REVISTA MEXICANA DE FÍSICA S **53** (4) 102–105 AGOSTO 2007

Cosmología de Einstein−Rosen

L.A. López Suárez
Departamento de Física, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN,
Apartado Postal 14–740, 07000, México D.F.
e-mail: lalopez@fis.cinvestav.mx

Recibido el 1 de mayo de 2006; aceptado el 1 de noviembre de 2006

Se realiza el estudio de una solución de las ecuaciones acopladas de la teoría conocida como Einstein−Maxwell−Dilaton−Axion (EMDA) con el fin de obtener información sobre el acoplamiento de los campos escalares con el campo de norma $U(1)$. Para obtener una solución a las ecuaciones de EMDA se considera una métrica que admita dos vectores de Killing espaciales, posteriormente dicha métrica se transforma en una métrica de Einstein−Rosen, en la cual se puede interpretar el espacio−tiempo como: espacio cilíndrico, ondas planas o modelo cosmológico. Se estudia el modelo cosmológico en cuanto a su cinemática, posibles singularidades y el comportamiento asintótico de los campos y de la métrica, observando que la métrica, cerca de la singularidad tiene un comportamiento llamado término de velocidad asintóticamente dominante, AVDT (Asymptotically velocity-term dominated).

Descriptores: Cosmologías inhomogeneas; singularidades.

We carry out the study of a solution of the coupled equations of the theory known as Einstein-Maxwell-Dilaton-Axion (EMDA) with the purpose of obtaining information of the coupling of the scalar fields with the U(1)gauge fields. To obtain a solution of the equations of EMDA we consider a metric that possesses two space-like Killing vectors, later the metric is transformed into an Einstein-Rosen metric where can interpret the space-time as either: a cylindrical space, a plane wave space, or a cosmological model. The cosmological model is studied in its kinematics, possible singularities, and the asymptotic behavior of the fields and the metric. We observe that the metric near the singularity has a behavior of the type "asymptotically velocity-term dominated'" (AVDT).

Keywords: Inhomogeneous cosmologies; singularities.

PACS: 98.88.-k; 02.40.Xx; 11.25.-w

1. Introducción

A bajas energías en la teoría de cuerdas, al realizar la compactación de dimensiones de una cuerda heterótica correspondiente a la clasificación Ramond−Ramond del caso bosónico, se hacen presentes grados de libertad, los cuales son los campos escalares Dilaton (ϕ) y Axion (κ) acoplados son los campos electromagnético (A_μ) y gravitacional ($g_{\mu\nu}$). Estos constituyen la teoría conocida como *Einstein−Maxwell −Dilaton−Axion* (EMDA), obteniendo así la acción efectiva cuatro dimensional, después de compactar seis de las diez dimensiones correspondientes a la cuerda heterótica [1].

$$S[\phi,\kappa,g_{\mu\nu},A_\mu] = \int d^4x\sqrt{-g}\left\{\begin{array}{l} R-2(\partial\phi)^2-\frac{e^{\phi}(\partial\kappa)^2}{2} \\ -e^{-2\phi}F^2-\kappa F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu}\end{array}\right\}, \qquad (1)$$

donde R es el escalar de curvatura de Riemann, $F_{\mu\nu}$ el tensor antisimétrico de Maxwell y $\widetilde{F}_{\mu\nu}$ su dual. El marco de cuerdas y de Einstein están relacionados, por medio de la transformación conforme $g_{\mu\nu(s)} = e^{-\phi}g_{\mu\nu(E)}$ donde s indica el marco de cuerdas y E el marco de Einstein. Por lo que la acción (1) se encuentra ya transformada.

Un sutil punto en este tratamiento es que se está extrapolando el comportamiento asintótico de soluciones válidas en un régimen de acoplamiento débil a regiones cercanas a la singularidad del Big-Bang, o sea a un régimen de acoplamiento fuerte en el cual se esperaría que las correcciones de más alto orden a la teoría perturbativa, como los efectos de las cuerdas no perturvativas, deberían ser importantes, por lo tanto en este régimen el comportamiento cualitativo de éstas soluciones se pueden desviar de aquel derivado para las soluciones de una teoría de cuerdas completa.

Sin embargo hay razones para creer que G_2 soluciones deberían proveer una descripción genérica de modelos cosmológicos en la vecindad de la singularidad.

