

# Ciclo de Curzon y Ahlborn para un gas de van der Waals

D. Ladino-Luna\*

Dpto. de ICE, ESIME-IPN, Edif. 4, U. P. Zacatenco  
Av. I.P.N. s/n Col. San Pedro Zacatenco, 07738, D.F., México

Recibido el 25 de febrero de 2002; aceptado el 17 de junio de 2002

Se muestra que para una máquina térmica tipo Kurzon y Ahlborn con un gas de van der Waals, como sustancia de trabajo, utilizando maximización de potencia y maximización de función ecológica, se obtienen las mismas expresiones que para la eficiencia en el caso de un gas ideal como sustancia de trabajo, salvo la substitución de los volúmenes máximo y mínimo, subtendidos por la máquina, en la forma  $V_{max} \rightarrow V_{max} - b$  y  $V_{min} \rightarrow V_{min} - b$ , en donde sea necesario. Las ramas adiabáticas del ciclo se consideran no instantáneas.

*Descriptores:* Termodinámica de tiempos finitos; gas de van der Waals.

For a Curzon and Ahlborn type heat engine with a van der Waals gas like a working substance, using maximization of power and maximization of ecological function, it is shown that the same expression of the efficiency for the ideal gas case as working substance, with the substitution of maximum volume and minimum volume spanned by the engine,  $V_{max} \rightarrow V_{max} - b$  and  $V_{min} \rightarrow V_{min} - b$ , are obtained. The adiabatic branches in the cycle are consider non instantaneous.

*Keywords:* Finite time thermodynamics; van der Waals gas.

PACS: 44.6+k; 44.90+c

## 1. Introducción

La llamada termodinámica endorreversible se puede considerar como una extensión de la termodinámica clásica de equilibrio, para el estudio de máquinas térmicas en las que se incluye explícitamente la dependencia en el tiempo de los procesos de transferencia de calor entre las fuentes y la propia máquina (ver Fig. 1), al mismo tiempo que se excluyen los procesos irreversibles que aparecen dentro de la sustancia de trabajo [1,2]. La exclusión de tales efectos, conocida como hipótesis de endorreversibilidad, se considera para casos en los cuales el tiempo de relajación interna de la sustancia de trabajo es muy pequeño comparado con el tiempo total del ciclo. De esta manera, Curzon y Ahlborn [3] encontraron que el ciclo de Carnot con transferencia finita de calor entre los almacenes térmicos con temperaturas  $T_1$  y  $T_2$  ( $T_1 > T_2$ ) y la sustancia de trabajo, operando en el régimen de potencia máxima, tiene una eficiencia dada por

$$\eta_{CA} = 1 - \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}. \quad (1)$$

Nótese que a partir de la definición de eficiencia,

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \quad (2)$$

donde  $Q_1$  es el calor absorbido por la máquina, desde una fuente caliente; y  $Q_2$  es el calor cedido por la máquina hacia una fuente fría, la hipótesis de endorreversibilidad [3]

$$\frac{Q_1}{T_{1w}} = \frac{Q_2}{T_{2w}} \quad (3)$$

hace aplicable la expresión de Carnot para la eficiencia en la forma  $\eta = 1 - T_{2w}/T_{1w}$ . Aquí  $T_{1w}$  y  $T_{2w}$  son las temperaturas alta y baja, respectivamente, con las que trabaja la máquina (ver Fig. 1). Suponiendo una fun-

ción  $z(T_2/T_1) = T_{2w}/T_{1w}$ , tenemos

$$\eta = 1 - z \left( \frac{T_2}{T_1} \right). \quad (4)$$

La eficiencia de Carnot se encuentra cuando

$$z(T_2/T_1) = T_2/T_1,$$

y la de Curzon y Ahlborn cuando

$$z(T_2/T_1) = \sqrt{T_2/T_1}.$$

Angulo-Brown [4] propuso un criterio de optimización para el ciclo de Curzon y Ahlborn, para evaluar el funcionamiento de una máquina térmica, por medio de una función, llamada ecológica,

$$E = P - T_2\sigma, \quad (5)$$

donde  $P$  es la potencia de salida del ciclo y  $\sigma$  es la producción total de entropía durante el ciclo, debida a los procesos de transferencia de calor entre la sustancia de trabajo y los almacenes durante los procesos isotérmicos del ciclo. La eficiencia correspondiente, utilizando este criterio, es la eficiencia ecológica

$$\eta_E = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}\epsilon(1+\epsilon)}, \quad (6)$$

en donde hemos definido  $\epsilon \equiv T_2/T_1$ , obteniendo ahora la función  $z$  como  $z = z(\epsilon)$ .

