Sergio Martínez Juste, José María Muñoz Escolano,
Antonio M. Oller Marcén, Tomás Ortega del Rincón

ANÁLISIS DE PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD COMPUESTA EN LIBROS DE TEXTO DE 2º DE ESO

Analysis of compound proportion problems in 8th grade textbooks

RESUMEN

En este trabajo realizamos un estudio detallado de los problemas de proporcionalidad compuesta de doce libros de texto españoles de segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria (13-14 años). En concreto, se realiza un análisis de contenido textual y *a priori*, clasificando los problemas atendiendo a su contexto, su estructura, su posición y papel dentro de la Unidad Didáctica correspondiente y a la tipología de magnitudes utilizadas. Entre otros resultados se concluye que, aunque la presencia de problemas varía ligeramente en cuanto a número entre los distintos textos, el tratamiento es bastante homogéneo respecto a su contexto, estructura y magnitudes implicadas: la mayoría de los problemas son de contexto realista, de valor perdido y con cinco cantidades de magnitud extensivas. También se detecta poca presencia de problemas de comparación cuantitativa y de situaciones de tipo inversa-inversa, así como poca presencia y variedad de magnitudes intensivas.

PALABRAS CLAVE:

- *Clasificación de problemas*
- *Proporcionalidad compuesta*
- *Libros de texto*
- *Secundaria*

ABSTRACT

In this work, we make a detailed study of compound proportionality problems from twelve 8th grade (age 13-14) Spanish textbooks. In particular, we perform an *a priori*, textual content analysis, classifying the problems according to their context, their structure and their position and role in the lesson where they appear. We also focus on the typology of the magnitudes used by the authors. Among other results, we conclude that, even if the number of problems varies slightly between different books, the treatment given to them is quite homogeneous regarding the context, structure and use of magnitudes: most of them are realistic missing value problems in which five quantities of extensive magnitudes appear. We also detect very few problems involving quantitative comparison or situations of 'inverse-inverse' type together with a very little use of intensive magnitudes.

KEY WORDS:

- *Problem classification*
- *Compound proportion*
- *Textbooks*
- *Secondary*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2017) *20* (1): 95-122.
Recepción: Febrero 17, 2014 / Aceptación: Abril 2, 2015. DOI: 10.12802/relime.17.2014

RESUMO

Neste trabalho realizamos um estudo pormenorizado dos problemas de proporcionalidade composta de doze livros de texto espanhóis de segundo ano de Educação Secundária Obrigatória (13-14 anos). Mais concretamente, é realizada uma análise de conteúdo textual e a priori, classificando os problemas atendendo ao seu contexto, à sua estrutura, à sua posição e papel dentro da Unidade Didática correspondente e à tipologia de magnitudes utilizadas. Entre outros resultados é concluído que, embora a presença de problemas varie ligeiramente quanto ao número entre os diferentes textos, o tratamento é bastante homogéneo relativamente ao seu contexto, estrutura e magnitudes envolvidas: a maioria dos problemas são de contexto realista, de valor perdido e com cinco quantidades de magnitude extensivas. Também se detecta pouca presença de problemas de comparação quantitativa e de situações de tipo inversa-inversa, bem como pouca presença e variedade de magnitudes intensivas.

PALAVRAS CHAVE:

- *Classificação de problemas*
- *Proporcionalidade composta*
- *Livros de texto*
- *Escola secundária*

RÉSUMÉ

Dans ce travail nous étudions en détail les problèmes de proportionnalité composée de douze livres de texte en langue espagnole de la deuxième année de l'enseignement secondaire (13-14 ans). Plus précisément, une analyse de contenu textuel et *a priori* est effectuée en classifiant les problèmes en fonction de leur contexte, leur structure, leur position et rôle au sein de l'unité et selon les types de grandeurs utilisées. Parmi des autres résultats, il est conclu que, bien que la présence de problèmes varie légèrement en nombre entre les différents textes, le traitement est assez homogène par rapport à leur contexte, leur structure et les grandeurs utilisées : la plupart des problèmes sont problèmes « du valeur perdu » dans un contexte réaliste, et impliquent cinq quantités de grandeurs extensives. Peu de présence de problèmes de comparaison quantitatives et de situations de type inverse-inverse, et peu de présence de grandeurs intensives sont détectés.

MOTS CLÉS:

- *Classification des problèmes*
- *Proportionnalité composée*
- *Manuels scolaires, école*
- *Secondaire*

1. Introducción

Según múltiples expertos en Educación Matemática, el llamado "razonamiento proporcional", así como el manejo y la comprensión de situaciones relacionadas con la proporcionalidad, constituye uno de los tópicos matemáticos más importantes en la formación del alumnado de Secundaria. Tradicionalmente, ha supuesto la culminación de la formación aritmética de los estudiantes y su cotidianidad, junto con sus numerosas aplicaciones prácticas, justifica que se le dedique gran atención. De hecho, está presente en los currículos oficiales de Educación Primaria y Secundaria de muchos países. Por ejemplo, el número racional como razón y la proporcionalidad aritmética es uno de los 13 estándares propuestos por el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1989) para los cursos correspondientes a 6º de Educación Primaria y 1º y 2º de Secundaria Obligatoria (de 11 a 14 años). Esta importancia se refuerza, además, si tenemos en cuenta la antigüedad de las ideas implicadas y su largo devenir histórico (Oller y Gairín, 2013).

Pese a esta atención, estudios recientes como el TIMSS de 2011 (Mullis, Martin, Foy, & Arora, 2012); así como diversos trabajos de investigación (Fernández y Llinares, 2011; Sánchez, 2013; Valverde & Castro, 2009) muestran las dificultades que encuentran los estudiantes de distintos niveles educativos (Educación Primaria, Educación Secundaria o Diplomatura de Maestro) al afrontar situaciones de proporcionalidad. Una de las dificultades cognitivas más importantes es la llamada "ilusión de proporcionalidad" (Van Dooren, De Bock, Janssens, & Verschaffel, 2008). En este sentido, cabe destacar que las dificultades a la hora de aplicar correctamente este tipo de razonamientos, así como las técnicas utilizadas a la hora de resolver los problemas se han mantenido como una constante a través del tiempo (Gómez, 2006). Incluso la propia tipología de los problemas planteados también se ha mantenido a lo largo del tiempo, variando tan solo los contextos (Gómez, 2006; Oller, 2012).

El principal foco de interés de este trabajo es realizar una revisión bibliográfica de textos escolares actuales para analizar problemas planteados sobre proporcionalidad, concretamente, los relativos a proporcionalidad compuesta (o proporcionalidad múltiple).

Aunque el currículo oficial español no menciona expresamente la proporcionalidad compuesta, sí aparecen recogidas en él las relaciones de proporcionalidad directa e inversa entre magnitudes y la aplicación de la proporcionalidad en la resolución de problemas. Además, una revisión de libros de texto de distintas épocas (Oller, 2012) muestra que la proporcionalidad compuesta sigue recibiendo un tratamiento específico en un buen número de libros de texto. Su inclusión en los temarios también se justifica por su aplicación al cálculo del interés simple.

Todo lo anterior justifica la necesidad de prestar atención al tratamiento de la proporcionalidad compuesta ya que, como comenta Schubring (1987), "la práctica docente no está tan determinada por los decretos ministeriales como lo está por los libros utilizados para la enseñanza" (p. 41) o como afirman Monterrubio y Ortega (2009, p. 38), "el libro de texto es un recurso habitual en el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje, hasta el punto de que, en muchas ocasiones, es el propio manual el que determina el currículo real". En la misma línea, Rodríguez (2006), considera el libro de texto como principal herramienta de instrucción que llega a utilizarse como currículo.

Según Ortega, Pecharromán y Sosa (2011) "el aprendizaje de los conceptos matemáticos a través de la resolución de problemas es un procedimiento altamente valorado y esta práctica es fundamental en la consolidación de los aprendizajes" (p. 100). En este sentido, los problemas presentes en los libros de texto juegan un papel principal en la enseñanza ya que su resolución habitualmente supone una de las principales tareas que realizan los estudiantes, especialmente en las unidades didácticas de proporcionalidad aritmética.

