

# Introducción a las oscilaciones de neutrinos

Luis G. Cabral-Rosetti

*Instituto de Ciencias Nucleares. Departamento de Física de Altas Energías. U.N.A.M.*

*Círculo Exterior, C.U., Apdo. Post. 70-543, 94510 México, D.F., México.*

*e-mail: luis@nuclecu.unam.mx*

Recibido el 26 de octubre de 2001; aceptado el 25 de abril de 2002

Muy recientemente en el Observatorio de Neutrinos Solares (SNO) de Sudbury Canada, dieron a conocer la primera evidencia experimental de que los neutrinos producidos en el corazón del Sol cambian de identidad en su viaje hasta la Tierra. La explicación más probable de dicho fenómeno son las llamadas *oscilaciones de neutrinos*. En el presente trabajo damos una introducción didáctica a las oscilaciones de neutrinos, tanto en el vacío como en medios materiales; destacando en este último caso el efecto resonante MSW. Dicho trabajo está formulado para el caso de dos generaciones de neutrinos, sin embargo, damos un bosquejo para el caso de tres generaciones.

**Descriptores:** Oscilaciones de neutrinos; oscilaciones con dos especies; efecto MSW.

Recently the Solar Neutrino Observatory (SNO) group in Sudbury Canada, showed the first experimental evidence that neutrino produced in the Sun's core, change their flavour when they propagate. The most probable explanation of such phenomenon are the *neutrino oscillation*. In this work we give a pedagogical introduction to neutrino oscillation, both in the vacuum and in the material medium, emphasizing the resonant MSW effect in the medium. This work is formulated for two neutrino generations however, we give a brief summary of three neutrino generations.

**Keywords:** Neutrino oscillations; oscillations with two flavors; MSW effect.

PACS: 26.65.+t; 13.15.+g; 14.60.Pq

## 1. Introducción

Aunque sumamente exitoso en lo que a sus predicciones fenomenológicas se refiere, el modelo estándar de las interacciones electrodébiles parece incompleto desde un punto de vista teórico [1]. En su forma actual no es capaz de predecir las masas de los fermiones (leptones y quarks) ni de explicar por qué hay varias familias de tales partículas.

El estudio de las propiedades de los neutrinos ha jugado un rol esencial en la caracterización de las interacciones débiles y podría aportar nuevos ingredientes para el desarrollo de futuras teorías de las partículas elementales [2]. Entre los aspectos de la física de los neutrinos que permanecen aún sin ser dilucidados, cabe mencionarse la cuestión de si sus masas son o no diferentes de cero, y en tal caso, si los estados creados en los procesos débiles ( $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ ) son combinaciones lineales de otros estados ( $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ ) con masas definidas [3].

Uno de los fenómenos más interesantes que se presenta cuando existe mezcla entre neutrinos masivos, son las llamadas oscilaciones de neutrinos, es decir, transformaciones periódicas de neutrinos de un sabor en otro (por ej.,  $\nu_e \rightleftharpoons \nu_\mu$ ) [4]. Debido a su interacción con la materia, neutrinos con distintos sabores tienen índices de refracción diferentes. Ello hace que, en general, las oscilaciones se vean afectadas por las propiedades del medio a través del cual los neutrinos se propagan [5].

En un importante trabajo, Mikheyev y Smirnov [6] demostraron que en un medio con densidad variable las ampli-

tudes de oscilación tienen un comportamiento resonante para ciertos valores de la energía de los neutrinos. De esta manera, aun cuando los parámetros de las oscilaciones (diferencias de masas y ángulos de mezcla) sean pequeños en el vacío, pueden incrementarse notablemente cuando los neutrinos atraviesan medios densos como el Sol u otras estrellas.

El pasado 18 de Junio de 2001 el equipo de científicos del laboratorio Canadiense SNO (Sudbury Neutrino Observatory) dieron a conocer la primera evidencia experimental de que los neutrinos producidos en el interior del Sol cambian de *sabor*, *i.e.*, cambian de identidad en su viaje del Sol a la Tierra [7]. Todo parece indicar que la explicación más plausible de dicho fenómeno son las oscilaciones de neutrinos. Es por tal motivo que nos proponemos dar una introducción didáctica de dicho fenómeno, centrándonos en el caso de dos generaciones de neutrinos. Esto lo hacemos con la finalidad de explicar con mayor claridad en lengua castellana, las ideas teóricas subyacentes. El presente trabajo es una recopilación didáctica inspirada en los trabajos de P. B. Pal [9], centrándose en los aspectos más relevantes de la física de neutrinos masivos y su relación con el llamado *enigma de los neutrinos solares*. El trabajo está organizado como sigue: en la Sec. 2 discutimos el formalismo general de oscilaciones. En la Sec. 3 nos introducimos a las oscilaciones de neutrinos en el vacío. De la Sec. 4 a la 10 discutimos los efectos de la evolución de los neutrinos en un medio material como el Sol y analizamos las soluciones propuestas, así como el efecto MSW. Antes de concluir el presente trabajo, en la Sec. 11 damos un bosquejo de los problemas que aparecen en un análisis más realista de tres generaciones. Finalmente damos nuestras conclusiones.

## 2. Formalismo general de oscilaciones

De acuerdo con el modelo estándar de las interacciones electrodébiles (SM) de Weinberg-Salam-Glashow [1], los leptones se encuentran agrupados en tres familias o sabores, denominados

$$\begin{pmatrix} \nu_\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix} \quad (1)$$

y las correspondientes familias de antileptones. Las familias se caracterizan por los números leptónicos individuales  $L_\alpha$  (número del electrón  $L_e$ , número del muón  $L_\mu$ , número del tauón  $L_\tau$ ) de tal modo que:

$$\begin{aligned} L_\alpha(\nu_\beta) &= \delta_{\alpha\beta} && \text{para neutrinos,} \\ L_\alpha(\bar{\nu}_\beta) &= -\delta_{\alpha\beta} && \text{para antineutrinos.} \end{aligned} \quad (2)$$

Las oscilaciones de neutrinos, es decir, las transiciones periódicas  $\nu_\alpha \rightleftharpoons \nu_\beta$  entre los diferentes tipos de sabores de neutrinos dependen del tiempo, y las condiciones necesarias para que ocurran tales oscilaciones son que:

- (a) Las diferencias de masas  $m_{\nu_\alpha} - m_{\nu_\beta}$  no son todas cero, lo que implica que no todos los neutrinos son no masivos.
- (b) Los números leptónicos individuales  $L_\alpha$  no son extrictamente conservados.

En este último caso los autoestados  $L_\alpha|\nu_\alpha\rangle$ , llamados *autoestados de sabor* en general, no son autoestados del operador de masa  $M$ , es decir,  $\langle \nu_\alpha | M | \nu_\beta \rangle \neq 0$  para  $\alpha \neq \beta$ . Más bien son superposiciones lineales de autoestados de masa no degenerados  $|\nu_i\rangle$  con  $\langle \nu_i | M | \nu_j \rangle = m_i \delta_{ij}$  y  $m_i - m_j \neq 0$  para  $i \neq j$ . Las oscilaciones de neutrinos o *mezcla* de sabores de neutrinos  $\nu_\alpha \rightleftharpoons \nu_\beta$  pueden ocurrir entonces debido a que  $\langle \nu_\alpha | M | \nu_\beta \rangle$  es diferente de cero para  $\alpha \neq \beta$ . Las dos condiciones listadas arriba son las mínimas extensiones al modelo electrodébil estándar SM [2].

Por otro lado, los  $n$  autoestados de sabor  $|\nu_\alpha\rangle$  (i.e.,  $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, \dots$ ) y los  $n$  autoestados de masa, también llamados autoestados físicos  $|\nu_i\rangle$  (i.e.,  $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$ ) son relacionados por una transformación unitaria  $U$  llamada *matriz de mezcla*, la cual es análoga a la matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa para el sector de quarks. En el SM, todos los neutrinos son no masivos, en cuyo caso la matriz  $U$  no tiene significado físico. Por lo tanto, al introducir la matriz de mezcla, estamos suponiendo implícitamente que al menos uno de los neutrinos tiene *masa no nula*:

$$\begin{aligned} |\nu_\alpha\rangle &= \sum_i U_{\alpha i} |\nu_i\rangle \leftrightarrow |\nu_i\rangle \\ &= \sum_\alpha U_{i\alpha}^\dagger |\nu_\alpha\rangle = \sum_\alpha U_{\alpha i}^* |\nu_\alpha\rangle, \end{aligned} \quad (3)$$

con

$$U^\dagger U = U U^\dagger = 1, \\ \text{i.e., } \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* = \delta_{\alpha\beta}, \sum_\alpha U_{\alpha i} U_{\alpha j}^* = \delta_{ij}. \quad (4)$$

Para antineutrinos tenemos que reemplazar  $U_{\alpha i}$  por  $U_{\alpha i}^*$ , es decir,

$$|\bar{\nu}_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i}^* |\bar{\nu}_i\rangle. \quad (5)$$

El número de parámetros de una matriz unitaria  $n \times n$  es de  $n^2$  y las  $2n - 1$  fases relativas de los  $2n$  estados de neutrinos, pueden redefinirse de tal modo que se dejen  $(n - 1)^2$  parámetros independientes izquierdos. Por esto es conveniente tomar los  $\frac{1}{2n}(n - 1)$  “ángulos de mezcla débiles” de una rotación  $n$ -dimensional y las  $\frac{1}{2}(n - 1)(n - 2)$  las “fases que violan  $CP$ ”.

Al ser autoestados de la matriz de masa, los estados  $|\nu_i\rangle$  son estacionarios, es decir, tienen dependencia temporal

$$|\nu_i(t)\rangle = e^{-i E_i t} |\nu_i\rangle, \quad (6)$$

con

$$E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2} \approx p + \frac{1}{2} \frac{m_i^2}{p} \approx E + \frac{1}{2} \frac{m_i^2}{E}, \\ m_i \ll E_i, \quad (7)$$

donde  $E \approx p$  es la energía total del neutrino y supondremos que los neutrinos son estables. Así, un estado de sabor puro  $|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i} |\nu_i\rangle$  al tiempo  $t = 0$ , evolucionará con el tiempo en el estado

$$\begin{aligned} |\nu\rangle &= \sum_i U_{\alpha i} e^{-i E_i t} |\nu_i\rangle \\ &= \sum_{i, \beta} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-i E_i t} |\nu_\beta\rangle. \end{aligned} \quad (8)$$

La dependencia temporal en la *amplitud de transición* para el cambio del sabor  $\nu_\alpha$  al sabor  $\nu_\beta$  es

$$\begin{aligned} A(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) &\equiv \langle \nu_\beta | \nu(t) \rangle = \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-i E_i t} \\ &= \sum_{i, j} U_{\alpha i} \cdot \delta_{i, j} e^{-i E_i t} \cdot (U^\dagger)_{j, \beta} \\ &= (U \cdot D \cdot U^\dagger)_{\alpha \beta}, \end{aligned} \quad (9)$$

con

$$D_{i, j} = \delta_{i, j} e^{-i E_i t} \quad (\text{matriz diagonal}).$$

Se obtiene una expresión equivalente de la amplitud de transición, insertando la Ec. (7) en la Ec. (9) y extrayendo un factor de fase global  $e^{-iE_i t}$ :

$$A'(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) = \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-i \frac{m_i^2}{2E} t} \\ = \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-i \frac{m_i^2}{2} \frac{L}{E}} = A(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t), \quad (10)$$

donde  $L = ct$  ( $c = 1$ ) es la distancia del detector, en el cual se observa  $\nu_\beta$  desde la fuente  $\nu_\alpha$ . Para una  $j$  fija seleccionada arbitrariamente obtenemos una tercera expresión de la amplitud de transición:

$$A''(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) = e^{-iE_j t} \cdot A(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) \\ = \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-i(E_i - E_j) t} \\ = \delta_{\alpha\beta} + \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* [e^{-i(E_i - E_j) t} - 1] \\ = \delta_{\alpha\beta} + \sum_{i \neq j} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* [e^{-i\Delta_{ij}} - 1], \quad (11)$$

con

$$\Delta_{ij} = (E_i - E_j) t = \frac{\delta m_{ij}^2}{2} \cdot \frac{L}{E} \quad (12)$$

donde

$$\delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2.$$

En la Ec. (11) se utilizó la relación de unitariedad de la Ec. (4). De esta forma las amplitudes de transición son dadas por los  $(n-1)^2$  parámetros independientes de la matriz unitaria (la cual determina las amplitudes de las oscilaciones) y las  $n-1$  diferencias de las masas elevadas al cuadrado (lo cual determina la frecuencia de las oscilaciones), es decir, por los  $n(n-1)$  parámetros reales. Si  $CP$  se conserva en las oscilaciones de neutrinos, desaparecen todas las fases que violan  $CP$  y las  $U_{\alpha i}$  son reales, es decir  $U$  es una matriz ortogonal ( $U^{-1} = U^T$ ) con  $(1/2)n(n-1)$  parámetros. Entonces, el número de parámetros para las amplitudes de transición son  $(1/2)(n-1)(n+2)$ .

