Alejandro Andrade Lotero, Amparo Lotero Botero, Edgar A. Andrade Londoño

LA HIPÓTESIS DE LOS CUADROS DE SIGNIFICADO EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

The Frames of Meaning Hypothesis: Children's Mathematical Problem-Solving Abilities

RESUMEN

El presente texto tiene la intención de describir un fenómeno observado cuando niños y niñas de 6 y 7 años, quienes aún no habían recibido instrucción formal de la división, intentaron dar solución a un problema de repartición por medio de dibujos. El fenómeno llamado "cuadros de significado" intenta explicar por qué algunos niños tuvieron éxito en la solución de problemas y otros no. Por medio de un estudio de casos ilustramos empíricamente esta hipótesis, la cual se presenta como una herramienta teórica y metodológica poderosa para la conceptualización de la solución de problemas aritméticos y la comprensión que subyace al pensamiento matemático de los niños de esta edad. No obstante, es necesario seguir expandiendo nuestro análisis y la aplicación de este marco de referencia. Esto conllevaría a reconsiderar prácticas educativas y evaluativas convencionales. En este artículo intentamos señalar un camino por el cual podrían realizarse estos cambios.

PALABRAS CLAVE:

- *Cuadros de significado*
- *Resolución de problemas*
- *Pensamiento matemático*
- *Educación primaria*

ABSTRACT

This paper intends to describe a phenomenon observed when children aged 6 and 7 years old, who had not yet received formal instruction about division, tried to solve a problem of distribution by means of drawings. The phenomenon called "frames of meaning" attempts to explain why some children were successful in solving problems and others were not. We illustrate this hypothesis empirically through a case study. This hypothesis is a powerful theoretical and methodological tool for understanding the underlying mathematical thinking and arithmetic problem-solving abilities of children this age. However, it is necessary to continue to expand our analysis and the application of this framework. This would lead to reconsider conventional educational and evaluative practices. In this article we try to point the way by which these changes could be made.

KEY WORDS:

- *Frames of meaning*
- *Problem solving*
- *Mathematical thinking*
- *Elementary education*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2017) *20* (1): 39-70.
Recepción: Septiembre 13, 2013 / Aceptación: Mayo 31, 2016. DOI: 10.12802/relime.17.2012

RESUMO

Este artigo pretende descrever um fenômeno observado quando as crianças com idade entre 6 e 7 anos, que ainda não tinha recebido a divisão de instrução formal, tentou resolver um problema de distribuição por meio de desenhos. O fenômeno chamado de "quadros de sentido" tentativas de explicar por que algumas crianças foram bem sucedidos na resolução de problemas e outros não. Através de um estudo de caso ilustram essa hipótese empiricamente, que se apresenta como uma poderosa ferramenta teórica e metodológica para a conceituação do problema de aritmética resolver e entender o pensamento matemático subjacente de crianças desta idade. No entanto, é necessário continuar a expandir a nossa análise e da aplicação deste quadro. Isso levaria a repensar as práticas educativas convencionais e avaliativas. Neste artigo vamos tentar apontar o caminho pelo qual essas mudanças poderiam ser feitas.

PALAVRAS CHAVE:

- *Quadros de significado*
- *Resolução de problemas*
- *Pensamento matemático*
- *Ensino fundamental*

RÉSUMÉ

Cet article se propose de décrire un phénomène observé lorsque les enfants âgés de 6 et 7 ans, qui n'avait pas encore reçu la division de l'enseignement formel, a tenté de résoudre un problème de répartition au moyen de dessins. Le phénomène appelé «cadres de sens» tente d'expliquer pourquoi certains enfants ont réussi à résoudre les problèmes et d'autres pas. Grâce à une étude de cas illustrent cette hypothèse de manière empirique, qui est présenté comme un outil théorique et méthodologique puissant pour la conceptualisation de résoudre et de comprendre la pensée mathématique sous-jacente des enfants de cet âge problème d'arithmétique. Cependant, il est nécessaire de continuer à développer notre analyse et l'application de ce cadre. Cela conduirait à reconsidérer les pratiques éducatives classiques et d'évaluation. Dans cet article nous essayons de montrer la voie par laquelle ces changements pourraient être apportés.