Así, el objetivo principal de este trabajo consiste en analizar los problemas de proporcionalidad compuesta propuestos en libros de texto españoles así como los tipos de magnitudes que aparecen en dichos problemas. Este análisis se efectúa con el propósito de caracterizar la enseñanza que se imparte, detectando posibles deficiencias que permitan plantear posibles mejoras en la enseñanza.

2. Marco teórico

2.1. *Clasificación de problemas de proporcionalidad compuesta*

Son muchos los trabajos encaminados a presentar diferentes maneras de clasificar los problemas matemáticos escolares. Para Díaz y Poblete (2001, p. 36) "establecer categorías en los problemas constituye, a nuestro juicio, la base conceptual de cualquier procedimiento didáctico en el currículo escolar". Si bien, como nos advierte Blanco (1993, p. 39), "ninguna clasificación puede ser exhaustiva, estableciéndose siempre intersecciones entre los diversos apartados y apareciendo actividades de difícil catalogación, y todo esto por la enorme diversidad de problemas que pueden proponerse de diferentes niveles y contenidos". Conejo y Ortega (2013) ejemplifican esta aseveración al completar y ampliar anteriores clasificaciones de problemas de Borasi y Schoenfeld, atendiendo al contexto, formulación, soluciones y métodos de resolución de los problemas, en el primer caso y atendiendo a la definición de problema y a los objetivos que persigue la tarea, en el segundo caso.

Otras posibles clasificaciones surgen al considerar el contexto en el que se enmarca el enunciado del problema. Esta atención a los contextos se hace patente en el diseño de las pruebas PISA donde, además de los contenidos a tratar, se consideran las diferentes situaciones para el planteamiento de los problemas. En este caso se trata de cuatro diferentes contextos: situación personal, situación educativa o laboral, situación pública y situación científica.

Díaz y Poblete (2001) realizan una doble clasificación, además de atender a la naturaleza de los problemas matemáticos, se preocupan por el contexto en el que se plantea el problema. De esta forma, resumen la diferenciación de los problemas según su naturaleza en rutinarios y no rutinarios. Y al hablar de los contextos los clasifican en contextos reales, realistas, *fantasistas*[1] y puramente matemáticos. Los problemas reales serían aquellos que se producen efectivamente en la realidad y comprometen al alumno a actuar. Si los problemas son susceptibles de producirse realmente y, por tanto, son una simulación de la realidad se consideran realistas. Por el contrario, los problemas *fantasistas* son fruto de la imaginación y no tiene una base real. Por último, los problemas puramente matemáticos son aquellos que evocan exclusivamente a objetos matemáticos y sus relaciones.

Si tenemos en cuenta el soporte en el que se presentan los problemas, podemos considerar otras clasificaciones generales para los problemas matemáticos sin tener en cuenta el contenido tratado. En concreto, si nos centramos en los problemas que aparecen en manuales escolares puede tener interés, como señala Oller (2012), considerar la posición de los problemas dentro de las unidades didácticas de libros de texto respecto al discurso en que se institucionaliza las técnicas de resolución. De esta forma, podemos distinguir entre:

– Problemas introductorios, formulados como motivación al contenido y que no aparecen resueltos.
– Problemas que aparecen totalmente resueltos y que suelen acompañar a las explicaciones teóricas del tópico a tratar.
– Problemas que aparecen al final de cada epígrafe en los que se divide una unidad didáctica destinados a reforzar los conceptos o procedimientos tratados en el epígrafe. Este enfoque abunda en la consideración, por parte del alumno, de la resolución de problemas como una mera identificación de técnicas.
– Problemas presentados en listados al final de las unidades didácticas.

1 Aunque este término no existe en castellano, hemos optado por mantener el utilizado por Díaz y Poblete en su trabajo.

Dentro del ámbito concreto de la aritmética, donde se encuadran los problemas de proporcionalidad compuesta objeto de nuestro interés, existen clasificaciones específicas que debemos tener en consideración para realizar un análisis más fino. Una de estas clasificaciones se aborda en Puig y Cerdán (1988). En este trabajo se realiza un estudio profundo de los problemas aritméticos elementales verbales distinguiendo entre problemas que se resuelven en una etapa o en más de una; según la necesidad de realizar una o más operaciones aritméticas binarias para alcanzar la solución. A partir de ahí, se estudian las estructuras aditivas y multiplicativas para problemas en una etapa y el método de análisis-síntesis para la resolución de problemas aritméticos de varias operaciones combinadas (PAVOC).

Centrándonos en los problemas de proporcionalidad, ejemplos de PAVOC, encontramos diferentes clasificaciones para el caso específico de los problemas de proporcionalidad simple directa. Algunas de estas clasificaciones se recogen en Fernández (2009). En particular se desarrolla la clasificación de Cramer y Post (1993), donde se diferencian los siguientes tipos de problemas de proporcionalidad simple directa:

- Problemas de valor perdido: Se conocen tres datos de una proporción y se desea calcular el cuarto valor desconocido.
- Problemas de comparación numérica: Se conocen (o pueden calcularse) dos razones que se pretenden comparar.
- Problemas de comparación y predicción cualitativas: Requieren comparaciones que no dependen de forma específica de valores numéricos.

Otras tipologías de problemas de proporcionalidad simple directa recogidas en Fernández (2009) atienden a contextos (velocidad, escala, mezcla y densidad) o a estructuras “parte-todo”, “parte-parte” (Singer & Resnick, 1992) o a características semánticas (Lamon, 1993). Sin embargo, la de Cramer y Post (1993), a diferencia de éstas, es naturalmente transportable, como pondremos de manifiesto a continuación, a las situaciones de proporcionalidad inversa y proporcionalidad compuesta.

Bosch (1994) estudia la proporcionalidad desde un punto de vista funcional y define un “sistema proporcional y compuesto” como aquel que puede definirse mediante $n+1$ variables $X_1, X_2, \ldots, X_n, X$ de forma que las n primeras (que llamaremos “variables independientes”) determinan completamente el estado del sistema y la última (que llamaremos “variable dependiente”) puede expresarse a partir de las anteriores mediante la relación

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) = X,$$

siendo f una función homogénea del tipo:

$$[1] \qquad f(X_1, X_2, \dots, X_n) = k, \Pi_{i=1}^{n} X_i^{p_i} \quad \text{con} \quad p_i \in \{-1, 1\},$$

donde k es la constante de proporcionalidad.

Usando este enfoque presentamos una forma de definir y clasificar los problemas de valor perdido y de comparación en situaciones de proporcionalidad compuesta.

La definición anterior incluye como casos particulares las representaciones funcionales clásicas de la proporcionalidad simple: directa si $p = 1$ e inversa si $p = -1$. Además, la definición de proporcionalidad compuesta dada en este trabajo está orientada al tratamiento de los problemas de valor perdido: Dada una tupla de valores conocidos para todas las variables $(a_1, \dots, a_n, a)$ y otra tupla $(b_1, \dots, b_n, x)$ donde x, valor de la variable dependiente, es desconocido y $(b_1, \dots, b_n)$, valores de las variables independientes, son conocidos, se trata de calcular el valor numérico x.

Así, fijado el número de magnitudes, esta caracterización permite clasificar los problemas de valor perdido atendiendo a la relación entre cada una de las variables independientes y la dependiente. Dicha información se puede codificar en un par (a, b) siendo a el número de variables independientes con relación directa con la variable dependiente, esto es, el número de $p_i = 1$ en la expresión [1]; y b el número de variables independientes con relación inversa con la variable dependiente, esto es, el número de $p_i = -1$ en la expresión [1].

Cuando se hace referencia a esta clasificación en los libros de texto estudiados a menudo se hace explícita la relación existente. De esta forma un problema de proporcionalidad compuesta con tres magnitudes de tipo (1,1) suele identificarse como un problema de “Directa – Inversa” [2] o esquemáticamente tipo “D-I” (Uriondo, 2007).

En la Tabla I se presenta toda la tipología de situaciones según el criterio anterior para las situaciones que involucran 2, 3 y 4 magnitudes.

[2] Otros textos consultados (Pancorbo, 2008) utilizan una terminología diferente, se habla de proporcionalidad “compuesta directa” para el tipo (2,0), “compuesta inversa” para el tipo (0,2) y “compuesta mixta” para el tipo (1,1).