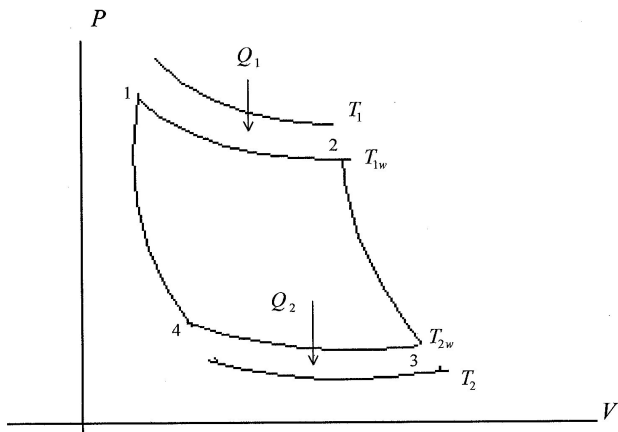


FIGURA 1. Ciclo de Carnot en el plano volumen  $V$  contra presión  $p$  con transferencia de calor finita en las ramas isotérmicas (Ciclo de Curzon y Ahlborn).

Por otro lado, Gutkowics-Krusin, Procaccia y Ross [5] mostraron que al tomar en cuenta el tiempo de duración de las adiabatas, en el ciclo de Curzon y Ahlborn, a máxima po-

tencia de salida, la eficiencia  $\eta_{CA}$  constituye una cota máxima, de tal manera que  $\eta \leq \eta_{CA}$ , siendo  $\eta = \eta(\lambda, \epsilon)$  una expansión en potencias del parámetro  $\lambda$  de la forma:

$$\eta(\lambda, \epsilon) = 1 - \left\{ \sqrt{\epsilon} + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{\epsilon})^2 \lambda + \frac{1}{4}(1 - \sqrt{\epsilon})^2 \times \left( \frac{(1 - \sqrt{\epsilon})^2}{2\sqrt{\epsilon}} - \ln \epsilon \right) \lambda^2 + O(\lambda^3) \right\} \quad (7)$$

con

$$\lambda \equiv \frac{1}{(1 - \gamma)(\ln V_{max} - \ln V_{min})}, \quad \text{y} \quad \gamma = \frac{C_P}{C_V};$$

obteniéndose la igualdad cuando  $\lambda = 0$ . Aquí  $V_{max}$  y  $V_{min}$  son los volúmenes máximo y mínimo subtendidos por la máquina durante el ciclo. De manera análoga, Ladino-Luna y de la Selva [6] mostraron que  $\eta_E$  constituye también una cota máxima, cuando se utiliza la maximización de la función ecológica para analizar el funcionamiento de la máquina de Curzon y Ahlborn, y que también existe una expansión en potencias del parámetro  $\lambda$  arriba definido, como

$$\eta_{EN} = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}(\epsilon + \epsilon^2)} \left\{ 1 + \left( \frac{1}{4}(1 + 3\epsilon) \sqrt{\frac{2}{\epsilon + \epsilon^2}} - 1 \right) \lambda + \left( \frac{\frac{1}{16}(1 + 3\epsilon)}{\epsilon + \epsilon^2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\epsilon + \epsilon^2}} \ln \sqrt{\frac{1}{2}(\epsilon + \epsilon^2)} \right) \times \left[ 1 + 3\epsilon - 4 \sqrt{\frac{1}{2}(\epsilon + \epsilon^2)} \right] \lambda^2 + O(\lambda^3) \right\}, \quad (8)$$

de tal manera que  $\eta_{EN} \leq \eta_E$ .

Estos resultados han sido hallados suponiendo como substancia de trabajo un gas ideal. Sin embargo, en un contexto real, una máquina térmica trabaja con gases no ideales. En el presente trabajo se analiza la influencia que tiene el suponer como substancia de trabajo en la máquina un gas no ideal, en particular un gas de van der Waals. Se encuentra que las eficiencias a potencia máxima y a función ecológica máxima tienen la misma forma que las Ecs. (7) y (8), respectivamente, y que sólo difieren en la relación de volúmenes, con las substituciones  $V_{max} \rightarrow V_{max} - b$  y  $V_{min} \rightarrow V_{min} - b$ . Utilizaremos el algoritmo desarrollado en la Ref. 5, y que fue utilizado en la Ref. 6 para el caso de máxima función ecológica. Finalmente haremos una breve discusión de los resultados obtenidos y de las particularidades de cada criterio de maximización

## 2. El gas de van der Waals

Para altas temperaturas y bajas presiones, la ecuación de estado de un gas ideal representa, con bastante aproximación, el comportamiento de los gases reales. Pero, si la temperatura y la presión son tales que el gas se acerca al punto de condensación, el comportamiento del gas se aparta del de un gas ideal.