MOTS CLÉS:

- *Cadres de sens*
- *La résolution de problèmes*
- *La pensée mathématique*
- *L'enseignement élémentaire*

1. La Hipótesis de los Cuadros de Significado en la Solución de Problemas Matemáticos

El presente texto tiene la intención de describir un fenómeno observado cuando niños y niñas de primaria intentaron dar solución a problemas complejos de operaciones aritméticas por medio de dibujos. Los participantes aún no habían recibido instrucción formal acerca de los algoritmos simbólicos adecuados para resolver este tipo de problemas. El fenómeno que aquí nos concierne, al cual hemos llamado *cuadros de significado*, intenta explicar por qué algunos niños tuvieron éxito en la solución de problemas y otros no. También intenta comprender por qué las soluciones que plantearon estos niños parecen poner en juego muchos elementos de recursos cognitivos que forman escenarios de sentido. Aquí ilustramos la hipótesis de los *cuadros de significado* estudiando detenidamente varios casos de soluciones a un problema matemático de enunciado verbal en el contexto de repartición discreta, llamado *el caso de los niños y las canicas de colores.* Este problema hizo parte de una prueba de competencia matemática que fue presentado a niños y niñas de 6 y 7 años de varios colegios públicos en la ciudad de Medellín, Colombia.

En este artículo presentamos una breve introducción a nuestra conceptualización acerca de la hipótesis de los cuadros de significado, la manera como los cuadros de significado se manifiestan en la resolución de problemas matemáticos, y, finalmente, un estudio de casos en el cual ilustramos empíricamente esta hipótesis en el contexto de problemas de repartición.

2. Resolución de Problemas

Esta investigación pretende aportar a la literatura en el campo de la resolución de problemas en el dominio de las matemáticas. No obstante, el presente aporte no se incluye en la corriente dedicada a estudiar la resolución de problemas como una dicotomía entre experto y novato (cf. Chi, Feltovich, y Glaser, 1981; Gobbo y Chi, 1986; Hmelo-Silver y Pfeffer, 2004; Nehm y Ridgway, 2011). Estas investigaciones que contrastan el desempeño del novato con la del experto han mostrado que los expertos son capaces de, por ejemplo, distinguir los componentes relevantes del problema de aquellos detalles contextuales superficiales, identificar la estructura formal del problema, y de generalizar a otros problemas de estructura similar (Nehm y Ridgway, 2011).

No obstante, en varias ocasiones se ha señalado que es injusto identificar experticia con éxito para solucionar problemas (Bodner y Domin, 2000; Camacho y Good, 1989; Domin y Bodner, 2012; Silver, Mitchell, y Gist, 1995). En efecto, equiparar experticia con solución exitosa de problemas esconde un aspecto problemático. Cuando el objetivo es instruir a un sujeto hacia la experticia, lo que antes eran problemas se convierten en ejercicios rutinarios. Por lo tanto, bajo esa mirada no se estudia la resolución de problemas en el sentido estricto del término. En cambio, la presente investigación se circunscribe dentro de la línea que estudia las diferencias entre aquellas personas que solucionan exitosamente el problema y aquellas que son infructuosas en su intento por resolverlo (Camacho y Good, 1989; Silver et al., 1995).

