Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida[1]

Ángel Contreras[2]
Lourdes Ordóñez[3]

RESUMEN

En este artículo se utilizan algunas herramientas teóricas que aporta el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (Godino, 2002), a fin de estudiar cómo se pone en juego una red de objetos y funciones semióticas en el fragmento de un libro del 2o. curso de Bachillerato –representativo de la introducción a la integral definida– en estudiantes de la Comunidad Autónoma de Andalucía (España). El análisis tiene como propósito caracterizar la complejidad ontosemiótica de dicho texto y los conflictos semióticos potenciales que se pueden producir en los estudiantes que lo usen. Previamente, se presenta una síntesis del marco teórico, que incluye la teoría de los significados institucionales y personales de los objetos matemáticos y la teoría de las funciones semióticas.

- **PALABRAS CLAVE:** Educación Matemática, análisis matemático, análisis semiótico, conflicto semiótico.

ABSTRACT

In this paper some theoretical tools are utilized that contributes the ontosemiotic approach of the mathematical cognition (Godino, 2002), in order to study how is put into play a network of objects and semiotic functions in the fragment of a textbook of the second course of High School –representative of the introduction to the defined integral– in students of the Autonomous Comunity of Andalucia (Spain). The analysis has as purpose to characterize the ontosemiotic complexity of the text and the potential semiotic conflicts that can be produced in the students that use it. Previously, a synthesis of the theoretical framework is presented, that includes the theory of the institutional and personal meanings of the mathematical objects and the theory of the semiotic functions.

- **KEY WORDS:** Mathematics Education, mathematical analysis, semiotic analysis, semiotic conflict.

Fecha de recepción: Marzo de 2005/ Fecha de aceptación: Febrero de 2006

1 Este trabajo se ha realizado en el marco del proyecto de investigación I+D: SEJ2004-06637/EDUC, concedido por la Dirección General de Investigación del Ministerio de Educación Español-FEDER para el periodo 2004-2007.

2 Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación. Universidad de Jaén, España.

3 I.E.S. "Albariza" de Mengíbar. Jaén, España.

RESUMO

Neste artigo são utilizadas algumas ferramentas teóricas que aportam o enfoque ontosemiótico da cognição matemática (Godino, 2002), a fim de estudar como se põe em jogo una rede de objetos e funções semióticas de fragmentos de um livro de iniciação ao Cálculo Diferencial e Integral –representativo da introdução a integral definida– em estudantes de Comunidade Autônoma de Andaluzía (Espanha). A análise tem como propósito caracterizar a complexidade ontosemiótica de tal texto e os conflitos semióticos potenciais que se podem produzir nos estudantes que as usam. Previamente, é apresentado uma síntese do marco teórico, que inclui a teoria dos significados institucionais e pessoais dos objetos matemáticos e a teoria das funções semióticas.

- **PALAVRAS CHAVE**: Educação Matemática, análise matemático, análise semiótico, conflito semiótico.

RÉSUMÉ

Dans cet article sont utilisés certains outils théoriques fournis par une approche ontosémiotique de la cognition mathématique (Godino, 2002) afin d'étudier la mise en jeu d'un réseau d'objectifs et de fonctions sémiotiques dans le fragment d'un livre de 1ère – représentatif de l'introduction à l'intégrale définie – dans les étudiants de la Communauté Autonome d'Andalousie (Espagne). L'analyse a pour objectif de caractériser la complexité ontosémiotique du texte précédemment mentionné, et les conflits sémiotiques potentiels qui peuvent se produire chez les élèves qui en font usage. Une synthèse du cadre théorique contenant la théorie des significations institutionnelles et personnelles des objets mathématiques et la théorie des fonctions sémiotiques est préalablement présentée.

- **MOTS CLÉS :** Éducation Mathématique, analyse mathématique, analyse sémiotique conflit sémiotique.

1. INTRODUCCIÓN

Un objetivo prioritario de nuestra investigación en Didáctica de la Matemática –más concretamente, en Didáctica del Análisis Matemático– es estudiar los fenómenos didácticos que acontecen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, para lo cual adoptamos una perspectiva teórica que se sitúa tanto en el programa cognitivo como en el epistemológico. Con el primero compartimos la preocupación por los procesos cognitivos del sujeto desde un punto de vista semiótico, como pueden ser la construcción de los significados personales o la interpretación de los símbolos puestos en juego. En cuanto al segundo, asumimos la tesis del programa epistemológico, el cual afirma que en el estudio de los problemas didácticos del aula es fundamental problematizar el propio conocimiento matemático; es decir, no considerarlo como transparente[4].

Por otra parte, el importante papel que actualmente se le asigna a la interacción en la construcción del conocimiento matemático (Lerman, 1996) conduce a que la matemática escolar sea vista como una producción social en la que, obviamente, la semiótica juega un papel determinante[5]. Godino y Batanero señalan: "El papel relevante de los sistemas de signos, dados por la cultura, como mediadores entre los estímulos del medio y las respuestas del sujeto es resaltado por Vygostky (1934), quien presenta, asimismo, la actividad como elemento esencial de su teoría del aprendizaje. Estos sistemas de signos no sólo tienen una función comunicativa, sino un papel instrumental que modifica al propio sujeto que los utiliza como mediadores" (1994, p. 335). Desde esta perspectiva, el lenguaje matemático (los signos) no se entiende como un espejo de la realidad, sino como una herramienta que se usa en la construcción del conocimiento. Debido a que el uso de los signos en la instrucción matemática está ligado a la interpretación que se haga de ellos, la semiótica que adquiere relevancia es la que concierne a la versión pragmática, en el sentido de estudiar la relación entre los signos y los sujetos que los utilizan en contextos específicos.

Hay que tener en cuenta que entre el saber científico y el saber del alumno hay todo un complicado proceso de transposición didáctica que tiene diversas fases (programas ministeriales, programaciones de centro, de área, de aula...). En ellas sobresale, por su especial incidencia en la enseñanza, el papel que juegan los manuales en tal proceso de transposición didáctica. De aquí que, centrándonos en la enseñanza del objeto matemático integral definida, formulemos las siguientes preguntas para su aprendizaje:

- ¿Cómo se presenta el objeto integral definida en los libros de texto de Bachillerato[6]?

- ¿Qué conocimientos e interpretaciones de los términos, símbolos y expresiones lingüísticas son necesarios que el lector ponga en juego para comprender el texto y construir los nuevos conocimientos?

- ¿Cuáles son los puntos críticos (conflictos semióticos potenciales) en la trayectoria semiótica construida por el libro?

Para poder responder a estas preguntas sobre el análisis de manuales, y tomando en cuenta todo lo dicho anteriormente, utilizaremos la técnica del análisis ontosemiótico, que se desarrolla en el enfoque ontológico de la cognición

4 El término "transparente" se utiliza en el sentido de conceder a la sustantividad del propio concepto matemático la parte de responsabilidad que tiene –y, en general, es mucha– en las dificultades de aprendizaje. De esta forma, nos alejamos de posturas ingenuas y excesivamente pedagógicas, cuya hipótesis de aprendizaje es "una buena distribución por objetivos y una buena metodología deben ser suficientes para que el alumno aprenda", lo cual conlleva al fracaso académico del estudiante.