TABLA I

Clasificación funcional de problemas de valor perdido en proporcionalidad compuesta de hasta cuatro magnitudes

		Proporcionalidad	*Relación funcional*
$n=1$ Dos magnitudes	(1,0)	Directa	$X=k\cdot X_1$
	(0,1)	Inversa	$X=k\cdot \frac{1}{X_1}$
$n=2$ Tres magnitudes	(2,0)	Directa-Directa	$X=k\cdot X_1\cdot X_2$
	(1,1)	Directa-Inversa	$X=k\cdot \frac{X_1}{X_2}$
	(0,2)	Inversa-Inversa	$X=k\cdot \frac{1}{X_1\cdot X_2}$
$n=3$ Cuatro magnitudes	(3,0)	D-D-D	$X=k\cdot X_1\cdot X_2\cdot X_3$
	(2,1)	D-D-I	$X=k\cdot \frac{X_1\cdot X_2}{X_3}$
	(1,2)	D-I-I	$X=k\cdot \frac{X_1}{X_2\cdot X_3}$
	(0,3)	I-I-I	$X=k\cdot \frac{1}{X_1\cdot X_2\cdot X_3}$

Las principales diferencias entre los problemas de valor perdido y los de comparación son la invariabilidad de la constante de proporcionalidad y la existencia de una variable diferenciada, la variable dependiente.

A diferencia de lo que ocurre en los problemas de valor perdido, en los problemas de comparación el cociente

$$C(X_1, \ldots, X_n, X) = \frac{X}{\Pi_{i=1}^{n} X_i^{p_i}}$$

no es constante. Se trata de comparar su valor para dos tuplas diferentes de valores de todas las variables (de forma cuantitativa en los problemas de comparación numérica o de forma cualitativa si no se explicitan los valores de las magnitudes en los problemas de comparación y predicción cualitativa).

Un problema de comparación numérica es aquel en el que se dan dos tuplas completas de valores $(a_1,\dots,a_n,a)$ y $(b_1,\dots,b_n,b)$ para las magnitudes y hay que comparar el valor que toma C en cada caso.

Al no tener X una posición privilegiada y ser equivalentes las situaciones para los cocientes C y C^{-1}, la tipología de problemas se reduce. En la Tabla II, se presenta la clasificación de los problemas de comparación en proporcionalidad compuesta hasta cuatro magnitudes atendiendo a la relación funcional entre las magnitudes. Denominaremos las variables como $(X_1,\dots,\ X_{n+1})$. En la columna "Da lugar a valor perdido", presentamos los tipos de problemas de valor perdido a los que da lugar la estructura $C(X_1,\dots,X_{n+1})$ dependiendo de cuál sea la variable dependiente.

TABLA II
Clasificación funcional de problemas de comparación en proporcionalidad compuesta de hasta cuatro magnitudes

		Da lugar a valor perdido
$n=1$ Dos magnitudes	$\frac{X_1}{X_2}$	(1,0) Directa
	$X_1 \cdot X_2$	(0,1) Inversa
$n=2$ Tres magnitudes	$\frac{X_1}{X_2 \cdot X_3}$	(2,0) Directa-Directa / (1,1) Directa-Inversa
	$X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$	(0,2) Inversa-Inversa
$n=3$ Cuatro magnitudes	$\frac{X_1}{X_2 \cdot X_3 \cdot X_4}$	(3, 0) D-D-D / (1,2) D-I-I
	$\frac{X_1 \cdot X_2}{X_3 \cdot X_4}$	(2,1) D-D-I
	$X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4$	(0,3) I-I-I

2.2. *Clasificación de las magnitudes involucradas en problemas aritméticos*

Los problemas de proporcionalidad compuesta son PAVOC en los que las operaciones a realizar son de naturaleza multiplicativa y en ellos se conjugan todos los elementos de la aritmética elemental: números naturales y racionales, las magnitudes, las operaciones e interrelaciones entre estos objetos, así como su significado (Gairín y Oller, 2011).

Diversos estudios (Lamon, 1993; Puig y Cerdán, 1988; Vergnaud, 1983) señalan que la dificultad en los problemas multiplicativos no puede solo explicarse a partir de su estructura semántica, sino que es necesario tener en cuenta el tipo de magnitud involucrada y el tipo de número.

En González y Gómez (2011), se plantean diferentes clasificaciones de las magnitudes involucradas en problemas aritméticos según distintos criterios, a saber:

- Distinción entre magnitudes extensivas (es decir, aquellas que son aditivas, como el peso, la cardinalidad o la superficie) e intensivas (que son razones y no son aditivas, como la velocidad, el precio unitario, la densidad o la temperatura).
- Distinción entre magnitudes continuas (como la longitud) y discretas (como el valor monetario).
- Distinción entre magnitudes fundamentales (como la longitud) y derivadas (como la superficie).
- Distinción entre magnitudes escalares (como la masa) y vectoriales (como la fuerza).

Existen investigaciones sobre el aprendizaje de la proporcionalidad simple que hacen referencia al papel de las magnitudes analizando las dificultades de los estudiantes al resolver problemas en función de que las magnitudes involucradas sean continuas, discretas, extensivas o intensivas. No existe un consenso claro entre los investigadores sobre el papel de las magnitudes continuas y discretas a este respecto ya que si bien algunos estudios apuntan a que los estudiantes más jóvenes emplean las magnitudes discretas con mayor éxito en contextos de proporcionalidad (Fernández y Llinares, 2011; Tournaire & Pulos, 1985), otros estudios señalan resultados en sentido contrario (Boyer, Levine, & Huttenlocher, 2008; Spinillo & Bryan, 1999). Por otro lado, Vergnaud (1983) y Schwartz (1988) señalan que la presencia de magnitudes intensivas es un factor importante en las situaciones de proporcionalidad aritmética. Así, Nunes, Despli y Bell (2003) reportan que los escolares de 7 y 8 años tienen mayores dificultades al resolver problemas de proporcionalidad simple de comparación cualitativa cuando las magnitudes involucradas son intensivas frente a las extensivas. Además, señalan que otro factor que también influye es la relación (directa o inversa) que se establece en los problemas.

2.3. *Estudio de libros de texto*

Para Gómez (2011):

> Observar el proceso de aprendizaje de la humanidad requiere dirigir la atención a la historia de las ideas matemáticas, a través del único registro disponible de las mismas. Esto es, a través de textos y manuales escolares y mediante un análisis de los mismos. (p.50)

Esta necesidad de analizar los textos y manuales escolares se refleja en los múltiples estudios realizados sobre el tema y en la preocupación por el desarrollo de herramientas metodológicas que permitan llevar a cabo dichos análisis (González y Sierra, 2004; Ruiz de Gauna, Dávila, Etxeberría y Sarasúa, 2013). Occelli y Valeiras (2013) realizan una revisión y clasificación de trabajos de este tipo publicados en importantes revistas nacionales e internacionales relacionadas con la didáctica de las ciencias.

El tratamiento de la proporcionalidad en libros de texto ha sido abordado por autores de distintos países bajo diversos enfoques. Guacaneme (2002) analiza en profundidad el discurso de cinco textos escolares colombianos de séptimo grado (12-13 años) respecto a los conceptos de razón, proporción y magnitudes directa e inversamente proporcionales, señalando distintas deficiencias en su tratamiento como que la proporcionalidad compuesta es presentada sin definición y no se relaciona con los demás contenidos. Pino y Blanco (2008) realizan un interesante estudio comparativo sobre los problemas de proporcionalidad contenidos en ocho textos de Chile y España para estudiantes de 12-13 años concluyendo que la mayoría de los problemas eran "de traducción simple" y "ejercicios de reconocimiento y algorítmicos" (Blanco, 1993) de manera que las tareas matemáticas que debían realizar los alumnos consistían únicamente en aplicar procedimientos o algoritmos conocidos. Lundberg (2011) clasifica distintas técnicas para la resolución de problemas de proporcionalidad simple directa e inversa que ofrecen cinco libros de texto suecos para estudiantes de 16-17 años donde se pondera la gran variedad de técnicas encontradas (de naturaleza aritmética, funcional, geométrica,…) pero también se señala que éstas no se relacionan entre sí y que no se presentan justificaciones sobre ninguna de ellas. Finalmente, Martínez, Muñoz y Oller (2014) estudian las distintas estrategias de resolución de problemas de proporcionalidad compuesta que aparecen en cuatro libros de texto españoles de 2º de ESO concluyendo que existía una cierta heterogeneidad y se revelaba una tendencia por parte de los textos a priorizar el empleo de aquellas que son de naturaleza más algorítmica o automática.

