CRÍTICA, Revista Hispanoamericana de Filosofía. Vol. 54, No. 161 (agosto 2022): 43–69

DOI: https://doi.org/10.22201/iifs.18704905e.2022.1346

EL *TRACTATUS* AL RESCATE DE *PRINCIPIA MATHEMATICA*: RAMSEY Y LOS FUNDAMENTOS LOGICISTAS DE LAS MATEMÁTICAS

EMILIO MÉNDEZ PINTO
Universidad Nacional Autónoma de México
emilio.mendez.pinto@gmail.com

RESUMEN: Mi objetivo es discutir las principales dificultades que Frank P. Ramsey encontró en *Principia Mathematica* y la solución que, vía el *Tractatus Logico-Philosophicus*, propuso al respecto. Sostengo que las principales dificultades que Ramsey encontró en *Principia Mathematica* están, todas, relacionadas con que Russell y Whitehead desatendieron la *forma lógica* de las proposiciones matemáticas, las cuales, según Ramsey, deben ser tautológicas.

PALABRAS CLAVE: Russell, Wittgenstein, logicismo, formalismo, filosofía de las matemáticas

SUMMARY: My aim is to expose the main difficulties that Frank P. Ramsey encountered in *Principia Mathematica* and the solution that, via the *Tractatus Logico-Philosophicus*, Ramsey proposed in this regard. I contend that the main difficulties that Ramsey encountered in *Principia Mathematica* were all related to Russell and Whitehead neglecting the *logical form* of mathematical propositions, which according to Ramsey must be tautological.

KEY WORDS: Russell, Wittgenstein, logicism, formalism, philosophy of mathematics

1. *Introducción*

En *Mathematics without Foundations*, Putnam (1967, p. 5) sostuvo que las matemáticas no tienen ni necesitan fundamentos y que ninguna propuesta al respecto requiere ser tomada en serio. Igualmente, imputó a los varios ismos en la filosofía de las matemáticas no poder aclarar ni la naturaleza de la verdad matemática, ni la de los objetos matemáticos, ni la de la necesidad matemática, esta última fundamental, según Putnam (1995, pp. 1–11; pp. 60–78), para entender la propia naturaleza de las matemáticas.[1] Sobre estas afirmaciones de

[1] Putnam acabaría criticando la deriva de lo que, en Putnam 1967, bautizó, algo burlonamente, como "modalismo" para resolver esta última cuestión (véase Burgess 2018 para un recuento de las opiniones de Putnam al respecto). Putnam 1967 parece no considerar el servicio de las reflexiones filosófico-matemáticas a las *propias* matemáticas. Para la relevancia histórica de dicho servicio, véanse George y Velleman 2002, Colyvan 2009, y Hamkins 2020. Para la relevancia que dicho

Putnam, Kreisel sostuvo que incluso aquellas personas interesadas en los fundamentos de las matemáticas podrían aceptarlas, pues el grueso de las matemáticas no necesita de fundamentos en cuanto a su fiabilidad o su inteligibilidad y las diversas filosofías matemáticas no necesitan tomarse en serio en el sentido de "ser válidas en todo detalle" (Kreisel 1972, p. 402).[2]

En este ensayo intentaré mostrar que Ramsey no fue una de aquellas personas interesadas en los fundamentos *logicistas*[3] de las matemáticas que aceptarían las afirmaciones de Putnam por las razones de Kreisel.[4] En particular, me interesa mostrar cómo es que Ramsey 1925 pretendió salvar al logicismo[5] russelliano-whiteheadiano de

servicio podría prestar, véanse Dummett 1975 y Weaver 2005. Otro trabajo antifundacionista clásico, quizá más severo que Putnam 1967, es McCarty 1993. Al respecto de McCarty 1993, véase Barceló (manuscrito), *Fundacionismo y Anti-Fundacionismo en Filosofía de las Matemáticas*.

[2] Aquí y en adelante, las traducciones de los textos en inglés son mías.

[3] El énfasis en los fundamentos logicistas es importante, pues Ramsey no siempre fue un logicista. Cuatro años después de la publicación de Ramsey 1925, y tres años después de Ramsey 1926, en 1929 escribió su *General Propositions and Causality*, en donde se apartó de sus otrora posturas logicistas y cantorianas y, por la influencia de Peirce y Weyl, abogó por una síntesis de ambos, su "finitismo pragmático" (al respecto, véanse sus trabajos "Principles of Finitist Mathematics" y "The Formal Structure of Intuitionistic Mathematics", ambos en Ramsey 1991). Para este giro, véase MacBride *et al.* 2019. Para el abandono, también a partir de 1929, de su otrora compromiso con los principios generales del *Tractatus Logico-Philosophicus*, véase Methven 2015, pp. 1–11. Para estos giros enmarcados en la vida intelectual de Ramsey, véase Misak 2020. Por último, véase Mancosu 2021 para la revelación, mediante tres cartas nunca antes publicadas, de más detalles sobre sus opiniones acerca de los *fundamentos* de las matemáticas y de la lógica de su época.

[4] Russell, en cambio, quizá habría sido más receptivo a las razones de Kreisel, pues en Russell 1920 reconocía que algunos de los supuestos fundamentales para su proyecto logicista —como la verdad del axioma del infinito o la validez de la teoría de tipos— no eran relevantes para la fiabilidad de la práctica matemática ordinaria y que, para propósitos de inteligibilidad, la perspectiva logicista era menos familiar para estudiar las matemáticas y más compleja desde el punto de vista lógico. Por otro lado, atendiendo las diferencias entre Russell 1996 y Russell 1920 respecto del estatus del axioma del infinito en las matemáticas, o entre Russell 1996 y Russell 1999 respecto del carácter sintético o analítico de la lógica, o respecto del platonismo de Russell 1996 versus el anti-pitagorismo explícito de Russell 1999, quizá habría concedido que no todas las filosofías matemáticas, incluyendo las suyas, son válidas en todo detalle, aunque de ello no aceptaría, contra Putnam, que no deban tomarse en serio (pues Russell sí lo hizo).

[5] Al igual que con otros ismos en la filosofía de las matemáticas, hay más de un logicismo. Rayo 2005, por ejemplo, distingue entre un logicismo según el cual el lenguaje de las matemáticas consiste en expresiones puramente lógicas (*Language-Logicism*), uno según el cual hay un conjunto de axiomas consistente, recursivo, del que cada verdad matemática es una consecuencia puramente lógica (*Consequence-*

Principia Mathematica (PM) (Russell y Whitehead 1962) vía el *Tractatus Logico-Philosophicus* (TL-P) (Wittgenstein 2009), y que detrás de esta tarea hubo dos supuestos:

1) las matemáticas ya tienen fundamentos en cuanto a su fiabilidad y su inteligibilidad,[6] aunque estos fundamentos no son los expuestos por Frege, Whitehead, y Russell, sino tales fundamentos enmendados vía "el trabajo del Sr. Ludwig Wittgenstein" (Ramsey 1925, p. 1);

2) una vez resueltos algunos problemas en PM, es posible salvar al logicismo de los escépticos —a quienes Ramsey 1925 (p. 1) identifica con "la mayoría de las autoridades alemanas, que han abandonado por completo la línea de enfoque del logicismo"— y de "la amenaza bolchevique[7] de Brouwer y Weyl" (Ramsey 1925, p. 56), con el propósito ulterior de que la filosofía matemática logicista fuese tomada en serio.[8]

Logicism), y otro según el cual las verdades matemáticas son verdaderas como una cuestión de lógica pura (*Truth-Logicism*). Para Rayo 2005 (p. 206) no queda claro si el logicismo de Russell en *Principia Mathematica* es una suerte de *Truth-Logicism*, porque también podría consistir en una mezcla de *Language-Logicism* y de *Consequence-Logicism*. Véanse Consuegra 1991 y Klement 2019 para sendas exposiciones del logicismo propiamente russelliano.

[6] Aunque ni la fiabilidad ni la inteligibilidad de lo que en una época se toma como *fundamentos* de las matemáticas necesariamente va de la mano de la fiabilidad e inteligibilidad de la *práctica* matemática de esa época. Al respecto, Kitcher 1984 (p. 270, n. 66) llama la atención sobre un error de interpretación (que atribuye, entre otros, a Dummett) respecto del supuesto objetivo de Frege de "alcanzar el ideal de aquel rigor al que se habían dirigido todas las matemáticas del siglo XIX", porque, según Kitcher, nunca hubo tal ideal. Para una opinión contraria, véase Maddy 2013.

[7] Véase Marion 2008 para el origen de este y otros términos con una connotación política en la filosofía de las matemáticas.

[8] Este propósito es más explícito en Ramsey 1925 que en Ramsey 1926, el otro gran trabajo logicista de Ramsey, porque en Ramsey 1926 se discute "el trabajo que se ha hecho sobre líneas completamente distintas [Brouwer, Hilbert, Weyl] y que clama reemplazar por completo la posición adoptada por Whitehead y Russell en cuanto a la naturaleza de las matemáticas y sus fundamentos lógicos" (p. 62). En mi opinión, Ramsey 1925 es un trabajo pro-logicista, mientras que Ramsey 1926 es un trabajo anti anti-logicista. Nakano 2021 es de la opinión de que Ramsey 1925 es un trabajo anti anti-logicista y Linsky 2011 (p. 177), de la opinión de que el propósito de Ramsey 1926 fue cómo evitar la necesidad del axioma de reducibilidad en una teoría de tipos bien formulada que sirviera de base para una comprensión de las funciones predicativas, propósito también presente en Ramsey 1925, como veremos más adelante.

2. *¿Logicismo en el* Tractatus?

