

# Estructuras solitarias de amplitud arbitraria en plasmas a dos temperaturas electrónicas con iones fríos

C.A. Mendoza-Briceño y M. Luna-Cardozo

*Centro Física Fundamental, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela.*

*e-mail: cesar@ula.ve*

Recibido el 13 de enero de 2004; aceptado el 22 de abril de 2004

Este trabajo investiga, utilizando la aproximación del pseudo potencial de Sagdeev, las ondas solitarias iónico-acústicas compresivas y rarefactivas de amplitud arbitraria, las cuales han sido encontradas en plasmas a dos temperaturas electrónicas. Se deriva la expresión del pseudo potencial y se obtienen los rangos de los parámetros  $M_s$ ,  $\alpha$  y  $\mu$  de coexistencia de las ondas solitarias compresivas y rarefactivas para el caso de un plasma iónico frío. Además se estudió el efecto de estos parámetros sobre la amplitud de las ondas.

**Descriptores:** Ondas electrostáticas y oscilaciones.

The compressive and rarefactive ion-acoustic solitary wave of arbitrary amplitude which have been found to coexist in two-electron temperature plasmas, are investigated by the pseudo potential approach. An expression of this pseudo potential have been derived and the range of the parameters space  $M_s$ ,  $\alpha$  and  $\mu$  for the coexistence of these solitary structures are found for the case of cold ion plasma. Additionally, the effect of the parameters space on wave amplitude was studied.

**Keywords:** Electrostatic waves and oscillations.

PACS: 95.30.Qd; 52.35.Fp; 52.35.Ra; 52.35.Mw

## 1. Introducción

Un problema que ha tenido considerable atención es el estudio del comportamiento no-lineal de la dinámica de ondas en un plasma a dos temperaturas electrónicas, el cual es muy común en plasmas producidos por láseres [1], plasmas de laboratorios y plasmas en el espacio [2], debido a su importancia en la investigación espacial y en experimentos básicos del laboratorio.

El entendimiento de este comportamiento no-lineal de la dinámica de ondas en un plasma a dos temperaturas electrónicas requiere un estudio de ondas solitarias compresivas y rarefactivas, ya que tales estructuras de potencial han sido observadas en simulaciones computacionales [3], en experimentos de laboratorio y en plasmas aurales [4]. Un gran número de investigaciones teóricas se han realizado sobre el estudio de las estructuras solitarias con o sin campo magnético externo, ignorando los efectos de la temperatura iónica y de la corriente iónica. El primero en investigar las ondas no lineales en un plasma no magnetizado con electrones calientes isotérmicos e iones fríos fue Sagdeev (1966), quién redujo las ecuaciones básicas que gobiernan la dinámica de las ondas no lineales en la forma de la integral de energía de una partícula clásica en un pozo de potencial. El cuasi-potencial obtenido (el cual es llamado también el potencial de Sagdeev) puede ser analizado para predecir la existencia de soluciones localizadas [5]. En particular, la motivación de este trabajo es estudiar las estructuras solitarias iónico-acústicas compresivas y rarefactivas, en un fluido iónico tibio con dos distribuciones electrónicas bajo los efectos de la temperatura iónica y de la corriente iónica, utilizando la aproximación del pseudo-potencial.

Las ecuaciones básicas que gobiernan el fluido iónico tibio se presentan en la Sec. 2. La coexistencia de estructuras

solitarias compresivas y rarefactivas de amplitud arbitraria para el caso unidimensional han sido estudiadas en la Sec. 3. Finalmente, una breve discusión de los resultados es dada en la Sec. 4.

## 2. Ecuaciones del sistema

En este trabajo se considera un plasma consistente de un fluido iónico adiabático tibio con su corriente finita y dos distribuciones maxwellianas de electrones (dos tipos de electrones, calientes y fríos, los cuales están separadamente en equilibrio térmico a temperaturas  $T_{eh}$  y  $T_{ec}$ , respectivamente). De aquí, se tiene en el equilibrio que  $n_{e0} + n_{h0} = n_0$ , donde  $n_{e0}$  ( $n_{h0}$ ) es la densidad del número de electrones en equilibrio a temperatura  $T_{ec}$  ( $T_{eh}$ ) y  $n_0$  es la densidad de número de iones con una temperatura constante  $T_i$ . El sistema básico de ecuaciones que gobierna la dinámica de iones en el caso unidimensional está dado por:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(nv) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\sigma}{n} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + v \frac{\partial P}{\partial x} + 3P \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \left( \frac{1}{1+\mu} \right) \exp \left[ \alpha \left( \frac{1+\mu}{\alpha+\mu} \right) \varphi \right] + \left( \frac{\mu}{1+\mu} \right) \exp \left[ \left( \frac{1+\mu}{\alpha+\mu} \right) \varphi \right] - n, \quad (4)$$