La *probabilidad de transición* se obtiene elevando al cuadrado el módulo de las amplitudes Ec. (9):

$$\mathcal{P}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) = \left| \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-iE_i t} \right|^2 \\ = \sum_i \left| U_{\alpha i} U_{\beta i}^* \right|^2 \\ + 2\Re e \sum_{j>i} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} e^{-i\Delta_{ij}}. \quad (13)$$

Aquí el segundo término describe la dependencia temporal (o espacial) de las oscilaciones de los neutrinos y el primer

término es la probabilidad de transición promedio, promediada sobre el tiempo (distancia) o energía:

$$\langle \mathcal{P}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) \rangle = \sum_i \left| U_{\alpha i} U_{\beta i}^* \right|^2 = \sum_i \left| U_{\alpha i}^* U_{\beta i} \right|^2 \\ = \langle \mathcal{P}(\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha) \rangle. \quad (14)$$

Midiendo las probabilidades promedio obtenemos únicamente información sobre los parámetros de la matriz de mezcla, pero no sobre las diferencias de las masas elevadas al cuadrado. Se puede mostrar [8] de la relación de unitariedad  $\sum_i \left| U_{\alpha i} \right|^2 = 1$  que  $\langle \mathcal{P}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha) \rangle = \sum_i \left| U_{\alpha i} \right|^4$  es mínima si todas las  $\left| U_{\alpha i} \right| = \left| U_\alpha \right|$  son iguales. Usando la relación de unitariedad (4) la probabilidad puede escribirse también como

$$\mathcal{P}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) = \delta_{\alpha\beta} \\ + 2\Re e \sum_{j>i} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} [e^{-i\Delta_{ij}} - 1]. \quad (15)$$

Para  $t = 0$ , es decir,  $\Delta_{ij} = 0$  tenemos por supuesto  $\mathcal{P}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; 0) = \delta_{\alpha\beta}$ . Además,  $\sum_\beta \mathcal{P}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) = 1$  debido a (4).

Si se conserva  $CP$  ( $U_{\alpha i}$  es real), las Ecs. (13) y (15) se reducen a

$$\mathcal{P}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) = \sum_i U_{\alpha i}^2 U_{\beta i}^2 \\ + 2 \sum_{j>i} U_{\alpha i} U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j} \cos \Delta_{ij} \\ = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{j>i} U_{\alpha i} U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j} \sin^2 \left( \frac{\Delta_{ij}}{2} \right). \quad (16)$$

Para el caso  $n > 2$  las fórmulas de las probabilidades de transición son más bien complicadas. Sin embargo el formalismo se simplifica fuertemente en el caso de que todas las masas de los neutrinos estén bien separadas una de otra (*hipótesis de jerarquía de masas*), es decir,  $|m_i^2 - m_j^2| \ll |m_i^2 - m_k^2|$  para  $i, j \neq k$ . En éste caso  $L/E$  en la Ec. (12) se incrementa desde cero de tal modo que  $\Delta_{ij} \ll \Delta_{ik} = \Delta$  para  $i, j \neq k$ , únicamente ocurren oscilaciones debido a que  $\Delta \neq 0$  (*oscilaciones principales*); todas las otras  $\Delta_{ij} \approx 0$  y los paréntesis cuadrados en las Ecs. (11) y (15) desaparecen. De esta manera, para las oscilaciones principales tenemos:

$$A(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) = \delta_{\alpha\beta} + (e^{-i\Delta} - 1) \sum_{i \neq j} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* \\ = \delta_{\alpha\beta} + (e^{-i\Delta} - 1) [\delta_{\alpha\beta} - U_{\alpha k} U_{\beta k}^*] \\ = e^{-i\Delta} [\delta_{\alpha\beta} - U_{\alpha k} U_{\beta k}^*] + U_{\alpha k} U_{\beta k}^*. \quad (17)$$

Elevando al cuadrado el módulo de  $A(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t)$  se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) &= \delta_{\alpha\beta} + 2\Re e \left[ \left( e^{-i\Delta} - 1 \right) \cdot U_{\alpha k}^* U_{\beta k} \right. \\ &\quad \left. \cdot \left( \delta_{\alpha\beta} - U_{\alpha k} U_{\beta k}^* \right) \right] \\ &= \mathcal{P}(\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha; t). \end{aligned} \quad (18)$$

De esta forma

$$\mathcal{P}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha) = 1 - 4 \cdot \left( \left| U_{\alpha k} \right|^2 - \left| U_{\alpha k} \right|^4 \right) \cdot \sin^2 \left( \frac{\Delta}{2} \right), \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta \neq \nu_\alpha) &= 4 \cdot \left| U_{\alpha k} \right|^2 \left| U_{\beta k} \right|^2 \cdot \sin^2 \left( \frac{\Delta}{2} \right) \\ &= \mathcal{P}(\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha \neq \beta). \end{aligned} \quad (20)$$

Para finalizar esta sección, discutiremos brevemente la *matriz de masa*  $M$  mencionada antes. Puesto que los estados  $|\nu_i\rangle$  tienen masas definidas  $m_i$ ,  $M$  es diagonal en la representación  $|\nu_i\rangle$ :

$$\langle \nu_i | M | \nu_j \rangle = m_i \delta_{ij}. \quad (21)$$

En la representación  $|\nu_\alpha\rangle$  la matriz de masa tiene los elementos

$$\begin{aligned} \langle \nu_\beta | M | \nu_\alpha \rangle &= \sum_{i,j} \langle \nu_\beta | \nu_i \rangle \langle \nu_i | M | \nu_j \rangle \langle \nu_j | \nu_\alpha \rangle \\ &= \sum_i m_i U_{\alpha i}^* U_{\beta i}, \end{aligned} \quad (22)$$

en donde

$$\langle \nu_\beta | \nu_i \rangle = U_{\beta i}^*,$$

$$\langle \nu_i | M | \nu_j \rangle = m_i \delta_{ij},$$

y

$$\langle \nu_j | \nu_\alpha \rangle = U_{\alpha j}.$$

Si todas las masas  $m_i$  son iguales  $m_i = m$  (completa degeneración), entonces  $\langle \nu_\beta | M | \nu_\alpha \rangle = m \delta_{\alpha\beta}$  por la propiedad de unitariedad (4) y no son posibles las transiciones  $\nu_\alpha \rightleftharpoons \nu_\beta$ . Las masas de los autoestados de sabor  $|\nu_\alpha\rangle$  son valores de expectación del operador de masa, es decir, promedios ponderados de las masas  $m_i$ :

$$m_\alpha \equiv \langle \nu_\alpha | M | \nu_\alpha \rangle = \sum_i \left| U_{\alpha i} \right|^2 \cdot m_i, \quad (23)$$

con  $\sum_\alpha m_\alpha = \sum_i m_i$  por la unitariedad (invariancia de la traza), donde  $\left| U_{\alpha i} \right|^2$  es la probabilidad de descubrir el estado  $|\nu_i\rangle$  en  $|\nu_\alpha\rangle$ .

### 3. Oscilaciones de vacío, caso N = 2

En esta sección, así como en el resto del presente trabajo, nos restingiremos al caso de dos generaciones, a fin de explicar con mayor claridad las ideas teóricas involucradas en la solución del problema de los neutrinos solares. El caso más realista de tres generaciones así como sus efectos y consecuencias, será discutido brevemente en la Sec. 11 [9].

Analicemos la evolución en el tiempo [10] de un haz de neutrinos que se propagan en el vacío. La ecuación de evolución en la base de los “autoestados físicos”  $|\nu_i\rangle$  es

$$i \frac{d}{dt} |\nu_i\rangle(t) = H_0 |\nu_i\rangle(t), \quad (24)$$

en donde  $H_0$  es el hamiltoniano del sistema, el cual es diagonal en esta base:

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Para estudiar el problema de los neutrinos solares es necesario que consideremos neutrinos cuyas energías sean del orden de 1 MeV. Los experimentos de laboratorio ponen los siguientes límites superiores en las masas de los distintos neutrinos [11]:

$$m_{\nu_e} < 2.2 \text{ eV}; m_{\nu_\mu} < 0.19 \text{ MeV}; m_{\nu_\tau} < 18.2 \text{ MeV}.$$

De esta manera se tiene que  $m_i \ll E_i$  para  $i = 1, 2$ , y en este caso podemos usar la aproximación relativista (Ec. (7)). Es por esta razón que es posible usar  $x$ , la distancia viajada por el neutrino, en vez de  $t$  como variable independiente. La diferencia entre  $t$  y  $x$  introducirá correcciones de orden mayor en  $m/E$ .

La evolución temporal de un haz de neutrinos de energía  $E$  está gobernado por el hamiltoniano

$$H_0 = \left( E + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} \right) - \frac{\Delta}{4E} \sigma_3, \quad (26)$$

en donde  $\sigma_3$  es la matriz diagonal de Pauli.

Para propósitos futuros, resulta conveniente reescribir la ecuación de evolución en la *base de sabor*. Podemos hacer esto fácilmente teniendo en cuenta que, a partir de la Ec. (3),  $|\nu_i\rangle = U^\dagger |\nu_\alpha\rangle$ , la cual nos da

$$i \frac{d}{dx} |\nu_\alpha\rangle = U H_0 U^\dagger |\nu_\alpha\rangle. \quad (27)$$

Para dos neutrinos del tipo Dirac, hay un ángulo de mezcla en el vacío  $\theta$  con  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  y ninguna fase de violación de  $CP$  (es decir, se conserva  $CP$ ). La matriz de mezcla  $U$  es dada por

y por lo tanto,

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (28)$$

y en la base de sabor el Hamiltoniano es dado por

$$H'_o = U H_o U^\dagger = E + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} + \frac{\Delta}{4E} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}. \quad (29)$$

De las relaciones (22) y (23) entre las masas de los neutrinos  $m_\alpha$  y  $m_i$  llegamos a

$$m_e = m_1 \cos^2 \theta + m_2 \sin^2 \theta,$$

$$m_\mu = m_1 \sin^2 \theta + m_2 \cos^2 \theta,$$

$$m_{\mu e} = \langle \nu_\mu | M | \nu_e \rangle = (m_2 - m_1) \cos \theta \sin \theta. \quad (30)$$

Resolviendo para  $m_1$ ,  $m_2$  y  $\theta$  llegamos a

$$m_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ m_e + m_\mu \mp \sqrt{(m_\mu - m_e)^2 + 4 m_{\mu e}^2} \right],$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 m_{\mu e}}{m_\mu - m_e}. \quad (31)$$

De esto, podemos deducir la relación entre el ángulo  $\theta$  y los elementos de la matriz  $H'_o$ :

$$\tan 2\theta = \frac{2 H'_{12}}{H'_{22} - H'_{11}}, \quad (32)$$

donde  $H'_o$  es independiente de  $x$ , y nosotros podemos formalmente integrar la ecuación de movimiento para obtener la solución

$$\nu_\alpha(x) = \exp(-i H'_o x) \nu_\alpha(0). \quad (33)$$

Los valores de la energía deberán aparecer siempre con algún subíndice, de tal manera que no exista posibilidad de confusión. Por otro lado, notemos que hay un término en  $H'_o$  que es proporcional a la matriz unitaria y contribuye con una fase global en la Ec. (33), tal término no afecta el ángulo de mezcla, como es visto en la Ec. (32), resultando irrelevante para nuestros propósitos, y por lo que podemos omitirlo. Tendremos entonces,

$$H'_o = \frac{\Delta}{4E} (\sigma_1 \sin 2\theta - \sigma_3 \cos 2\theta), \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \nu_\alpha(x) &= \exp \left[ -\frac{i\Delta}{4E} x (\sigma_1 \sin 2\theta - \sigma_3 \cos 2\theta) \right] \nu_\alpha(0) \\ &= \left[ \cos \frac{\Delta}{4E} x - i (\sigma_1 \sin 2\theta - \sigma_3 \cos 2\theta) \right. \\ &\quad \left. \times \sin \frac{\Delta}{4E} x \right] \nu_\alpha(0). \end{aligned} \quad (35)$$

La probabilidad de encontrar a un  $\nu_\mu$  o un  $\nu_e$  en un haz que inicialmente estaba compuesto únicamente de  $\nu_e$  es dada por

$$P_{\nu_e \nu_\mu}(x) = \left| \langle \nu_\mu(0) | \nu_e(x) \rangle \right|^2 = \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{\Delta}{4E} x \right),$$

$$P_{\nu_e \nu_e}(x) = \left| \langle \nu_e(0) | \nu_e(x) \rangle \right|^2 = 1 - P_{\nu_e \nu_\mu}(x). \quad (36)$$

Notemos que la probabilidad de encontrar un  $\nu_e$  es menor en general que la unidad. Gribov y Pontecorvo [10] sugirieron que esto podía ser la causa de la *disminución* del flujo de neutrinos del electrón observado en experimentos con neutrinos solares. Así mismo, debido a la conservación de la probabilidad

$$P_{\nu_e \nu_\mu} + P_{\nu_e \nu_e} = 1,$$

$P_{\nu_e \nu_e}$  se conoce como la *probabilidad de supervivencia del neutrino del electrón*.