5 Dentro del paradigma cognitivo, investigadores relevantes como Duval (2000) conceden a las representaciones semióticas matemáticas –constituidas por un sistema particular de signos y que se caracterizan por poder convertirse en otras representaciones semióticas– un papel clave en el aprendizaje matemático.

6 Estudiantes de secundaria superior, 16 y 17 años.

matemática (Godino, 2002). Consideramos que dicha técnica permite un estudio pormenorizado de la actividad matemática, aportando una explicación a fenómenos didácticos que suelen darse en el aula y que se han puesto de manifiesto desde diferentes marcos teóricos.

Dado que un libro de texto se puede considerar como la “transcripción” de un proceso instruccional, o como un componente de apoyo clave en tales procesos, un método de análisis que permite describir la complejidad de objetos y significados puestos en juego nos parece de gran interés didáctico. En este trabajo vamos a ejemplificar tal metodología, aplicándola a un fragmento de un libro de texto de amplio uso en la Comunidad Autónoma de Andalucía (España).

2. MARCO TEÓRICO

A continuación presentamos una síntesis del marco teórico que utilizamos, el cual se designa como “enfoque ontosemiótico” de la cognición e instrucción matemática, y es desarrollado por Godino y sus colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Contreras y Font, en prensa; Contreras, Font, Luque y Ordóñez, 2005).

El enfoque ontosemiótico (EOS) se configura en torno a los tres modelos teóricos siguientes:

a) Teoría de los significados –sistémicos– institucionales y personales de los objetos matemáticos, TSS (Godino y Batanero, 1994), que es –al menos en parte– equivalente al componente epistemológico de la teoría antropológica desarrollada por Chevallard (1992, 1997), ya que ambas parten de los presupuestos de tipo antropológico sobre las matemáticas de la filosofía de Wittgenstein (1987). Esto quiere decir que consideramos las matemáticas como una actividad humana, mediada por instrumentos lingüísticos o de otro tipo, y relativa a los contextos institucionales, como los socioculturales. Dichos postulados fueron formulados por Wittgenstein en *Investigaciones filosóficas* y *Observaciones sobre los fundamentos de las matemáticas*.

b) Teoría de las funciones semióticas, TFS (Godino, 2002), que es el germen de una teoría semiótico-cognitiva basada en presupuestos lingüísticos (Hjemslev, 1971; Eco, 1979), cuyos elementos básicos son las entidades primarias con sus diferentes facetas o dimensiones del conocimiento.

c) Teoría de las configuraciones didácticas, TCD (Godino, Contreras y Font, en prensa), en la que se modeliza la enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático como un proceso estocástico multidimensional compuesto por seis subprocesos (epistémico, docente, discente, mediacional, cognitivo y emocional), con sus respectivas trayectorias y estados potenciales.

2.1. Significados

La TSS considera a los objetos matemáticos como entidades que surgen al realizar sistemas de prácticas correspondientes a un campo de problemas. De esta forma, los objetos matemáticos personales se definen como “emergentes del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas” (Godino y Batanero, 1994, p. 335). Los objetos personales cobran forma – van apareciendo– en un aprendizaje motivado por la propia práctica; los presupuestos de tipo pragmático definen al significado personal de un objeto como “el sistema de prácticas que efectúa un sujeto para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto en un momento dado”. (Godino y Batanero, 1994, p. 341).

Por otra parte, puede considerarse que los objetos matemáticos nacen progresivamente de los sistemas de prácticas socialmente compartidas en una institución, ligadas a la resolución de cierto campo de problemas matemáticos. Puesto que las prácticas pueden variar según la institución en que se realizan, se ha de conceder al objeto una relatividad. En Godino y Batanero (1994) se define el significado de un objeto institucional como “el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge en un momento dado” (1994, p. 340).

En el EOS se entiende a la comprensión, esencialmente, como una competencia que posee el alumno, no tanto como un proceso mental. Desde tal punto de vista, diremos que un alumno comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diversas prácticas. Es decir, la capacidad se traduce en la realización de prácticas que son evaluables públicamente.

Las representaciones juegan un importante papel en la comprensión matemática, como se muestra en Contreras, Luque y Ordóñez (2004), Contreras, Font, Luque y Ordóñez (2001) y Font (2000). Además, la influencia comprensión-representación es recíproca ya que, por una parte, el tipo de representación ostensiva que se utilice incide en el tipo de comprensión generada en el alumno; por otra, el modelo de comprensión del alumno determina la clase de representación ostensiva que se puede utilizar. En este sentido, comprender un objeto matemático, en tanto que uso competente, requiere utilizar diferentes representaciones y convertir una representación en otra.

2.2. Entidades primarias

La relación entre los signos usados para codificar el conocimiento y los contextos que sirven para establecer su significado ha sido modelizada por diversos autores mediante esquemas de tipo triangular. Entre ellos, destacan los propuestos por Peirce[7] (1965), Ogden y Richards (1984), así como la interpretación que hace Steinbring (1991), la cual denomina como *triángulo epistemológico*, cuyos elementos son concepto, signo/símbolo y objeto/contexto de referencia. Inspirados en esta tríada, así como en la tripleta conceptual de Vergnaud (1982), se esboza un modelo teórico que incluye los siguientes tipos de entidades primarias:

1. Lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos). Los tipos de lenguaje que se consideran son:

- Lenguaje natural.
- Lenguaje analítico, correspondiente al uso del lenguaje simbólico propio de la Matemática.

[7] Como señala Ferrater (1994), Peirce formuló la máxima pragmática como resumen de que “toda la función del pensamiento es producir hábitos de acción” y “lo que significa una cosa es simplemente los hábitos que envuelve”. Esto es bastante similar a nuestra propuesta teórica, ya que considera que el significado de un objeto es el sistema de prácticas puestas en juego en la resolución de un cierto campo de problemas.

- Lenguaje gráfico, entendido en sentido amplio. Es decir, cualquier representación gráfica que se utilice, bien sea de una función, un dibujo representativo…
- Lenguaje numérico.

Mediante el lenguaje (ordinario y específico matemático) se describen o ponen en juego otros objetos no lingüísticos:

2. Situaciones, que incluyen problemas más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas, ejercicios, etc. Son las tareas que inducen la actividad matemática.

3. Acciones del sujeto ante las tareas matemáticas (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos).

4. Conceptos, dados mediante definiciones o descripciones (número, punto, recta, media, función).

5. Propiedades o atributos de los objetos mencionados, que suelen darse como enunciados o proposiciones.

6. Argumentaciones, en las que distinguimos dos tipos. Las que se realizan de modo heurístico, usando la intuición, y que están encaminadas a validar determinadas actuaciones (como puede ser una resolución de un problema o una argumentación lógica), se denominarán *justificaciones* o *validaciones*. Las que validan formalmente una proposición las llamaremos *deducciones* o *demostraciones*.