donde  $n$  es la densidad numérica de iones normalizada a su valor de equilibrio  $n_0$ ;  $v$  es la velocidad del fluido iónico normalizada a la velocidad iónico-acústica  $C_s = (k_B T_{ef}/m)^{1/2}$ , con  $k_B$  siendo

la constante de Boltzmann,  $m$  la masa de un ion;  $T_{ef} = T_{eh}T_{ec}n_0/(n_{c0}T_{eh} + n_{h0}T_{ec})$  la temperatura efectiva;  $\varphi$  es el potencial electrostático normalizado a  $k_B T_{ef}/e$ , con  $e$  como la carga electrónica;  $P$  es la presión térmica del ion normalizada a  $n_0 k_B T_i$ ;  $\sigma = T_i/T_{ef}$ , siendo  $T_i$  la temperatura del ion;  $\alpha = T_{eh}/T_{ec}$  y  $\mu = n_{h0}/n_{c0}$ . La variable espacial está normalizada a la longitud de Debye  $\lambda_{Def} = (k_B T_{ef}/4\pi n_0 e^2)^{1/2}$  y la variable temporal está normalizada al período del plasma iónico  $\omega_P^{-1} = (m/4\pi n_0 e^2)^{1/2}$ .

### 3. Estructuras solitarias unidimensionales

Para obtener una solución de onda solitaria, hacemos depender todas las variables dependientes de una sola variable independiente  $\xi = x - Mt$ , donde  $M$  es el número de Mach (la velocidad de la onda solitaria normalizada a la velocidad iónico-acústica  $C_s$ ). Considerando la condición estacionaria, es decir,  $\partial/\partial t = 0$ , obtenemos de las Ecs. (1), (2) y (3)

$$n = \frac{\sigma_1}{\sqrt{2}\sigma_0} \sqrt{1 - \frac{2\varphi}{M_s^2 \sigma_1^2} - \sqrt{\left(1 - \frac{2\varphi}{M_s^2 \sigma_1^2}\right)^2 - 4\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^4}}}, \quad (5)$$

donde  $M_s = M - v_0$ ,  $\sigma_0 = \sqrt{3\sigma/M_s^2}$  y  $\sigma_1 = \sqrt{1 + \sigma_0^2}$ , y en donde se han impuesto las condiciones de frontera,  $\varphi \rightarrow 0$ ,  $v \rightarrow v_0$ ,  $P \rightarrow 1$  y  $n \rightarrow 1$  para  $\xi \rightarrow \pm\infty$ .

Multiplicando la Ec. (4) reducida al sistema móvil por  $d\varphi/d\xi$  e integrando una vez, obtenemos

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{d\xi} \right)^2 + V(\varphi) = 0, \quad (6)$$

La cual puede ser considerada como una “ley de energía” de una partícula oscilante de masa unitaria con velocidad  $d\varphi/d\xi$  y posición  $\varphi$  en un potencial  $V(\varphi)$ . Usando la Ec. (5) e integrando la Ec. (4) bajo las mismas condiciones de frontera utilizadas anteriormente, obtenemos

$$\begin{aligned} V(\varphi) = & - \left[ \frac{\alpha + \mu}{\alpha(1 + \mu)^2} \right] \exp \left[ \alpha \left( \frac{1 + \mu}{\alpha + \mu} \right) \varphi \right] \\ & - \left[ \frac{\mu(\alpha + \mu)}{(1 + \mu)^2} \right] \exp \left[ \left( \frac{1 + \mu}{\alpha + \mu} \right) \varphi \right] \\ & - M_s^2 \sqrt{\sigma_0} \left[ e^{\theta/2} + \frac{1}{3} e^{-3\theta/2} \right] + C_1, \end{aligned} \quad (7)$$

el cual es conocido como el potencial de Sagdeev, donde

$$\theta = \cosh^{-1} \left[ \frac{\sigma_1^2}{2\sigma_0} \left( 1 - \frac{2\varphi}{M_s^2 \sigma_1^2} \right) \right], \quad (8)$$

y  $C_1$  es una constante de integración, la cual se elige de manera tal que  $V(\varphi) = 0$  para  $\varphi = 0$ . Considerando el caso correspondiente a iones fríos ( $\sigma = 0$ ) obtenemos que

$$n = \frac{M_s}{\sqrt{M_s^2 - 2\varphi}}, \quad (9)$$

el cual es la densidad numérica de iones, donde  $M_s$  contiene la velocidad de la corriente iónica.