De entre las varias ecuaciones de estado introducidas para representar el comportamiento de los gases reales, la ecuación de van der Waals es muy simple y describe, de manera satisfactoria, el comportamiento de muchas substancias, para un amplio intervalo de valores de temperaturas y presiones [7,8]. A partir de consideraciones de la teoría cinética y tomando como primera aproximación el tamaño de una molécula y las fuerzas de cohesión entre moléculas, van der Waals propuso para un mol de substancia la ecuación de estado

$$\left( p + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT, \quad (9)$$

en la cual las constantes  $a$  y  $b$  son características de cada substancia,  $p$  es la presión,  $R$  es la constante universal de los gases y  $T$  es la temperatura.

Por otro lado, se sabe que para un gas ideal su energía depende sólo de la temperatura, pero para un gas real ésta depende también del volumen del sistema. Así que, como

$$\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p, \quad (10)$$

de (9) tenemos  $(\partial U/\partial V)_T = a/V^2$ , cuya integración permite escribir

$$U = -\frac{a}{V} + f(T) \tag{11}$$

y, suponiendo que el calor molecular a volumen constante es también una constante, de la expresión diferencial para la entropía,  $dS = dQ/T$ , la ecuación de una transformación adiabática para el gas de van der Waals queda como

$$T(V - b)^{R/C_V} = constante. \tag{12}$$

De la expresión (12) se encuentra que la hipótesis de endorreversibilidad se escribe ahora como

$$\frac{V_3 - b}{V_2 - b} = \frac{V_4 - b}{V_1 - b}. \tag{13}$$

Por otro lado, de la ecuación de estado (9), derivando respecto al tiempo  $t$  y suponiendo la ley de enfriamiento de Newton, encontramos que

$$\frac{RT_{iw} dV}{V - b dT} = \frac{dQ_i}{dt} = (-1)^{i-1} \alpha(T_i - T_{iw}), \quad i = 1, 2, \tag{14}$$

de manera que se cumple

$$\frac{T_{1w}}{T_{2w}} = \left(\frac{V_3 - b}{V_2 - b}\right)^{R/C_V} \quad \text{o} \quad \ln \frac{V_3 - b}{V_2 - b} = \frac{C_V}{R} \ln \frac{T_{1w}}{T_{2w}}. \tag{15}$$

Por otro lado, en la Ref. 5 encontramos que los tiempos para las ramas isotérmicas del ciclo se pueden escribir como

$$t_1 = f_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \quad \text{y} \quad t_3 = f_3 \ln \frac{V_3}{V_4}, \tag{16}$$

y los tiempos para las ramas adiabáticas se asumen como

$$t_2 = f_1 \ln \frac{V_3}{V_2} \quad \text{y} \quad T_4 = -f_2 \ln \frac{V_1}{V_4}, \tag{17}$$

con las definiciones

$$\eta_{VWEN} = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}(\epsilon + \epsilon^2)} \left\{ 1 + \left( \frac{1}{4}(1 + 3\epsilon) \sqrt{\frac{2}{\epsilon + \epsilon^2}} - 1 \right) \lambda_{VW} + \left( \frac{\frac{1}{16}(1 + 3\epsilon)}{\epsilon + \epsilon^2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\epsilon + \epsilon^2}} \ln \sqrt{\frac{1}{2}(\epsilon + \epsilon^2)} \right) \left[ 1 + 3\epsilon - 4 \sqrt{\frac{1}{2}(\epsilon + \epsilon^2)} \right] \lambda_{VW}^2 + O(\lambda_{VW}^3) \right\}. \tag{24}$$

$$f_1 = \frac{RT_{1w}}{\alpha(T_1 - T_{1w})} \quad \text{y} \quad f_2 = \frac{RT_{2w}}{\alpha(T_{2w} - T_2)}, \tag{18}$$

donde  $R$  es la constante del gas y  $\alpha$  es una constante de conductividad térmica, que por simplicidad se ha supuesto igual para el calor absorbido y para el calor cedido. El tiempo total del ciclo queda dado por

$$t_{tot} = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = \frac{R}{\alpha} \left( \frac{T_{1w}}{T_1 - T_{1w}} - \frac{T_{2w}}{T_2 - T_{2w}} \right) \ln \frac{V_3 - b}{V_1 - b}. \tag{19}$$