Es añeja y hasta ahora insoluta la cuestión de si en el *Tractatus* hay logicismo (Black 1964, Quine 1982, y un largo etcétera) o no lo hay (Rodych 1995, Wrigley 1998, y un largo etcétera).[9] Tan insoluta como sea, Ramsey se propuso, mediante el TL-P, "ofrecer una exposición satisfactoria de los fundamentos de las matemáticas de acuerdo con el método general de Frege, Whitehead y Russell" (1925, p. 1).

La primera generación del empirismo lógico[10] también encontró, en el TL-P, una solución verosímil a uno de los más serios problemas a los que se enfrentaba la concepción científica del mundo [*der wissenschaftlichen Weltauffassung*], a saber, cómo acomodar la lógica y las matemáticas puras en dicha concepción.[11] No obstante que Ramsey y los empiristas lógicos prístinos tuvieron distintos

[9] Igual de añeja e insoluta es la cuestión de si al *Tractatus* debe dársele, en cualquier caso, una lectura fregeana o russelliana. Véase Anscombe 1963 para la clásica defensa de una lectura fregeana, así como Anscombe 1989 para una lectura más caritativa con Russell respecto de su papel en el *Tractatus*, y Goldfarb 2002 para la influencia de Frege en el Wittgenstein pre-*Tractatus*.

[10] Véase Richardson y Uebel 2007 (pp. 1–10), para los motivos, incluso entre los miembros originales del movimiento, por preferir el epíteto "empirismo lógico" sobre los de "positivismo lógico" o "neopositivismo".

[11] Véase Hahn 1980 (pp. 39–40), para esta "evidente, clara, y brutal dificultad para el empirismo", así como Carnap 1963 (p. 24), para un testimonio de la influencia que tuvo el TL-P sobre los miembros originales del Círculo de Viena al momento de intentar solventar esta y otras dificultades, influencia explícitamente manifestada, posteriormente, en Hahn *et al.* 1973. Véanse igualmente Kremer 2015 para la influencia que tuvo el TL-P en esta solución y Resnik 2005 para 1) la exposición de este problema en el marco del proyecto del empirismo lógico, 2) la solución adoptada (vía el TL-P), y 3) las críticas de Quine a dicha solución adoptada, así como Misak 2019 para un recuento de las objeciones de Ramsey a algunas tesis del Círculo de Viena, varias de estas últimas derivadas del TL-P, y Köhler 2006 para una comparación entre Ramsey y el Círculo de Viena respecto del logicismo. Lakatos 2015 (pp. 1–2) sostuvo que, siguiendo los criterios de significatividad del empirismo lógico, las matemáticas informales —aquellas opuestas a las matemáticas formales, que Lakatos identifica con la abstracción axiomática formal expuesta en Carnap 1937— deben ser "puros disparates". Quizá podríamos decir, sin desviarnos mucho de su línea de razonamiento, que, independientemente de la solución que encontrara el empirismo lógico al problema de las matemáticas *puras*, las matemáticas *aplicadas*, al no ser tautológicas, ni contradictorias, ni empíricas, habrían de ser, según los criterios de significatividad del empirismo lógico, "puros disparates". Para Russell (1920), en cambio, las matemáticas aplicadas no suponen ningún problema serio, pues la *verdad* de sus proposiciones simplemente depende de algo más que de la mera forma de la proposición, siendo este "algo más" su correspondencia con el mundo exterior (empleando la terminología de Reichenbach 1996). Para el caso fregeano, el asunto es más complicado, pues si bien podemos aceptar, siguiendo a Steiner 1998 (pp. 13–23), que Frege resolvió los principales problemas metafísicos y semánticos

motivos para haber recurrido al TL-P, cuyos detalles de los últimos son ajenos al propósito de este trabajo, uno y otros adoptaron, para sus respectivos proyectos logicistas, las tesis del *Tractatus* según las cuales, al igual que las tautologías y las contradicciones, las proposiciones matemáticas no son proposiciones genuinas (contingentes), sino pseudoproposiciones, en virtud de que 1) no tratan de nada, 2) carecen de sentido, y 3) no dicen nada acerca del mundo (Wittgenstein 2009, pp. 119, 184). Al carecer de sentido, no podemos recurrir a las pseudoproposiciones "para hacer afirmaciones, lo que a su vez significa que no pueden ser verdaderas o falsas" (Rodych 2018).

Así, según Wittgenstein 2009 (p. 122) "que las proposiciones de la matemática puedan ser probadas, no quiere decir otra cosa sino que su corrección puede ser percibida sin necesidad de que lo que expresan sea ello mismo comparado, para su corrección, con los hechos".[12] "Esta demarcación" —escribe Rodych 2018— "entre las proposiciones contingentes, que pueden emplearse para representar correcta o incorrectamente partes del mundo, y las proposiciones matemáticas, que pueden decidirse de una manera puramente formal, sintáctica", puede establecerse diciendo que "las proposiciones matemáticas son decidibles por medios puramente formales [. . .], mientras que las proposiciones contingentes, siendo acerca del mundo 'exterior', sólo pueden decidirse, si acaso, al determinar si se obtiene o no un hecho particular (esto es, algo externo a la proposición y al lenguaje en el que reside)" (Rodych 2018).[13]

de la aplicabilidad de las matemáticas, dejó intacto el problema descriptivo de su aplicabilidad (Steiner 1998, pp. 24–47).

[12] Esto porque "si dos expresiones vienen unidas por el signo de igualdad, ello quiere decir que son sustituibles una por otra". A su vez, "que dos expresiones sean sustituibles una por otra caracteriza su forma lógica", y es por ello que "la matemática muestra en las ecuaciones la lógica del mundo que las proposiciones de la lógica muestran en las tautologías" (Wittgenstein 2009, p. 122). Al no considerar *desigualdades* entre expresiones matemáticas, Ramsey 1923 cuestionaría que esta exposición cubriera *todas* las matemáticas.

[13] Si bien la filosofía de las matemáticas del Wittgenstein post-*Tractatus* fue distinta de la de Wittgenstein 2009 —por ejemplo, en cuanto a que Wittgenstein 2003 consideraba que la filosofía de la mente y la filosofía de las matemáticas "envuelven las mismas consideraciones básicas" (Kripke 2006, p. 18), según la interpretación kripkensteiniana de Wittgenstein 2003, o en cuanto al marcado antifundacionismo de Wittgenstein 1983—, es igualmente cierto que hasta el final de su vida Wittgenstein insistiría en "la diferencia entre lo que se llama enunciados de la matemática y enunciados empíricos" (Wittgenstein 2007b, p. 125). Para el antifundacionismo de Wittgenstein, véase Barceló (manuscrito), *Wittgenstein contra la Metamatemática*. Para una crítica a la interpretación de Wittgenstein 2003 por parte

3. *Al rescate de* Principia Mathematica

A lo largo de Ramsey 1925, Ramsey señaló algunos defectos del logicismo *à la* Russell-Whitehead —relativos, particularmente, a los axiomas de reducibilidad y del infinito—[14] que, en su opinión, resultaban (casi) fatales para los propósitos logicistas pero que, no obstante, podían remediarse *vía* una interpretación adecuada, que Ramsey encontró en el TL-P. Es importante observar que Russell ya había reconocido las limitantes de la teoría de tipos —señaladas en el célebre *Apéndice B* de Russell 1996— y del axioma del infinito, sobre el que escribió que "será verdadero en algunos mundos posibles y falso en otros; no podemos decir si es verdadero o falso en este mundo" (Russell 1920, p. 142).[15] Ramsey estaba al tanto de Russell 1920, y ahí encontró un indicio de lo que, en el TL-P, a juicio de Ramsey, constituye la verdadera naturaleza de las proposiciones matemáticas:[16]

> [D]ebemos concordar con que hay alguna diferencia esencial [entre una proposición contingente o genuina y una proposición necesaria o tauto-

de Kripke 2006 y algunas consecuencias indeseables de dicha interpretación para la filosofía de las matemáticas, véase Katz 1996.

[14] Ramsey 1925 identificó otros problemas en PM: 1) que cada *clase* (en el sentido russelliano) tiene una propiedad definitoria, *porque ello es una cuestión empírica*, ajena a consideraciones lógico-matemáticas; 2) que PM no consigue dar cuenta del carácter *extensional* de las matemáticas; 3) que la definición de *identidad* ofrecida en PM tergiversa el significado de "identidad", pues no consigue definir el significado *real* por el que se utiliza el símbolo para denotar la identidad; 4) que, en PM, el axioma de elección (el axioma multiplicativo, en argot russelliano) está malinterpretado como una proposición empírica, cuando en realidad, según Ramsey, se trata de una tautología. Las objeciones 1 y 4 son relevantemente similares a las objeciones de Ramsey al tratamiento del axioma del infinito en PM, objeciones que expongo en la sección 6, mientras que de las objeciones 2 y 3 hablo, respectivamente, en las secciones 5 y 7.

[15] Véanse Wang 2016 (pp. 103–130) para la tesis de que ofrecer una exposición del infinito en términos de conceptos estrictamente lógicos es el principal obstáculo al propósito de Russell de identificar la lógica y las matemáticas, Church 1996 para la exposición de la tesis de que el axioma del infinito está fuera de la provincia de la lógica y que la lógica termina y las matemáticas comienzan tan pronto como se introduce tal axioma, y Quine 1965 para la tesis de que la frontera entre la lógica y las matemáticas está determinada por si decidimos o no considerar la noción de "membresía", propia de la teoría de conjuntos, en nuestro vocabulario lógico.

[16] Hay una explicación cronológica: Russell escribió Russell 1920 en 1919; la primera edición (en alemán) de Wittgenstein 2009 se publicó en 1921, y la edición en inglés —cuya traducción hicieron C.K. Ogden y Ramsey y cuya introducción escribió Russell— se publicó en 1922. La referencia que hace Russell 1920 a las tesis posteriormente desarrolladas en Wittgenstein 2009 fue vía comunicación personal; no, *per impossibile*, vía Wittgenstein 2009.