Una forma de obtener una solución a las ecuaciones de campo que se obtienen de la variación de la acción, es por medio de proponer una métrica que rompa la homogeneidad del espacio en una dirección, es decir que admita dos vectores de Killing espacialoides ∂_τ y ∂_σ, de la forma.

$$ds^2 = \frac{\Delta}{X}dx^2 - \frac{\Delta}{Y}dy^2 + \frac{X}{\Delta}(d\tau+Nd\sigma)^2 + \frac{Y}{\Delta}(d\tau+Md\sigma)^2, \qquad (2)$$

donde se propone la siguiente estructura para las funciones métricas:

$$X = \epsilon x^2+2nx+\alpha, \qquad Y = \epsilon y^2+2my-\alpha, \qquad (3)$$

$$M = \nu x^2+2bx, \qquad N = -\nu y^2+2\beta y, \qquad (4)$$

$$\epsilon = 1,0,-1, \qquad \nu = 1,0,-1 \qquad \Delta = M-N. \qquad (5)$$

Siendo $n,\ m,\ b,\ \ \beta,\ \ \alpha$ constantes. Una solución a las ecuaciones EMDA está dada por los siguientes campos dila-

TABLA I. Transformaciones correspondientes a $(x,y)\rightarrow(z,t)$ para pasar del elemento de línea (2), a una métrica de Einstein–Rosen (10)

ϵ	x	y	Condiciones
1	$\sqrt{\alpha-n^2}\sinh z-n$	$\sqrt{\alpha+m^2}\cosh t-m$	$\alpha-n^2>0 \quad \alpha+m^2>0$
1	$\frac{\exp z}{2}-n$	$\frac{\exp t}{2}-m$	$\alpha=n^2=-m^2=0$
-1	$\sqrt{\alpha+n^2}\sin z+n$	$\sqrt{m^2-\alpha}\sin t+m$	$\alpha+n^2>0 \quad m^2-\alpha>0$
1	$\frac{\exp z}{2}-n$	$\sqrt{\alpha+m^2}\cosh t-m$	$\alpha=n^2$
1	$\sqrt{n^2+m^2}\cosh z-n$	$\frac{\exp t}{2}-m$	$\alpha=-m^2$
0	$\frac{z^2n^2-\alpha}{2n}$	$\frac{t^2+\alpha}{2m}$	–

TABLA II. Clasificación de los distintos tipos de espacios

ϵ	$\tilde{G}_a\tilde{G}^a$	
1	$\frac{-(\alpha-n^2)(\alpha+m^2)}{2\Delta}(\cosh 2t+\cosh 2z)$	Cosmología
1	0	Ondas Planas
-1	$\frac{(\alpha+n^2)(m^2-\alpha)}{2\Delta}(\cos 2t-\cos 2z)$	Cosmología
1	$-\frac{(n^2+m^2)}{4\Delta}e^{2z}$	Cosmología
1	$\frac{(n^2+m^2)}{4\Delta}e^{2t}$	Cilíndrico
0	$\frac{t^2-z^2}{\Delta}$	Cosmología

tónico, axiónico y electromagnético, respectivamente [2],

$$e^{2\phi(x,y)}=\frac{\omega(x^2+y^2)}{\Delta}, \quad \kappa(x,y)=\frac{2(by+\beta x)}{\omega(x^2+y^2)}+\kappa_0, \quad (6)$$

$$A_\tau(x,y)=-\frac{q_0y-g_0x}{\Delta}, \quad A_\sigma(x,y)=\frac{\nu xy(q_0x+g_0y)}{\Delta}, \quad (7)$$

donde κ_0 y ω son parámetros de axion y dilaton mientras que g_0 y q_0 están relacionados con el campo electromagnético. Las ecuaciones están restringidas a satisfacer las siguientes condiciones algebraicas,

$$\nu^2q_0^2=2\omega\beta(m\nu+\beta\epsilon), \qquad g_0\beta-q_0b=0, \quad (8)$$

$$\nu^2g_0^2=2\omega b(-n\nu+b\epsilon), \qquad n\beta+mb=0. \quad (9)$$

2. Espacio Tiempo de Einstein–Rosen

El elemento de linea (2) puede ser transformado en un elemento de línea característico de un espacio–tiempo de Einstein–Rosen de la forma.