Estos seis tipos de objetos, que podemos calificar de matemáticos porque ponen en juego en la actividad matemática, son los constituyentes primarios de otros objetos más complejos u organizaciones matemáticas, como sistemas conceptuales, teorías, etc. Cabe señalar que las entidades lingüísticas tienen un papel representacional –se ponen en lugar de las restantes– y también instrumental, es decir, también deben contemplarse como instrumentos de la actividad matemática. Aunque mucha actividad matemática es mental, poco podríamos avanzar en el trabajo matemático si no tuviéramos el recurso de la escritura, la palabra y los restantes registros materiales.

2.3. Facetas o dimensiones de las entidades

Las entidades matemáticas, de acuerdo con el juego de lenguaje en que participan, pueden ser consideradas desde las siguientes facetas o dimensiones duales:

1. Personal-institucional: Ya la definimos en los apartados 2 y 2.1.

2. Ostensiva-no ostensiva: Los objetos personales y los institucionales se pueden considerar como objetos no ostensivos. Ahora bien, cualquiera de estos objetos se usa en las prácticas públicas por medio de sus ostensivos asociados. Las expresiones simbólicas, el texto, las figuras, las gráficas o los gestos que se usan en las prácticas públicas son ostensivos (escritos, orales o gestuales).

3. Intensiva-extensiva/Ejemplar-tipo: La TFS interpreta la distinción extensivo-intensivo en un sentido lingüístico, esto es, como equivalente a la distinción entre el ejemplar (algo particular, que se determina por sí mismo) y el tipo (objeto genérico que define una cierta clase o conjunto de objetos).

4. Elemental-sistémica: El significado de un objeto se considera como un conjunto de prácticas en las que el objeto en cuestión es un dato esencial. Tal punto de vista conlleva que un objeto se pueda considerar como un solo elemento o bien como un conjunto sistémico de prácticas en las que este objeto interviene con otros, estableciendo determinadas relaciones. La dialéctica elemental-sistémica comporta que los objetos (personales o institucionales) tengan que ser vistos como nudos de una red; estos nuevos objetos, a su vez, se pueden entender de manera sistémica. Por tanto, tenemos una red de nudos que también son redes de nudos y así sucesivamente.

5. Expresión-contenido: En su teoría del lenguaje, Hjemslev (1971) usa las nociones de signo, expresión y contenido. La palabra signo la aplica a la entidad generada por la conexión entre una expresión y un contenido, que son los *funtivos* entre los que la función de signo establece una dependencia.

Con respecto a las prácticas matemáticas, los distintos objetos que intervienen en ellas no se deben concebir como entidades aisladas, sino puestas en relación unas con otras. Si se toma en cuenta el carácter esencialmente relacional de la actividad matemática, la relación expresión-contenido se realiza por medio de una función semiótica, entendida como la correspondencia entre un antecedente (expresión) y un consecuente (contenido) que establece un sujeto (persona o institución), de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia. En la TFS se considera que cualquier objeto puede desempeñar el papel de expresión o contenido en una función semiótica, con lo cual se establece la semiótica connotativa como aquella en la que el plano de la expresión está constituido por otra función semiótica.

<table>
<tr><td>Expresión</td><td>Contenido</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Expresión</td><td>Contenido</td></tr>
</table>

Es decir, la noción de función semiótica se puede concebir, al menos metafóricamente, como “una correspondencia entre conjuntos”, poniendo en juego tres componentes:

a) Un plano de expresión (objeto inicial, considerado como significante).

b) Un plano de contenido (objeto final, considerado como el significado del signo, esto es, lo representado, lo que se quiere decir, a lo que se refiere un interlocutor).

c) Un criterio o regla de correspondencia, esto es, un código interpretativo que regula la correlación entre los planos de expresión y contenido, estableciendo el aspecto o carácter del contenido referido por la expresión.

Tanto el objeto inicial como final pueden estar constituidos por uno o varios de los tipos de entidades primarias consideradas. Es decir, los tipos de entidades primarias pueden desempeñar el papel de expresión o de contenido en las funciones semióticas. Además, en Godino (2002) se afirma que “las relaciones de dependencia entre expresión y contenido pueden ser de tipo *representacional* (un objeto se pone en lugar de otro), *instrumental* u *operatoria* (un objeto usa a otro u otros como instrumento) y *componencial* o *cooperativa* (dos o más objetos componen un sistema del que emergen nuevos objetos). De esta manera, la semiótica que proponemos generaliza de manera radical la noción de representación, tan usada en las investigaciones cognitivas realizadas en educación matemática” (2002, p. 252).

2.4. Análisis ontosemiótico

El análisis ontosemiótico de un proceso instruccional consiste en identificar la trama de funciones semióticas que establecen los agentes participantes (manual-profesor, manual-alumnos, profesor-alumnos) en los procesos de comunicación; será, pues, la indagación sistemática de lo que puede significar el texto. El estudio de la complejidad semiótica permite formular hipótesis sobre conflictos semióticos potenciales. Se entiende por conflicto semiótico a "la disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos –personas o instituciones– en interacción comunicativa y pueden explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas implementadas" (Godino 2002, p. 258).

En el análisis ontosemiótico de un texto se tendrán en cuenta:

- **Los agentes involucrados**: el lector del texto (estudiantes), el autor del texto y la persona que realiza el análisis (investigador).

- **Objetos puestos en juego**: entidades, expresiones, contenidos y códigos interpretativos.

- **Diversos tipos de funciones semióticas**.

Si, además, consideramos el orden en dichos elementos que aparecen a lo largo de un determinado proceso de instrucción (lo que se denomina *trayectoria semiótica*), este tipo de análisis ayudará a formular hipótesis sobre puntos críticos del proceso instruccional en los que puede haber lagunas o vacíos de significación, o bien disparidad de interpretaciones que requieran fases de negociación de significados y cambios en el proceso de estudio. El texto sometido a análisis puede ser el fragmento de una lección, la trascripción de un proceso de resolución de una tarea, entrevistas individuales o los protocolos de las interacciones entre profesor y alumnos.

3. LA INTEGRAL DEFINIDA EN LA ENSEÑANZA

Las investigaciones sobre la enseñanza de la integral definida generalmente han estado asociadas a dos factores fundamentales. Por una parte, se han analizado las dificultades de comprensión de los estudiantes en cuanto al concepto, donde tiene una gran implicación el objeto matemático límite. Por otra, debido a las dificultades anteriores, el sesgo en cuanto al uso de la integral definida hacia una cierta exclusividad de la algoritmización en el cálculo ha conducido a un sentido algebraico del concepto muy lejano de su interpretación como resultado de los procesos de cambio. A continuación, se efectúa un breve análisis de los antecedentes sobre estas cuestiones, que ayudará a situar el análisis semiótico en torno a la integral definida.