> lógica], y que una definición de proposiciones matemáticas debe incluir no meramente su completa generalidad, sino también alguna propiedad adicional. Esto está señalado, con una referencia a Wittgenstein, en la *Introducción a la filosofía matemática* de Russell; pero no hay rastro de ello en *Principia Mathematica*, ni el Sr. Russell parece haber entendido su tremenda importancia, por ejemplo, en la consideración de proposiciones primitivas. En el pasaje referido de *Introducción a la filosofía matemática*, el Sr. Russell distingue las proposiciones que pueden enunciarse en términos lógicos de aquellas que la lógica puede afirmar como verdaderas, y da a las últimas la característica adicional de que son "tautológicas" en un sentido que no puede definir. Es obvio que una definición de esta característica resulta esencial para un fundamento claro de nuestro tema, ya que la idea a ser definida es una de las partes esenciales de las proposiciones matemáticas —su contenido y su forma. Su contenido debe estar completamente generalizado y su forma [debe ser] tautológica. (Ramsey 1925, pp. 4–5)

Así pues, para Ramsey, a la vez que el contenido de las proposiciones matemáticas debe estar completamente generalizado, su forma lógica debe ser tautológica. Como veremos, el logicismo cumple, a cabalidad, con la primera encomienda, pero deja mucho que desear en cuanto a la segunda.[17] Dado que Ramsey 1925 recurre continuamente al TL-P para enmendar estas fallas en el programa logicista, es importante tener en claro qué entendía el Wittgenstein del TL-P por "lógica" y sus diferencias con las concepciones de Frege y de Russell, que Ramsey encontró defectuosas, precisamente, por no haber atendido la *forma* de las proposiciones matemáticas.

Si Ramsey 1925 achacó a Frege y a Russell el haber desatendido la forma de las proposiciones matemáticas, *que debe ser tautológica*, Wittgenstein 2009 les achacó el haberlas dotado de contenido (Floyd 2005). Creo que ambas acusaciones son virtualmente la misma,[18] y en

[17] El uso de la palabra "encomienda" no es caprichoso, pues para Ramsey la lógica es una ciencia normativa.

[18] Para Soames 2016, el proyecto del TL-P de reemplazar las proposiciones fregeanas y russellianas "con una nueva concepción que capturara la esencia del pensamiento y el lenguaje representacionales" (p. 3) no alcanzó su cometido, porque la *explicación* tractariana de las proposiciones atómicas deja fuera algunas intuiciones que resultan fundamentales "para inspeccionar y categorizar el rango de todo pensamiento posible" (p. 4). (De acuerdo con la lectura que hace Soames 2016 de Wittgenstein 1982, identificar la esencia del pensamiento y el lenguaje representacionales fue alguna vez, para Wittgenstein, la única tarea real de la filosofía.) Soames encuentra en Ramsey 1923 una salida a algunos problemas relacionados con las proposiciones tractarianas, aunque advierte que la interpretación de Ramsey 1923 del *Tractatus*, en lugar de explicar las proposiciones, las presupone. Creo que

el TL-P hay más de un ejemplo de renuencia al respecto, renuencia anticipada y sintetizada en la prop. 2.0121 (Wittgenstein 2009, p. 50): "algo lógico no puede ser meramente posible. La lógica trata de cualquier posibilidad y todas las posibilidades son sus hechos."

Así, una tautología ($p \vee \neg p$) concuerda con todas las posibilidades de verdad, *pero ello no significa que sea una proposición universalmente verdadera*, mientras que una contradicción ($p \wedge \neg p$) no concuerda con ninguna posibilidad de verdad, *pero ello no significa que sea una proposición universalmente falsa*:

> Tautología y contradicción no son figuras de la realidad. No representan ningún posible estado de cosas. Porque aquélla permite *cualquier* posible estado de cosas, ésta *ninguno*. [. . .] La tautología deja a la realidad el espacio lógico entero —infinito—; la contradicción llena todo el espacio lógico y no deja a la realidad punto alguno. De ahí que ninguna de las dos pueda determinar en modo alguno la realidad. La verdad de la tautología es cierta; la de la proposición, posible; la de la contradicción, imposible. (Wittgenstein 2009, pp. 84–85)[19]

A diferencia de Wittgenstein,[20] Frege y Russell eran, respecto de la naturaleza de la lógica, universalistas.[21] Hintikka, por ejemplo, sostiene que fue el universalismo de Frege y de Russell el que les

Ramsey 1925, a diferencia de Ramsey 1923, hace más que meramente presuponer las proposiciones tractarianas, y que hay un genuino intento explicativo al respecto. Sea como sea, si el diagnóstico que hace Soames 2016 del TL-P es correcto, entonces, *a fortiori*, en Ramsey 1925 habría un vicio de origen que este trabajo está lejos de pretender resolver.

[19] Lo que Wittgenstein llama "proposición" Ramsey lo llamará "proposición genuina", y lo que llama "tautología" y "contradicción" Ramsey los llamará "casos degenerados" de las proposiciones genuinas. De esto no se sigue que ni Wittgenstein ni Ramsey hablen de *proposiciones* tautológicas o contradictorias: Wittgenstein habla de ellas en la proposición 4.46 del *Tractatus*, mientras que, para Ramsey, ya que las tautologías y las contradicciones son *proposiciones* ordinarias porque pueden considerarse como argumentos para funciones de verdad (éste también es el caso en el TL-P), las tautologías y las contradicciones son asimilables, respectivamente, a proposiciones verdaderas y falsas, como detallaré más adelante.

[20] Una lectura similar a la aquí ofrecida acerca de la concepción tractariana del espacio de posibilidades se encuentra en Stalnaker 2003.

[21] Señalo cuatro instancias de ello: 1) Frege 1980 (p. 2), donde Frege señala, como uno de sus propósitos para simplificar la aritmética (*i.e.*, reducir la aritmética a la lógica), el "sacar a la luz lo que la humanidad ha hecho por instinto, y [. . .] extraer de tales procedimientos lo que es universalmente válido en ellos"; 2) Russell 1920 (pp. 156–157), donde Russell habla de la verdad universal de las funciones proposicionales y, para explicar dicha verdad universal, recurre al proceso de generalización; 3) MacFarlane 2002, donde se muestra que la lógica de Frege es pura (independiente de nuestra psicología) y general (irrestricta en su tema),

impidió (a diferencia de un Peirce o un C.I. Lewis) desarrollar una lógica modal, pues:

> Si el lenguaje (nuestro lenguaje real o cualquier alternativa que pueda cumplir una parte considerable de las mismas tareas que él) no se puede re-interpretar, sólo se puede emplear para hablar de uno y el mismo mundo, a saber, nuestro mundo real. No es posible ninguna verdadera alternativa y por lo tanto las nociones de posibilidad y necesidad pierden su natural sentido leibniziano. (Hintikka 1998, p. 222)[22]

Hintikka 1998 señala tres salidas a la lógica universalista ante el problema modal: 1) *à la* Quine, abandonar las nociones modales por carecer de significado; 2) *à la* Russell, definir necesidad como universalidad; 3) ¡*à la* Wittgenstein, declarar que las verdades lógicas son tautologías![23]

4. *Proposiciones ramseyanas*

Siguiendo al TL-P, Ramsey 1925 (pp. 10–11) señaló 1) que al negar una tautología se obtiene una contradicción y viceversa; 2) que lo anterior vale para tautologías y contradicciones de *cualquier* grado de complejidad: al negar la tautología "$(x).\phi x :\supset: \phi a$" obtenemos la contradicción "$\sim .(\exists x).\phi x : \phi a$" (el ejemplo es de Ramsey), y 3) que, habida cuenta de que las tautologías y las contradicciones pueden tomarse como argumentos para funciones de verdad (al igual que las proposiciones fácticas, ordinarias), es posible asimilar, respectivamente, las tautologías y las contradicciones con proposiciones verdaderas y falsas, de modo que para determinar la verdad o la falsedad de una función de verdad, entre sus argumentos deben considerarse las tautologías y las contradicciones como argumentos, respectivamente verdaderos y falsos, de la misma: si t es una tautología, c una contradicción, y p cualquier proposición, entonces "t y p", "si t, entonces p", y "c o p" son lo mismo que p, mientras que "t o p" y "si c, entonces p" son tautologías (los ejemplos son de Ramsey).

y para lo segundo MacFarlane muestra cómo, para Frege, la lógica suministra a nuestro pensamiento normas universalmente aplicables, y 4) Goldfarb 2010, donde la concepción universalista de la lógica de Frege se explica en términos de que las verdades lógicas difieren de otras verdades por su generalidad. Podrían añadirse ejemplos *ad lib*.

[22] En efecto, lo pierden, pues Russell 1920 (p. 165) sostiene que "a veces se utiliza *contingente* o *asertótico* en lugar de *posible*". Sin embargo, en la lógica modal leibniziana, "contingente" y "posible" no son sinónimos intercambiables.

[23] Para la "lógica modal" del *Tractatus* y las opiniones de Ramsey al respecto, véase Bradley 1987.

Una parte central de la filosofía matemática (logicista) ramseyana estriba en su distinción entre *conceptos matemáticos* y *proposiciones matemáticas*. Tan central es esta distinción que Ramsey atribuyó buena parte de los problemas del formalismo[24] a su hincapié en las proposiciones matemáticas en detrimento de los conceptos matemáticos y buena parte de los problemas del logicismo a su hincapié en los conceptos matemáticos en detrimento de las proposiciones matemáticas.

