{\alpha} u_{\beta} + p h_{\beta}^{\alpha} + \Xi_{\beta}^{\alpha} \quad (1)$$

De acuerdo a la interpretación de Eckart [1], en esta ecuación  $\rho$  corresponde a la energía *total* por partícula (incluyendo la energía interna termodinámica),  $p$  es la presión del fluido,  $u^{\alpha}$  denota a la velocidad hidrodinámica,  $\Xi_{\beta}^{\alpha}$  da cuenta de las contribuciones disipativas,  $h_{\beta}^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha} + (1/c^2) u^{\alpha} u_{\beta}$  es el proyector espacial,  $u^{\alpha} u_{\alpha} = -c^2$  y  $n$  es el número de partículas por unidad de volumen. La conservación del número de partículas se expresa con la ecuación  $\dot{n} + n u_{;\alpha}^{\alpha} = \dot{n} + n\theta = 0$ . La ausencia de disipación en el eje del tiempo se garantiza con base en las condiciones  $u_{\alpha} h_{\beta}^{\alpha} = 0$ ,  $u_{\alpha} \Xi_{\beta}^{\alpha} = 0$ . También, en el esquema de Eckart,

$$\Xi_{\beta}^{\alpha} = \Pi_{\beta}^{\alpha} + \frac{1}{c^2} q^{\alpha} u_{\beta} + \frac{1}{c^2} u^{\alpha} q_{\beta}, \quad (2)$$

donde  $\Pi_{\beta}^{\alpha}$  es el tensor de Navier y  $q^{\alpha}$  es el flujo de calor. Un formalismo en el cual  $\rho$  corresponde a la energía mecánica, en contrapunto con la interpretación anterior, puede encontrarse en la referencia [2]. Un método experimental propuesto para determinar la validez de las dos diferentes interpretaciones para  $\rho$  en la Ec. (1) puede hallarse en la referencia [3]. El balance de energía interna,  $u^{\beta} T_{\beta;\alpha}^{\alpha} = 0$ , lleva a la expresión:

$$n\dot{\rho} + p\theta + q_{;\alpha}^{\alpha} + \frac{1}{c^2} \dot{u}_{\alpha} q^{\alpha} + u_{;\alpha}^{\beta} \Pi_{\beta}^{\alpha} = 0 \quad (3)$$

El cuarto término de la ecuación (3) no tiene contraparte no relativista y es donde aparece por primera vez la aceleración hidrodinámica. El establecimiento de la producción de entropía se realiza de la forma convencional [4]. El flujo de calor, al orden correspondiente a Navier-Stokes (NS) queda entonces determinado por la expresión

$$q^{\alpha} = -\lambda (h^{\alpha\beta} T_{;\beta} - \frac{T}{c^2} \dot{u}^{\alpha}) \quad (4)$$

donde el término  $(T/c^2)\dot{u}^{\alpha}$ , proviene de la identificación de  $\rho$  con la densidad de energía interna termodinámica,  $\lambda$  es la conductividad térmica. No existe contraparte no relativista de este término. Más aún, el hecho de que la aceleración del sistema no corresponde a una fuerza termodinámica, genera un mayor interés en la teoría cinética relativista correspondiente.

## 3. Formalismo basado en la teoría cinética

En la teoría cinética relativista [5] se parte de la ecuación de Boltzmann relativista, en ausencia de fuerzas externas

$$v^{\alpha} \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}} = C(f', f) \quad (5)$$

En la Ec. (5)  $f$  corresponde a la función de distribución usual,  $v^\alpha$  es la velocidad de una partícula y  $C(f', f)$  es el término colisional. Un tratamiento análogo a su contraparte no relativista permite establecer la ecuación de transporte genérica:

$$\frac{\partial \langle n v^\alpha \varphi \rangle}{\partial x^\alpha} = 0 \quad (6)$$

donde  $\varphi$  es un invariante colisional y el operador  $\langle \rangle$  denota el promedio sobre la función de distribución. Para  $\varphi = 1$ , la Ec. (6) corresponde a la conservación de partículas y para  $\varphi = v^\beta$  se tiene el balance de ímpetu-energía. El flujo de calor queda definido, a primer orden en los gradientes (régimen de NS), por la expresión

$$q^\alpha = h_\beta^\alpha u_\gamma T^{\beta\gamma} = h_\beta^\alpha u_\gamma \int v^\beta v^\gamma f^{(1)} \gamma^5 d^3v \quad (7)$$

donde  $f^{(1)}$  se obtiene por el método de Chapman y Enskog relativista [5]. La expresión final para el flujo de calor, en la representación  $T$  y  $p$ , es:

$$q^\alpha = -\lambda (h^{\alpha\beta} T_{,\beta} - \frac{T}{nH} h^{\alpha\beta} p_{,\beta}) \quad (8)$$

en donde  $T$  es la temperatura local y  $H$  es la entalpía específica. Obsérvese que la identificación de  $H$  con la entalpía específica local sólo puede darse si  $\rho$  en la Ec. (1) se asocia con la densidad de energía interna termodinámica.

#### 4. Discusión

Las ideas previamente presentadas muestran que la compatibilidad de las ecuaciones (4) y (8) depende de la asociación del término de gradiente de presión con la aceleración hidrodinámica. A orden NS, las Ecs. (3) y (8) son consistentes si y sólo si

$$\frac{nH}{c^2} \dot{u}^\alpha = p^{,\alpha} \quad (9)$$

pero esta relación sólo es válida para el fluido de Euler. Es decir, resulta necesario invocar al régimen no disipativo para justificar la asociación de la variable dinámica  $\dot{u}^\alpha$  con la fuerza termodinámica  $p^{,\alpha}$ . Esto es un razgo indeseable del formalismo de Eckart. Otros inconvenientes del mismo de han discutido *in-extenso* en la Ref. 2. Esto conduce a una motivación para, no sólo llevar a cabo una revisión de la metodología tradicionalmente empleada en la construcción del flujo de calor en la teoría cinética relativista, sino también una crítica seria a dicho formalismo. Trabajo futuro se desarrollará en esta dirección.

#### Agradecimientos

Los autores desean expresar su agradecimiento a la Dra. Ana Laura García-Perciente por sus valiosos comentarios durante la elaboración de este trabajo. Este trabajo fue parcialmente apoyado por CONACyT proyecto 41081-F.

---

1. C. Eckart, *Phys. Rev.* **58** (1940) 919.  
 2. L.S. García-Colín y A. Sandoval-Villalbaz, *J. Nonequilibrium Thermodynamics.* **31** (2006) 11.  
 3. A. Sandoval-Villalbaz y L.S. García-Colín, XXVIII Spanish Relativity Meeting proceedings, AIP Conference proceedings **841** (2006) 603.  
 4. S.R. de Groot y P. Mazur, *Non-equilibrium Thermodynamics* (Dover publications, Minneola, N.Y., 1984).  
 5. C. Cercignani and G.M. Kremer, *The relativistic Boltzmann equation: Theory and applications* (Birkhäuser Verlag, Nasel, 2002).