Notemos, por otro lado, que estas fórmulas muestran explícitamente que las oscilaciones sólo ocurren si  $\theta \neq 0$  y  $\Delta \neq 0$ . Su amplitud es máxima para  $\theta = \pi/4$  (*mezcla máxima*).

#### 4. Oscilaciones en materia uniforme

En la discusión previa se ha supuesto que los neutrinos viajan a través del vacío, lo cual es una buena aproximación para el camino entre el Sol y la Tierra. Pero los neutrinos son producidos principalmente en el interior más profundo del Sol, y necesitan atravesar material de alta densidad antes de emerger del Sol. Las oscilaciones en el Sol, o en cualquier medio material, pueden ser muy diferentes de las oscilaciones en el vacío. La razón básica para esto, como lo dice Wolfenstein [4], es que las interacciones en un medio material modifican la relación de dispersión de las partículas que viajan a través de él. En otro contexto, estamos familiarizados con este fenómeno para el caso de los fotones. Ellos no tienen masa en el vacío y su relación de dispersión es simplemente  $E = |\mathbf{p}|$ . En un medio, sin embargo, la relación de dispersión es más complicada, lo cual puede ser interpretado diciendo que el fotón desarrolla una masa efectiva, y debido a esto, no viaja con velocidad  $c$  en un medio material.

Las relaciones de dispersión esencialmente dan la energía de una partícula en función de su momento. De esta manera, en el lenguaje cuántico, una diferente relación de dispersión

significa un diferente hamiltoniano del sistema. De esta forma, da una evolución diferente para la función de onda. Para un haz de neutrinos que viajan a través del material solar, la evolución es diferente de aquella que exhibiría el mismo haz viajando en el vacío.

El medio solar, por supuesto, es *no uniforme*. Antes de comenzar una discusión de la propagación del neutrino en tal medio, consideremos primero el caso más simple de un haz de neutrinos viajando a través de un medio de densidad uniforme. Como ya mencionamos las interacciones con el medio afectan la relación de dispersión de los neutrinos. Para cuantificar este efecto [4], consideremos la dispersión de un neutrino en materia. Básicamente el material solar está compuesto de electrones, protones y neutrones. De estos, el neutrino electrónico ( $\nu_e$ ) puede tener interacciones de corriente cargada únicamente con el electrón. El neutrino del muon ( $\nu_\mu$ ), por otro lado, participaría en las interacciones de corriente cargada solamente si los muones estuvieran presentes, pero las temperaturas del núcleo solar no son lo suficientemente altas para que esta condición sea satisfecha y lo mismo sucede para el neutrino del tau ( $\nu_\tau$ ). Por consiguiente, de ahora en adelante, consideraremos que las contribuciones de corriente cargada afectan sólo a  $\nu_e$ . El diagrama de Feynman para este proceso está dado en la Fig. 1. Esto da la amplitud (en la norma de 't Hooft-Feynman,  $\xi = 1$ ):

$$\left(\frac{ig}{\sqrt{2}}\right)^2 \left\{ \bar{e}_L(p_1) \gamma^\lambda \nu_{eL}(p_2) \right\} \frac{-ig_{\lambda\rho}}{q^2 - M_W^2} \times \left\{ \bar{\nu}_{eL}(p_3) \gamma_\rho e_L(p_4) \right\}, \quad (37)$$

donde el símbolo  $e_L(p)$  representa la componente izquierda para la energía positiva del campo del electrón y  $q^2 = (p_2 - p_1)^2$ .

Para las temperaturas del núcleo solar, la dependencia en el momento del propagador  $W$  puede ser despreciada, *i.e.*  $q^2 \ll M_W^2$ . Usando la definición de la constante de Fermi

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2}, \quad (38)$$

obtenemos el lagrangiano *efectivo* para interacción de corriente cargada

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{efec} &= -\frac{4G_F}{\sqrt{2}} \left\{ \bar{e}_L(p_1) \gamma^\lambda \nu_{eL}(p_2) \right\} \left\{ \bar{\nu}_{eL}(p_3) \gamma_\lambda e_L(p_4) \right\} \\ &= -\frac{4G_F}{\sqrt{2}} \left\{ \bar{e}_L(p_1) \gamma^\lambda e_L(p_4) \right\} \left\{ \bar{\nu}_{eL}(p_3) \gamma_\lambda \nu_{eL}(p_4) \right\}, \quad (39) \end{aligned}$$

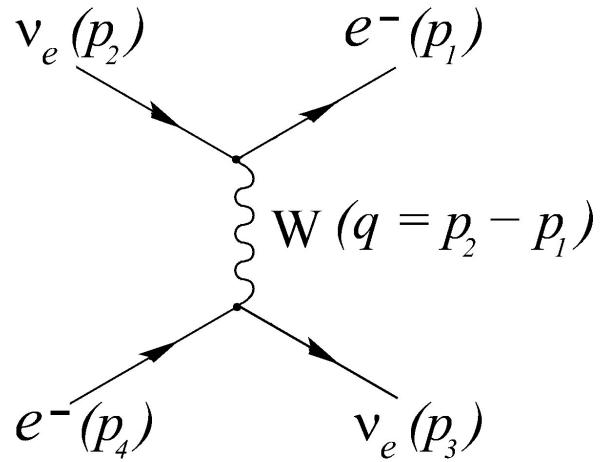


FIGURA 1. La dispersión de corriente cargada de los neutrinos del electrón con los electrones.

donde la segunda igualdad es obtenida vía la transformación de Fierz<sup>1</sup>. Para la dispersión hacia adelante, donde  $p_2 = p_3 = p$ , el cuadrimomento del neutrino no cambia. Observando tal situación, sería imposible saber que un fenómeno de dispersión ha tenido lugar. En tal caso pensaremos simplemente que el neutrino se está propagando con un cuadrimomento  $p$ . Por consiguiente, esto daría la siguiente contribución a la propagación del  $\nu_e$ :

$$-\frac{4G_F}{\sqrt{2}} \left\langle \bar{e} \gamma^\lambda \left( \frac{1 - \gamma_5}{2} \right) e \right\rangle \bar{\nu}_{eL}(p) \gamma_\lambda \nu_{eL}(p), \quad (40)$$

después de promediar.

La temperatura del núcleo solar tiene un valor mucho menor que la masa del electrón. Por lo tanto podemos considerar que los electrones son no relativistas, en cuyo caso los promedios involucrados en la Ec. (40) dan lo siguiente:

$$\begin{aligned} \langle \bar{e} \gamma_\lambda \gamma_5 e \rangle &\sim \text{espín}, \\ \langle \bar{e} \gamma_i e \rangle &\sim \text{velocidad}, \\ \langle \bar{e} \gamma_0 e \rangle &\sim N_e. \end{aligned} \quad (41)$$

Los electrones no están polarizados en el Sol, de tal manera que el valor esperado de espín es cero. El promedio de velocidad en el medio termal también se hace cero. De lo anterior obtenemos la siguiente contribución al lagrangiano efectivo de las interacciones de corriente cargada:

$$-\sqrt{2} G_F N_e \bar{\nu}_{eL} \gamma_0 \nu_{eL}. \quad (42)$$

<sup>1</sup> NOTA: La transformación de Fierz es:  $[\bar{u}_1 \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u_2][\bar{u}_3 \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) u_4] = -[\bar{u}_1 \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u_4][\bar{u}_3 \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u_2]$ . Para la derivación de esta y otras identidades de Fierz, ver por ejemplo el libro de C. Itzykson and J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*, Mc. Graw-Hill, (1980), p. 160.

Ahora, consideraremos la contribución de corriente neutra. La interacción efectiva es

$$\mathcal{L}_{efec} = -\frac{4G_F}{\sqrt{2}} \left\{ \bar{f}(p_1) \gamma^\lambda \left( I_{3L} \left( \frac{1 - \gamma_5}{2} \right) - Q \sin^2 \theta_W \right) f(p_2) \right\} \left\{ \bar{\nu}(p_3) \gamma_\lambda \nu_L(p_4) \right\}, \quad (43)$$

donde  $f$  significa electrones, protones y neutrones. El simbolo  $\nu$  puede ser tanto para  $\nu_e$  o  $\nu_\mu$ , dado que ambos tienen iguales interacciones de corriente neutra. La contribución para la propagación hacia adelante puede ser determinada exactamente en la misma forma como en el caso anterior de corriente cargada. Uno obtiene la siguiente contribución al lagrangiano efectivo:

$$-\sqrt{2}G_F \left[ \sum_f N_f \left( I_{3L}^f - 2 \sin^2 \theta_W Q^f \right) \right] \bar{\nu} \gamma_0 \nu_L. \quad (44)$$

En esta ecuación,  $I_{3L}^f$ , denota el tercer componente de *isoespín débil* para el fermión  $f$ , y  $Q^f$  es la carga eléctrica del mismo. Para el electrón, protón y neutrón, los valores de estas cantidades son los siguientes:

	$I_{3L}$	$Q$
e	$-\frac{1}{2}$	-1
p	$\frac{1}{2}$	1
n	$-\frac{1}{2}$	0

Gracias a esto se observa que en la Ec. (44), las contribuciones del protón y el electrón se cancelan en un medio neutro donde  $N_e = N_p$ . Y el término de corriente neutra al lagrangiano efectivo entonces se reduce a:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} G_F N_n \left( \bar{\nu}_{eL} \gamma_0 \nu_{eL} + \bar{\nu}_{\mu L} \gamma_0 \nu_{\mu L} \right). \quad (45)$$

Resumiendo, las contribuciones debidas a corriente neutra y cargada, tomadas juntas, añaden los siguientes términos al lagrangiano efectivo, los cuales son cuadráticos en los campos del neutrino:

$$\mathcal{L}_{efec} = - \sum_{l=e,\mu} \bar{\nu}_{lL} \gamma_0 V_{\nu_l} \nu_{lL}, \quad (46)$$

donde

$$V_{\nu_e} = \sqrt{2} G_F \left( N_e - \frac{1}{2} N_n \right),$$

$$V_{\nu_\mu} = -\frac{1}{\sqrt{2}} G_F N_n. \quad (47)$$

El significado de tales términos lo podemos entender mediante la ecuación de Dirac

$$\left\{ \gamma_0 E - \Gamma \cdot \mathbf{p} - m \right\} \Psi = \gamma_0 V \Psi. \quad (48)$$

Rearreglando los términos

$$\gamma_0 (E - V) \Psi = \left\{ \Gamma \cdot \mathbf{p} + m \right\} \Psi \quad (49)$$

y elevando al cuadrado ambos miembros, finalmente obtenemos

$$E = \sqrt{p^2 + m^2} + V. \quad (50)$$

De esta manera,  $V$  se añade a la energía para un momento dado. En este sentido,  $V$  será llamada la energía potencial. La ecuación de evolución en materia está por consiguiente dada por

$$i \frac{d}{dx} |\nu_\alpha\rangle = H |\nu_\alpha\rangle, \quad (51)$$

donde, usando la Ec. (50), podemos escribir el hamiltoniano como

$$H = H'_o + \begin{pmatrix} \sqrt{2} G_F \left( N_e - \frac{1}{2} N_n \right) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} G_F N_n \end{pmatrix}, \quad (52)$$

en donde  $H'_o$  es el hamiltoniano en el vacío, dado por la Ec. (34). De esta manera llegamos a que

$$H = E + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} - \frac{1}{\sqrt{2}} G_F N_n + \frac{1}{2E} \widetilde{M}^2; \quad (53)$$

como antes  $E$  es la magnitud de la energía del neutrino y

$$\widetilde{M}^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\Delta \cos 2\theta + 2A & \Delta \sin 2\theta \\ \Delta \sin 2\theta & \Delta \cos 2\theta \end{pmatrix}, \quad (54)$$

donde hemos definido

$$A \equiv 2 \sqrt{2} G_F N_e E. \quad (55)$$

El ángulo de mezcla efectivo en materia,  $\widetilde{\theta}$ , está dado en forma análoga a la Ec. (32) por

$$\tan 2\widetilde{\theta} = \frac{2H_{12}}{H_{22} - H_{11}} = \frac{\Delta \sin 2\theta}{\Delta \cos 2\theta - A} \quad (56)$$

y los vectores propios estacionarios son

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}_1 &= \nu_e \cos \tilde{\theta} - \nu_\mu \sin \tilde{\theta}, \\ \tilde{\nu}_2 &= \nu_e \sin \tilde{\theta} + \nu_\mu \cos \tilde{\theta}.\end{aligned}\quad (57)$$