Usando la Ec. (9) en la Ec. (4) obtenemos la ecuación no lineal que describe el comportamiento del potencial electrostático, la cual puede ser integrada obteniéndose

$$\begin{aligned} V(\varphi) = & - \left[ \frac{\alpha + \mu}{\alpha(1 + \mu)^2} \right] \exp \left[ \alpha \left( \frac{1 + \mu}{\alpha + \mu} \right) \varphi \right] \\ & - \left[ \frac{\mu(\alpha + \mu)}{(1 + \mu)^2} \right] \exp \left[ \left( \frac{1 + \mu}{\alpha + \mu} \right) \varphi \right] \\ & - M_s \sqrt{M_s^2 - 2\varphi} + C_1. \end{aligned} \quad (10)$$

Empleando el análisis del potencial de Sagdeev [5], las soluciones de onda solitaria de la Ec. (6) existen si se cumple:

- $(d^2V/d\varphi^2)_{\varphi=0} < 0$ , de modo que el punto fijo en el origen es inestable, y
- $V(\varphi) < 0$  cuando  $0 < \varphi < \varphi_{\text{máx}}$  para ondas solitarias positivas y  $\varphi_{\text{mín}} < \varphi < 0$  para ondas solitarias negativas, donde  $\varphi_{\text{máx(mín)}}$  es el valor máximo(mínimo) de  $\varphi$  para el cual  $V(\varphi \neq 0) = 0$ , los cuales corresponden a la amplitud de la onda solitaria.

La naturaleza de estas ondas solitarias, cuya amplitud tiende a cero cuando el número de Mach  $M_s$  tiende a su valor crítico, puede ser encontrada al expandir el potencial de Sagdeev al tercer orden en una serie de Taylor en  $\varphi$ . El número de Mach crítico es el que corresponde a la desaparición del término cuadrático. Al mismo tiempo, si el término cúbico es negativo, hay un pozo de potencial sobre el lado negativo, y si el término cúbico es positivo, hay un pozo de potencial sobre el lado positivo. El número de Mach crítico encontrado es  $M_{sc} = 1, -1$ .

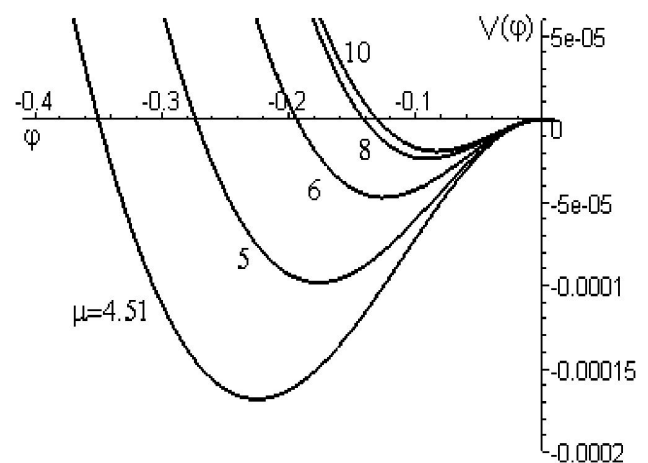


FIGURA 1. Potenciales de Sagdeev con  $\sigma = 0$ ,  $\alpha = 12$ ,  $M_s = 1.01$  para valores de  $\mu < 10$  y  $\varphi < 0$ .

TABLA I. Valores de  $\alpha$ ,  $\mu$  y  $M_s$  para la coexistencia de las ondas solitarias.

Parámetros			Intervalo de coexistencia de ondas solitarias
$\mu = 10$	$M_s = 1.01$		$11.1751 < \alpha \leq 20.00$
$\sigma = 0$	$\alpha = 12$	$M_s = 1.01$	$4.50 \leq \mu \leq 14.88$
	$\alpha = 12$	$\mu = 10$	$1.00 < M_s \leq 1.02027$

TABLA II. Efecto de las variaciones de los parámetros sobre la amplitud de las ondas solitarias.