En una investigación experimental con estudiantes de secundaria, Orton (1983) pone de manifiesto que la integración como una suma constituye un obstáculo epistemológico para la comprensión de la noción. Además, observa que es una postura ingenua considerar que, por medio de ciertas habilidades de cálculo con integrales estrechamente ligadas a la integral como antiderivación, se puede llegar a la comprensión de la integración.

Schneider (1988), en las consideraciones que efectúa tras años de experiencia en la enseñanza de la integral, muestra las grandes dificultades de los estudiantes en cuanto al teorema fundamental del cálculo integral. Resulta especialmente relevante la existencia de algunos obstáculos que dificultan el conocimiento de la integral: por una parte, que el área se calcule mediante un proceso infinito de suma de rectángulos y, sin embargo, el resultado sea un número finito; por otra, la elección de los indivisibles como elementos intuitivos para la comprensión del área puede conducir a lo que Schneider denomina *obstáculo de la heterogeneidad de las dimensiones*, ligado a situaciones en las que se toma un elemento diferencial de orden inferior a la magnitud inicial.

Al analizar los resultados de una investigación hecha con alumnos de secundaria y primer año de universidad, Labraña (2001) llega a varias conclusiones:

1) Los aspectos teóricos se exponen en los manuales de una forma poco comprensible para los estudiantes.

2) Hay un sesgo importante al considerar a la integración como el cálculo de áreas, e incluso se llega a centrar en los cálculos aritméticos de suma y resta sin relacionarlos con el área.

3) El cálculo con primitivas ocupa un papel relevante, relegando el concepto de integral definida a un valor puramente testimonial.

Farfán (1997) señala como premisa para una adecuada enseñanza del Cálculo que el actual discurso matemático escolar del mismo, basado en aspectos rigurosos de la disciplina, no es el más apropiado para la comunicación de ideas matemáticas; por ello, es necesaria una reconstrucción histórica de ellas que, huyendo de los anacronismos, permita conducir nuestra labor educativa.

En este sentido, Cantoral (2000), desde la perspectiva de la construcción social del conocimiento matemático avanzado, resalta la articulación de consensos en los grupos humanos para favorecer imágenes colectivas capaces de ser compartidas por los individuos. Analiza la introducción de la integral definida en diversos momentos históricos, según el programa teórico de que se trate, con lo cual distingue la integral de Cauchy-Riemann, la de Newton-Leibniz y la de Wallis, y señala: “Cada una de las tres representaciones se ve acompañada de explicaciones diferentes. La primera alude a la aproximación, la tercera a la noción de promedio y la segunda a la de acumulación” (2000, p. 4). Es decir, el estudio epistemológico-histórico da pistas sobre la conveniencia o no de estudiar uno u otro significado para el aprendizaje de la integral. Sin embargo, como resalta Cantoral, el consenso escolar de estudiar la integral de Cauchy-Riemann obedece, más que a necesidades escolares, a mecanismos de consenso.

Turégano (1994) lleva a cabo un estudio sobre los conceptos en torno a la medida y el aprendizaje del Cálculo Infinitesimal. La finalidad de su investigación es encontrar un modelo dentro del contexto matemático (definición de integral alternativa a la de Riemann) para elaborar una propuesta didáctica que permita introducir, a nivel conceptual, la integral definida en estudiantes de Secundaria que no han sido iniciados en el estudio del Cálculo Infinitesimal. La integral sería la primera introducción al análisis, tomando como punto de partida el cálculo de áreas planas y basándose en la definición geométrica de integral definida, presentada por Lebesgue (1928) La hipótesis de trabajo de Turégano, siguiendo la corriente constructivista, es que los estudiantes pueden aprender de forma intuitiva conceptos de Cálculo antes de dominar las habilidades algorítmicas, utilizando la visualización a través del ordenador para dar significado al concepto de integral definida y sus propiedades mediante la idea de área bajo una curva.

En este trabajo nos preguntamos sobre qué tipo de dificultades tienen los estudiantes con la enseñanza-aprendizaje de la integral definida por medio del significado de Cauchy-Riemann. A este respecto, Czarnocha y otros (2001) amplían el estudio de Orton (1983) y muestran en un estudio realizado a 32 estudiantes universitarios, usando la teoría APOS, que las dificultades de este tipo de significado están íntimamente ligadas al proceso de paso al límite. Dichos autores ponen de manifiesto que no existe una adecuada coordinación entre la representación gráfica y la numérica, lo cual les lleva a proponer cambios curriculares.

Desde nuestra perspectiva, consideramos que un análisis ontosemiótico de la manera en que se introduce la integral definida en los manuales escolares puede aportar explicaciones complementarias a las dificultades en el aprendizaje de tal objeto matemático, al mostrar la trama de objetos y relaciones que establecen entre ellos. En el siguiente apartado vamos a aplicar dicha técnica a un fragmento de un manual escolar que utiliza el significado de Cauchy-Riemann para estudiar la integral definida. Este texto es ampliamente utilizado en el Bachillerato español y representa la típica introducción de dicho concepto actualmente, como se muestra en Contreras et al (2003).

4. TRAYECTORIA ONTOSEMIÓTICA CORRESPONDIENTE A UN MANUAL

A continuación, analizaremos un fragmento de un libro de 2º de Bachillerato (Bescós y Pena, 1999), ampliamente usado en España, desde el punto de vista de los objetos y significados que se ponen en juego (ver Anexo).

En primer lugar, para poder situar el análisis ontosemiótico, se hará un macroanálisis del texto en el que se desarrolla el objeto integral definida. Éste se aborda en el tema 7 del manual, de manera posterior a la integral indefinida (que se ha definido como inversa de la derivada, utilizando la noción de primitiva), bajo el título “Aplicaciones de la integral”, lo cual ofrece una idea de que el interés de los autores se centra en las aplicaciones del cálculo integral, más que en el propio concepto de integral definida.

Ahora bien, el tema 7 aparece dividido en seis apartados; el primero corresponde al área definida bajo una curva, donde se introduce el área de una región del plano, y posteriormente se particulariza el área de una región del plano limitada por la gráfica de una función continua. El área se define como el límite de dos sucesiones –creciente y decreciente– tocante a las sumas inferior y superior de las áreas que delimitan la gráfica de la función (sumas de Riemann).

En este trabajo analizamos el ejemplo del área de una región del plano, propuesto por Bescós y Pena, como un paso previo al estudio del área de la región del plano limitada por una función continua (que son preconceptos), pues se considera muy importante de cara a la definición del concepto de integral definida mediante las sumas de Riemann.

Dentro del segundo apartado se formaliza lo anterior, al definir la integral definida de una función continua en un intervalo $[a, b]$ como el área de una región limitada por la gráfica de la función y por las rectas $x=a$ y $x=b$. Por último, se estudian las propiedades de la integral definida.