El error del logicismo *à la* Russell-Whitehead a este respecto consistió en "su creencia de que cualquier proposición que pudiese establecerse utilizando constantes y variables lógicas debe ser por sí sola una proposición de la lógica o de las matemáticas" (Ramsey 1925, p. 4). Hay dos claves en este reparo de Ramsey. Primera (en contra del universalismo russelliano), que no todas las proposiciones generales, ni siquiera aquellas *completamente* generales, son proposiciones de las matemáticas o de la lógica simbólica. Segunda, que las proposiciones de PM, si están expresadas en palabras, son "casi todas sinsentidos por la teoría de tipos, y deben reemplazarse por convenciones simbólicas" (Ramsey 1925, p. 11), mientras que si están expresadas en símbolos son, con una sola excepción, tautologías en el sentido del TL-P. La excepción es el axioma de reducibilidad, "una *proposición genuina* cuya verdad o falsedad es una cuestión de hecho bruto, no de lógica; no es, por tanto, una tautología en ningún sentido, y su introducción en las matemáticas es inexcusable" (Ramsey 1925, pp. 11–12; las cursivas son mías). Ramsey enfatiza que si PM es un fundamento correcto de las matemáticas, y si de su sistema pudiera prescindirse del axioma de reducibilidad, entonces las matemáticas serían tautologías en el sentido del TL-P.

5. *La eliminación del axioma de reducibilidad*

Los argumentos de Ramsey para eliminar el axioma de reducibilidad fueron, para Russell, suficientemente convincentes como para eliminarlo de la segunda edición (1925–1927) de PM (Whitehead se desentendió de este proyecto).[25] Ya en 1903, Russell (1996) había introducido su doctrina de tipos como una solución a la paradoja fregeana

[24] En realidad, del formalismo bajo la figura de Hilbert, que Curry 1951 llamó "hilbertismo". Véase Detlefsen 2005 para un recuento histórico de las posturas formalistas en las matemáticas, varias de ellas ajenas al formalismo hilbertiano. Para las objeciones de Ramsey al "hilbertismo", véase Ramsey 1925 (pp. 2–3), así como Ramsey 1926 (pp. 70–81).

[25] Ramsey 1925 no fue la primera instancia de su rechazo al axioma de reducibilidad, pues antes había escrito (aunque su publicación fue posterior a Ramsey

de las clases que no son miembros de sí mismas (que Russell llamó *la Contradicción*). Empero, quedaba una contradicción "análoga que probablemente no es soluble mediante esta doctrina: la totalidad de todos los objetos lógicos, o de todas las proposiciones" (Russell 1996, p. 528). Cinco años después, en 1908, Russell descubrió que esta contradicción análoga no era una, sino varias (las paradojas del mentiroso, de Burali-Forti, de Richard, del menor ordinal indefinible, *la Contradicción*), y que en todas ellas "hay una característica común, que podemos describir como auto-referencia o reflexividad" (Russell 1908, p. 224). Teniendo esta característica común, la salida a todas estas contradicciones consistía en desproveerlas de auto-referencia o reflexividad, lo que significaba rechazar funciones impredicativas y únicamente admitir funciones predicativas, aquellas "que no tienen ningún término en común con las funciones para las que pueden ser argumentos" (Russell y Whitehead 1962, p. 48).[26]

El axioma de reducibilidad pretende conseguir esto al establecer que cualquier función proposicional pueda expresarse mediante una función de verdad *predicativa* lógicamente equivalente: "si Ψ es una función proposicional de cualquier tipo y orden, existe una función proposicional Φ lógicamente equivalente a Ψ cuyo tipo depende del tipo de sus variables libres" (Mosterín y Torretti 2010, p. 54).[27]

¿Qué objetó Ramsey al axioma de reducibilidad? Que en PM se haya fundamentado en evidencia inductiva, contraviniendo "una cosa clara: que las matemáticas no consisten en proposiciones genuinas o afirmaciones de hecho [. . .] sino que en algún sentido son necesarias o tautológicas" (Ramsey 1925, p. 12). Esta objeción es decisiva en contra del axioma de reducibilidad (que en PM fue introducido

1925; véase Mcguinness 2006, p. 4) la entrada "Matemáticas" en la 13ª edición de la *Encyclopedia Britannica*, donde ya abogaba por eliminar el axioma de reducibilidad de las matemáticas.

[26] Véase Feferman 2005 para un recuento histórico de la predicatividad en la lógica moderna y en la teoría de conjuntos y Priest 2017 (pp. 30–36) para un breve recuento de la auto-referencia en la historia de la lógica.

[27] Aunado a los juicios de Ramsey 1925 sobre el axioma de reducibilidad, véanse la segunda edición de PM y Ramsey 1926 para las limitantes de Ramsey 1925 al respecto en algunos teoremas de los números reales, limitantes debidas a la impresión que sobre Ramsey tuvo *Das Kontinuum* de Weyl (véase Gödel 1998 para estas limitantes en los números enteros). Más allá de estos problemas, están aquellos que, sobre el axioma de reducibilidad, identificaron Wiener, Skolem, Von Neumann, y Hilbert; aquellos que, sobre la predicatividad *à la* Russell (y *à la* Poincaré), denunció Zermelo, y aquellos que, sobre la propia solución ramseyana a la teoría de tipos de Russell, encontraron Quine y Kleene.

para permitir que haya una función elemental equivalente para cada función *no* elemental), pues para Ramsey, *incluso si el axioma fuese verdadero*, ello sería "un feliz accidente" (Ramsey 1925, p. 28) y no una necesidad lógica (porque el axioma no es una tautología).

Así, Ramsey no objetó el contenido empírico particular, cualquiera que sea, del axioma de reducibilidad, sino la introducción, en PM, de un axioma fundamentado empíricamente. Esto es consistente con la principal objeción de Ramsey al logicismo: "los logicistas desatendieron la forma e hicieron que las matemáticas consistieran en cualesquiera generalizaciones verdaderas" (Ramsey 1925, p. 5).

De las objeciones de Ramsey a la *inexcusable* introducción del axioma de reducibilidad en PM surgieron dos célebres resultados. Primero, su distinción entre contradicciones *puramente* lógicas o matemáticas —*la Contradicción*, la contradicción de Burali-Forti acerca del mayor número ordinal, la relación entre dos relaciones cuando una de ellas no tiene relación con la otra— y contradicciones que no es posible establecer en términos *puramente* lógicos, "pues contienen alguna referencia al pensamiento, al lenguaje, o al simbolismo, que no son términos formales sino empíricos" (Ramsey 1925, p. 20): la paradoja de Epiménides, el menor número entero no nombrable en menos de diecinueve sílabas, el menor número ordinal indefinible, la paradoja de Richard (sobre la que Ramsey objetó a Peano el haberla considerado una contradicción lingüística, y no epistemológica), y la paradoja de Grelling-Nelson (que Ramsey atribuyó a Weyl, bajo cuyo nombre también se conoce).[28]

Bajo esta distinción, el problema con el axioma de reducibilidad es que, si bien no reproduce contradicciones relativas al pensamiento o al significado (como las ya esquivadas por la distinción entre funciones elementales y no elementales), su introducción reinstalaría contradicciones *puramente matemáticas* relativas a la confusión entre funciones elementales y no elementales porque, para Ramsey, en las

[28] Véase Hamkins 2020 (p. 237), para la opinión, *pro* Ramsey, de que la paradoja de Epiménides es una paradoja semántica, "no sujeta a la aritmetización". Por su parte, véanse Kleene 2009 (p. 45), para una crítica a los argumentos ramseyanos a favor de definiciones impredicativas en una teoría de tipos (esto es lo que, en una nota anterior, identifiqué como el problema que encontró Kleene con la solución de Ramsey a la teoría de tipos de Russell) y Curry 1977 (pp. 7–8) para una objeción a la postura ramseyana de que las matemáticas no han de tomar en cuenta paradojas semánticas. La objeción de Curry encuentra eco en Earman y Norton 1996, donde se muestra la fecundidad lógico-matemática que ofrecen las paradojas *conceptuales* de las supertareas, *i.e.*, aquellas tareas que requieren la realización de un número infinito de acciones u operaciones en un tiempo finito.

matemáticas —extensionales por naturaleza— las funciones *elementales* equivalentes son intercambiables.

El segundo resultado que surgió de las objeciones de Ramsey a la introducción del axioma de reducibilidad en PM fue su teoría *simple* de tipos, que Wang 1967 atribuyó a la influencia directa del TL-P sobre Ramsey.[29] *Matemáticamente*, la teoría simple de tipos (*i.e.*, la alternativa ramseyana al axioma de reducibilidad de Russell y, más generalmente, a la *doctrina* de tipos de Russell) suministra un fundamento seguro y razonable de las matemáticas clásicas si concedemos que dicha teoría encarna dos principios matemáticos clásicos, a saber, que una variable siempre tiene un rango delimitado y que siempre hemos de distinguir entre una función y sus argumentos.[30]

La objeción de Ramsey al axioma de reducibilidad está estrechamente relacionada, me parece, con la objeción de Ramsey a que PM no consigue dar cuenta del carácter extensional de las matemáticas, pues si una característica de la extensionalidad de las matemáticas es que sus funciones elementales equivalentes son intercambiables entre sí, y el axioma de reducibilidad permite que haya una función elemental equivalente para cada función *no* elemental, entonces el axioma de reducibilidad bien puede identificar (*confundir*, según Ramsey) una función elemental con una función no elemental, lo que reproduce (*reinstala*, según Ramsey) *contradicciones puramente matemáticas relativas a la confusión entre funciones elementales y no elementales*, pues, con la introducción del axioma de reducibilidad, ya no tenemos claro que una función elemental equivalente será intercambiable con otra función elemental equivalente, porque también puede ser intercambiable con una función *no* elemental equivalente.

Linnebo 2017, por su parte, identifica dos virtudes y dos vicios *filosófico-matemáticos* de la teoría simple de tipos.[31] Sus virtudes son que, al distinguir entre individuos, clases de individuos, clases de clases de individuos, etc., se bloquea, al menos gramaticalmente, la paradoja de Russell, y que, al considerar la abstracción mediante

[29] Véase Wang 2016 (pp. 114–120) para más sobre la relación entre Wittgenstein y Ramsey en el marco de la lógica de Russell.