Analizando los vectores propios se encuentran rasgos interesantes. Consideremos que el ángulo de mezcla en el vacío es pequeño, entonces, para  $N_e \rightarrow 0$ ,  $\tilde{\theta} \rightarrow \theta$ , tal que  $\tilde{\nu}_1 \simeq \nu_e$ . Para el otro extremo tenemos que cuando  $N_e \rightarrow \infty$ ,  $\tilde{\theta} \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , tal que  $\tilde{\nu}_1 \simeq \nu_\mu$ . En otras palabras, el estado propio de masa inferior es casi puramente  $\nu_e$  si la densidad de materia se anula, y es casi puramente  $\nu_\mu$  si la densidad de materia es muy grande. Este hecho tiene consecuencias muy importantes. La relación energía-momento en materia está dada por los valores propios de la matriz  $\tilde{H}$ , los cuales son

$$\tilde{E}_\alpha = E - \frac{1}{\sqrt{2}} G_F N_n + \frac{\tilde{m}_\alpha^2}{2E}, \quad (58)$$

donde

$$\begin{aligned}\tilde{m}_{1,2}^2 &= \frac{1}{2} \left[ \left( m_1^2 + m_2^2 + A \right) \right. \\ &\quad \left. \mp \sqrt{\left( \Delta \cos 2\theta - A \right)^2 + \Delta \sin^2 2\theta} \right].\end{aligned}\quad (59)$$

Estos valores propios han sido graficados en la Fig. 2 como función de  $A$ . La figura también muestra los elementos diagonales de la matriz  $\tilde{H}$ , los cuales son los valores esperados de energía para los estados  $\nu_e$  y  $\nu_\mu$ . De la figura se puede ver que  $\tilde{E}_1$  está cercano a  $\langle \tilde{E}_{\nu_e} \rangle$  para densidades bajas mientras que está cercano a  $\langle \tilde{E}_{\nu_\mu} \rangle$  para densidades altas. Esto trae consigo el hecho de que  $\tilde{\nu}_1$  es principalmente  $\nu_e$  a bajas densidades y principalmente  $\nu_\mu$  a altas densidades. Lo opuesto es cierto para  $\tilde{\nu}_2$ .

Si un medio tiene una densidad dada por  $A = \Delta \cos 2\theta$ , los dos elementos diagonales son iguales. En este caso, la Ec. (56) muestra que el ángulo de mezcla efectivo es  $\frac{\pi}{4}$ , lo cual nos habla de que los estados  $\nu_e$  y  $\nu_\mu$  están mezclados de forma máxima en los estados propios. La naturaleza de esta mezcla máxima es mejor entendida si, de la Ec. (56), escribimos abajo la expresión para  $\sin^2 2\tilde{\theta}$ :

$$\sin^2 2\tilde{\theta} = \frac{\Delta^2 \sin^2 2\theta}{\left( \Delta \cos 2\theta - A \right)^2 + \Delta^2 \sin^2 2\theta}. \quad (60)$$

Para apreciar el significado físico del lado izquierdo de la ecuación anterior, necesitamos regresar a la Ec. (36), la cual da la probabilidad de supervivencia y conversión de un haz de  $\nu_e$  viajando a través del vacío. Las probabilidades correspondientes para un haz viajando a través de un medio uniforme

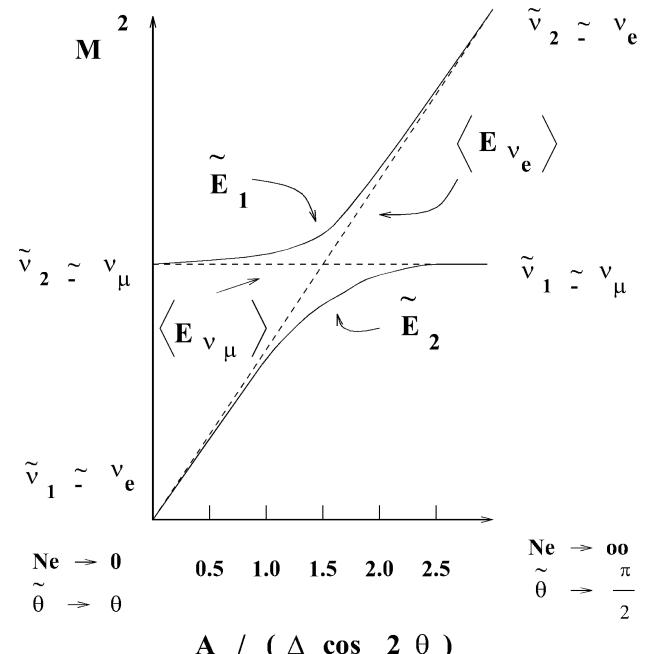


FIGURA 2. Energías efectivas de neutrinos en un medio. La cantidad  $A$  es proporcional a la densidad del número de electrones. Las líneas continuas son las energías para los estados propios físicos, las punteadas son los valores esperados de energía para los estados de sabor. La escala en el eje vertical es arbitraria. El ángulo de mezcla  $\theta$  en el vacío se ha tomado que es 0.1 para la gráfica.

pueden ser obtenidas reemplazando  $\theta$  por  $\tilde{\theta}$  y  $\Delta$  por la diferencia de masa efectiva en el medio. Tomando el promedio del término dependiente de  $x$ , obtenemos

$$1 - \bar{P}_{\nu_e \nu_e} = \bar{P}_{\nu_e \nu_\mu} = \frac{1}{2} \sin^2 2\tilde{\theta}. \quad (61)$$

De esta manera, el término del extremo izquierdo de la Ec. (60) es proporcional a la probabilidad promedio de conversión. El término del lado derecho muestra que, como una función de  $A$ , la probabilidad de conversión tiene la siguiente clase de comportamiento:

$$\frac{\text{Constante}}{\left( A - A_R \right)^2 + \Gamma^2}. \quad (62)$$

Ésta es exactamente la expresión para una resonancia *Breit-Wigner* de amplitud  $\Gamma$  y centrada en  $A_R$  (ver Fig. 3).

Así, lo importante de la Ec. (60) puede ser resumido como sigue: la probabilidad de conversión, como una función de  $A$ , tiene una *resonancia* en

$$A_R = \Delta \cos 2\theta, \quad (63)$$

con amplitud

$$\Gamma = \Delta \sin 2\theta \quad (64)$$

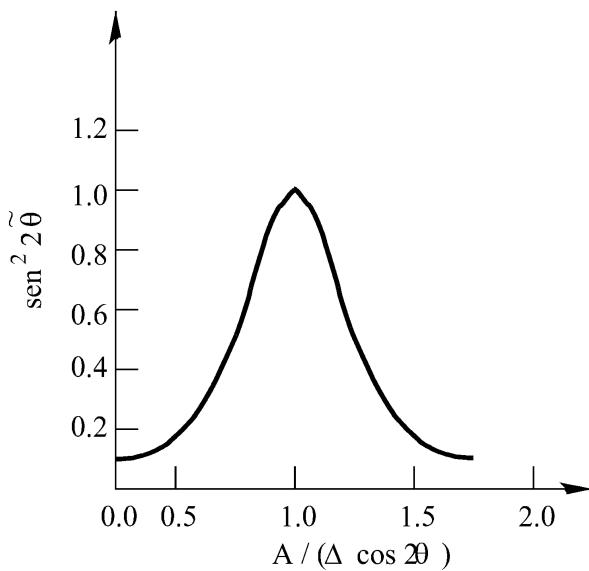


FIGURA 3. La curva del  $\text{sen}^2 2\tilde{\theta}$  muestra la forma resonante. El ángulo de mezcla  $\theta$  en el vacío es de 0.1 para la gráfica.

Mikeyev y Smirnov [6] fueron los primeros en darse cuenta de la importancia de la presencia de tal resonancia en el contexto del problema de los neutrinos solares.

## 5. Conversión resonante del neutrino

La observación crucial de Mikeyev y Smirnov [6] fue que los neutrinos producidos en las profundidades del Sol, en general, pasan a través de una región de densidad resonante en su camino hacia fuera del Sol. Para ver cómo efecta esto la propagación de los neutrinos, primeramente tenemos que derivar la ecuación de evolución de los estados propios “instantáneos” para *materia con densidad no uniforme*, como en el Sol. Comenzaremos con la ecuación para los estados de sabor,

$$i \frac{d}{dx} |\nu_\alpha\rangle = \frac{1}{2E} \widetilde{M}^2 |\nu_\alpha\rangle. \quad (65)$$

Ésta es la misma que la Ec. (53), excepto que omitimos los términos proporcionales a la matriz identidad, debido a que no afectan las probabilidades.

Ahora

$$|\nu_\alpha\rangle = \widetilde{U} |\tilde{\nu}_i\rangle, \quad (66)$$

donde  $\widetilde{U}$  es una matriz similar a aquella que definimos en la Ec. (28), con el ángulo  $\theta$  reemplazado por  $\tilde{\theta}$ , el ángulo de mezcla efectivo en materia. Reescribiendo la ecuación de evolución como

$$i \frac{d}{dx} (\widetilde{U} |\tilde{\nu}_i\rangle) = \frac{1}{2E} \widetilde{M}^2 \widetilde{U} |\tilde{\nu}_i\rangle. \quad (67)$$

Tomando la derivada, debemos recordar que, en la materia no uniforme,  $\tilde{\theta}$  y consecuentemente  $\widetilde{U}$  son diferentes en diferentes posiciones. De aquí que

$$i \widetilde{U} \frac{d}{dx} |\tilde{\nu}_i\rangle + i \left( \frac{d}{dx} \widetilde{U} \right) |\tilde{\nu}_i\rangle = \frac{1}{2E} \widetilde{M}^2 \widetilde{U} |\tilde{\nu}_i\rangle. \quad (68)$$

Usando la unitariedad de la matriz  $\widetilde{U}$ , obtenemos la ecuación de evolución para los estados físicos  $|\tilde{\nu}_i\rangle$ :

$$i \frac{d}{dx} |\tilde{\nu}_i\rangle = \left( \frac{1}{2E} \widetilde{U}^\dagger \widetilde{M}^2 \widetilde{U} - i \widetilde{U}^\dagger \frac{d}{dx} \widetilde{U} \right) |\tilde{\nu}_i\rangle. \quad (69)$$

El término  $\widetilde{U}^\dagger \widetilde{M}^2 \widetilde{U}$  también es obtenido para la materia uniforme, y da, independientemente de los términos proporcionales a la matriz unitaria, los *valores propios instantáneos*  $\tilde{m}_1^2$  y  $\tilde{m}_2^2$  en las entradas de la diagonal. El otro término puede ser calculado usando la fórmula explícita de  $U$  a partir de la Ec. (28). De todo ello obtenemos [12]

$$i \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1 \\ \tilde{\nu}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_1^2}{2E} & i \frac{d\tilde{\theta}}{dx} \\ -i \frac{d\tilde{\theta}}{dx} & \frac{m_2^2}{2E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1 \\ \tilde{\nu}_2 \end{pmatrix}. \quad (70)$$

Notemos que si  $(d\tilde{\theta}/dx) = 0$ ,  $\tilde{\nu}_1$  y  $\tilde{\nu}_2$  son de hecho estados propios estacionarios. Este es el resultado que se obtuvo para un medio uniforme. Para un medio no uniforme como el del Sol, tendremos que resolver esta ecuación para así poder hallar diferentes probabilidades de supervivencia.

## 6. Solución adiabática

Para ciertas situaciones muy particulares, es fácil hallar una solución a la Ec. (70). Éste es el caso cuando  $\frac{d\tilde{\theta}}{dx}$  es pequeña, de tal manera que podemos hacer uso de la *aproximación adiabática*. Posteriormente cuantificaremos qué tan pequeña deberá de ser  $\frac{d\tilde{\theta}}{dx}$ . Asumiremos aquí que la condición adiabática es la más relevante y que se encuentra satisfecha [12, 13]. En este caso,  $\tilde{\nu}_1$  pasará prácticamente como  $\tilde{\nu}_1$ , que corresponde a una superposición diferente de  $\nu_e$  y  $\nu_\mu$  en diferentes puntos. Lo mismo es cierto para  $\tilde{\nu}_2$ , y esto puede suprimir el flujo de neutrinos.