3. Objetivos y método

Como se ha indicado en la introducción, el objetivo principal de la presente investigación consiste en analizar los problemas de proporcionalidad compuesta y los tipos de magnitudes que en ellos aparecen en libros de texto españoles. Con el fin de profundizar en este análisis, a continuación enunciamos los siguientes objetivos específicos:

1. Clasificar los problemas de proporcionalidad compuesta según diferentes criterios, analizar su estructura y determinar la frecuencia con la que aparecen dichas estructuras;
2. Localizar el lugar de aparición de los problemas en las unidades didácticas en función de su tipo;
3. Determinar las magnitudes tratadas en los problemas de proporcionalidad compuesta y clasificarlas según diferentes criterios;
4. Estudiar la relación entre la clasificación de las estructuras y los tipos de magnitud que aparecen en ellas.

Para alcanzar estos objetivos, realizamos un estudio centrado en el conocimiento didáctico de análisis de actividades (Occelli y Valeiras, 2013) mediante un análisis de libros de texto. Para Van Dormolen (1986), el análisis de texto puede hacerse a priori o a posteriori según si el estudio se produce para evaluar el texto como herramienta didáctica sin tener en cuenta la instrucción llevada a cabo con él (a priori) o para comparar su propuesta curricular con los resultados de aprendizaje obtenidos (a posteriori). Además, Gómez (2011) plantea que el análisis puede realizarse siguiendo dos líneas diferentes: textual, para analizar un contenido matemático en su dimensión curricular y metodológica; epistemológica, para conocer cómo se han concebido las matemáticas escolares en diferentes momentos de la historia.

El análisis de contenido es (Bardin, 1986) un conjunto de instrumentos metodológicos aplicados a discursos. Para López (2002), el análisis de contenido:

> Se sitúa en el ámbito de la investigación descriptiva y pretende, sobre todo, descubrir los componentes básicos de un fenómeno determinado extrayéndolos de un contenido dado a través de un proceso que se caracteriza por el intento de rigor de medición (p. 174)

Para Krippendorff (1990) el análisis de contenido, como técnica de investigación, debe “formular inferencias reproducibles y válidas que puedan aplicarse a su contexto” (p. 28).

Zapico (2006) señala que las principales características del análisis de contenido son, su corte deductivo, la sistematización y la combinación de métodos cualitativos y cuantitativos. Sus propiedades hacen que el análisis de contenido sea uno de los métodos de investigación en textos escolares más empleados.

Castiello (2002) estructura el análisis de contenido en las siguientes etapas:

1. Localizar y seleccionar las partes de las unidades de muestreo que presenten datos sobre el fenómeno a estudiar;
2. Aislar los datos y convertirlos en las unidades de registro;

3. Establecer un sistema de categorías de registro y de codificación que permita clasificar los datos brutos en las categorías y describir las características relevantes del contenido;
4. Codificar el conjunto de textos seleccionados aplicando técnicas para la selección y codificación de datos;
5. Interpretar los datos obtenidos, asignando sentido y significación al análisis, explicando los posibles modelos descriptivos detectados y desarrollando una construcción teórica de relaciones entre los datos y su contexto.

Esta secuenciación favorece la reproducibilidad del estudio, mientras que la validez y fiabilidad internas se mejoran con la presencia de tres investigadores que actúan sobre los mismos registros observacionales (Goetz y Lecompte, 1988).

Por tanto, para la realización de nuestro estudio juzgamos conveniente realizar un análisis textual y a priori de textos escolares dentro del paradigma metodológico del análisis del contenido según los pasos anteriores.

En el currículo oficial de mínimos del Ministerio de Educación y Ciencia para la etapa de Educación Secundaria Obligatoria (ESO, de 12 a 16 años), se hace referencia explícita a la proporcionalidad en los cursos 1º, 2º y 4º (Opción A). Sin embargo, y puesto que la Opción A (terminal) para 4º de la ESO no se imparte a todos los estudiantes y ya que los libros de texto de 1º de ESO no tratan la proporcionalidad compuesta, centramos nuestro estudio en el tratamiento de los problemas de proporcionalidad compuesta en los libros de texto de 2º de ESO.

Para la selección de los textos que forman la muestra se recurrió a los fondos bibliográficos de la Facultad de Educación y del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza y del IES Leonardo de Chabacier de Calatayud. Para seleccionar la muestra el criterio seguido fue la presencia de la proporcionalidad compuesta dentro de las unidades dedicadas a la proporcionalidad aritmética. De esta manera, la muestra resultante quedó constituida por 12 libros de texto de 2º ESO de diferentes editoriales (ver Apéndice). Todos ellos son textos relativamente recientes y pertenecientes a editoriales de prestigio y ampliamente implantadas en el territorio español.

A continuación, se presentan las diferentes categorías de análisis establecidas para el estudio:

– Tipo de problema según su contexto (Díaz y Poblete, 2001).

Real	*Fantasista*
Realista	Puramente matemático

– Tipo de problema según la clasificación de Cramer y Post (1993).

VP: Problema de valor perdido.
CN: Problema de comparación numérica.
CC: Problema de comparación y predicción cualitativa.

– Tipo de problema según su estructura funcional conforme a la tipología presentada en las tablas I y II. Como veremos, apenas aparecen en el estudio problemas CC y CN. Además, los problemas VP de más de tres magnitudes son anecdóticos, por lo que prestaremos especial atención a los problemas VP con tres magnitudes. La clasificación según su estructura funcional de acuerdo a la Tabla I es:

T1: Problema tipo (2,0) con estructura $X = k \cdot X_1 \cdot X_2$.

T2: Problema tipo (1,1) con estructura $X = k \cdot \dfrac{X_1}{X_2}$.

T3: Problema tipo (0,2) con estructura $X = k \cdot \dfrac{1}{X_1 \cdot X_2}$.

– Tipo de problema dependiendo de su posición y papel dentro de la unidad didáctica en la que se localiza:

PI: Problemas introductorios.
PR: Problemas completamente resueltos en el libro de texto.
PD: Problema propuesto dentro de la unidad apoyando las explicaciones de un epígrafe concreto.
PF: Problema propuesto en listados de ejercicios al final de la unidad.

– Tipo de magnitud (González y Gómez, 2011).

E: Magnitud extensiva. C: Magnitud continua.
I: Magnitud intensiva. D: Magnitud discreta.

De esta forma cada magnitud quedará clasificada en uno de los cuatro tipos siguientes: E-C, E-D, I-C o I-D.

4. Resultados

Entre los 12 libros de texto analizados se han contabilizado un total de 167 problemas en los que se presentan situaciones de proporcionalidad compuesta. Es decir, una aparición media de 13,9 problemas de proporcionalidad compuesta por libro estudiado. El menor número de problemas en un texto es de 6, mientras que la cantidad máxima detectada es 30. Pese a esa diferencia, el número de problemas tratados en la mayoría de los libros es bastante uniforme, como observamos en el Gráfico 1. Tan solo un libro (García, Pérez y Uriondo, 1996) se aleja de forma clara de la media por contener 30 problemas de proporcionalidad compuesta.

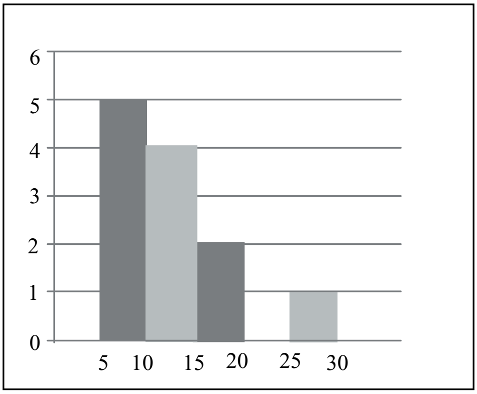

Gráfico1. Histograma de la variable "número de problemas"

Al margen de lo anterior, se han observado escasas diferencias entre los textos más antiguos y los más recientes, por lo que presentaremos los resultados conjuntamente. No obstante, en los resultados referidos al objetivo 1, señalaremos algunas particularidades detectadas especialmente en los textos de García y otros (1996) y de Bujanda y Mansilla (2000).