[30] Al respecto, Gandy 1977 probó la completitud del sistema *simple* de tipos cumulativo siempre y cuando el axioma del infinito sea reemplazado por axiomas de finitud.

[31] Ambos vicios se relacionan con la pretensión ramseyana de considerar la teoría simple de tipos como salvaguardia del logicismo. Por otro lado, Linnebo 2017 (p. 131), distingue una tercera virtud de la teoría simple de tipos, ajena a pretensiones *fundacionistas*: la del papel de la teoría simple de tipos como una teoría de conjuntos *simple* y *débil* propensa a ser un escalón para teorías de conjuntos más fuertes e interesantes.

clases de equivalencia, la teoría simple de tipos nos asegura, por ejemplo, que dos conjuntos tienen el mismo número cardinal sólo si son equipotentes. Empero, *como postura logicista*, la teoría de tipos, incluso en su versión *simple*, establece una innecesaria restricción sintáctica entre los tipos que trata (éste es su primer vicio, identificado en Gödel 1995), y esta restricción, si bien bloquea ciertas paradojas, bloquea el argumento fregeano de que hay infinitos números (éste es su segundo vicio).

6. *El problema del axioma del infinito*

El problema es el siguiente (sigo a Linnebo 2017, pp. 130–131). El argumento fregeano que muestra que hay infinitos números *depende* de la contabilidad de los números, de que, habiendo establecido la existencia de 0 hasta n, tengamos cuanto menos $n + 1$ objetos disponibles para ser contados, lo que nos permite establecer, asimismo, la existencia del número $n + 1$. Empero, si construimos los números *à la* Russell, como clanes de familias equinumerosas (el ejemplo es de Linnebo 2017), ya no tenemos a nuestra disposición el argumento fregeano. ¿Cómo aborda Ramsey este problema?

En primer lugar, al distinguir entre una proposición como *hay un número infinito de cosas* de una como *hay un número infinito de cosas difiriendo entre sí respecto de funciones elementales*. Esto significa que si nuestras cosas son, *e.g.*, los átomos, a fin de asumir su infinitud no hemos de asumir que su conjunto es infinito, sino que hay algún *tipo infinito* que podemos *tomar* como el *tipo* de átomos individuados. Siendo esto así, el axioma del infinito no puede probarse, sino que "debe *tomarse* como una proposición primitiva" (Ramsey 1925, p. 61; las cursivas son mías).[32] En segundo lugar,

[32] Recurriendo a un escrito poco conocido de Ramsey titulado "The Infinite" (Frank Plumpton Ramsey Papers, 1920–1930), Potter 2005 sostiene que, para el Ramsey influido por el *Tractatus*, la mera posibilidad del infinito prueba su realidad. No hace falta recurrir a "The Infinite" para esta conclusión, que ya se encuentra, como vemos, en Ramsey 1925, para quien una *clase* es cualquier conjunto de cosas del mismo tipo lógico. Es claro, por otra parte, que si nuestras mentes no fuesen finitas, o si fuésemos inmortales, no tendríamos necesidad de recurrir a algún *tipo* infinito para dar cuenta de la infinitud de cualesquiera *cosas*, *e.g.*, los átomos, pues tal conjunto podría ser, bajo una u otra de estas suposiciones, definible por enumeración. (Para la imposibilidad práctica de recorrer todos los números naturales y su relación con las supertareas, de las que hablé en una nota anterior, véase Weyl 2009, p. 42.) Ninguno de estos impedimentos —la (aparente) finitud de nuestras mentes y la (clara) finitud de nuestros cuerpos— detuvo a Bolzano o a Dedekind para sostener que, *prospectum*, hay clases reflexivas en el sentido russelliano del término, pues para Bolzano y Dedekind, 1) un objeto no es idéntico a la idea del objeto, pero

Ramsey aborda el problema del axioma del infinito asumiendo que las matemáticas bien podrían requerir de tal axioma no obstante su estatus lógico (ya sea, pues, como una proposición tautológica, empírica, o contradictoria). En tercer lugar, sosteniendo que, si bien en PM dicho axioma se *utiliza* como una proposición empírica, "el profundo análisis de Wittgenstein ha mostrado que [. . .] debe ser una tautología o una contradicción" (Ramsey 1925, p. 59). En cuarto y último lugar, sosteniendo que, si el axioma del infinito es efectivamente tautológico (como lo era para Ramsey), entonces no ha de *probarse* como una proposición primitiva "a menos que prefiramos la perspectiva de que todo el análisis [matemático] es auto-contradictorio e insignificativo" (Ramsey 1925, p. 61).

7. *Las proposiciones matemáticas como proposiciones tautológicas*

De mostrar que las matemáticas consisten en tautologías "en el preciso sentido definido por Wittgenstein" (Ramsey 1925, p. 13) dependía la viabilidad del proyecto logicista según lo entendía Ramsey. Antes de abordar esto, son pertinentes las siguientes observaciones. Primero, para Ramsey 1925, la geometría no constituía ningún problema para el logicismo, pues la geometría consiste en tautologías en tanto que 1) nuestros términos geométricos (punto, línea, superficie) significan cualesquiera cosas que satisfacen ciertos axiomas y que 2) los únicos términos *constantes* de la geometría son *funciones de verdad* ("o", "algunos", etcétera).[33]

hay (al menos en el reino (platónico) del ser) una idea de cualquier objeto; 2) la relación de un objeto con su idea es uno-uno (siendo las ideas solamente algunos de entre los objetos); 3) la relación "idea de" constituye una reflexión de toda la clase (en sentido russelliano) de objetos en una parte de sí misma, *v.gr.*, en aquella parte que consiste en ideas, y 4) la clase de objetos y la clase de ideas son, ambas, infinitas. Russell 1920 (p. 140) objetó a Bolzano y a Dedekind en los siguientes términos: si entendemos "idea" lógicamente, entonces, o bien es *idéntica* al objeto, o bien es una *descripción* del objeto. Si es lo primero, entonces el argumento Bolzano-Dedekind no consigue su cometido de mostrar que *la relación "idea de" constituye una reflexión de toda la clase de objetos en una parte de sí misma*, pues para esta prueba de reflexión resulta *esencial* que el objeto y la idea sean distintos. Si es lo segundo (*v.gr.*, que "idea" sea, lógicamente, una descripción del objeto), el argumento Bolzano-Dedekind igualmente falla, pues la relación de un objeto con su descripción no es, necesariamente, uno-uno, pues "hay innumerables descripciones correctas de cualquier objeto dado" (Russell 1920, p. 140).

[33] Nótese la influencia del formalismo hilbertiano en el punto 1) y la del logicismo russelliano-whiteheadiano en el punto 2). El caso del análisis matemático sería el mismo que el de la geometría (*i.e.*, consistiría en tautologías), si no fuese porque, en el análisis, no nos es posible considerar los números como satisfaciendo los axiomas de Peano, porque para ello los números tendrían que definirse "no como variables,

Segundo, no es claro que lo que Ramsey 1925 entendió por *tautologías* haya sido lo que entendía Wittgenstein 2009, pues mientras Ramsey entendía las ecuaciones matemáticas como identidades matemáticas, y éstas como tautologías, en el TL-P no hay ningún indicio de que "ecuación matemática" y "tautología" sean sinónimos intercambiables.[34] Incluso Wittgenstein rechazaría, post-*Tractatus*, la identificación entre ecuaciones matemáticas y tautologías:

> Me parece que se puede comparar las ecuaciones matemáticas sólo con proposiciones significativas, no con tautologías. Porque una ecuación contiene precisamente ese elemento asertótico —el signo de igualdad— que no está designado para mostrar algo. Puesto que todo lo que se muestra se muestra sin el signo de igualdad. El signo de igualdad no corresponde al '$. \supset .$' de '$p.(p \supset q). \supset .q$', puesto que el '$. \supset .$' es sólo *un* componente entre otros que intervienen para hacer la tautología. No se sale de su contexto, sino que pertenece a la proposición, del mismo modo en que el '.' o el '$\supset$' lo hacen. Pero el '=' es una cópula que por sí sola hace a la ecuación algo proposicional. Una tautología muestra algo, una ecuación no muestra nada; más bien, indica que sus lados muestran algo (Wittgenstein 2007a, pp. 132–133).[35]

Esta segunda observación parece toral para esta discusión, pues en realidad ya no tendríamos matemáticas consistiendo en tautologías "en el preciso sentido definido por Wittgenstein", sino matemáticas

sino como constantes, y la naturaleza de las proposiciones del análisis se vuelve dudosa" (Ramsey 1925, pp. 13–14).

[34] Véanse McGuinness y Von Wright 1995 para la correspondencia entre Wittgenstein y Ramsey al respecto y Marion 1995 para una exposición de las posturas de Wittgenstein y Ramsey acerca de la identidad. Para Wittgenstein 2009, la identidad no es una propiedad (prop. 5.473), ni una relación entre objetos (prop. 5.5301), ni puede aseverarse (prop. 6.2322), y es por ello por lo que el *signo* de identidad es dispensable (props. 5.533, 6.232). No obstante esta dispensabilidad, es posible interpretar oraciones universales y existenciales de la aritmética de primer orden como conjunciones o disyunciones infinitas cuasi-tractarianas libres de variables (siendo cuasi-tractarianas, y no tractarianas, precisamente por la dispensabilidad del signo de identidad en Wittgenstein 2009). Para la posibilidad de este proyecto, véase Jeffrey 1996.