$$ds^2=\exp(f)(dz^2-d\xi^2)+\gamma_{ab}dx^ady^b. \quad (10)$$

Las funciones f, γ_{ab} dependen del tiempo (coordenada ξ) y de la coordenada espacial z. En nuestro caso (2) como espacio de Einstein–Rosen, toma la forma explícita:

$$ds^2=\Delta(dz^2-dt^2)$$
$$+\frac{G}{\Delta}\{\chi(dx+Ndy)^2+\chi^{-1}(dx+Mdy)^2\}, \quad (11)$$

donde $\chi=\sqrt{X/Y}$ y $G=\sqrt{XY}$. Ésta se obtiene por medio de renombrar las variables $\tau\rightarrow x$, $\sigma\rightarrow y$ y de las transformaciones $(x,y)\rightarrow(z,t)$, que dependen de los valores n, m, ϵ y ν. Algunas de las posibles transformaciones de las coordenadas $(x,y)\rightarrow(z,t)$, se presentan en la Tabla I.

Una cantidad importante en este espacio–tiempo de Einstein–Rosen es el área de la superficie de transitividad, dada por,

$$\tilde{G}=\sqrt{\det\gamma_{ab}}. \quad (12)$$

La cual al obtener su gradiente $\tilde{G}_\mu$, es posible determinar el comportamiento local del espacio–tiempo; es decir si $\tilde{G}_\mu$ es espacialoide ($\tilde{G}_\mu\tilde{G}^\mu>0$) decimos que el espacio–tiempo es cilíndrico, si es nulo corresponde a ondas planas y finalmente si es temporaloide ($\tilde{G}_\mu\tilde{G}^\mu<0$) o varía de punto a punto, puede ser usado para describir modelos cosmológicos u ondas gravitacionales colisionantes.

Para las transformaciones obtenidas en la Tabla I, es posible realizar la siguiente clasificación para el espacio–tiempo (11).

3. Caracterización de un Espacio–Tiempo

Las propiedades cinemáticas de un espacio–tiempo, son obtenidas por medio de la descomposición de la derivada covariante de un campo vectorial tangente a las líneas geodésicas de dicho espacio, su descomposición es [3]:

$$u_{a;b}=-\dot{u}_au_b+w_{ab}+\sigma_{ab}+\frac{\Theta h_{ab}}{3}, \quad (13)$$

donde se toma a,

$$\dot{u}_a:=u_{a;b}u^b=du_a/d\tau,; \qquad \dot{u}_au^a=0, \quad (14)$$

$$w_{ab} := u_{[a;b]} + \dot{u}_{[a}\,u_{b]}; \qquad w_{ab}u^b = 0, \tag{15}$$

$$\sigma_{ab} := u_{(a;b)} + \dot{u}_{(a}\,u_{b)} - \frac{\Theta h_{ab}}{3}; \qquad \sigma_{ab}u^b = 0, \tag{16}$$

$$h_{ab} := g_{ab} + u_a u_b, \tag{17}$$

$$\Theta := u^a{}_{;a}. \tag{18}$$

Donde $\dot{u}_a$, Θ, w_{ab} y σ_{ab} son llamadas aceleración, expansión, rotación y distorsión (shear) respectivamente. Con ayuda de estas cantidades, podemos obtener el parámetro de desaceleración:

$$q := -\frac{3}{\Theta^2}(\nabla_a\Theta)u^a - 1, \tag{19}$$

que se lee de la forma siguiente, si q es positivo el espacio se expande desaceleradamente y si q es negativo se expande aceleradamente.

El estudio del parámetro $\sigma = \sigma_{ab}\sigma^{ab}$ proporciona la información sobre el comportamiento isotrópico del espacio. Es decir si σ tiende a cero respecto al parámetro temporal, se dice que el espacio tiende a comportarse isotrópicamente.

Además en un espacio$-$tiempo, trayectorias paralelas vecinas pueden enfocarse hacia un punto del espacio$-$tiempo, indicando esto una posible singularidad, la cual puede ser encontrada por medio de la ecuación de Raychaudhuri [4]:

$$\dot{\Theta} = -R_{ab}u^a u^b + \dot{u}^a_{;a} + w_{ab}w^{ab} - \sigma_{ab}\sigma^{ab} - \frac{\Theta^2}{3}, \tag{20}$$

que es obtenida de la identidad de Ricci, donde $\dot{\Theta}$ es la derivada con respecto a un parámetro τ que es el parámetro que define a la geodésica $X(\tau)$, la cual es tangente al campo vectorial u^a.