Supongamos que  $A_0 \rightarrow \infty$  (i.e.,  $N_e \rightarrow \infty$ ), donde el subíndice “0”, denotará las cantidades en el punto de producción. De las Ecs. (56) y (57), tenemos entonces que

$$\tilde{\theta} \rightarrow \frac{\pi}{2}, \quad \text{i.e.,} \quad \nu_e \simeq \tilde{\nu}_2. \quad (71)$$

Este haz de  $\tilde{\nu}_2$  sale del Sol, en donde  $A = 0$ . Y allí

$$\tilde{\nu}_2 = \nu_2 = \nu_e \text{ sen } \theta + \nu_\mu \text{ cos } \theta. \quad (72)$$

La probabilidad de encontrar  $\nu_e$  en el haz es dada por  $|\langle \nu_e | \nu_2 \rangle|^2$ . Poniendo el superíndice “(ad)” para recordar que estamos tratando con la solución adiabática y podemos escribir

$$P_{\nu_e \nu_e}^{(ad)} = \sin^2 \theta, \quad \text{para } A_0 \rightarrow \infty. \quad (73)$$

Debemos recordar que comenzamos con un haz el cual era casi puramente  $\nu_e$ . Después que emerge del Sol, vemos que la probabilidad de encontrar al mismo  $\nu_e$  en el haz es  $\sin^2 \theta$ . Si  $\theta$  es pequeño, esto puede significar una tremenda supresión de esta especie. Ésta es la esencia principal del mecanismo resonante de conversión de los neutrinos, el cual es usualmente llamado “*efecto Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein*” o más brevemente “*efecto MSW*” después de los artículos pioneros de estos autores [4, 6].

En general, en el punto de creación, el ángulo de mezcla efectivo no es  $(\pi/2)$ , sino que tiene algún valor  $\tilde{\theta}_0$ . En este caso,

$$\nu_e = \tilde{\nu}_1 \cos \tilde{\theta}_0 + \tilde{\nu}_2 \sin \tilde{\theta}_0. \quad (74)$$

De esta manera, hay una probabilidad  $\cos^2 \tilde{\theta}_0$  de que el neutrino sea producido como un  $\tilde{\nu}_1$ . Si eso sucede, viajará fuera del Sol como un  $\tilde{\nu}_1$ , donde puede ser detectado como un  $\nu_e$  con una probabilidad  $\cos^2 \theta$ . Esto contribuye con un término  $\cos^2 \tilde{\theta}_0 \cos^2 \theta$  a la probabilidad de supervivencia  $P_{\nu_e \nu_e}$ . Alternativamente el neutrino puede ser producido como  $\tilde{\nu}_2$ , con una probabilidad  $\sin^2 \tilde{\theta}_0$ . En este caso, la probabilidad de que sea detectado, como  $\nu_e$  es  $\sin^2 \theta$ . Uniendo estos dos casos, obtendremos la probabilidad de supervivencia total:

$$\begin{aligned} P_{\nu_e \nu_e}^{(ad)} &= \cos^2 \tilde{\theta}_0 \cos^2 \theta + \sin^2 \tilde{\theta}_0 \sin^2 \theta \\ &= \frac{1}{4} (1 + \cos 2\tilde{\theta}_0) (1 + \cos 2\theta) \\ &\quad + \frac{1}{4} (1 - \cos 2\tilde{\theta}_0) (1 - \cos 2\theta) \\ &= \frac{1}{2} [1 + \cos 2\tilde{\theta}_0 \cos 2\theta]. \end{aligned} \quad (75)$$

La probabilidad de conversión a  $\nu_\mu$  estará entonces dada por

$$P_{\nu_e \nu_\mu}^{(ad)} = 1 - P_{\nu_e \nu_e}^{(ad)} = \frac{1}{2} [1 - \cos 2\tilde{\theta}_0 \cos 2\theta]. \quad (76)$$

Más formalmente, para la detección de un  $\nu_e$  a una distancia  $x$  del punto de producción, podemos escribir

$$\begin{aligned} P_{\nu_e \nu_e}^{(ad)}(x) &= \left| \langle \nu_e(x) | \nu_e(0) \rangle \right|^2 \\ &= \left| \sum_{\alpha \alpha'} \langle \nu_e(x) | \nu_{\alpha'}(x) \rangle \langle \nu_{\alpha'}(x) | \nu_\alpha(0) \rangle \right. \\ &\quad \left. \times \langle \nu_\alpha(0) | \nu_e(0) \rangle \right|^2, \end{aligned} \quad (77)$$

introduciendo el conjunto completo de estados  $\nu_\alpha$ . Los productos internos más a la derecha y más a la izquierda dan los elementos de la matriz de mezcla en los puntos de detección y producción.

El elemento medio de la matriz da una fase correspondiente a la propagación adiabática de los estados  $\nu_\alpha$ , la cual es

$$\exp \left( i \int_0^x dx' \widetilde{E}_\alpha(x') \right). \quad (78)$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned} P_{\nu_e \nu_e}^{(ad)}(x) &= \left| e^{\left( i \int dx' \widetilde{E}_1 \right)} \cos \tilde{\theta}_0 \cos \theta \right. \\ &\quad \left. + e^{\left( i \int dx' \widetilde{E}_2 \right)} \sin \tilde{\theta}_0 \sin \theta \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos 2\tilde{\theta}_0 \cos 2\theta + \sin 2\tilde{\theta}_0 \sin 2\theta \right. \\ &\quad \left. \times \cos \left( \int_0^x dx' (\widetilde{E}_2 - \widetilde{E}_1) \right) \right]. \end{aligned} \quad (79)$$

Los valores de  $\widetilde{E}_2$  y  $\widetilde{E}_1$  dependen del momento del haz de neutrinos. En las Ecs. (75) y (76), asumiremos que el coseno, cuyo argumento es la integral de la diferencia de las energías desaparece cuando sumamos sobre todo el rango de momentos de los neutrinos detectados en un experimento terrestre.

## 7. Efectos no adiabáticos

Los efectos no adiabáticos inducen transiciones entre los estados  $\tilde{\nu}_1$  y  $\tilde{\nu}_2$ . Más adelante, mostraremos que para valores realistas de los parámetros, tales efectos son importantes sólo cerca de la región de resonancia [14]. Para otras regiones, la aproximación adiabática es una buena aproximación y puede ser usada sin problemas. En la región de resonancia, debemos resolver la ecuación de propagación de manera exacta, asumiendo alguna forma simplificada para el perfil de densidad que sea aproximadamente válido en esa región. A partir de dicha solución podemos hallar la probabilidad  $P_c$  de que en dicha región tenga lugar la transición de un estado propio a otro. Supongamos un estado  $\nu_e$  que es producido en el interior del Sol y que sobrevive como tal con una probabilidad  $P_{\nu_e \nu_e}$ , si las condiciones fueran adiabáticas. En el caso no adiabático, es posible que todavía pueda continuar como un  $\nu_e$  y la probabilidad de dicho evento sería de  $1 - P_c$ . Por otro lado, situaciones en las cuales debieron haber terminado en un  $\nu_\mu$  en el caso adiabático, pueden alcanzar en estado  $\nu_e$  en

el caso no adiabático si ocurre una transición. Tomando en cuenta los efectos no adiabáticos, tenemos [15]

$$\begin{aligned} P_{\nu_e \nu_e} &= \left(1 - P_c\right) P_{\nu_e \nu_e}^{(ad)} + P_c P_{\nu_e \nu_\mu}^{(ad)} \\ &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \left(1 - 2P_c\right) \cos 2\tilde{\theta}_0 \cos 2\theta \right], \end{aligned} \quad (80)$$

donde las probabilidades adiabáticas fueron tomadas de las Ecs. (75) y (76). Despues, encontraremos  $P_c$  en términos de los parámetros fundamentales  $\Delta$  y  $\theta$ . Una vez que esto es conocido, la Ec. (80) da una formula analítica para determinar la probabilidad de supervivencia de un  $\nu_e$  viajando hacia afuera del Sol.

Consideremos, para esto, un neutrino que es producido en la mitad más lejana del Sol. Existe una cierta probabilidad no nula de que viajará hacia la Tierra. Si esto es así, pasará a través de la región del núcleo solar. Si este neutrino es creado lo suficientemente lejos del centro en el Sol, donde la densidad es más baja que la densidad de resonancia, cruzará una vez dicha región en su camino hacia el centro del Sol. Despues de esto, cruzará de nuevo la región de resonancia, esta vez en su camino hacia fuera del Sol. Razonando de manera similar al caso anterior, podemos hallar la probabilidad de supervivencia en este caso [16]. Aquí,  $P_{\nu_e \nu_e}^{(ad)}$  será multiplicada por la probabilidad de que el neutrino *cruce* cerca de una región de resonancia, pero que no cruce cerca de la otra. De esta manera,

$$\begin{aligned} P_{\nu_e \nu_e} &= \left[ \left(1 - P_c\right)^2 + \left(P_c\right)^2 \right] P_{\nu_e \nu_e}^{(ad)} + 2P_c \left(1 - P_{\nu_e \nu_\mu}^{(no ad)}\right) P_{\nu_e \nu_\mu}^{(ad)} \\ &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \left(1 - 2P_c\right)^2 \cos 2\tilde{\theta}_0 \cos 2\theta \right]. \end{aligned} \quad (81)$$

Así, las Ecs. (80) y (81) nos dan expresiones analíticas para la probabilidad de supervivencia en el caso general de que podamos expresar  $P_c$  como una función de los parámetros del problema.

## 8. El parámetro adiabático

Retomaremos ahora la matriz hamiltoniana de la Ec. (70). Las soluciones adiabáticas se obtuvieron suponiendo que  $\tilde{\theta}$  es un parámetro que varía muy ligeramente. Cuantificaremos ahora este enunciado, lo cual también llevará a una plausible expresión para  $P_c$ . Dicho de manera más precisa, la condición adiabática significa que los términos fuera de la diagonal en la matriz de la Ec. (70) son mucho menores que los términos de la diagonal principal. Al escribir la ecuación de evolución, omitimos los términos proporcionales a la matriz unidad por conveniencia. Tales términos modifican los elementos diagonales, pero sin embargo, mantendrán su diferencia sin cambio. De esta forma, en lo que a los elementos diagonales se refiere, no es el valor de cada uno de ellos por separado lo

que es relevante, sino su diferencia. Por consiguiente, la condición adiabática es dada por

$$\left| \frac{d\tilde{\theta}}{dx} \right| \ll \frac{|\tilde{m}_1^2 - \tilde{m}_2^2|}{2E}. \quad (82)$$

Usando la expresión para  $\tilde{\theta}$  en la Ec. (56) tendremos

$$\frac{d\tilde{\theta}}{dx} = \sqrt{2}G_F E \frac{\Delta \sin 2\theta}{\left(\Delta \cos 2\theta - A\right)^2 + \Delta^2 \sin^2 2\theta} \cdot \frac{dN_e}{dx}. \quad (83)$$

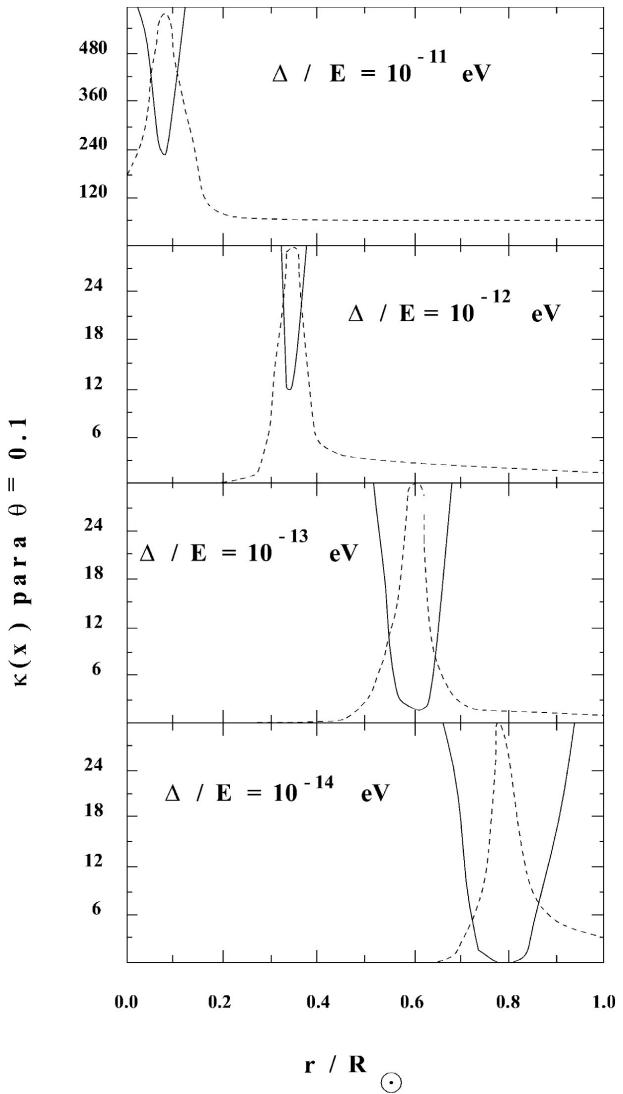


FIGURA 4. Las líneas sólidas dan el parámetro adiabático  $\kappa(x)$  como función de la distancia del núcleo solar, para varios valores de los parámetros  $\Delta/E$ . El ángulo de mezcla en el vacío ha sido tomado como 0.1. La altura de las líneas punteadas es proporcional a los valores de  $\sin^2 2\tilde{\theta}$  para un neutrino producido en el núcleo solar, con el pico indicando el punto de resonancia. Notemos el cambio de escala en la gráfica superior.