[35] Véase Mays 1967 (p. 82) para evidencia anecdótica de que Wittgenstein rechazó que las matemáticas consistieran en tautologías. En una nota anterior señalé que, al no considerar *desigualdades* entre expresiones matemáticas, Ramsey 1923 cuestionó que la exposición del TL-P al respecto cubriera *todas* las matemáticas. Es razonable creer que, sobre líneas parecidas, Ramsey habría cuestionado esta exposición de Wittgenstein 2007a. Véanse, en Stewart 2017 (pp. 126–129) algunas críticas puntuales a las concepciones de Wittgenstein 2007a acerca de la teoría de conjuntos y del infinito actual.

consistiendo en lo que Ramsey entendió por "tautología(s)" a lo largo del *Tractatus*.[36] Concediendo esto, a continuación expondré el camino que recorrió Ramsey para llegar a la tesis más importante de Ramsey 1925, a saber, que las matemáticas consisten en tautologías.[37]

De acuerdo con Ramsey 1925 (p. 5 y ss.), para *explicar* la definición de "tautología" en el TL-P, antes hemos de *explicar* su teoría de las proposiciones, comenzando con su noción de proposiciones atómicas.[38] Las proposiciones atómicas tienen dos características: primera, no son analizables en términos de otras proposiciones; segunda, consisten únicamente en nombres, sin constantes lógicas. Así, si la proposición "Sócrates es sabio" es atómica en virtud de que no es analizable en términos de otras proposiciones y de que consiste únicamente en nombres, sin constantes lógicas (siendo "sabio" el *nombre*

[36] Digo que *parece* toral para esta discusión porque creo que lo es en un sentido historiográfico o hermenéutico. Asumiendo (lo que, por lo demás, parece plausible) que Ramsey haya malentendido a Wittgenstein respecto de la concepción de "tautología" a lo largo del *Tractatus*, ello no anula que la teoría ramseyana resultante sea interesante y fructífera por sí misma. Lo que es más: esos mismos malentendidos fueron los que posibilitaron las doctrinas logicistas ramseyanas tal como las conocemos.

[37] Su importancia primaria radica, como señalé al principio, en que es la tesis mediante la cual Ramsey pretendió "ofrecer una exposición satisfactoria de los fundamentos de las matemáticas de acuerdo con el método general de Frege, Whitehead y Russell", para quienes "las matemáticas son parte de la lógica" (Ramsey 1925, p. 1). Hay dos reparos en esta afirmación de Ramsey de que para Frege, Whitehead y Russell "las matemáticas son parte de la lógica". Primero, el proyecto logicista de PM fue más ambicioso que el de Frege, tan sólo sea porque, debido al kantismo de Frege respecto de la naturaleza de las proposiciones geométricas, Frege nunca pretendió *logicizar* la geometría (véase Tomasini 2012, pp. 127–128, para otros motivos de por qué, respecto del programa logicista de Russell, el de Frege era "más bien limitado"). (Atendiendo lo señalado por Ramsey respecto de que "la naturaleza de las proposiciones del análisis [matemático] se vuelve dudosa" una vez que intentamos *logicizarlas* haciéndolas satisfacer los axiomas de Peano, es claro que el logicismo russelliano-whiteheadiano fue, también, más ambicioso que el de Ramsey.) Segundo, el programa logicista de Frege consistía en *reducir* la *aritmética* a la lógica, mientras que el de PM en *identificar* las *matemáticas* con la lógica (Ramsey 1925, p. 5, no entiende así a Russell 1996, pues lo describe como "esta reducción de las matemáticas a la lógica simbólica"). Véanse Carnap 1931 para un trabajo clásico, y Zalta 2008 para uno contemporáneo, a favor de que el logicismo no sólo es verdadero, sino de que *es* la tesis de que las matemáticas son *reducibles* a la lógica. Según Rayo 2005 y su aludida distinción entre tres tipos de logicismo, el de Frege fue un *Truth-Logicism* (*i.e.*, las verdades matemáticas son verdaderas como una cuestión de lógica pura). No hay ninguna inconsistencia entre el *Truth-Logicism* y el logicismo reductivista que aquí atribuyo a Frege.

[38] Las proposiciones elementales del TL-P, que Ramsey llama *atómicas* "con el fin de seguir al Sr. Russell al utilizar 'elemental' en un sentido distinto" (Ramsey 1925, p. 5, nota 1).

de una cualidad), proposiciones como (1) "Todos los hombres son sabios" y (2) "Sócrates no es sabio" no son atómicas, pues (1) *sí* es analizable en términos de otras proposiciones y (2) contiene la constante lógica "no".

Para n proposiciones atómicas hay *dos* posibilidades últimas, mutuamente excluyentes, respecto de su verdad o falsedad, que Ramsey 1925 (p. 6) llama las posibilidades de verdad de las proposiciones atómicas, de manera que si $n = 1, 2^n = 2$ (verdadero o falso), si $n = 2, 2^n = 4$ (verdadero y verdadero; falso y verdadero; verdadero y falso; falso y falso), etcétera. Es así que podemos, por ejemplo, al poner las *marcas* de V (V = verdadero) y F (F = falso) en las *posibilidades* con las que respectivamente acordamos y desacordamos, obtener las proposiciones (a) "p es incompatible con q" y (b) "si p, entonces q":

(a)

p	q	
V	V	F
F	V	V
V	F	V
F	F	V

(b)

p	q	
V	V	V
F	V	V
V	F	F
F	F	V

Habrá proposiciones que expresen acuerdo *y* desacuerdo con p y q (nuestras posibilidades de verdad), *v.g.*, las *funciones de verdad* de p y q ("p y q" siendo *la misma* función de verdad que p, q, si "p y q" es la única posibilidad en la que los argumentos p y q son verdaderos). Siendo esto así, los argumentos para una función de verdad podrían ser infinitos —pues la suma lógica de un conjunto de proposiciones *es* la proposición de que al menos *una* es verdadera, siendo irrelevante si el conjunto es finito o infinito (Ramsey 1925, p. 7, nota 1)—, aunque no debe preocuparnos la imposibilidad práctica de enumerarlos todos, porque las funciones proposicionales nos permiten *determinarlos*, y esto es todo lo que se requiere.

Las funciones proposicionales nos permiten determinar los argumentos (posiblemente infinitos) de las funciones de verdad porque las funciones proposicionales nos permiten reunir el rango de proposiciones que constituyen *todos* los valores de la función para *todos* los valores posibles de un argumento y, una vez conseguido esto, podemos afirmar el producto (mediante un cuantificador universal) o la suma (mediante un cuantificador existencial) lógicas del conjunto de las proposiciones consideradas. Por ejemplo, en el caso de "(x). x es un hombre" (= "Todo es un hombre"), permitimos solamente la posibilidad de que todas las proposiciones de la forma "x es un hombre" son verdaderas, afirmando de esta manera su producto lógico, mientras que en el caso de "$(\exists x)$. x es un hombre" (= "Hay algún hombre"), excluimos solamente la posibilidad de que todas las proposiciones de la forma "x es un hombre" son falsas, afirmando así su suma lógica.[39]

Así definidas, todas las proposiciones son, ultimadamente, funciones de verdad de proposiciones atómicas (elementales, en argot wittgensteiniano), pues "cuando afirmamos cualquier cosa, estamos diciendo que es una, de un cierto grupo de posibilidades últimas, que se realiza, no una de las posibilidades restantes" (Ramsey 1925, p. 9). Y esto es aplicable a proposiciones expresables mediante el simbolismo de PM, en tanto que éstas se construyen a partir de *proposiciones atómicas* (recurriendo a conjunciones: "si", "y", "o") y de varios *tipos de generalidad* (*i.e.*, variables ligadas, que Ramsey, según la terminología de su época, llama variables aparentes). "Y ambos tipos de construcción han resultado crear funciones de verdad" (Ramsey 1925, p. 9).[40]

Ya que este aparato nos permite saber cuándo es que dos símbolos proposicionales deben considerarse instancias de la misma proposición, lo que sucede cuando los dos símbolos proposicionales "expresan acuerdo y desacuerdo con los mismos conjuntos de posibilidades de verdad de proposiciones atómicas" (Ramsey 1925, p. 9), Ramsey sostiene que, bajo el simbolismo de PM, tanto $p \supset q :\sim p. \supset .q$ como $q \vee : p. \sim p$ son, por ejemplo, solamente dos modos más complicados de escribir q.

[39] Véase Ramsey 1925, pp. 8–9.

[40] Con el caso dudoso de las creencias de primer orden, pues "S cree que p" no es una función de verdad de p, aunque "puede ser una de otras proposiciones atómicas" (Ramsey 1925, p. 9, nota 1).

Ahora, para todo conjunto de n proposiciones atómicas (tomadas como argumentos) hay 2^n posibilidades de verdad, y entonces hay 2^{2^n} subclases de tales posibilidades de verdad (2^{2^n} funciones de verdad de n argumentos). De entre estas 2^{2^n} subclases de las 2^n posibilidades de verdad hay dos casos extremos (o *degenerados*, según Ramsey, en tanto que no se trata de proposiciones (empíricas) *genuinas*), a saber, aquel en el que una proposición expresa acuerdo con *todas* las posibilidades de verdad (tautología) y aquel en el que una proposición no expresa acuerdo con *ninguna* posibilidad de verdad (contradicción).