La información acerca del enfoque de geodésicas vecinas se puede leer de la ecuación de Raychaudhuri (20) de la forma siguiente: Si $\dot{\Theta} < 0$ entonces las geodésicas se enfocan o tienden a converger en algún punto del pasado o del futuro y si $\dot{\Theta} > 0$, se separan.

4. Cosmología de Einstein$-$Rosen

Nos enfocaremos al estudio del primer espacio cosmológico que se muestra en la Tabla II. Considerando el campo vectorial:

$$u^a = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\delta^a_t, \qquad u_a = -\sqrt{\Delta}\delta^t_a, \tag{21}$$

obtenemos el siguiente comportamiento del modelo cosmológico, con ayuda de los parámetros cinemáticos.

Las componentes del elemento de línea (11) toman la forma característica:

$$X = (\alpha - n^2)\cosh^2 z, \quad Y = (\alpha + m^2)\sinh^2 t, \tag{22}$$

$$M = \nu(\sqrt{\alpha - n^2}\sinh z - n)^2 + 2b(\sqrt{\alpha - n^2}\sinh z - n), \tag{23}$$

$$N = -\nu(\sqrt{\alpha + m^2}\cosh t - m)^2 + 2\beta(\sqrt{\alpha + m^2}\cosh t - m). \tag{24}$$

Este espacio cosmológico se expande $(\Theta > 0)$ desaceleradamente $(q > 0)$, además el espacio es anisotrópico a tiempos tempranos y conforme se incrementa el tiempo se vuelve isotrópico por completo $(\sigma \to 0)$. Este comportamiento se muestra analíticamente y se ilustra en la figura (**??**)

Al trabajar con la ecuación de Raychaudhuri (20) se observa que $\dot{\Theta}$ diverge para $t \to 0$, dado que en ella aparece un término de la forma:

$$\dot{\Theta} \backsim -\frac{1}{(\sinh t)^2}, \tag{25}$$

y no es possible ajustar los parámetros en el $\lim t \to 0$, para evitar esta singularidad. Por lo que podemos concluir que el espacio cosmológico no es libre de singularidades y será interesante estudiar el comportamiento de los campos EMDA en este punto.

TABLA III. Comportamiento asintótico de los campos en $t \to \infty$ y $t \to 0$

$t \to 0$	$t \to \infty$
$\phi \to cte$	$\phi \to \frac{1}{2}\ln(\frac{\omega}{\nu})$
$\kappa \to cte$	$\kappa \to \kappa_0$
$A_x(t,z) \to cte$	$A_x(t,z) \to 0$
$A_y(t,z) \to cte$	$A_x(t,z) \to g_0$

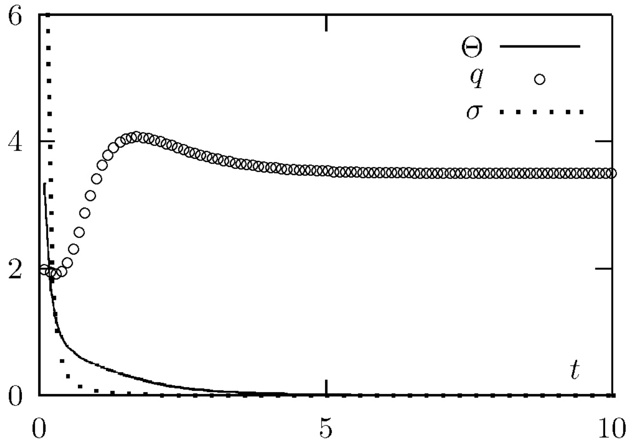

FIGURA 1. Gráfica de los parámetros de desaceleración (q), expansión (Θ) y distorsión (σ), en función del tiempo t, con los valores $m = n = 2$, $\beta = -b = -1$, $\alpha = 5$, $\nu = 1$ y $z = 2$.

El estudio de los campos (6-7) de la teoría EMDA, en los regímenes asintóticos $t \to \infty$ y $t \to 0$, proporciona información sobre el comportamiento de los campos y del espacio. Para el caso del espacio cosmológico que se trabaja, obtenemos la siguiente información considerando la coordenada z constante.