El tercer apartado enuncia y demuestra el teorema del valor medio, el teorema fundamental del cálculo y la regla de Barrow, lo cual permite dar entrada al cálculo de integrales definidas.

Los tres apartados restantes se dedican al cálculo de áreas de regiones planas, volúmenes y otras aplicaciones. Por último, aparece un apartado denominado *Estrategias*, donde se estudia la integral definida para funciones no continuas, se amplía el cálculo de áreas para regiones comprendidas entre varias funciones y se desarrolla la integración numérica

Una vez realizado el macroanálisis del texto correspondiente al objeto integral definida, se pasará el análisis ontosemiótico de una parte del texto anterior (ver Anexo). Para ello, se centrará la atención en identificar la trama de funciones semióticas, que mostrará los posibles conflictos semióticos potenciales para los estudiantes que lo utilicen. Con dicho fin, descompondremos el texto en unidades de análisis donde identificaremos la trama de entidades y las relaciones puestas en juego, tanto entre las distintas entidades como entre las distintas unidades. A continuación, detallaremos las unidades que distinguimos.

U_1: *"En la presente unidad se define el área de una región del plano. El problema es que sólo sabemos calcular el área de algunas figuras planas, las que están delimitadas por segmentos de recta y arcos de circunferencia".*

Esta unidad plantea el tipo de situación que el nuevo objeto matemático va a resolver. Se puede dividir en dos subunidades:

a) $U_{1.1}$: *"En la presente unidad se define el área de una región del plano".*

En esta subunidad se expone la situación general por medio de un lenguaje natural. Se utiliza, por tanto, una situación general, es decir, en su faceta intensiva, para situar al lector en el objeto de estudio. Se alude al concepto de área ya estudiado en la educación secundaria obligatoria, dando por supuesto que el lector lo conoce desde la óptica de las magnitudes. Por lo general, esto no es cierto, puesto que algunos alumnos carecen de un conocimiento del área como magnitud, reduciendo su conocimiento a la medida del área a través de un punto de vista numérico, por medio de las fórmulas.

Turégano (1994), en un análisis sobre las investigaciones relativas al concepto de área que no implican procesos infinitos, apunta las dificultades que tienen los alumnos ante tal noción. Indica, por ejemplo, la tendencia a utilizar fórmulas de forma rutinaria sin poder aplicarlas a la resolución de problemas simples, o que para Hildret (1983), "el hecho de estimar el área con cierto grado de exactitud es una compleja labor que involucra otra serie de conceptos y habilidades" (1994, p. 53). Además, señala: "La experiencia que tiene el niño de la medida normalmente empieza con el número y, a veces, se limita a eso con pocas o ningunas oportunidades para explorar los principios primeros sobre los que se basa la medida" (1994, p. 52). Más adelante, puntualiza: "Tierney et al. (1990) estudian los conceptos de área en futuros profesores de Primaria, descubriendo que muchos de ellos no tienen ninguna imagen mental del área, dependen de formulas memorizadas y utilizan incorrectamente medidas lineales para calcular áreas” (1994, p. 55).

b) $U_{1.2}$: *“El problema es que sólo sabemos calcular el área de algunas figuras planas, las que están delimitadas por segmentos de recta y arcos de circunferencia”.*

En este caso se define la situación, indicando que los conocimientos adquiridos hasta ahora son insuficientes para resolverla. Los autores del manual establecen una función semiótica entre la situación general anterior, $U_{1.1,}$ y la nueva situación, $U_{1.2}$ (Figura 1):

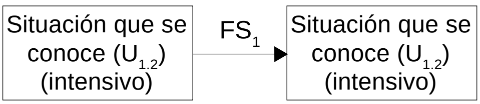

Figura 1.

Con esta función semiótica se pretende hacer referencia a objetos ya aprendidos, dotando a la vez de sentido a la nueva situación planteada. Se deja a cargo del lector que distinga los casos donde puede utilizar los conocimientos previos para calcular áreas y donde no puede hacerlo. De esta manera, se admite de forma transparente que detectará las carencias en el cálculo de áreas, visto en etapas anteriores, y sentirá la necesidad del nuevo método. Sin embargo, esto puede no ser así, ya que es posible que el lector no establezca $FS_{1,}$ con lo que el nuevo problema no tendrá conexión con ningún conocimiento previo. Será un nuevo objeto de conocimiento bastante descontextualizado, originando una división de la matemática en compartimentos estancos.

U_2: *“Si se nos presenta una región como la que muestra la figura 7. 1. a., sólo podemos establecer una aproximación de su área mediante un sistema de cuadrícula”.*

En primer lugar, hay que observar que la imprecisión en el lenguaje puede conducir al lector a conflictos semióticos. La confusión del área como magnitud con su medida, además del término región, supone eludir dos funciones semióticas importantes para la comprensión del texto. Por una parte, la función semiótica de expresión región y contenido área como magnitud; por otra, la función semiótica de expresión del área como magnitud y de contenido como medida del área.

Esta unidad muestra un cambio en el lenguaje utilizado, ya que se pasa del lenguaje natural, que se usa en $U_{1,}$ al gráfico de U_2. Asimismo, se toma un ejemplar (extensivo), la figura 7. 1. a, y se plantea una argumentación sobre el mismo. Por tanto, se establecen las dos funciones semióticas que ilustra la Figura 2, donde $FS_{2.1}$ instaura una relación entre dos situaciones: una general, que se ha expuesto en U_1, y otra alusiva al dibujo que vamos a utilizar como ejemplo.

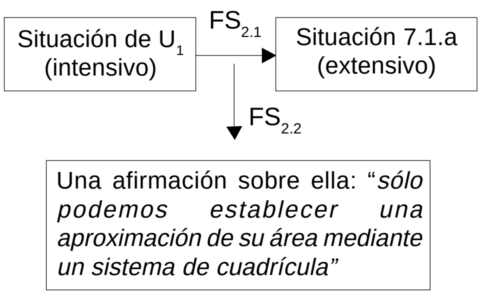

Figura 2.

Por otra parte, utilizando la semiótica connotativa de Hjemslev, $FS_{2.2}$ toma la anterior función semiótica como expresión y le asigna una afirmación sobre ella como contenido, cuyo objetivo es resolver el problema planteado en la unidad anterior. Sin embargo, no se especifica el por qué de esta argumentación ni el cómo, en el sentido de que no aclara qué es un sistema de cuadrícula, qué condiciones o propiedades debe cumplir o qué ventajas presenta. Todo esto se deja a cargo del lector.

Al no realizar la red de funciones semióticas pertinente, pueden surgir desajustes de significados debido a su ausencia. Por tanto, se puede situar al lector ante un conflicto semiótico potencial.

U_3: *"Intentándola acotar entre dos valores (figuras 7. 1 .b y 7. 1. c)."*

Esta unidad desarrolla un discurso que emplea principalmente un lenguaje gráfico. Se trata de asignar valores a las áreas que no son numéricos, sino simbólicos (con lo que se está utilizando un lenguaje algebraico), los cuales cumplen la relación de desigualdad deseada. El lector debe reconocer la cadena de desigualdades en el lenguaje gráfico y simbólico, realizando el paso al lenguaje numérico de forma implícita.