Cuando aumenta el parámetro:	La amplitud de las ondas rarefactivas	La amplitud de las ondas compresivas
$\alpha$	disminuye	aumenta
$\mu$	aumenta-disminuye	aumenta
$M_s$	aumenta	aumenta

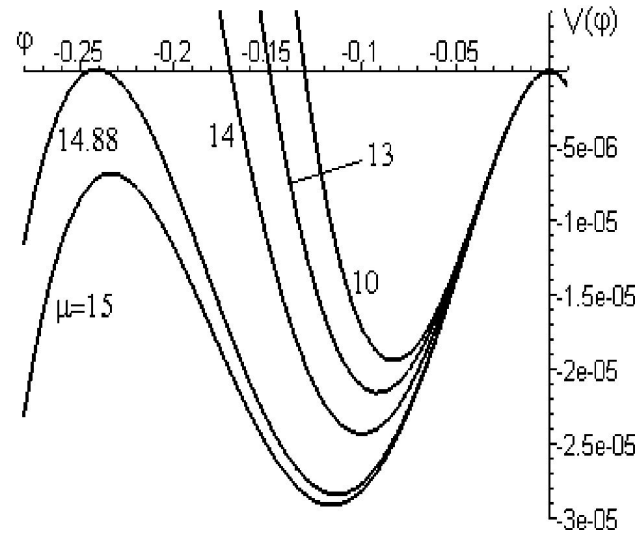


FIGURA 2. Potenciales de Sagdeev con  $\sigma = 0$ ,  $\alpha = 12$ ,  $M_s = 1.01$  para valores de  $\mu > 10$  y  $\varphi < 0$ .

Tomando el valor positivo de  $M_{sc}$  la tercera derivada es negativa, es decir, existen ondas solitarias compresivas y rarefactivas si se cumple

$$\frac{(\alpha^2 + \mu)(1 + \mu)}{(\alpha + \mu)^2} - 3 > 0, \tag{11}$$

el cual da un criterio muy simple para analizar el rango de los diferentes parámetros, tales como  $\alpha$ ,  $\mu$ , y  $v_0$  ( $v_0$  está dentro de  $M_s$ ), para el cual los tipos compresivos y rarefactivos de las ondas solitarias existen.

4. Discusión

En las Tablas I y II se resume el efecto de los distintos parámetros para la coexistencia de las ondas solitarias y las variaciones de su amplitud. Ambas ondas solitarias compresivas y rarefactivas coexisten para  $11.1751 < \alpha \leq 20.00$ , cuando se mantienen fijos los demás parámetros en  $\sigma = 0$ ,  $\mu = 10$  y  $M_s = 1.01$ . En cambio, al mantener  $\sigma = 0$ ,  $\alpha = 12$  y  $M_s = 1.01$  los dos tipos de ondas solitarias se producen si  $4.5 \leq \mu \leq 14.88$ . Adicionalmente, fijando los parámetros  $\sigma = 0$ ,  $\alpha = 12$  y  $\mu = 10$ , la velocidad de la onda solitaria tiene que encontrarse en el intervalo:  $1.00 < M_s < 1.02027$  para que coexistan las ondas solitarias compresivas y rarefactivas.

En cuanto a la amplitud de las ondas, se observa que con el aumento de  $\alpha$  la amplitud de las ondas rarefactivas disminuye y la de las ondas compresivas aumenta. Por otro lado, se observó que un aumento en la velocidad de la onda solitaria ( $M_s$ ) implica un aumento de su amplitud. Esto se cumple para los dos tipos de ondas. Del mismo modo, la amplitud de las ondas solitarias compresivas es mayor a medida que  $\mu$  crece. Adicionalmente, es importante recalcar que en el caso de las ondas rarefactivas la amplitud de las ondas primero aumenta y luego disminuye con la variación de  $\mu$ , alcanzándose un mínimo a cierto valor  $\mu = \mu_c$  (siendo  $\mu_c$  un valor crítico el cual depende del espacio de los parámetros) (ver Figs. 1 y 2).

Agradecimientos

Los autores agradecen al CDCHT-ULA Venezuela.

1. K. Estabrook y W.L. Kruer, *Phys. Rev. Lett.* **40** (1978) 42.

2. M. Temerin, K. Cerny, W. Lotko y F.S. Mozer, *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 1175.

3. T. Sato y H. Okuda, *Phys. Rev. Lett.* **44** (1980) 740.

4. M. Berthomier, R. Pottelette y M. Malingre, *J. Geophys. Res.* **103** (1998) 4261.

5. R.Z. Sagdeev, *Reviews of Plasma Physics* (Consultants Bureau, New York) **4** (1966) 23.