A continuación, se presentan los resultados del análisis de contenido según las categorías de análisis y objetivos presentados en la sección anterior.

4.1. *Resultados referidos al objetivo 1*

Teniendo en cuenta el contexto, aparecen 154 problemas de contexto realista y 13 puramente matemáticos (sin contexto) y ninguno de contexto real o de contexto *fantasista*. En la Figura 1 se ejemplifica la distinción entre problemas realistas y puramente matemáticos estudiados. De los problemas puramente matemáticos, 10 aparecen en García y otros (1996), el dato atípico comentado anteriormente. Esto explica el elevado número de problemas que aparecen en este texto. Si solo considerásemos los problemas de contexto realista, este libro contendría un número de problemas mucho más cercano a la media.

7. Un escursionista está haciendo un recorrido de 300 km. Durante los 4 primeros días ha cubierto un total de 120 km andando 6 horas diarias. ¿En cuántos días finalizará el recorrido si ha decidido rebajar en 1 hora el tiempo que va andar cada día?

8. Sabiendo que *C* es directamente proporcional a *A* y a *B*, calcula el valor de *x* por el método de reducción a la unidad o utilizando la proporcionalidad:

a) A — B — C
4 — 10 — 20
5 — x — 30

b) A — B — C
3 — 8 — 15
x — 16 — 40

Figura 1. Un problema realista frente a un problema puramente matemático (García et al., 1996, p. 192)

Centrándonos en la tipología de problemas de proporcionalidad, aparecen 165 problemas VP, mientras que solo aparecen 2 problemas CN, y ningún problema CC.

Los dos únicos problema CN se encuentran en el mismo texto (Bujanda y Mansilla, 2000). En uno de los problemas aparecen 3 magnitudes y tiene una estructura tipo $\frac{X_1}{X_2 \cdot X_3}$, mientras que en el otro aparecen 5 magnitudes y tiene una estructura tipo $\frac{X_1 \cdot X_2}{X_3 \cdot X_4 \cdot X_5}$.

Respecto a los problemas VP, en 156 de ellos se trabajan 3 magnitudes, mientras que en los 9 problemas restantes se trabajan 4 magnitudes. En la Tabla III exponemos los tipos de problemas VP con 4 magnitudes. Estos problemas se encuentran en solo 4 de los 12 textos estudiados, estando concentrados mayoritariamente en el texto de Bujanda y Mansilla (2000) que recoge 5 de los 9 problemas detectados.

TABLA III
Número de problemas de valor perdido con 4 magnitudes analizados según su estructura

Tipo	(3,0)	(2,1)	(1,2)	(0,3)
Nº de problemas	4	2	3	0

Los problemas VP con 3 magnitudes suponen el 93 % de los problemas estudiados. Además, todos los libros analizados presentan este tipo de problemas. Sin embargo, su presencia es desigual si tenemos en cuenta la distinción en problemas de tipos T1, T2 y T3, como observamos en el Gráfico 2:

- Todos los libros trabajan problemas de tipo T1;
- Hay dos textos que no presentan problemas de tipo T2;
- En la tercera parte de los textos no hallamos problemas de tipo T3.

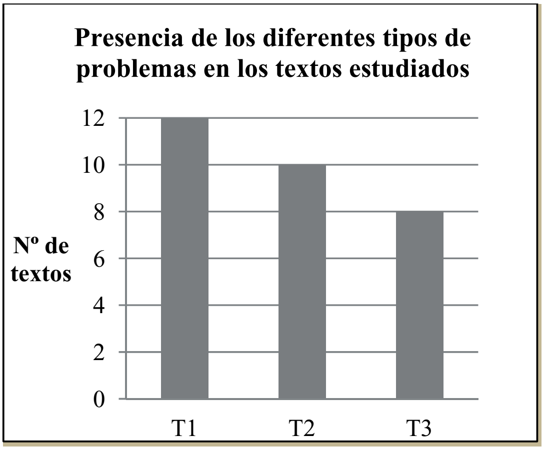

Gráfico 2. Número de textos analizados en los que se trabaja cada tipo de problema

Esta mayor presencia de los tipos T1 y T2, se pone también de manifiesto al estudiar el número de problemas de cada tipo encontrados en el análisis. Como observamos en el Gráfico 3:

- Hay 77 problemas de tipo T1. Esto supone el 49% de los problemas VP con 3 magnitudes;
- Aparecen 58 problemas de tipo T2 (el 37%);
- Los problemas de tipo T3 son los menos trabajados, con un total de 21 problemas (tan solo el 14%).

De esta manera, si tenemos en cuenta el número de libros en los que se trabaja cada estructura, encontramos una media de 6,4 problemas de tipo T1, 5,8 problemas de tipo T2 y 2,6 problemas de tipo T3.

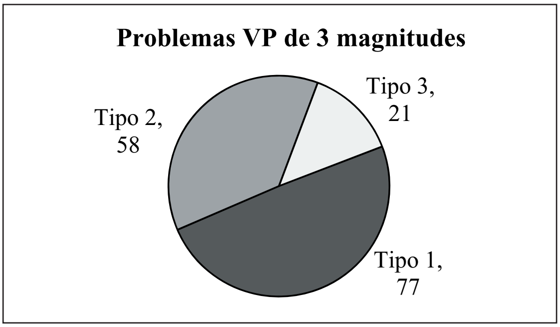

Gráfico 3. Frecuencia de los distintos tipos de problemas VP con 3 magnitudes

4.2. *Resultados referidos al objetivo 2*

En la siguiente tabla de contingencia se presentan los resultados del estudio conjunto de la categoría de análisis "Tipo de problema según su estructura" (VP con 3 magnitudes) y "Tipo de problema según su lugar de aparición en el texto":

TABLA IV
Frecuencias de cada tipo de problema en función de su aparición en el texto.

	PR	*PD*	*PF*
T1	11	35	29
T2	9	25	24
T3	2	10	9
Total	22	70	62

En ningún libro de texto aparecen problemas PI por lo que no los hemos introducido en la tabla anterior.

En cuanto a los problemas resueltos (PR), los 11 de tipo T1 se reparten entre 10 de los textos analizados, los 9 problemas resueltos T2 se reparten entre 8 libros de texto y los 2 problemas resueltos T3 pertenecen a dos libros de texto diferentes.

De los problemas que se presentan dentro del epígrafe de la proporcionalidad compuesta (PD), los 35 problemas T1 se reparten entre 11 de los textos analizados, los 25 problemas T2 entre 9 de los textos y los 10 problemas T3 pertenecen a 8 libros diferentes.

De los problemas finales (PF), los 29 problemas T1 se reparten entre 10 de los textos analizados, los 24 problemas T2 entre otros 9 de los textos y los 9 problemas T3 se concentran en 5 textos.

Todos los problemas de valor perdido con más de tres magnitudes y los de comparación son problemas PF.

4.3. *Resultados referidos al objetivo 3*

Como se observa en el Gráfico 4, de las 468 cantidades de magnitud que se han analizado en los problemas de proporcionalidad compuesta, la mayoría (un 88% aproximadamente) pertenecen a magnitudes extensivas, mientras que la incorporación de cantidades de magnitud intensivas tiene un peso mucho menor (12% aproximadamente).