Por tanto, consideramos que se establece una función semiótica de tipo representacional (FS_3 de la Figura 3), al identificar acotar las áreas dibujadas con la acotación del valor de dichas áreas. Se trata de una función semiótica no exenta de complejidad, pues el paso se hace de forma implícita, al no haber ningún tipo de graduación ni de unidades en las cuadrículas. Es decir, faltan medidas efectivas.

Lenguaje gráfico ostensivo (extensivo)	$\xrightarrow{FS_3}$	Lenguaje numérico no ostensivo

Figura 3.

Es cierto que esto no sería necesario para un lector experto, pero en el caso de los alumnos debemos tener en cuenta que la anterior función semiótica establece, además de una relación entre lenguajes, otra asociación entre un extensivo-ostensivo, que supone la figura concreta, y un intensivo-no ostensivo, que serían todos los posibles valores asociados a estas áreas, los cuales cumplen la misma relación de orden. Como consecuencia de tal complejidad no tratada, es posible que el lector no constituya esta función, lo que provocaría un conflicto semiótico por la ausencia de significado atribuido a esta unidad.

U_4: *"Observa la figura 7. 1. b. El área de la región* R *está delimitada por los valores de las áreas de las regiones R_1 y R_1'".*

Dicha unidad pretende ser una justificación del discurso expuesto en U_3 de forma gráfica, y utiliza varios "tipos" de lenguaje: el natural, el gráfico y el analítico. La figura va acompañada de una desigualdad escrita en lenguaje simbólico, que es posible debido a la relación entre área y su medida. Se establece una nueva función semiótica de tipo representacional (FS_4 de la Figura 4), con lo que la trama de funciones semióticas sería:

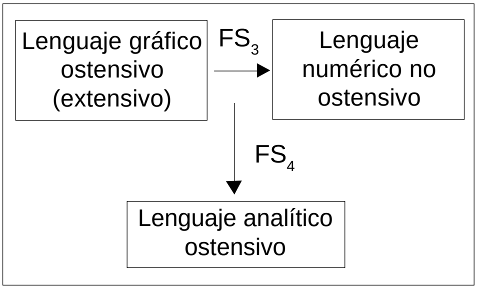

Figura 4.

U_5: *“Si trazamos una cuadrícula más pequeña (figura 7. 1 .c), el área de la región* R *está delimitada por los valores de las regiones R_2 y R_2’, donde $R_2 > R_1$ y $R_2' < R_1'$”.*

Esta unidad es muy similar a la anterior. Además, volvemos a hallar asociaciones que quedan en manos del lector: los cambios de lenguaje (del gráfico, que supone el dibujo, al numérico de forma no ostensiva, y de éste al analítico que se nos muestra debajo de cada figura), la relación del área con sus cantidades, permitiendo la introducción de las desigualdades, y la comprobación gráfica de tales desigualdades (volver a la gráfica para comprobarlas).

Todo esto da lugar a la trama de funciones semióticas que aparece en la Figura 5, donde $FS_{5.1}$ y $FS_{5.2}$ son similares a FS_3 y FS_4, establecidas para la figura 7. 1. b. Sin embargo, ahora el lector debe establecer $FS_{5.3}$ para volver a las figuras con sus cuadrículas. Una vez comprobadas gráficamente las relaciones entre las áreas de ambas figuras podrá, mediante $FS_{5.4}$, realizar el paso al lenguaje analítico y así establecer la cadena de desigualdades expuestas en el manual.

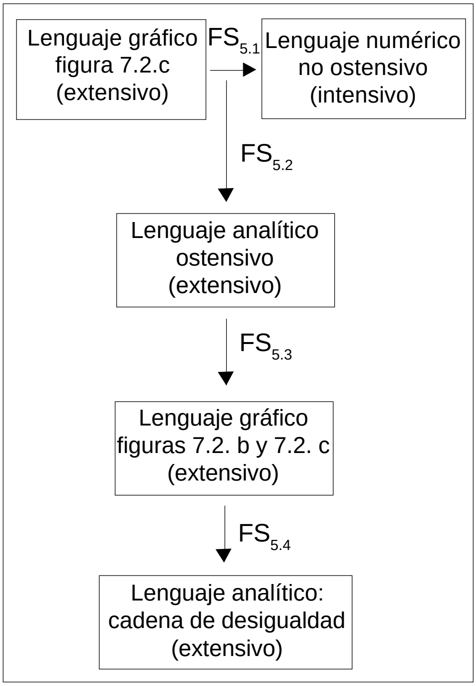

Figura 5.

U_6: *“Si seguimos disminuyendo la cuadrícula, obtendremos dos sucesiones de valores entre las que está comprendida el área de la región R: $R_1' > R_2' > \ldots R_n' > R > R_n > \ldots > R_2 > R_1$”.*

Lo primero que identificamos es la generalización de los dos pasos realizados a *n* pasos. La argumentación de tal proposición se deja al sujeto; él debe interpretar la cadena de desigualdades, asociándola con una cadena de dibujos imaginarios y justificarla mentalmente. En términos de funciones semióticas, todo lo anterior puede expresarse como indica la Figura 6.

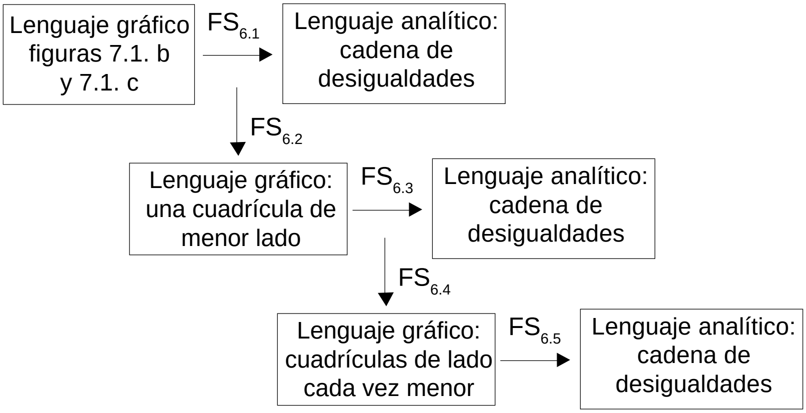

Figura 6.