Tomemos "el caso más simple posible, cuando hay sólo un argumento" (Ramsey 1925, p. 10): (a) "p o no p" será nuestra tautología y (b) "p no es verdadera ni falsa" será nuestra contradicción. Sobre (a) puede decirse que no afirma nada en absoluto, que "no lo deja a uno más sabio que como lo encontró" (Ramsey 1925, p. 10).[41] Sobre (b) puede decirse que lo que expresa es autocontradictorio, en tanto que "no representa un estado de cosas posible cuya existencia pueda ser afirmada" (Ramsey 1925, p. 10). Sus tablas de verdad son:

(a)

p	
V	V
F	V

(b)

p	
V	F
F	F

Ramsey (1925, p. 11) sostiene que la cuestión de si este sentido de las tautologías es una característica esencial de las proposiciones de las matemáticas y de la lógica simbólica ha de decidirse comparativamente: ¿son las proposiciones de las matemáticas y de la lógica simbólica tautologías en el sentido de Wittgenstein? Dando por supuesto que PM puede ser una interpretación correcta de las matemáticas, y que en dicho sistema las proposiciones matemáticas se obtienen

[41] *Uno no sabe nada sobre el clima si sabe que está lloviendo o que no está lloviendo*, según asentaría Wittgenstein en la prop. 4.461 del *Tractatus* y a la que Ramsey recurrió para ejemplificar su punto.

 DOI:https://doi.org/10.22201/iifs.18704905e.2022.1346

deductivamente desde ciertas proposiciones primitivas, lo que queda (esta es la estrategia que sigue Ramsey) es aclarar la naturaleza de aquellas proposiciones primitivas de PM que están expresadas en *símbolos* y la de aquellas expresadas en *palabras*. Según vimos, todas las proposiciones primitivas expresadas en símbolos son, con la única excepción del axioma de reducibilidad, tautologías, mientras que casi todas las proposiciones expresadas en palabras son, por los defectos de la teoría de tipos de Russell, sinsentidos; de modo que, como igualmente vimos, las respectivas soluciones de Ramsey estribaron en eliminar el axioma de reducibilidad del sistema de PM y en proponer una teoría simple de tipos en la que las proposiciones expresadas en palabras sean reemplazadas por convenciones simbólicas.

8. *Conclusión*

La de Ramsey no fue la primera (Jourdain 1915) ni la última (Clark y Demopoulos 2005) reivindicación del logicismo russelliano.[42] Sí fue, empero, una propuesta que impactó positivamente en los propios supuestos logicistas de Russell, en el desarrollo de algunos conceptos lógico-matemáticos y computacionales (la teoría simple de tipos) e, incluso, en la teoría de conjuntos.[43] Sobre Ramsey, G.E. Moore escribió que, no obstante sus errores, siempre tuvo muy buenas razones para las opiniones a las que llegó (Ramsey 1925, p. viii). Si esto es cierto de cualquier gran filósofo, como lo fue Ramsey, no menos cierto es el *dictum* de Boole 1847 (p. 2) sobre cualquier gran teoría, como lo es la teoría logicista de Ramsey: "La estimación de una teoría no está simplemente determinada por su verdad; también depende de la importancia de su objeto y de la extensión de sus aplicaciones." Siguiendo a Putnam 1967, quizá podríamos discutir la importancia del objeto de la teoría de Ramsey aquí considerada (defender el fundamento lógico de las matemáticas), pero difícilmente podríamos subestimar la importancia de la extensión de sus aplicaciones.[44]

[42] Estatus distinto del que, vía Parsons, Boolos, Hale, Wright, Burge, Rosen, Heck, Cook, etc., goza el logicismo fregeano, pues las principales motivaciones del neo-logicismo son esencialmente (neo)-fregeanas, ya sean doctrinarias (salvar los principios fregeanos de abstracción), metodológicas (rescatar los *Grundlagen* vía Hume), epistemológicas (explicar el carácter apriorístico de las matemáticas vía la analiticidad de la aritmética), etc. Véase Chihara 1980 para motivos del histórico ninguneo a la teoría de tipos de Ramsey y para razones *fregeanas* por revivirla.

[43] Por no hablar de la influencia que tuvo sobre Wittgenstein 2003 la insistencia de Ramsey en que la lógica es una ciencia normativa o la influencia que, según Marion 2012, tuvo el pragmatismo de Ramsey sobre el Wittgenstein del *Tractatus*.

[44] Agradezco al profesor Axel A. Barceló Aspeitia el haberme permitido citar dos manuscritos inéditos suyos en este trabajo y a la profesora Lourdes Valdivia por

BIBLIOGRAFÍA

Anscombe, E., 1989, "The Simplicity of the *Tractatus*", *Crítica*, vol. 21, no. 63, pp. 3–16.

Anscombe, E., 1963, *An Introduction to Wittgenstein's* Tractatus, St. Augustine's Press, Indiana.

Barceló, A. (manuscrito), *Fundacionismo y Anti-Fundacionismo en Filosofía de las Matemáticas*. (http://www.filosoficas.unam.mx/docs/37/files/Fundacionismo %20y %20Anti-Fundacionismo.pdf)

Barceló, A. (manuscrito), *Wittgenstein contra la Metamatemática*. (http://www.filosoficas.unam.mx/docs/37/files/BarceloWittgensteinMeta matematicas.pdf.)

Black, M., 1964, *A Companion to Wittgenstein's* Tractatus, Cambridge University Press, Cambridge.

Boole, G., 1847, *The Mathematical Analysis of Logic*, George Bell and Sons, Londres.

Bradley, R., 1987, "Tractatus 2.022-2.023", *Canadian Journal of Philosophy*, vol. 17, no. 2, pp. 349–359.

Burgess, J., 2018, "Putnam on Foundations: Models, Modals, Muddles", en G. Hellman y R. Cook (eds.), *Hilary Putnam on Logic and Mathematics*, Springer, Cham, pp. 129–143.

Carnap, R., 1963, "Intellectual Autobiography", en P. Schilpp (ed.), *The Philosophy of Rudolf Carnap*, Open Court, Illinois, pp. 3–84.

Carnap, R., 1937, *The Logical Syntax of Language*, Kegan Paul, Londres.

Carnap, R., 1931, "Die logizistische Grundlegung der Mathematik", *Erkenntnis*, vol. 2, no. 1, pp. 91–105.

Chihara, C., 1980, "Ramsey's Theory of Types: Suggestions for a Return to Fregean Sources", en H. Mellor (ed.), *Prospects for Pragmatism: Essays in Memory of F.P. Ramsey*, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 21–47.

Church, A., 1996, *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton University Press, Nueva Jersey.

Clark, P. y W. Demopoulos, 2005, "The Logicism of Frege, Dedekind, and Russell", en S. Shapiro (ed.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford University Press, Nueva York, pp. 129–165.

Colyvan, M., 2009, "Applying Inconsistent Mathematics", en O. Bueno y Ø. Linnebo (eds.), *New Waves in Philosophy of Mathematics*, Palgrave MacMillan, Hampshire, pp. 160–172.

Consuegra, F., 1991, "El logicismo russelliano", *Crítica*, vol. 23, no. 67, pp. 15–39.

Curry, H., 1977, *Foundations of Mathematical Logic*, Dover, Nueva York.

haber llamado mi atención hacia algunos de los temas fregeanos aquí desarrollados. También agradezco a un/a dictaminador/a anónimo/a por sus comentarios a una versión previa de este artículo.

Curry, H., 1951, *Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics*, North-Holland Publishing Company, Ámsterdam.

Detlefsen, M., 2005, "Formalism", en S. Shapiro (ed.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford University Press, Nueva York, pp. 236–317.

Dummett, M., 1975, "The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic", *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, vol. 80, pp. 5–40.

Earman, J. y J. Norton, 1996, "Infinite Pains: The Trouble with Supertasks", en A. Morton y S. Stich (eds.), *Benacerraf and his Critics*, Blackwell, Cornwall, pp. 231–261.

Feferman, S., 2005, "Predicativity", en S. Shapiro (ed.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford University Press, Nueva York, pp. 590–624.

Floyd, J., 2005, "Wittgenstein on Philosophy of Logic and Mathematics", en S. Shapiro (ed.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford University Press, Nueva York, pp. 75–128.

Frank Plumpton Ramsey Papers, 1920–1930, ASP.1983.01, Archives of Scientific Philosophy, Archives and Special Collections, University of Pittsburgh Library System.

Frege, G., 1980, *The Foundations of Arithmetic*, Northwestern University Press, Evanston.

Gandy, R., 1977, "The Simple Theory of Types", en R. Gandy y J. Hyland, *Logic Colloquium 76: Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, North-Holland Publishing Company, Ámsterdam, pp. 173–181.

George, A. y D. Velleman, 2002, *Philosophies of Mathematics*, Blackwell, Malden.

Gödel, K., 1998, "Russell's Mathematical Logic", en P. Benacerraf y H. Putnam (eds.), *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 447–469.

Gödel, K., 1995, "The Present Situation in the Foundations of Mathematics", en S. Feferman (ed.), *Kurt Gödel: Collected Works. Volume III: Unpublished essays and lectures*, Oxford University Press, Nueva York, pp. 45–53.

Goldfarb, W., 2010, "Frege's Conception of Logic", en T. Ricketts y M. Potter (eds.), *The Cambridge Companion to Frege*, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 63–85.

Goldfarb, W., 2002, "Wittgenstein's Understanding of Frege: The Pre-Tractarian Evidence", en E. Reck (ed.), *From Frege to Wittgenstein: Perspectives on Early Analytic Philosophy*, Oxford University Press, Oxford, pp. 185–200.

Hahn, H., 1980, *Empiricism, Logic, and Mathematics: Philosophical Papers*, Reidel, Dordrecht.

Hahn, H., O. Neurath y R. Carnap, 1973, "Wissenschaftliche Weltauffassung: Der Wiener Kreis", en R. Cohen y M. Neurath (eds.), *Otto Neu-*

rath: Empiricism and Sociology, D. Reidel, Dordrecht, vol. 1, pp. 299–318.

Hamkins, J., 2020, *Lectures on the Philosophy of Mathematics*, The MIT Press, Cambridge.

Hintikka, J., 1998, "El lugar de C.S. Peirce en la historia de la teoría lógica", en J. Hintikka, *El viaje filosófico más largo: De Aristóteles a Virginia Woolf*, Gedisa, Barcelona, pp. 215–243.