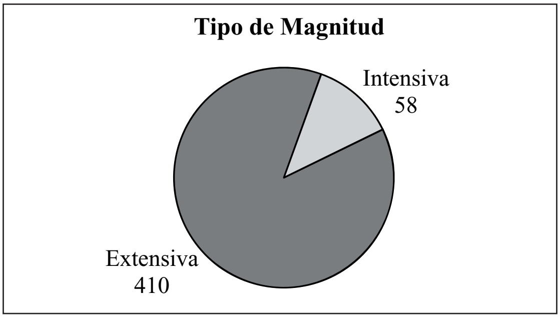

Gráfico 4. Frecuencias absolutas de las cantidades de magnitud extensivas e intensivas encontradas

Las magnitudes extensivas tratadas en los problemas, presentadas de mayor a menor frecuencia, son las siguientes: cardinalidad (154), tiempo (128), longitud (47), valor económico (36), masa (24), capacidad (12), superficie (7), energía (2). Como se observa en el Gráfico 5 las cantidades referentes a la cardinalidad y al tiempo suponen aproximadamente los dos tercios de las cantidades de magnitud extensiva analizadas. Las magnitudes físicas, salvo el tiempo y la longitud, tienen una presencia testimonial.

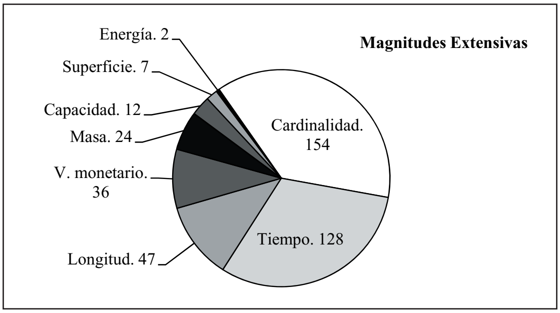

Gráfico 5. Número de cantidades de cada magnitud extensiva observadas ordenadas por frecuencia

En cuanto a las magnitudes intensivas, se observa claramente que aquellas expresadas como “horas/día” aparecen de manera mayoritaria. De hecho suponen el 78% de todas las cantidades de magnitud intensivas. Si comparamos esta presencia con la de las cantidades de magnitud extensivas anteriores, comprobamos que solamente existen 3 magnitudes extensivas con una presencia mayor: la cardinalidad, el tiempo y la longitud. Sin embargo, otras magnitudes intensivas conocidas y trabajadas en otros ámbitos, como la velocidad, tienen una aparición anecdótica. La velocidad de desplazamiento (longitud por unidad de tiempo) aparece una única vez, y otro tipo de velocidades tienen una frecuencia similar. En concreto, aparece en dos ocasiones la velocidad de lectura (número de hojas leídas por unidad de tiempo) y el caudal de un grifo (volumen de líquido emanado por unidad de tiempo).

La presencia de las magnitudes discretas y continuas está muy repartida, siendo algo menor (aproximadamente un 40%) la de las magnitudes discretas (esencialmente cardinalidad y valor monetario[3] ya que el resto de magnitudes extensivas son continuas y entre las intensivas casi no aparecen).

4.4. *Resultados referidos al objetivo 4*

Al analizar la presencia de magnitudes extensivas en los diferentes tipos de problemas según su estructura, encontramos que en todos los problemas analizados se trabaja alguna magnitud extensiva. Es decir, no hay problemas de ninguno de los tipos en los que las tres magnitudes que aparecen sean intensivas.

Esta situación no se mantiene al analizar la presencia de magnitudes intensivas. El comportamiento no es homogéneo entre los tres tipos de problemas (ver Gráfico 6):

- En 13 de los 75 problemas de tipo T1 (un 19%) se trata alguna magnitud intensiva;
- En 14 de los 58 problemas de tipo T2 (un 25%) se trata alguna magnitud intensiva;
- En todos los problemas de tipo T3 aparece alguna magnitud intensiva.

[3] Consideramos el valor monetario como una magnitud discreta siguiendo la opinión de González y Gómez (2011, p. 357) que lo presentan el valor monetario como ejemplo paradigmático de magnitud discreta.

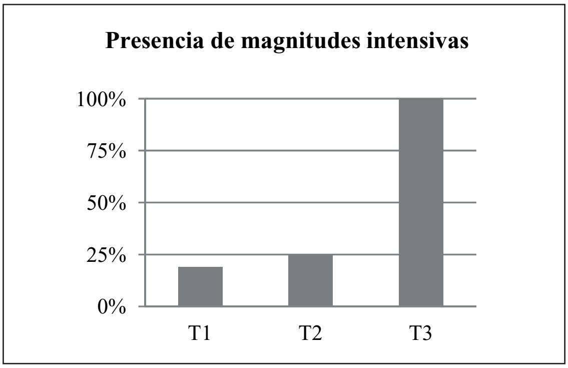

Gráfico 6. Porcentaje de problemas, según su tipo, en los que aparecen magnitudes intensivas

A pesar a la escasa presencia de las magnitudes intensivas en los textos analizados, llama la atención que todos los problemas de tipo T3 involucren al menos una magnitud de esta naturaleza, mientras que en más del 75% de los problemas de las otras tipologías se da una ausencia total de magnitudes intensivas.

5. Discusión de los resultados

Presentamos a continuación las principales conclusiones que resultan del análisis realizado. Se presentan en forma discursiva relacionando éstas con los resultados previos, siguiendo el orden de los objetivos de la investigación, y asociando implicaciones para la docencia.

Respecto a la tipología de los problemas, tras el análisis realizado, concluimos que el tratamiento dado por todos los textos analizados a los problemas de proporcionalidad compuesta es muy uniforme en cuanto al contexto, la estructura de problemas y el número de magnitudes involucradas. Se trata en su gran mayoría de problemas rutinarios, con contextos realistas, de valor perdido e involucran tres magnitudes. La aparición de otro tipo de problemas es anecdótica y marginal. Estos resultados coinciden en parte con los obtenidos para proporcionalidad aritmética en 1º de ESO por Pino y Blanco (2008). También estos resultados son coincidentes con los obtenidos por Conejo y Ortega (2013) para otros contenidos matemáticos (geometría y estadística) en otros niveles (3º y 4º de ESO) cuando señalan que la mayoría de problemas analizados durante su estudio eran aplicación inmediata de contenidos no implícitos en el enunciado y cuyos objetivos didácticos son mayoritariamente aprender las técnicas estándar en dominios particulares.

En nuestra investigación se descubre que la instrucción asociada a los enunciados propuestos en los textos analizados requiere que se centre en las técnicas que resuelven este tipo de problemas más que en los conceptos que involucran ya que no encontramos problemas no rutinarios u otro tipo de problemas, como los de comparación cualitativa, que pongan el énfasis en la comprensión del fenómeno de la proporcionalidad compuesta. En este punto, nos hacemos eco de la investigación de Fernández (2009) y, como él, proponemos la inclusión de problemas de comparación cualitativa en el currículo ya que la resolución de estos problemas requiere de los estudiantes la comprensión del fenómeno de la proporcionalidad en contraste con los problemas de valor perdido y de comparación cuantitativa en los que se prima el uso de habilidades memorísticas o mecanizadas para su resolución.

Si nos centramos en la estructura de los problemas de valor perdido con tres magnitudes, se ha encontrado que el tipo T3 recibe menor atención por parte de los autores en la elaboración de problemas, tanto por el número de textos en los que se trata, como por la frecuencia de problemas de tipo T3 que encontramos en los textos en los que se trabaja. Por tanto, parece haber una preferencia por la estructura cociente (de una magnitud entre el producto de otras dos), de la que derivan los tipos T1 y T2, que por la estructura producto de tres magnitudes, de la que deriva el tipo T3. Para plantear un problema VP con 3 magnitudes basta elegir una situación de proporcionalidad con una de las dos estructuras anteriores, dar valores para tres de las magnitudes y posteriormente dar valores para dos de ellas y pedir que se averigüe el tercero (ver Figura 2). Como consecuencia, se ha encontrado una mayor preferencia por las relaciones de proporcionalidad directa entre pares de magnitudes frente a las relaciones de proporcionalidad inversa.

30 ▼▼▼ En un taller de confección, con 6 máquinas tejedoras, se han fabricado 600 chaquetas en 10 días.

a) ¿Cuántas prendas se fabricarían con 5 máquinas en 15 días?

b) ¿Cuántas máquinas habría que poner en producción para fabricar 750 prendas en 15 días?

c) Si se trabajara solamente con 5 máquinas, ¿cuántos días se tardaría en fabricar 750 prendas?