Como puede observarse, $FS_{6.1}$ coincide con $FS_{5.4}$. A partir de aquí, el lector debe imaginar una figura con una cuadrícula menor ($FS_{6.2}$) y asociarle mentalmente la correspondiente cadena de desigualdades, mediante $FS_{6.3}$. La función siguiente, $FS_{6.4}$, supone la generalización a figuras de cuadrículas de lados cada vez menores. Este es un punto complicado en el discurso que consideramos como origen de conflictos semióticos, pues supone el paso del ejemplo concreto, que son las figuras con sus cuadrículas (extensivo), a imaginar el conjunto de las posibles cuadrículas cada vez menores (intensivo)

Tal abstracción implica un gran número de funciones semióticas elementales que dan surgimiento a un conjunto de funciones sistémicas del tipo $FS_{6.3}$ a $FS_{6.5,}$ el cual se debe realizar para obtener la cadena de desigualdades establecida. Aquí nos planteamos dos preguntas: ¿asocia el lector el contenido pretendido de forma correcta? ¿Realmente realiza estas funciones semióticas, es decir, es capaz de generalizar a las figuras deseadas?

El último paso sería una mera consecuencia de lo anterior, ya que sólo se establece un cambio de lenguaje: $FS_{6.5}$ es representacional y nos permite llegar a la cadena de desigualdades que propone la unidad.

U_7: *"Si el límite de las sucesiones es el mismo cuando el lado de la cuadrícula tiende a cero, la región* R *tiene por área el valor de este límite".*

Una primera subunidad podría ser el paso al límite, pero teniendo en cuenta que este tema ya ha sido estudiado con anterioridad, se supone aprendido. Por otra parte, nos encontramos con una proposición que es resultado de todas las argumentaciones anteriores. Si observamos la trama de funciones semióticas que indica la Figura 7, $FS_{7.1}$ es el paso al límite para nuestro ejemplo concreto, mas debemos considerar otras figuras similares y, por tanto, establecer el mismo resultado para diferentes ejemplos.

De esta forma, $FS_{7.2}$ instaura una relación entre el extensivo, que supone la figura del ejemplo, y el intensivo, que son todas las posibles figuras. Con ello se ponen en juego nuevamente funciones semióticas sistémicas, lo que indica el elevado grado de complejidad. Sin embargo, U_7 comienza *"si el límite de las sucesiones es el* *mismo…”*. Esto señala que no siempre coincide; hay casos donde esto no sucede, aunque no se expone ninguno. Por tanto, $FS_{7.3}$ y $FS_{7.4}$ son funciones semióticas que quedan a cargo del estudiante.

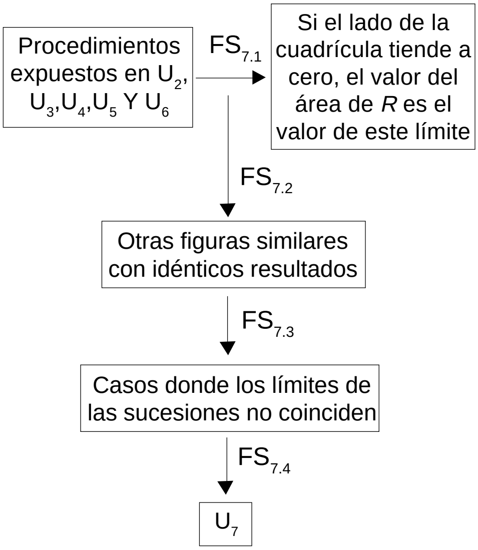

Figura 7.

Es claro que el lector no podrá construir por sí mismo todo este razonamiento, ya que se le pide que sin ayuda haga el paso del extensivo-ostensivo, que supone el ejemplo, al intensivo-no ostensivo, que suponen todos los casos posibles. Nos preguntamos: ¿por qué no establecer la proposición sólo para el caso del ejemplo? Es decir, ¿es necesaria esta generalización tan forzada y llena de dificultades?, ¿qué aporta con respecto a una proposición establecida para el ejemplo solamente? Más concretamente, ¿son construidas realmente las funciones semióticas $FS_{7.3}$ y $FS_{7.4}$ por el alumno? O, más bien, puesto que dichas funciones semióticas carecen de sentido para él, ¿no se creará una laguna de significado?

5. CONCLUSIONES

En los procesos instruccionales elementales relacionados con los preconceptos y conceptos del Análisis Matemático, como el área de una región del plano utilizada para el desarrollo de la integral definida, aparecen situaciones de enseñanza en las que, junto a objetos de tipo extensivo (elementos que son ejemplares de una determinada clase), intervienen otros de carácter intensivo (elementos que constituyen la propia clase). Para un experto, es obvio que ambos elementos pueden ser tratados y entendidos de una forma similar, posiblemente sin distinguir la dificultad intrínseca del elemento intensivo respecto al extensivo; sin embargo, para el estudiante dicha dificultad está presente en su proceso de estudio.

Cuando los autores del manual no son conscientes de tal problemática, o simplemente no la tienen en cuenta, aparece un fenómeno didáctico nocivo que consiste en no distinguir ambas facetas (extensivo/intensivo) en la enseñanza de los objetos del Análisis Matemático y provoca un difícil problema de comprensión en el alumno. En las situaciones de enseñanza, tanto en el libro de texto como en la propia clase, el alumno de Bachillerato se enfrenta a conceptos donde se utiliza la doble faceta extensivo/intensivo. Pero, mientras que en la primera el objeto matemático es fácil de aceptar y comprender, en la segunda su comprensión es fuente de conflictos semióticos de difícil superación. Estas dificultades son todavía mayores en todos aquellos procesos que para su adecuada comprensión también requieren de la construcción de funciones semióticas sistémicas.

Si a todo esto unimos que únicamente podemos acceder a los objetos matemáticos a través de los lenguajes de representación, un aspecto donde, en general, los estudiantes tienden a confundir el propio objeto matemático con alguno de sus lenguajes de representación, y sólo después de un adecuado trabajo de instrucción llegan a coordinarlos, es obvio que las dificultades de aprendizaje son importantes.

Una consecuencia relevante que surge para la didáctica, de cara a la enseñanza del Análisis Matemático, es la necesidad de disponer de instrumentos para el análisis de la actividad matemática que faciliten el afloramiento de este tipo de facetas y entidades.

Por otra parte, el estudio presentado implica una exhaustiva reflexión sobre los procesos implícitos en la actividad matemática. En este trabajo se ha descrito un análisis, basado en la trayectoria semiótica y las funciones semióticas, el cual se ha aplicado al área de una región plana como introducción a la integral definida de Cauchy-Riemann. Como resultado de su aplicación, han aflorado diversos conflictos semióticos cuya consideración en la enseñanza nos parece importante para conseguir una adecuada comprensión del alumno; además, se explican fenómenos como la consideración de las matemáticas en compartimientos estancos, en términos de funciones semióticas no construidas o mal construidas. Opinamos que, si se es consciente de las posibles dificultades a las que se enfrentan los estudiantes, se pueden interpretar mejor sus errores y evitar lagunas de significado que suelen conducir al uso de métodos algebraicos de cálculo sin sentido.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bescós, E. y Pena, Z. (1999). *Matemáticas 2º de Bachillerato. Ciencias de la naturaleza y de la Salud. Tecnología*. Madrid. España: Oxford University Press España.

Cantoral, R. (2000). *Sobre la construcción social del conocimiento matemático avanzado*. Documento interno del *Cinvestav*, pp. 1-4.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques 12* (1), 73-112.