Los valores propios de la masa elevados al cuadrado fueron dados en la Ec. (59). Usándolos, reducimos la condición adiabática en la Ec. (82) a la forma

$$\left| \frac{dN_e}{dx} \right| \ll \frac{\left[ (\Delta \cos 2\theta - A)^2 + \Delta^2 \sin^2 2\theta \right]^{3/2}}{2 \sqrt{2} G_F E^2 \cdot \Delta \sin 2\theta}. \quad (84)$$

Retomando la expresión para el ángulo de mezcla efectivo de la Ec. (60), la expresión anterior puede ser reescrita como

$$\kappa(x) \gg 1, \quad (85)$$

donde la cantidad

$$\kappa(x) \equiv \frac{\left( \frac{\Delta}{E} \right)^2}{2 \sqrt{2} G_F} \cdot \frac{\sin^2 2\theta}{\sin^3 2\theta} \cdot \frac{1}{\left| \frac{dN_e}{dx} \right|} \quad (86)$$

es el llamado “*parámetro adiabático*”, el cual depende de la posición vía  $\theta$  y  $(dN_e/dx)$ . Si la densidad es muy alta en algún punto,  $\tilde{\theta} \rightarrow (\pi/2)$  y  $\kappa(x)$  llega a ser muy grande. Por el contrario, si la densidad de la materia se anula en algún lugar,  $\tilde{\theta} \rightarrow \theta$ , y de nuevo  $\kappa(x)$  será grande a menos que  $\theta$  tenga un valor cercano a  $(\pi/4)$ . En la Fig. 4 se grafica  $\kappa(x)$  para varios valores de  $\Delta/E$  y  $\theta$ , asumiendo que el perfil de densidad está dado por [17]

$$N_e(r) = N_e(0) \exp \left( - \frac{az^2}{z+b} \right), \quad (87)$$

donde  $z = r/R_\odot$ . Los valores de los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $N_e(0)$  que fueron usados son presentados en la Tabla I.  $N_e(0)$  da el valor de la densidad de electrones en el centro del Sol, expresada en términos del número de Avogadro de partículas por  $cm^3$ :

$$N_{AVO} = 6.03 \times 10^{23} / cm^3 \quad (88)$$

Los valores de los parámetros presentados en la Tabla I dan un buen ajuste de los valores de  $N_e$  obtenidos del modelo solar estándar, y según puede verse en la Fig. 5.

De la Ec. (86), es obvio que la condición adiabática es más difícil de satisfacer en el punto de resonancia, donde el  $\sin 2\theta$  es máximo. En efecto en todos los casos mostrados en la Fig. 5 las regiones alejadas del punto de resonancia pueden siempre ser tratadas adiabáticamente [14]. La probabilidad  $P_c$  de transición introducida anteriormente depende únicamente de las condiciones cerca de la resonancia. El valor del parámetro adiabático  $\kappa(x)$  evaluado en la resonancia lo llamaremos simplemente como  $\kappa_R$ , el cual puede obtenerse de la Ec. (86) poniendo  $\sin 2\theta = 1$ . Si hacemos uso de la expresión para la densidad resonante

TABLA I. Medidas analíticas para las densidades de electrones y neutrones en el Sol. De la referencia [17]. Los parámetros dados aquí deben ser puestos en la forma funcional de la Ec. (87).

Cantidad	$N(0)/N$	a	b
$N_e$	98,8	11,1	0,15
$N_n$	48,4	11,1	0,02
$N_e - \frac{1}{2} N_n$	74,6	11,1	0,20

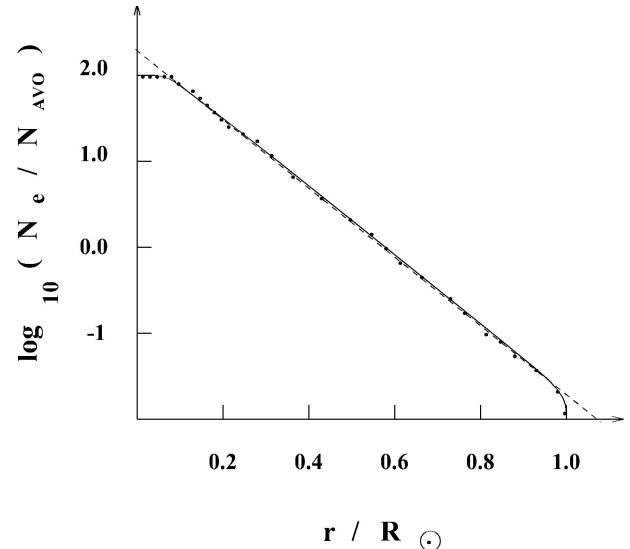


FIGURA 5. Los puntos son obtenidos de los cálculos del modelo solar estándar. La línea sólida es donde se ajusta la Ec. (87).

$$N_R = \frac{\Delta \cos 2\theta}{2 \sqrt{2} G_F E} \quad (89)$$

que resulta de la Ec. (63) y de la definición para A, nos queda

$$\kappa_R \equiv \frac{\Delta}{E} \cdot \frac{\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta} \cdot \frac{1}{\left| \frac{d}{dx} \ln N_e \right|_R}. \quad (90)$$

Por supuesto si  $\kappa_R \gg 1$ , entonces la propagación es adiabática en todas partes, mientras que, si  $\kappa_R \lesssim 1$ , entonces  $P_c$  es apreciable.

Es claro que  $P_c$  debe de ser más grande para valores mayores de  $E$ , lo cual significa que cuanto más energéticos sean los neutrinos deben cruzar más rápidamente. Cuando  $E \rightarrow 0$ ,  $P_c$  debe desaparecer. También,  $P_c$  no puede ser un polinomio en  $E$  dado que el cruce de niveles es esencialmente un efecto no perturbativo. Estas consideraciones sugirieron una forma de solución exponencial dada por Haxton y Parke [18],

$$P_c = \exp \left( - \kappa_R F \right), \quad (91)$$

donde la cantidad  $F$  es independiente de  $E$  y depende de la forma como varía  $N_e$  cerca de la resonancia.

Por otro lado, D'Olivo [19] usando la aproximación de Magnus, obtuvo una expresión analítica para la probabilidad de transición cuando los efectos no adiabáticos comienzan a ser importantes, es decir cuando  $\kappa_R \lesssim 1$ , la cual reproduce el límite adiabático y considera efectivamente la salida desde la adiabaticidad cuando nos movemos hacia el régimen no adiabático o también conocido como régimen repentino, reproduciendo satisfactoriamente en forma general la probabilidad de supervivencia del neutrino solar como una función de la energía. Dicha fórmula se comporta cualitativa y cuantitativamente mejor que la Ec. (91) citada arriba, para todo el rango de valores de energía de los neutrinos, sin hacer uso de un perfil específico de densidad.

## 9. La aproximación semicásica

La probabilidad de transición no adiabática entre dos estados fue calculada independientemente por Landau [20], Zener [21] y Stückelberg [22] en el contexto de los problemas en física nuclear, y fue aplicada al presente caso por Parke [15] y por Haxton [23]. Para encontrar el comportamiento principal en la aproximación semicásica, podemos usar el método de Landau de la trayectoria compleja [24].

Este método da

$$\ln(P_c) = -2 \Im m \left[ S_1(t_1, t_*) + S_2(t_*, t_2) \right], \quad (92)$$

donde  $S_1(t_1, t_*)$ , por ejemplo, denota la acción para el movimiento del haz de neutrinos en el estado  $\tilde{\nu}_1$  de algún tiempo inicial  $t_1$  a un tiempo de transición  $t_*$ , el cual especificaremos más adelante. Después del tiempo  $t_*$  es usada la acción en el estado  $\tilde{\nu}_2$  hasta algún tiempo final  $t_2$  cuando el haz de neutrinos proviene de la región no adiabática. Las partes imaginarias de la acción permanecen sin ser afectadas si tomamos  $t_1 = t_2 = t_R$ , siendo  $t_R$  el tiempo en el cual el haz de neutrinos cruza el punto de resonancia.

De esta manera,

$$\ln(P_c) = -2 \Im m \int_{t_R}^{t_*} dt \left( \widetilde{E}_2 - \widetilde{E}_1 \right), \quad (93)$$

donde  $\widetilde{E}_\alpha$  son los estados propios de energía en el medio dados por la Ec. (58). Cambiando la variable de integración de  $t$  a  $A$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \ln(P_c) = & -\frac{1}{E} \Im m \int_{A_R}^{A_*} \frac{dA}{(dA/dx)} \\ & \times \sqrt{(\Delta \cos 2\theta - A)^2 + \Delta^2 \sin^2 2\theta}, \end{aligned} \quad (94)$$

donde como antes estamos usando  $t$  y  $x$  en forma intercambiable y hemos reemplazado  $\frac{dA}{dt}$  por  $\frac{dA}{dx}$ . El límite inferior de esta integral es  $A_R = \Delta \cos 2\theta$ . El límite superior,  $A_*$ , es el valor de  $A$  en el “punto de transición” mencionado anteriormente. En el método de Landau, éste es el valor de  $A$  para el

cual los dos valores propios coinciden, es decir,  $\widetilde{E}_1 = \widetilde{E}_2$ . De la Fig. 2, vemos que esto no sucede para ningún valor real de  $A$ . De hecho de las Ecs. (58) y (59) tenemos que

$$A_* = \Delta e^{\pm 2i\theta}, \quad (95)$$

el cual es complejo. Así, la integración de la Ec. (93) tendrá que ser hecha para valores complejos de  $A$ . Es por esta razón que este método es llamado el *método de trayectorias complejas*.

Para evaluar la integral necesitamos saber cuál es la forma de  $A$  como una función de  $x$  en la región de resonancia. Si la variación es lineal,  $dA/dx$  es constante y podemos sacarla fuera de la integral. Si este valor es positivo, usamos el exponente positivo en la Ec. (95) tal que  $\ln P_c$  es negativo. Si  $dA/dx$  es negativo, usamos el exponente negativo de la Ec. (95). En cualquier caso cambiando la variable de integración de  $A$  a  $a = (A - \Delta \cos 2\theta) / \Delta \sin 2\theta$ , tenemos:

$$\begin{aligned} \ln(P_c) = & -\frac{\Delta^2 \sin^2 2\theta}{E \left| dA/dx \right|_R} \Im m \int_0^i da \sqrt{1 + a^2} \\ = & -\frac{\Delta^2 \sin^2 2\theta}{E \left| dA/dx \right|_R} \cdot \frac{\pi}{4}. \end{aligned} \quad (96)$$

Recordando que  $A_R = \Delta \cos 2\theta$ , podemos también escribir como

$$\ln(P_c) = -\frac{\Delta \sin^2 2\theta}{E \cos 2\theta} \cdot \frac{1}{\left| \frac{d}{dx} \ln A \right|} \cdot \frac{\pi}{4}. \quad (97)$$

Esto muestra que en la Ec. (91), debe tomarse  $F = \pi/4$ , es decir,

$$P_c = \exp \left( -\frac{\pi}{4} \kappa_R \right). \quad (98)$$

Por supuesto, este resultado se basa en la suposición de que  $A$  es una función lineal de  $x$  cerca de la resonancia, lo cual puede parecer un poco drástico. Para una disminución exponencial en la densidad solar cercana a la resonancia se obtiene [25]  $F = \pi/4 (1 - \tan^2 \theta)$ . Esto es de interés físico, dado que la densidad solar tiene de hecho una variación exponencial para una región amplia en el Sol. Sin embargo, para la mayoría de los valores de  $\theta$  que son de interés, la diferencia en el caso exponencial y el lineal es insignificante. De esta manera, en lo que sigue tomaremos la forma más simple, es decir,  $F = \pi/4$ .

## 10. El límite extremo no adiabático

El método de Landau descrito arriba es un método semicásico y nos da el término principal en el límite de grandes valores del exponente. Cuando  $\kappa_R$  es muy pequeño ( $\ll 1$ ), la expresión para  $P_c$  dada por la Ec. (98) no es satisfactoria. La

limitación de la Ec. (98) puede ser entendida si analizamos un ejemplo simplificado [26].