Jeffrey, R., 1996, "Logicism 2000: A Mini-manifesto", en A. Morton y S. Stich (eds.), *Benacerraf and his Critics*, Blackwell, Cornwall, pp. 160–164.

Jourdain, P., 1915, "Notes", en G. Cantor, *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, Open Court, Chicago, pp. 202–208.

Katz, J., 1996, "Skepticism about Numbers and Indeterminacy Arguments", en A. Morton y S. Stich (eds.), *Benacerraf and his Critics*, Blackwell, Cornwall, pp. 119–139.

Kitcher, P., 1984, *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford University Press, Nueva York.

Kleene, S., 2009, *Introduction to Meta-Mathematics*, Ishi Press, Nueva York.

Klement, K., 2019, "Russell's Logicism", en W. Russell (ed.), *The Bloomsbury Companion to Bertrand Russell*, Bloomsbury, Londres, pp. 151–178.

Köhler, E., 2006, "Ramsey and the Vienna Circle on Logicism", en M. Galavotti (ed.), *Cambridge and Vienna: Frank P. Ramsey and the Vienna Circle*, Springer, Nueva York, pp. 91–121.

Kreisel, G., 1972, "Hilary Putnam. Mathematics without Foundations, The Journal of Philosophy, vol. 64, pp. 5–22", *Journal of Symbolic Logic*, vol. 37, no. 2, pp. 402–404.

Kremer, M., 2015, "The Whole Meaning of a Book of Nonsense: Reading Wittgenstein's *Tractatus*", en M. Beaney (ed.), *The Oxford Handbook of the History of Analytic Philosophy*, Oxford University Press, Oxford, pp. 451–485.

Kripke, S., 2006, *Wittgenstein a propósito de reglas y lenguaje privado*, Tecnos, Madrid.

Lakatos, I., 2015, *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge University Press, Cambridge.

Linnebo, Ø., 2017, *Philosophy of Mathematics*, Princeton University Press, Nueva Jersey.

Linsky, B., 2011, *The Evolution of Principia Mathematica: Bertrand Russell's Manuscripts and Notes for the Second Edition*, Cambridge University Press, Cambridge.

MacBride, F. *et al.*, 2019, "Frank Ramsey", en E. Zalta (ed.), *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. (https://plato.stanford.edu/entries/ramsey/)

MacFarlane, J., 2002, "Frege, Kant, and the Logic in Logicism", *The Philosophical Review*, vol. 111, no. 1, pp. 25–65.

Maddy, P., 2013, *Defending the Axioms: On the Philosophical Foundations of Set Theory*, Oxford University Press, Oxford.

Mancosu, P., 2021, "Three Letters on the Foundations of Mathematics by Frank Plumpton Ramsey", *Philosophia Mathematica*, vol. 29, no. 1, pp. 1–27.

Marion, M., 2012, "Wittgenstein, Ramsey and British Pragmatism", *European Journal of Pragmatism and American Philosophy*, vol. IV, no. 2, pp. 1–26.

Marion, M., 2008, *Wittgenstein, Finitism, and the Foundations of Mathematics*, Oxford University Press, Oxford.

Marion, M., 1995, "Wittgenstein and Ramsey on Identity", en J. Hintikka (ed.), *From Dedekind to Gödel: Essays on the Development of the Foundations of Mathematics*, Springer, Nueva York, pp. 343–371.

Mays, W., 1967, "Recollections of Wittgenstein", en K. Fann (ed.), *Ludwig Wittgenstein: The Man and his Philosophy*, Humanities Press, Nueva Jersey, pp. 79–88.

McCarty, D., 1993, "On the Failure of Mathematics' Philosophy", *Synthese*, vol. 96, no. 2, pp. 255–291.

McGuinness, B., 2006, "Wittgenstein and Ramsey", en M. Galavotti (ed.), *Cambridge and Vienna: Frank P. Ramsey and the Vienna Circle*, Springer, Nueva York, pp. 19–28.

McGuinness, B. y G.H. von Wright, 1995 (eds.), *Ludwig Wittgenstein: Cambridge Letters*, Wiley-Blackwell, Nueva Jersey.

Methven, S., 2015, *Frank Ramsey and the Realistic Spirit*, Palgrave, Londres.

Misak, C., 2020, *Frank Ramsey: A Sheer Excess of Powers*, Oxford University Press, Oxford.

Misak, C., 2019, "Ramsey, Pragmatism, and the Vienna Circle", *European Journal of Pragmatism and American Philosophy*, vol. XI, no. 1, pp. 1–16.

Mosterín, J. y R. Torretti, 2010, *Diccionario de lógica y filosofía de la ciencia*, Alianza, Madrid.

Nakano, A., 2021, "On Ramsey's Reason to Amend *Principia Mathematica*'s Logicism and Wittgenstein's Reaction", *Synthese*, no. 199, pp. 2629–2646.

Potter, M., 2005, "Ramsey's Transcendental Argument", en H. Lillehammer y D.H. Mellor (eds.), *Ramsey's Legacy*, Oxford University Press, Oxford, pp. 71–82.

Priest, G., 2017, *Logic: A Very Short Introduction*, Oxford University Press, Oxford.

Putnam, H., 1995, *Mathematics, Matter and Method*, Cambridge University Press, Cambridge.

Putnam, H., 1967, "Mathematics without Foundations", *The Journal of Philosophy*, vol. 64, no. 1, pp. 5–22.

Quine, W.V., 1982, *Mathematical Logic*, Harvard University Press, Cambridge.

Quine, W.V., 1965, *Elementary Logic*, Harper, Nueva York.

Ramsey, F., 1991, *Notes on Philosophy, Probability and Mathematics*, Bibliopolis, Pittsburgh.

Ramsey, F., 1926, *Mathematical Logic*, Kegan Paul, Londres.

Ramsey, F., 1925, *The Foundations of Mathematics*, Kegan Paul, Londres.

Ramsey, F., 1923, "Critical Notice of L. Wittgenstein's Tractatus", *Mind*, vol. XXXII, no. 128, pp. 465–478.

Rayo, A., 2005, "Logicism Reconsidered", en S. Shapiro (ed.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford University Press, Nueva York, pp. 203–235.

Reichenbach, H., 1996, *Objetivos y métodos del conocimiento físico*, FCE, México.

Resnik, M., 2005, "Quine and the Web of Belief", en S. Shapiro (ed.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford University Press, Nueva York, pp. 412–436.

Richardson, A. y T. Uebel, 2007, *The Cambridge Companion to Logical Empiricism*, Cambridge University Press, Nueva York.

Rodych, V., 2018, "Wittgenstein's Philosophy of Mathematics", en E. Zalta (ed.), *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. (https://plato.stanford.edu/entries/wittgenstein-mathematics/)

Rodych, V., 1995, "Pasquale Frascolla's *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*", *Philosophia Mathematica*, vol. 3, no. 3, pp. 271–288.

Russell, B., 1999, "¿Es la matemática puramente lingüística?", en B. Russell, *Análisis filosófico*, Paidós, Barcelona, pp. 113–127.

Russell, B., 1996, *The Principles of Mathematics*, Norton, Nueva York.

Russell, B., 1920, *Introduction to Mathematical Philosophy*, George Allen y Unwin, Londres.

Russell, B., 1908, "Mathematical Logic as Based on the Theory of Types", *American Journal of Mathematics*, vol. 30, no. 3, pp. 222–262.

Russell, B. y A. Whitehead, 1962, *Principia Mathematica*, Cambridge University Press, Cambridge.

Soames, S., 2016, "Propositions, the *Tractatus*, and 'The Single Great Problem of Philosophy' ", *Crítica*, vol. 48, no. 143, pp. 3–19.

Stalnaker, R., 2003, "On what Possible Worlds Could Not Be", en R. Stalnaker, *Ways a World Might Be: Metaphysical and Anti-Metaphysical Essays*, Oxford University Press, Norfolk, pp. 40–54.

Steiner, M., 1998, *The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem*, Harvard University Press, Cambridge.

Stewart, I., 2017, *Infinity: A Very Short Introduction*, Oxford University Press, Oxford.

Tomasini, A., 2012, *Los atomismos lógicos de Russell y Wittgenstein*, Instituto de Investigaciones Filosóficas-UNAM, México.

Wang, H., 2016, *From Mathematics to Philosophy*, Routledge, Nueva York.

Wang, H., 1967, "Russell and his Logic", *Ratio*, vol. VII, no. 1, pp. 1–34.

Weaver, N., 2005, "Predicativity beyond Γ_0", *Mathematics ArXiv e-prints*. (https://arxiv.org/abs/math/0509244)

Weyl, H., 2009, *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Princeton University Press, Princeton.

Wittgenstein, L., 2009, *Tractatus logico-philosophicus*, Alianza, Madrid.

Wittgenstein, L., 2007a, *Observaciones filosóficas*, Instituto de Investigaciones Filosóficas-UNAM, México.

Wittgenstein, L., 2007b, *Zettel*, Instituto de Investigaciones Filosóficas-UNAM, México.

Wittgenstein, L., 2003, *Investigaciones filosóficas*, Instituto de Investigaciones Filosóficas-UNAM, México.

Wittgenstein, L., 1983, *Remarks on the Foundations of Mathematics*, The MIT Press, Cambridge.

Wittgenstein, L., 1982, *Diario filosófico (1914–1916)*, Ariel, Barcelona.

Wrigley, M., 1998, "A Note on Arithmetic and Logic in the *Tractatus*", *Acta Analytica*, vol. 21, pp. 129–131.

Zalta, E., 2008, "A Defense of Logicism", *Internationales Wittgenstein Symposium: Reduktion und Elimination in Philosophie und den Wissenschaften*, Kirchberg am Wechsel.

Recibido el 11 de noviembre de 2021; aceptado el 25 de abril de 2022.