Figura 2. Un problema de tipo T1 y dos de tipo T2 a partir de una misma estructura cociente (Colera y Gaztelu, 2012).

Este hecho está en clara relación con las dificultades para dotar de significado al producto de magnitudes. Según Freudenthal (1973), los procesos matemáticos que dotan de significado al producto de dos magnitudes son complicados y, por tanto, la dificultad es mayor aún mayor cuando se trata de dotar de significado al producto de 3 o 4 magnitudes. Como se refleja en la Tabla III, no aparecen problemas del tipo (0,3), pero sí los tipos (3,0), (2,1) y (1,2) en los que hay relaciones de proporcionalidad directa y se ha detectado una preferencia por esta proporcionalidad en detrimento de la inversa. Parece que los autores de los textos de alguna forma intuyeron estas dificultades señaladas por Freudenthal y optaron por proponer menos problemas de este tipo. De hecho, el número de problemas con cuatro magnitudes que se ha encontrado es muy pequeño. Para que el alumno pueda dotar de significado a estos productos de magnitudes, sería necesario que realizara un trabajo discusivo con magnitudes, trabajo que no se detecta en ninguno de los textos.

En el análisis se ha encontrado una escasa presencia de problemas resueltos de tipo T3, aun teniendo en cuenta el ya menor tratamiento de este tipo de problemas. Aunque, hay 8 textos en los que aparecen problemas de tipo T3, sólo dos incluyen un problema resuelto de tipo T3 y otros cinco textos los incluyen en los problemas finales del tema. En consecuencia, hay 6 textos en los que se plantean problemas de tipo T3 a resolver por los alumnos sin haber ejemplificado cómo resolver estos problemas previamente. Este fenómeno se da en mucha menor medida en los problemas de tipos T1 y T2, donde solo 2 textos proponen este tipo de problemas sin ejemplificación previa. También es destacable que no haya problemas introductorios de proporcionalidad compuesta al principio de la unidad didáctica de proporcionalidad en los textos estudiados y que puedan ser resueltos por los estudiantes antes de introducir los contenidos. Esta ausencia quizá sea achacable a que en aquellos textos en que presentan este tipo de problemas, éstos problemas se presentan al principio de la unidad y la proporcionalidad compuesta no es el único contenido que se trata en dicha unidad (también suele englobar proporcionalidad simple directa e inversa, interés simple, porcentajes, etc.). Conejo y Ortega (2013) señalan la importancia de este tipo de problemas ya que “proporcionan una motivación a los alumnos para estudiar ciertos contenidos y acerca las matemáticas escolares a lo que realmente son, una herramienta para resolver problemas” (p. 34). Estas observaciones implican la conveniencia de incluir en la docencia, justamente por su mayor dificultad, problemas resueltos del tipo T3 y dar mayor importancia a los problemas de proporcionalidad inversa.

Se ha descubierto la escasa variedad de magnitudes tratadas en los textos. Las extensivas se centran en la cardinalidad y el tiempo. También se tratan el valor monetario y la longitud, pero en mucha menor medida. La escasa variedad de las magnitudes intensivas es todavía más acusada, y la gran mayoría de cantidades de estas magnitudes detectadas viene expresada en "horas/días". En general, y salvo las mencionadas tiempo y longitud, se trabajan muy poco las magnitudes físicas (masa, capacidad, área, energía, velocidad, densidad…). Una mayor presencia de estas magnitudes físicas sería adecuada para comprobar que la proporcionalidad compuesta es un conjunto de contenidos que permiten la resolución de problemas matemáticos relacionados con otras áreas curriculares y, muy especialmente, con situaciones de contextualizadas (Díaz y Poblete, 2001).

Por otro lado, la poca variedad de magnitudes presentes en los contextos de los problemas puede llevar consigo un impedimento para la aparición de algunas estrategias informales que podrían poner en juego los alumnos cuando se enfrentan a ellos. Como hemos apuntado en la sección 2.2, algunos autores señalan la influencia de los tipos de magnitud presentes en el enunciado sobre las dificultades encontradas por los alumnos al resolver problemas. Así, Lamon (1993) distingue como categorías semánticas distintas a aquellos problemas de proporcionalidad simple directa en los que aparecen cantidades de magnitud bien compactadas (*well chunked*); esto es, aquellas cuyo cociente genera una nueva cantidad de magnitud que es intensiva y es bien conocida por los estudiantes (por ejemplo: longitud y tiempo, cuyo cociente genera la magnitud velocidad), frente a los problemas en los que las cantidades de magnitud presentes no lo cumplen (*associated sets*) (por ejemplo: pizzas y niños, generarían la magnitud "pizza por niño"). En consecuencia, es importante abundar en la presencia de unas y otras magnitudes, y ello implica el tratamiento multiplicativo de las magnitudes acompañando a las multiplicaciones de las cantidades.

En los textos analizados, se ha detectado una clara preferencia por la inclusión de magnitudes extensivas. Aproximadamente, aparecen siete magnitudes extensivas por cada una intensiva. Sin embargo, en el análisis conjunto entre el tipo de magnitud y el tipo de problema hemos puesto de manifiesto que en todos los problemas de tipo T3, al menos, aparece una magnitud intensiva (generalmente expresada en "horas/día"). Este fenómeno es justo el contrario del acaecido en los tipos T1 y T2, en los que el porcentaje de aparición de magnitudes intensivas es muy bajo. Estos hechos parecen estar íntimamente ligados a las dificultades para dar significado al producto de tres magnitudes y con la abundante aparición de cantidades de magnitud expresadas en "horas/día" dentro de las magnitudes intensivas. En efecto, la inclusión de este tipo de cantidades aporta un método que permite construir de forma sencilla un problema de proporcionalidad compuesta de tres magnitudes a partir de un problema de proporcionalidad simple en el que una de las magnitudes involucradas sea el tiempo (y también con otro tipo de magnitudes). El proceso consiste en descomponer la magnitud tiempo en el producto de dos magnitudes, una en la que se exprese el tiempo en días y otra en la que se exprese en "horas/día" de forma que el producto produzca una cantidad de magnitud expresada en horas. Así, el problema T3 de la Figura 3 se obtendría a partir de un enunciado de proporcionalidad inversa de tipo (0,1) como: *"Cinco trabajadores han tardado 80 horas para embaldosar una plaza. ¿Cuánto hubieran tardado 6 trabajadores?"* descomponiendo la cantidad de 80 horas en el producto de 8 días y 10 horas/día.

ACTIVIDADES

33. Cinco trabajadores han tardado 8 días trabajando 10 horas diarias para embaldosar una plaza. ¿Cuánto hubieran tardado 6 trabajadores trabajando 8 horas diarias?

Figura 3. Un problema T3 (Pancorbo, 2008, p. 133)

Consideramos como Nunes y otros (2003) que en la docencia de las magnitudes deben abundar los casos de magnitudes intensivas y extensivas, pero el hecho de que en los textos el número de las primeras es muy inferior a las segundas, es muy importante que los docentes puedan disponer de un método para crear enunciados de problemas del tipo T3. Por otra parte, las dificultades que tienen los profesores para construir enunciados de problemas (Ortega et al., 2011) enfatizan la importancia de disponer de un método como el que aquí se ha descrito para tal fin.

Agradecimientos

Este artículo surge del trabajo desarrollado por el grupo de investigación "S119-Investigación en Educación Matemática" financiado por el Plan Autonómico de Investigación del Gobierno de Aragón y el Fondo Social Europeo.

Referencias bibliográficas

Almodóvar, J. A., Corbalán, F., García, P., Gil, J. y Nortes, A. (1999). *Matemáticas Órbita 2000 2º ESO*. Madrid, España: Santillana.

Arias, J. M y Maza, I. (2012). *Matemáticas ESO 2*. Madrid, España: Bruño.

Becerra, M. V., Martínez, R., Pancorbo, L. y Rodríguez, R. (1996). *Matemáticas 2*. Aravaca, España: McGraw-Hill.

Calvino, S. y Sánchez, A. (1999). *Matemáticas 2*. León, España: Evergráficas.

Carrasco, M. A., Martín, R. y Ocaña, J.M. (2011). *Mate_02*. Zaragoza, España: Edelvives.