Consecuentemente, las expresiones para la potencia, la producción de entropía y función ecológica quedan como

$$P_{vw} = \frac{\alpha(T_{1w} - T_{2w}) \left( \ln \frac{V_3 - b}{V_1 - b} + \nu \ln \frac{T_{2w}}{T_{1w}} \right)}{\left( \frac{T_{1w}}{T_1 - T_{1w}} + \frac{T_{2w}}{T_{2w} - T_2} \right) \ln \frac{V_3 - b}{V_1 - b}}, \tag{20}$$

$$\sigma_{vw} = \alpha \frac{\frac{T_1}{T_2} (1 + \lambda_{vw} \ln z) (-\epsilon + z)}{\frac{1}{1+x} + \frac{z}{zx - \epsilon}} \tag{21}$$

y

$$E_{vw} = \alpha T_1 \frac{(1 + \epsilon - 2z)(1 + \lambda_{vw} \ln z)}{\frac{1}{1-x} + \frac{z}{zx - \epsilon}}, \tag{22}$$

donde ahora tenemos  $\lambda_{vw} = \nu / \ln(V_3 - b/V_1 - b)$ , y  $b$  es una constante dependiente de la substancia.

De esta manera, las eficiencias encontradas por Gutkowics-Krusin *et al.* [5] y por Ladino-Luna y de la Selva [6] se modifican en la forma

$$\eta_{VWP} = 1 - \left\{ \sqrt{\epsilon} + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{\epsilon})^2 \lambda_{vw} + \frac{1}{4}(1 - \sqrt{\epsilon})^2 \times \left( \frac{(1 - \sqrt{\epsilon})^2}{2\sqrt{\epsilon}} - \ln \epsilon \right) \lambda_{vw}^2 + O(\lambda_{vw}^3) \right\} \tag{23}$$

y

Las Ecs. (23) y (24), como puede observarse, tienen exactamente la misma estructura de las Ecs. (7) y (8), como podría haberse esperado al observar la manera como se modifica la hipótesis de endorreversibilidad [Ecs. (13) y (15)], y que se obtiene con el cálculo posterior (maximización de la potencia y de la función ecológica). Sin embargo, ha sido necesario llevar el cálculo hasta el final, pues nada nos asegura que sea correcta la suposición a partir de la dicha forma de la hipótesis de endorreversibilidad, y del parámetro  $\lambda_{vW}$  que aparece ahora a partir de la Ec. (20) en lugar del parámetro  $\lambda$  utilizado en las Refs. 5 y 6.

### 3. Conclusiones

Como se ha mostrado, la eficiencia hallada por Curzon y Ahlborn resulta la aproximación a orden cero de una expresión más general, hallada al tomar en cuenta los tiempos de duración de las adiabatas, en el ciclo de Curzon y Ahlborn, tanto para un gas ideal como para un gas de van der Waals. El parámetro  $\lambda$ , que es un parámetro relacionado con

la razón entre los volúmenes máximo y mínimo del ciclo, resulta ser la única cantidad que cambia cuando suponemos que la substancia de trabajo no es un gas ideal. Las cotas máximas para el valor de estas eficiencias siguen siendo  $\eta_{CA}$  y  $\eta_E$ , que corresponden al caso  $\lambda_{vW} = 0$ ; esto es, cuando  $(V_3 - b)/(V_1 - b) \rightarrow \infty$ ; en otras palabras, cuando el tamaño de la máquina es infinito. Este valor máximo se encuentra cuando se suponen adiabatas instantáneas. Evidentemente, la eficiencia ecológica satisface las mismas propiedades que la eficiencia de Curzon y Ahlborn aún cuando la substancia de trabajo no es un gas ideal. También es pertinente observar que el llamado criterio ecológico resulta ser un buen método para juzgar el funcionamiento de una máquina térmica.

### Agradecimientos

El autor agradece a la Dra. S.M.T. de la Selva por las invaluable discusiones y comentarios sobre el presente trabajo. El autor también agradece al árbitro sus amables sugerencias.

---

\*. También UAM-AZC

1. A. De Vos, *Endoreversible Thermodynamics of Solar Energy Conversion* (Oxford University Press, Oxford, 1992).
2. H. B. Callen, *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics* (Wiley, New York, 1985).
3. F. L. Curzon and B. Ahlborn, *Am. J. Phys.* **43** (1975) 22.
4. F. Angulo-Brown, *J. Appl. Phys.* **69** (1991) 7465.

5. D. Gutkowics-Krusin, I. Procaccia and J. Ross, *J. Chem. Phys.* **69** (1978) 3898.
6. D. Ladino-Luna and S.M.T. de la Selva, *Rev. Mex. Fis.* **46** (2000) 52.
7. E. Fermi, *Thermodynamics* (Columbia University Press, N. Y., 1936).
8. E. Piña, *Termodinámica*, (Limusa, México, 1978).