Consideremos un haz de neutrinos viajando a través de la frontera entre un medio uniforme y el espacio vacío. La propagación es obviamente adiabática para el medio uniforme, así como para el vacío, dado que ambos medios tienen densi-

dades uniformes. Pero en el borde, hay un abrupto cambio de densidad tal que  $(dN_e/dx) \rightarrow \infty$ , lo cual significa que si tomamos la Ec. (86),  $\kappa(x) \rightarrow 0$ , esto es, la situación es *altamente no adiabática*. Si denotamos por “ $x$ ” a un punto en lo más profundo del medio y por “ $y$ ” a otro punto en la parte externa (en el vacío), es posible escribir la probabilidad de transición como

$$P_c \equiv \left| \left\langle \nu_2(y) \left| \tilde{\nu}_1(x) \right. \right\rangle \right|^2 = \left| \sum_l \left\langle \nu_2(y) \left| \nu_2(y') \right. \right\rangle \left\langle \nu_2(y') \left| \nu_l(y') \right. \right\rangle \left\langle \nu_l(y') \left| \nu_l(x') \right. \right\rangle \left\langle \nu_l(x') \left| \tilde{\nu}_1(x') \right. \right\rangle \left\langle \tilde{\nu}_1(x') \left| \tilde{\nu}_1(x) \right. \right\rangle \right|^2, \quad (99)$$

donde  $x'$  es un punto justo dentro del medio y  $y'$  está fuera del medio (en el vacío), en los dos lados de la frontera plana. Los estados de sabor son continuos a través del borde, es decir,  $\langle \nu_l(y') | \nu_l(x') \rangle = 1$ . Usando la matriz de mezcla en materia y en el vacío y despreciando todos los términos de interferencia, obtenemos

$$P_c = \sin^2 (\tilde{\theta} - \theta). \quad (100)$$

Si por ejemplo el medio es muy denso,  $\tilde{\theta} \rightarrow \frac{\pi}{2}$  tal que

$$P_c = \cos^2 \theta. \quad (101)$$

Éste no es el límite que obtenemos de la Ec. (91), el cual nos da  $P_c \rightarrow 1$  cuando  $\kappa_R \rightarrow 0$ . La diferencia es significativa si  $\theta$  no es pequeña. Para convencernos de que la Ec. (101) da el resultado correcto en contraste con el resultado incorrecto de la Ec. (91), deberemos trabajar la expresión de la  $P_c$  dentro de la expresión para la probabilidad de supervivencia dada por la Ec. (80). Esto nos dará, usando  $\tilde{\theta}_0 = \pi/2$ ,

$$P_{\nu_e \nu_e} = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta. \quad (102)$$

Ésta es la probabilidad de supervivencia promedio de la energía en el vacío, como la obtenida en la Ec. (61). Éste es el resultado esperado con  $\tilde{\theta} = \frac{\pi}{2}$ , pues no hay oscilaciones en el medio como puede ser visto poniendo el ángulo de mezcla igual a  $\pi/2$  en la Ec. (36). Las oscilaciones pueden ocurrir sólo después de que los rayos escapan hacia el vacío y por consiguiente el resultado del límite de vacío es recuperado.

Llegando a estar convencidos de las limitaciones de la forma exponencial para  $P_c$  en la Ec. (91) deberemos buscar una fórmula mejor. Ésta puede ser obtenida por soluciones exactas de la ecuación de propagación. Es por esto que usualmente se emplean los estados de sabor directamente. Comenzando con la Ec. (51) e inmediatamente después podemos escribir las dos ecuaciones diferenciales de primer grado para  $\nu_e$  y  $\nu_\mu$ . Eliminando a  $\nu_\mu$  de estas ecuaciones obtenemos

$$\ddot{\nu}_e + i \left( \widetilde{H_{11}} + \widetilde{H_{22}} \right) \dot{\nu}_e + \left( \widetilde{H_{12}^2} - \widetilde{H_{11}} \widetilde{H_{22}} + i \dot{\widetilde{H_{11}}} \right) \nu_e = 0, \quad (103)$$

en donde hemos retomado el hecho que solo el elemento  $\widetilde{H_{11}}$  es dependiente de  $x$ , [ver la Ec. (54)]. Definiremos ahora una nueva variable

$$a_e = \exp \left( i \int^x dx' \widetilde{H_{11}}(x') \right) \nu_e, \quad (104)$$

la cual difiere de la variable vieja sólo por una fase y por consiguiente no afecta las probabilidades. En términos de esta nueva variable, la ecuación anterior se transforma en [27]

$$\ddot{a}_e + i \left( \widetilde{H_{22}} - \widetilde{H_{11}} \right) \dot{a}_e + \widetilde{H_{12}^2} a_e = 0. \quad (105)$$

Es necesario resolver la ecuación precedente y para ello necesitamos poner la  $\widetilde{H_{11}}$  que es función de  $x$ . Una vez que se ha hecho esto, la probabilidad de supervivencia a una cierta distancia  $x$  estará dada por  $|a_e(x)|^2$ .

En principio, si nosotros somos capaces de resolver la Ec. (105) para el perfil de densidad del Sol, entonces obtendremos una respuesta exacta para las probabilidades de supervivencia de los neutrinos solares. Esto, sin embargo, no puede ser hecho debido a que el perfil de densidad solar tiene una forma complicada. Es por ello que resolvemos la Ec. (105) solo cerca de la región de resonancia, asumiendo alguna forma *simple* para la variación de la densidad, la cual sería aproximadamente válida en esa limitada región.

La solución exacta en esta región da la probabilidad  $P_c$  de transición cerca de la región de resonancia, la cual está dada por  $1 - |a_e|^2$ . Una vez hecho esto, podemos usar la Ec. (80) o la Ec. (81) para encontrar la probabilidad de supervivencia

después de que el haz de neutrinos ha atravezado el material solar.

La solución exacta de la Ec. (105) fue primeramente hecha para una variación lineal de la densidad [15], pero desde entonces se ha resuelto para otros perfiles de densidad [28]. Todas estas soluciones dan la forma

$$P_c = \frac{\exp\left(-\kappa_R F\right) - \exp\left(-\frac{\kappa_R F}{\sin^2 \theta}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{\kappa_R F}{\sin^2 \theta}\right)}, \quad (106)$$

en donde  $F$  se ha calculado usando el método de Landau-Zener. Notemos que para  $\kappa_R \rightarrow 0$ , esto nos dará el límite correcto de la Ec. (102). Donde esta forma es aceptable para todas las soluciones conocidas, es más, se ha conjecturado [26] que dicha forma funciona bien aun prescindiendo de la naturaleza de la variación de la densidad.

Resumiendo la solución de la ecuación de evolución para el rayo de neutrinos dada por la Ec. (70), tenemos que la probabilidad de que un  $\nu_e$  sobreviva como un  $\nu_e$  está dada por

$$P_{\nu_e \nu_e} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \left( 1 - 2P_c \right)^n \cos 2\tilde{\theta}_0 \cos 2\theta \right], \quad (107)$$

donde  $n$  es 1 o 2 dependiendo si las resonancias hayan sido encontradas una o dos veces,  $\tilde{\theta}_0$  es el ángulo de mezcla efectivo en el punto donde el neutrino es producido y está dado por

$$\tan 2\tilde{\theta}_0 = \frac{\frac{\Delta}{E} \sin 2\theta}{\frac{\Delta}{E} \cos 2\theta - 2\sqrt{2} G_F N_0}, \quad (108)$$

siendo  $N_0$  la densidad del número de electrones en el punto de producción. Para la probabilidad de transición  $P_c$ , usaremos la expresión más simple

$$P_c = \exp\left(-\frac{\pi}{4} \cdot \frac{\Delta}{E} \cdot \frac{\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta} \cdot \left| \frac{d}{dx} \ln N_e \right|_R \right), \quad (109)$$

la cual es válida si la variación de la densidad es lineal cerca de la resonancia.

Para calcular  $P_{\nu_e \nu_e}$  para neutrinos de una energía dada, necesitamos dos clases de información. Primero, necesitamos conocer el perfil de densidad de electrones en el Sol, de tal manera que así podamos conocer  $N_0$  donde es producido el neutrino. El perfil también nos dará la cantidad  $\left| \frac{d}{dx} \ln N_e \right|$  en el punto de resonancia, el cual aparece en la expresión para  $P_c$ . Segundo, necesitamos los parámetros físicos de la partícula del problema, especificando de nuevo el ángulo de mezcla  $\theta$  y la diferencia de las masas elevadas al cuadrado  $\Delta$ .

## 11. Solución con tres generaciones

Es posible en principio generalizar las fórmulas obtenidas en el caso de dos generaciones para incluir los efectos de la tercera generación, es decir, incluir el tercer sabor del neutrino ( $\nu_\tau$ ). Para el caso de las oscilaciones en el vacío, podemos escribir cualquier estado de sabor en general como

$$|\nu_t\rangle = \sum_j U_{tj} |\nu_j\rangle, \quad (110)$$

donde el índice  $j$  corre sobre todos los estados propios de masa. Si se crea un haz de  $\nu_l$  al tiempo  $t = 0$ , su evolución en el tiempo estará gobernada por

$$|\nu_l(t)\rangle = \sum_\alpha e^{-iE_\alpha t} U_{l\alpha} |\nu_\alpha\rangle. \quad (111)$$

La probabilidad de encontrar el estado de sabor  $\nu_{l'}$  en este estado está dada por

$$\begin{aligned} P_{\nu_l \nu_{l'}}(t) &= \left| \langle \nu_{l'} | \nu_l(t) \rangle \right|^2 \\ &= \sum_{\alpha, \beta} \left| U_{l\alpha} U_{l'\alpha}^* U_{l\beta}^* U_{l'\beta} \right| \\ &\quad \times \cos \left[ (E_\alpha - E_\beta) t - \varphi_{ll'\alpha\beta} \right], \end{aligned} \quad (112)$$

donde

$$\varphi_{ll'\alpha\beta} = \arg \left( U_{l\alpha} U_{l'\alpha}^* U_{l\beta}^* U_{l'\beta} \right). \quad (113)$$

Usando la aproximación  $E_\alpha \gg m_\alpha$  como antes, podemos usar la Ec. (6) para escribir [29]

$$\begin{aligned} P_{\nu_l \nu_{l'}}(x) &= \sum_{\alpha, \beta} \left| U_{l\alpha} U_{l'\alpha}^* U_{l\beta}^* U_{l'\beta} \right| \\ &\quad \times \cos \left( \frac{\Delta_{\alpha\beta}}{2E} x - \varphi_{ll'\alpha\beta} \right), \end{aligned} \quad (114)$$

donde

$$\Delta_{\alpha\beta} \equiv m_\alpha^2 - m_\beta^2. \quad (115)$$

Como en el caso de dos generaciones, hay algunas regiones permitidas donde los valores de  $\Delta$  están cercanos a  $10^{-10} \text{ eV}^2$ . Pero, con tres generaciones, algún nuevo tipo de soluciones son también posibles. Por esto, vamos a considerar que estamos en un rango de valores de  $\Delta_{\alpha\beta}$  donde  $(\Delta_{\alpha\beta}/2E)x \gg 1$  para energías típicas de neutrinos solares. La energía completamente promediada abarca entonces los términos con  $\alpha \neq \beta$  y tendremos que

$$\bar{P}_{\nu_l \nu_{l'}} = \sum_\alpha \left| U_{l\alpha} \right|^2 \left| U_{l'\alpha} \right|^2. \quad (116)$$

Para proceder algunos autores [9] toman la siguiente parametrización de los elementos de la matriz de mezcla de Cabibbo - Kobayashi - Maskawa (CKM):

$$\begin{aligned} U_{e1} &= \cos \theta_1, & U_{e2} &= \sin \theta_1 \cos \theta_2, \\ U_{e3} &= \sin \theta_1 \sin \theta_2. \end{aligned} \quad (117)$$

Entonces,

$$\bar{P}_{\nu_e \nu_e} = \cos^4 \theta_1 + \sin^4 \theta_1 (\cos^4 \theta_2 + \sin^4 \theta_2). \quad (118)$$

A diferencia del caso de dos generaciones donde  $\bar{P}_{\nu_e \nu_e} \gg 1/2$ , aquí podemos tener a  $\bar{P}_{\nu_e \nu_e}$  tan bajo como  $1/3$ . Esto puede ser consistente con las probabilidades de  $2\sigma$  que se encuentran en los experimentos *Homestake* y *Kamiokande*. La solución para los ángulos está mostrada en la Fig. 6. Los valores de las diferencias de masas elevadas al cuadrado tienen que ser mucho más grandes de  $10^{-10} \text{ eV}^2$  y están acotados superiormente por los límites que imponen los experimentos terrestres.