Cólera, J. y Gaztelu, I. (2012). *Matemáticas 2 Educación Secundaria*. Madrid, España: Anaya.

García, F. J. (2007). *Matemáticas 2º ESO*. Madrid, España: Editex.

Sánchez, J. L. y Vera, J. (2008). *Matemáticas Serie Cota 2º Secundaria*. Madrid, España: Oxford University Press.

Bardin, L. (1986). *El análisis de contenido*. Madrid, España: Akal.

Blanco, L. J. (1993). *Consideraciones elementales sobre la resolución de problemas*. Badajoz, España: Univérsitas editorial.

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática: El caso de la proporcionalidad.* (Tesis Doctoral no publicada). Universitat Autónoma de Barcelona, Barcelona, España.

Boyer, T. W., Levine, S. C., & Huttenlocher, J. (2008). Development of proportional reasoning: Where young children go wrong. *Developmental Psychology*, *44*(5), 1478-1490. doi: 10.1037/a0013110

Bujanda, M. P. y Mansilla, S. (2000). *Matemáticas Números 2º Secundaria*. Madrid, España: Ediciones SM.

Castiello, J.M. (2002). *Los desafíos de la educación intercultural: migraciones y currículum.* (Tesis Doctoral no publicada). Universidad de Oviedo, Oviedo, España.

Conejo, L. y Ortega, T. (2013). Clasificación de los problemas propuestos en aulas de Educación Secundaria Obligatoria. *Educación Matemática*, *25*(3), 7-38.

Cramer, K. & Post, T. (1993). Connecting Research to Teaching Proportional Reasoning. *Mathematics Teacher, 86*(5), 404-407.

Díaz, M. V. y Poblete, A. (2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. *Números*, *45*, 33-41.

Fernández, A. (2009). *Razón y proporción: Un estudio en la escuela primaria.* Valencia, España: Publicacions de la Universitat de València.

Fernández, C. y Llinares, S. (2011). De la estructura aditiva a la multiplicativa: efecto de dos variables en el desarrollo del razonamiento proporcional. *Infancia y Aprendizaje, 34:1*, 67-80. doi: 10.1174/021037011794390111

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, Holanda: D. Reidel Publishing Company.

Gairín, J. M. y Oller, A.M. (2011). Proporcionalidad aritmética en Secundaria. Ideas para una propuesta didáctica. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palare y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 179-189). Granada, España: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

García, F., Pérez, S. A. y Uriondo, J. L. (1996). *Matemáticas 2º de Secundaria*. Madrid, España: Alhambra Longman.

Goetz, J. P. y Lecompte, M. D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid, España: Morata.

Gómez, B. (2006). Los ritos en la enseñanza de la regla de tres. En A. Maz, M. Torralbo y L. Rico (Coords.), *José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado. Una mirada desde la Educación Matemática* (pp. 49-69). Córdoba, España: Publicaciones Universidad de Córdoba.

Gómez, B. (2011). El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *PNA*, *5*(2), 49-65.

González, M. J. y Gómez, P. (2011). Magnitudes y medida. Medidas directas. En I. Segovia y L. Rico (Coords.), *Matemáticas para maestros* (pp. 351-374). Madrid, España: Pirámide.

González, M. T. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, *22*(3), 389-408.

Guacaneme, E. A. (2002). Una mirada al tratamiento de la proporcionalidad en textos escolares de matemáticas. *Revista EMA*, 7(1), 3-42.

Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica*. Barcelona, España: Paidós.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and Proportion: Connecting Content and Children's Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*, 41-61. doi: 10.2307/749385

López, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *XXI Revista de Educación*, *4*, 167-179.

Lundberg, A. (2011). Proportion in mathematics textbooks in upper secondary school. In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 336-345). Rzeszów, Polonia: University of Rzeszów.

Martínez, S., Muñoz, J. M. y Oller, A. (2014). Tratamiento de la proporcionalidad compuesta en cuatro libros de texto españoles. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 435-444). Salamanca, España: SEIEM.

Monterrubio, M. C. y Ortega, T. (2009). Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 37-53). Santander, España: SEIEM.

Mullis, I.V.S., Martin, M. O., Foy, P., & Arora, A. (2012). *TIMSS 2011 International results in mathematics*. Chestnut Hill, USA: Boston College.

NCTM - National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, USA: NCTM.

Nunes, T., Desli, D. & Bell, D. (2003). The development of children's understanding of intensive quantities. *International Journal of Educational Research, 39*(7), 651–675. doi: 10.1016/j.ijer.2004.10.002

Occelli, M. y Valeiras, N. (2013). Los libros de texto de ciencias como objeto de investigación: Una revisión bibliográfica. *Enseñanza de las Ciencias*, *31*(2), 133-152. doi: 10.5565/rev/ec/v31n2.761

Oller, A. M. (2012). *Proporcionalidad aritmética: Una propuesta didáctica para alumnos de secundaria.* (Tesis Doctoral no publicada). Universidad de Valladolid, Valladolid, España.

Oller, A. M. y Gairín, J. M. (2013). La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *16*(3), 317-338. doi: 10.12802/relime.13.1632

Ortega, T., Pecharromán, C. y Sosa, P. (2011). La importancia de los enunciados de problemas matemáticos. *Educatio Siglo XXI*, *29*(2), 99-116.

Pancorbo, L. (2008). *Matemáticas Vector 2*. Barcelona, España: Vicens Vives.

Pino, J. y Blanco, L. J. (2008). Análisis de los problemas de los libros de texto de matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y de Chile en relación con los contenidos de proporcionalidad. *Publicaciones*, *38*, 63-88.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid, España: Síntesis.

Rodríguez, J. (2006). La investigación sobre los libros de texto y materiales curriculares. *Primer seminario internacional de textos escolares*. Santiago de Chile, Chile: Mineduc.

Ruiz de Gauna, J., Dávila, P., Etxeberría, J. y Sarasua, J. (2013). Los libros de texto de Matemáticas del Bachillerato en el periodo 1970 - 2005. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *16*(2), 245-276. doi: 10.12802/relime.13.1624

Sánchez, E. A. (2013). Razones, proporciones y proporcionalidad en una situación de reparto: Una mirada desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *16*(1), 65-97.

Schubring, G. (1987). On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook author. *Learning of Mathematics*, *7*(3), 41-51.

Schwartz, J. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. En Hiebert, J., & Behr, M. (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 41–52). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Singer, J. A. & Resnick, L. B. (1992). Representation of Proportional Relationships: Are Children Part-part or Part-whole Reasoners? *Educational Studies in Mathematics, 9*, 55-73. doi: 10.1007/BF02309531

Spinillo, A. G. & Bryant, P. (1999). Proportional reasoning in young children: Part–part comparisons about continuous and discontinuous quantity. *Mathematical Cognition, 5*, 181–197. doi: 10.1080/135467999387298

Tournaire, F. & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*. *16*(2), 181-204. doi: 10.1007/BF02400937

Uriondo, J. L. (2007). *Matemáticas Serie Trama 2º Secundaria*. Madrid, España: Oxford University Press.

Valverde, A. G. y Castro, E. (2009). Actuaciones de maestros en formación en la resolución de problemas de proporcionalidad directa. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 523-531). Santander, España: SEIEM.

Van Dooren, W., De Bock, D., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2008). The linear imperative: An inventory and conceptual analysis of students' over-use of linearity. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(3), 311-342. Doi: 10.2307/30034972

Van Dormolen, J. (1986). Textual analysis. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on Mathematics Education* (pp. 141-171). Dordrecht, Holanda: Reidel.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-173). New York, USA: Academic Press.

Zapico, M. H. (2006). Interrogantes acerca de análisis de contenido y del discurso en los textos escolares. *Primer seminario internacional de textos escolares*. Santiago de Chile, Chile: Mineduc.

Autores

Sergio Martínez Juste. Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza, España. sergiomj@unizar.es

José María Muñoz Escolano. Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza, España. jmescola@unizar.es

Antonio M. Oller Marcén. Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza, España. oller@unizar.es

Tomás Ortega del Rincón. Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales, Sociales y de la Matemática, Universidad de Valladolid, España. ortega@am.uva.es