Chevallard, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématique 17* (3), 17-54.

Contreras, A., Ordóñez, L. Luque, L., García, M., Sánchez, C. y Ortega, M. (2003). Análisis de manuales de primero y segundo de Bachillerato-LOGSE en institutos de educación secundaria de la provincia de Jaén, en cuanto a los conceptos básicos de Cálculo Infinitesimal derivada e integral, Proyecto de Investigación, Instituto de Estudios Giennenses.

Contreras, A.; Font, V.; Luque, L. y Ordóñez, L. (2001). Análisis semiótico de un manual en torno al concepto de límite. En *V Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Almería, España, pp. 1-22.

Contreras, A.; Luque, L. y Ordóñez, L. (2004). Una perspectiva didáctica en torno a los contextos y a los sistemas de representación semiótica del concepto de máximo. *Educación Matemática*, 59-87.

Contreras, A., Font, V., Luque, L. y Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherches en Didactique des Mathématiques 25* (2), 151-186.

Czarnocha, B.;Loch, S.; Prabhu; V. & Vidakovic, D. (2001). The concept of definite integral: coordination of two schemas. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. II, pp. 297304). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.

Duval, R (2000). Bassic issues for research in Mathematics Education. In *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psycology of Mathematics Education* (Vol. I, pp. 55-69). Hiroshima, Japan: Tadao Nakahara, Masataka Koyama, 2000.

Eco, U. (1979). *Tratado de semiótica general*. Barcelona, España: Lumen, 2000.

Farfán, R. M. (1997), *Ingeniería didáctica. Un estudio de la variación y el cambio*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ferrater Mora, J. (1994). *Diccionario de filosofía* (T. III). Barcelona, España: Ariel.

Font, V. (2000). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de grafiques. Aplicacions a les derivades*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Barcelona, España.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques 22* (2-3), 237-284.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques 14* (3), 325-355.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (en prensa). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico- semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*.

Hildret, D. J. (1983). The use of strategies in estimatin measurement. *Aritmethic Teacher 1*, 4-24.

Hjemslev, L. (1971). *Prolegómenos a una teoría del lenguaje.* Madrid, España: Gredos.

Labraña, P. A. (2000). *La avaliación das concepcións dos alumnos de COU e bacharelato acerca do significado do cálculo integral*. Tesis de doctorado, Universidad de Santiago de Compostela, España.

Lerman, S. (1996). Intersubjectivity in mathematics learning: a challenge to the radical constructivist paradigm? *Journal for Research in Mathematics Education 27* (2), 133-150.

Ogden, C. K. & Richards, I. A. (1984). *El significado del significado*. Barcelona, España: Paidos.

Orton, A. (1983). Student's understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics 14* (1), 1-18.

Peirce, Ch. S. (1987). *Obra lógico-semiótica*. Madrid, España: Taurus.

Schneider, M. (1988). *Des objets mentaux "aire" et "volume" au calcul des primitives*. Tesis de doctorado, Universidad Católica de Lovaina, Bélgica.

Steinbring, H. (1991). Mathematics in teaching processes. The disparity between teacher and studente knowledge. *Recherches en Didactique des Mathématiques 11* (1), 65-108.

Tierney, C., et al. (1990). Prospective primary teachers' conceptions of area. In *Proceeding of the 14th internacional conference for the spychology of mathematics education* (pp. 307-315). Oaxtepec, México.

Turégano, P. (1994). *Los conceptos en torno a la medida y el aprendizaje del Cálculo Infinitesimal*. Tesis de doctorado, Universidad de Valencia, España.

Vergnaud, G. (1982). Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education: some theoretic and methodological issues. *For the Learning of Mathematics 3* (2), 31-41.

Wittgenstein, L. (1988). *Investigaciones filosóficas.* Barcelona, España: Crítica.

Wittgenstein, L. (1987). *Observaciones sobre los fundamentos de las matemáticas.* Madrid, España: Alianza.

Ángel Contreras
Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación
Universidad de Jaén
Jaén, España.

E-mail: afuente@ujaen.es

Lourdes Ordóñez
I.E.S. "Albariza" de Mengíbar
Jaén, España

E-mail: locanada@terra.es

ANEXO

En la presente unidad se define el área de una región del plano. El problema es que sólo sabemos calcular el área de algunas figuras planas, las que están delimitadas por segmentos de recta y arcos de circunferencia. Si se nos presenta una región como la que muestra la figura 7. 1. a., sólo podemos establecer una aproximación de su área mediante un sistema de cuadrícula, intentándola acotar entre dos valores (figuras 7. 1. b. y 7. 1. c.):

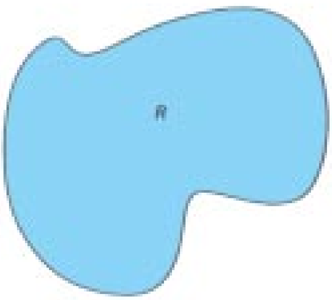

Figura 7.1.a.

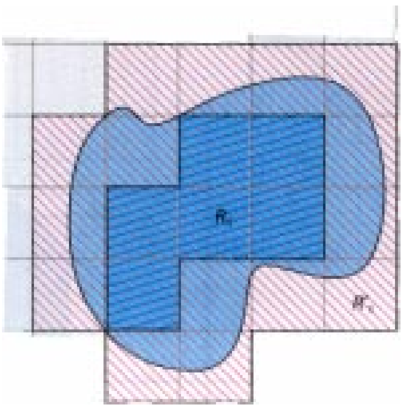

Figura 7.1.b.

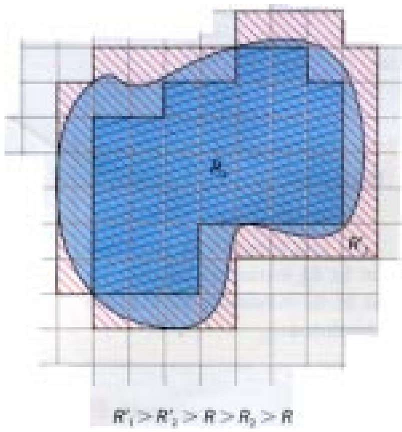

Figura 7.1.c.

Observa la figura 7. 1. b. El área de la región R está delimitada por los valores de las áreas de la regiones R_1 y R_1'. Si trazamos una cuadrícula más pequeña (figura 7. 1. c.), el área de la región R está delimitada por los valores de las áreas de la regiones R_2 y R_2', donde $R_2 > R_1$ y $R_2' < R_1'$

Si seguimos disminuyendo la cuadrícula, obtendremos dos sucesiones de valores entre las que está comprendida el área de la región R:

$$R_1' > R_2' > \ldots > R_n' > R > R_n > \ldots > R_2 > R_1$$

Si el límite de las dos sucesiones es el mismo cuando el lado de la cuadrícula tiende a cero, la región R tiene por área el valor de este límite.