Podemos observar que para $t \to \infty$, los distintos campos se vuelven constantes, por lo que el único campo que actuará sera el campo gravitacional.

Un prototipo de modelo cosmológico anisotrópico corresponde a la métrica de Kasner,

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2p_1}dx^2 + t^{2p_2}dy^2 + t^{2p_3}dz^2 \tag{26}$$

cuyas constantes p_i cumplen las condiciones,

$$p_1 + p_2 + p_3 = (p_1)^2 + (p_2)^2 + (p_3)^2 = 1. \tag{27}$$

La forma de la métrica de Kasner describe el comportamiento local del espacio-tiempo cercano a la singularidad $(t \to 0)$ para el caso de soluciones inhomogéneas y anisotrópicas de las ecuaciones de Einstein, pero con un conjunto diferente de valores de p_i en cada punto de la hipersuperficie de singularidad. Belinskii, Khalatnikov y Lifshitz(BKL) proponen describir una singularidad de un espacio homogéneo y vacío como una sucesión infinita de espacios de Kasner (esto se conoce como la conjetura BKL).

Hay un caso especial de la conjetura BKL llamado término de velocidad asintóticamente dominante, AVDT (Asymptotically velocity-term dominated), en estos casos la singularidad no será descrita por una sucesión infinita de espacios de Kasner sino por un solo espacio de Kasner. Esto ocurre en nuestro modelo, como veremos a continuación.

Considerando el comportamiento asintótico $(t \to 0)$ de las componentes de la métrica (11) obtenemos,

$$\begin{aligned}\Delta &\to \nu\{A^2 + (\sqrt{\alpha + m^2} - m)^2\} \\ &+ 2\{bA - \beta(\sqrt{\alpha + m^2} - m)\} = cte = k,\end{aligned} \tag{28}$$

$$\frac{G\chi}{\Delta} \to \frac{(\alpha - n^2)(\cosh z)^2}{k}, \tag{29}$$

$$\frac{G\chi^{-1}}{\Delta} \to \frac{(\alpha + m^2)t^2}{k}. \tag{30}$$

Así la métrica toma la forma en el límite $t \to 0$:

$$\begin{aligned}ds^2 = k(dz^2 - dt^2) + \frac{X}{k}(dx + Ndy)^2 \\ + \frac{(\alpha + m^2)t^2}{k}(dx + Mdy)^2\end{aligned} \tag{31}$$

Por lo que cercano a la singularidad se comporta como un espacio de Kasner $(p_3 = 1,; \ p_2 = p_1 = 0)$, y no como una sucesión de espacios de Kasner, es decir tiene el comportamiento AVDT. Lo cual es una forma de extender el resultado de M. Narita, T. Torii y K. Maeda (NTM) [5].

5. Conclusiones

En la teoría EMDA se pueden estudiar espacio-tiempos anisotrópicos, con el propósito de modelar universos tempranos que posteriormente se volverán isotrópicos.

Realizando el estudio cinemático de un caso cosmológico, se obtiene que el espacio se expande desaceleradamente y no es libre de singularidades. Los campos se vuelven constantes a tiempos grandes, por lo que al incrementarse el tiempo los campos se desacoplan dando paso a un espacio donde únicamente el campo gravitacional es dominante.

Se establece que en dicho caso cosmológico, la métrica toma la forma de un espacio de Kasner cerca de la singularidad (t = 0) y no una sucesión infinita de espacios de Kasner por lo que su comportamiento corresponde al Término de velocidad asintóticamente dominante (AVTD), que es un caso especial de BKL.

1. A. Shapere, S. Trivedi, and F. Wilczek, *Mod. Phys. Lett. A* **6** (1991) 2677.
2. N. Bretón, *Exact Solution in Einstein-Maxwell-Dilaton-Axion Theory*, Proceedings of ERE −99, Recent Developments in Gravitation, Ed. by J. Ibáñez, Univ. País Vasco, p 179, España (2000).
3. H. Stephany, D. Kramer, M. MaCallum, C. Hoenselaers, and E. Herlt , *Exact Solutions to Einstein´s Field Equations*, Second Edition (Cambridge University Press, 2003).
4. R.M. Wald, *General Relativity* (The University of Chicago Press 1984).
5. M. Narita, T. Torii, and K. Maeda, *Class and Quantum Gravity* **17** (2000) 4597.