Es relativamente fácil de calcular las correspondientes probabilidades si tomamos en cuenta los efectos de la materia, ya que la propagación en el medio es adiabática. Siguiendo los argumentos que llevan a la Ec. (75), tenemos

$$P_{\nu_l \nu_{l'}}^{(ad)} = \sum_{\alpha} \left| \tilde{U}_{l\alpha} \right|^2 \left| U_{l'\alpha} \right|^2, \quad (119)$$

donde  $\tilde{U}$  es la matriz de mezcla efectiva en el punto donde el neutrino es producido. Esto parece *engañosamente simple*. La parte *pesada* involucra la determinación de  $\tilde{U}$  en términos

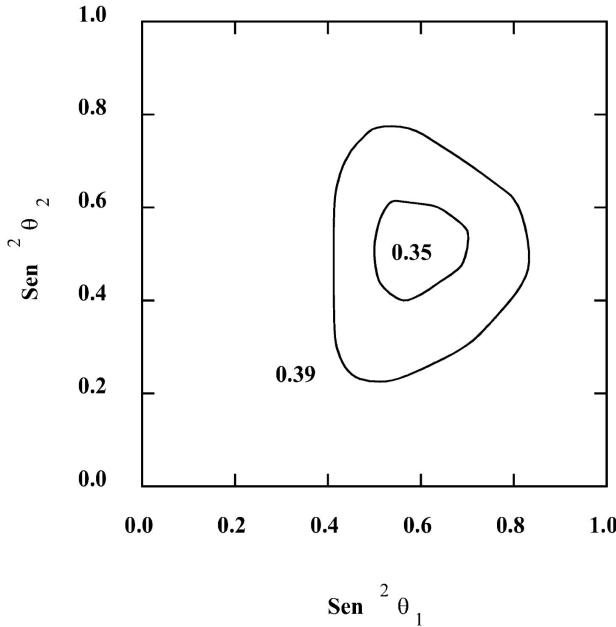


FIGURA 6. Soluciones de oscilación en el vacío para el problema del neutrino solar con tres generaciones de neutrinos. Las diferencias de masas elevadas al cuadrado se han asumido que son  $\gg 10^{-10} \text{ eV}^2$ . El interior de las curvas interna y externa son consistentes con los datos de los niveles  $2\sigma$  y  $3\sigma$  respectivamente.

de la densidad del medio y la energía de los neutrinos. El análisis exacto para el caso de tres generaciones [30] es *verdaderamente complicado* dado que involucra la solución de una ecuación cúbica. Algunas técnicas de solución aproximada han sido tratadas en la literatura [31].

De la discusión de dos generaciones es obvio que dos resonancias ocurrirán en el caso de tres generaciones. En un diagrama como el de la Fig. 2 estas resonancias tienen lugar cuando  $\langle E_{\nu_e} \rangle$  cruza  $\langle E_{\nu_\mu} \rangle$  y  $\langle E_{\nu_\tau} \rangle$ , respectivamente. Cuando las dos están muy separadas, las dos resonancias pueden ser tratadas independientemente una de la otra.

Pero aun entonces la confrontación con los datos experimentales está verdaderamente complicada por muchas razones. El espacio solución es mucho mayor dado que involucra dos diferencias de masas elevadas al cuadrado, es decir,  $\Delta_{21}$  y  $\Delta_{31}$ , así como tambien los tres ángulos de mezcla. En general, hasta las fases que violan CP pueden aparecer en la matriz de mezcla, haciendo el problema más frustrante. Sin embargo, los resultados de los experimentos pueden no estar correlacionados en el sentido de que uno de ellos puede mostrar una “reducción” en flujo porque de  $\nu_e$ ’s se están convirtiendo a  $\nu_\mu$ ’s, mientras que el otro puede mostrar una “reducción” porque de  $\nu_e$ ’s se están convirtiendo a  $\nu_\tau$ ’s [32].

Los efectos no adiabáticos harán el problema *más complicado*. Introducen transiciones entre diferentes estados estacionarios. Si denotamos la probabilidad de transición de un estado  $\tilde{\nu}_\alpha$  a un estado  $\tilde{\nu}_\beta$  por  $P_{\alpha\beta}^c$ , entonces

$$P_{\nu_l \nu_{l'}} = \sum_{\alpha, \beta} \left| \tilde{U}_{l\alpha} \right|^2 \left| U_{l'\beta} \right|^2 P_{\alpha\beta}^c. \quad (120)$$

Para  $N$  generaciones, hay a lo más  $(N - 1)^2$  cantidades independientes, dado que  $P_{\alpha\beta}^c$  debe satisfacer las relaciones

$$\sum_{\alpha} P_{\alpha\beta}^c = 1 \quad y \quad \sum_{\beta} P_{\alpha\beta}^c = 1,$$

lo cual se sigue de la unitariedad. Sin embargo, las cantidades  $P_{\alpha\beta}^c$ , en general, no pueden ser calculadas analíticamente. Algunas conjecturas se han hecho donde las resonancias están bien separadas [33–36].

## 12. Conclusiones

Hemos revisado las bases teóricas de las oscilaciones de neutrinos en el vacío y en medios materiales para el caso de dos generaciones. Hemos puesto especial énfasis a la conversión resonante del neutrino en el Sol (el llamado efecto *MSW*) y hemos revisado de forma somera el caso de tres generaciones. Esperamos que este trabajo sirva al lector de inspiración para profundizar sus conocimientos en la *física de los neutrinos masivos*, pues estamos seguros que los neutrinos tendrán mucho que decir en la construcción de un modelo teórico más allá del modelo estándar.

## Agradecimientos

El presente trabajo ha sido respaldado en parte por el *Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación*

*Tecnológica (PAPIIT)* de la **DGAPA-UNAM** (No. de Proyecto: IN109001 y en parte por *Proyecto de Instalación* of the **CONACyT** (Proyecto No. I37307-E).

1. S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1264; S. L. Glashow, *Nucl. Phys.* **22** (1951) 579; A. Salam and J. C. Ward, *Nuovo Cimento* **11** (1959) 568.
2. Ta-Pei Cheng and Ling-Fong Li, *Gauge theory of elementary particle physics*, (Oxford Science Publications, 1986) Chap. 13, p.409.
3. F. Boehm and P. Vogel, *Physics of massive neutrinos*, (Cambridge University Press, 1987) p. 7; B. Kayser, F. Gibrat-Debu and F. Perrier, *The Physics of massive neutrinos*, (World Scientific, Singapur, 1989) p. 35.
4. L. Wolfenstein, *Phys. Rev. D* **17** (1978) 2369.
5. D. Notzold, G. Raffelt, *Nucl. Phys. B* **307** (1988) 924; P. B. Pal, T. M. Pham, *Phys. Rev. D* **40** (1989) 259; J. F. Nieves, *Phys. Rev. D* **40** (1989) 866; J. C. D'Olivo, J. F. Nieves and M. Torres, *Phys. Rev. D* **46** (1992) 1172.
6. S. P. Mikheyev, A. Yu. Smirnov, *Nuovo Cimento C* **9** (1986) 17.
7. Q. R. Ahmad et. al [SNO Collaboration], nucl-ex/0106015, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 071301 (2001), SNO Collaboration, <http://www.sno.phy.queensu.ca/>.
8. S. M. Bilenky and B. Pontecorvo, *Phys. Rev.* **41** (1978) 4; V. Barger et al., *Phys. Rev. Lett.* **45** (1980) 692.
9. P. B. Pal, *Int. J. Mod. Phys. A* **7** (1992) 5387.
10. V. N. Gribov, B. Pontecorvo, *Phys. Lett. B* **28** (1969) 493. S. M. Bilenky, B. Pontecorvo, *Phys. Lett. B* **61** (1976) 248. R. G. H. Robertson et al., *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991) 957.
11. D. E. Groom et al. (Particle Data Group), *Eur. Phys. Jour. C* **15** (2000) 1 and 2001 partial update for edition 2002 (URL:<http://pdg.lbl.gov>).
12. V. Barger, R. J. N. Phillips, K. Whisnant, *Phys. Rev. D*, **43** (1986) 980.
13. H. Bethe, *Phys. Rev. Lett.* **56** (1986) 1305.
14. A. Messiah, en '86 *Massive Neutrinos in Astrophysics and Particle Physics*, ed. O. Fackler & J. Tran Thanh Van, (Éditions Frontières, Gif-sur-Yvette, pp. 373, 1986).
15. S. J. Parke, *Phys. Rev. Lett.* **57** (1986) 1275.
16. W. C. Haxton, *Phys. Rev. D* **35** (1987) 2352.
17. V. Barger, N. G. Deshpande, P. B. Pal, R. J. N. Phillips, K. Whisnant, *Phys. Rev. D* **43** (1991) 1759.
18. W. C. Haxton, *Phys. Rev. Lett.* **57** (1986) 1271. S. J. Parke, *ibid.* **39** (1989) 1930.
19. J. C. D'Olivo, *Phys. Rev. D* **45** (1992) 924.
20. L. Landau, *Phys. Z. Sowjetunion* **2** (1932) 46.
21. C. Zener, *Proc. Roy. Soc.* **137** (1932) 696.
22. E. C. G. Stuckelberg, *Helv. Phys. Acta* **5** (1932) 369.
23. W. C. Haxton, *Phys. Rev. Lett.* **57** (1986) 1271.
24. L. D. Landau, L. M. Lifshitz, *Mecánica Cuántica (teoría no relativista)*, (Reverte, España, Capítulo VII, 1983) p. 183.
25. P. Pizzochero, *Phys. Rev. D* **36** (1987) 2293.
26. T. K. Kuo, J. Pantaleone, *Phys. Rev. D* **39** (1989) 1930.
27. W. C. Haxton, *Phys. Rev. D* **35** (1987) 2352; S. J. Parke, *Phys. Rev. Lett.* **57** (1986) 1275.
28. T. Kanenko, *Prog. Theor. Phys.*, **78** (1987) 532; S. Toshev, *Phys. Lett. B* **196** (1987) 170; S. T. Petcov, *Phys. Lett. B* **200** (1988) 373; D. Notzold, *Phys. Rev. D* **36** (1987) 1625; M. Ito, T. Kanenko, M. Nakagawa, *Prog. Theor. Phys.* **79** (1988) 13; T. K. Kuo, J. Pantaleone, *op. cit.*
29. S. M. Bilenky, B. Pontecorvo, *Phys. Rep.* **41** (1978) 225.
30. V. Barger, K. Whisnant, S. Pakvasa, R. J. N. Phillips, *Phys. Rev. D* **22** (1980) 2718; H. W. Zaglauer, K. H. Schwarzer, *Phys. Lett. B* **198** (1987) 556.
31. T. K. Kuo, J. Pantaleone, *Phys. Rev. Lett.* **57** (1986) 1805; T. K. Kuo, J. Pantaleone, *Phys. Rev. D* **35** (1987) 3432; H. W. Zaglauer, K. H. Schwarzer, *Z. Phys. C* **40** (1988) 273. A. Joshipura, M. V. N. Murthy, *Phys. Rev. D* **37** (1988) 1374; A. Baldini, G. F. Giudice, *Phys. Lett. B* **186** (1987) 211; C. W. Kim, W. K. Sze, *Phys. Rev. D* **35** (1987) 1404; A. Bottino, J. Ingham, C. W. Kim, *Phys. Rev. D* **39** (1989) 909; S. T. Petcov, S. Toshev, *Phys. Lett. B* **187** (1987) 120. S. T. Petcov, *Phys. Lett. B* **214** (1988) 259; S. P. Mikheyev, A. Yu. Smirnov, *Phys. Lett. B* **200** (1988) 560.
32. L. Wolfenstein, en *Proceeding of the 12th International conference on Neutrino Physics and Astrophysics*, ed. T. Kitagaki and H. Yuta (World Scientific, 1986) p. 1.
33. C. W. Kim, S. Nussinov, W. K. Sze, *Phys. Lett. B* **184** (1987) 403.
34. L. G. Cabral Rosetti, Tesis de Maestría en Ciencias (Física); *Tratamiento Analítico para las Oscilaciones de Tres Neutrinos en Materia*, Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México, (F.C.-U.N.A.M.), México, D. F., 1994.

35. L. G. Cabral-Rosetti y J. C. D'Olivo, “*Solución Analítica bajo la Aproximación de Magnus para la Oscilación de Tres Neutrinos en Materia*”, *Proceedings de la XXVII Reunión Bienal de la Real Sociedad Española de Física*. Castillo M.V., Ferrer A., Higon E., Editores. *Tomo II*, pág. 621 (1999). IFIC-Depto. de Física Atómica, Molecular y Nuclear. Universitat de Valencia, España.
36. A. A. Aguilar-Arevalo, L. G. Cabral-Rosetti and J. C. D'Olivo, *Magnus expansion and the three - neutrino oscillations in matter*, in preparation.