Nuestra línea de investigación se acerca a los estudios de ecología conceptual realizados en enseñanza de la ciencia y su crítica hacia la idea de cambio conceptual (diSessa, 1993, 2002) para una introducción en español a esta discusión ver por ej. Bello (2004) o Flores (2004). En este sentido, en lugar de presuponer la transición desde un concepto ingenuo hacia un concepto científico, se asume que en este tránsito es necesaria la reorganizacion de una gran cantidad de entidades mentales o recursos cognitivos. Estos recursos pueden estar débilmente organizados o, por el contrario, formar sistemas complejos y coherentes de conocimiento (diSessa, 1993; Smith, diSessa, y Roschelle, 1994). Por ejemplo, en vez de asumir que los niños tienen ideas erradas acerca de algún concepto como el de cardinalidad en matemáticas o fuerza en ciencia física, se entiende que hay una estructuración a partir de elementos cognitivos primitivos. Estos elementos, a diferencia de las estructuras generales propuestas por Piaget (e.g., Piaget y Inhelder, 2007), son diversos, de fino tamaño, y dependientes del contexto de su uso (diSessa, 2002).

Aunque nuestra investigación se ha encaminado a entender el aprendizaje de niños de edad escolar básica en varias áreas de conocimiento, tales como en matemáticas, ciencia y tecnología (Lotero Botero, Andrade Londoño, y Andrade Lotero, 2011, 2012), en el presente artículo mostramos nuestros resultados de investigación en el área del aprendizaje de las matemáticas.

3. El Contexto de los Problemas Matemáticos

Los problemas matemáticos de enunciado textual escrito son habituales en evaluaciones formativas del aprendizaje a pequeña escala (Kulm, 1990; Romberg, Zarinnia, y Collis, 1990), en evaluaciones sumativas de escala nacional, tales como las pruebas Saber (Castillo Ballén, Triana, Duarte-Agudelo, Pérez-Abril, y Lemus-Espinosa, 2007), e internacional como las pruebas Pisa y TIMSS (Adams, 2005; Mullis, Martin, Gonzalez, y Chrostowski, 2004), así como también en actividades de instrucción (Mulligan, 1992; Verschaffel, Greer, y de Corte, 2000; Xin, Wiles, y Lin, 2008).

No obstante, en nuestra mirada a la educación básica hemos encontrado que los niños frecuentemente confunden la operatividad simbólica con el sentido de solución matemática durante la solución de problemas. Anteriores investigaciones acerca de la solución de problemas matemáticos de enunciado escrito han puesto de presente la dificultad de los niños para usar procedimientos algorítmicos convencionales y aplicarlos a la solución de un problema (Koedinger y Nathan, 2004; Mulligan, 1992). Por ejemplo, Kroedinger y Nathan (2004) hallaron que la mayoría de los niños les resulta difícil solucionar un problema presentado como una ecuación, y en cambio recurren a procedimientos *ad hoc* para dar solución a problemas de enunciado escrito. Algunos de estos procedimientos *ad hoc* son, por ejemplo, comenzar desde el final y devolverse, así como la estrategia de *ensayo y error*. Menos de la mitad de los niños intentan emplear los algoritmos enseñados por los profesores, y una porción menor aún tiene éxito al aplicarlos.

Otras investigaciones han mostrado que los niños tienen dificultad para construir respuestas con sentido, es decir, saber que la representación del resultado se refiere a algo en la realidad (Bodner y Domin, 2000; Domin y Bodner, 2012; Verschaffel, De Corte, y Lasure, 1994). Por ejemplo, Bodner y Domin (2000) encontraron que muchos estudiantes universitarios, al intentar resolver problemas de química, llegaron a respuestas sin sentido. Muchos estudiantes escribieron fórmulas químicas cuyos términos, letras y números "no pueden ser correctamente llamados símbolos porque no representan o simbolizan nada que tenga realidad física" (Bodner y Domin, 2000, p. 27). Por su parte, Verschaffel et al. (1994) han mostrado que muchos estudiantes no consideran que las matemáticas escolares tienen relación con el mundo real, y pocos de ellos presentan respuestas basadas en consideraciones realistas.

Otros estudios han mostrado que cuando los niños construyen sus propias representaciones, inventadas en situaciones prácticas que presentan problemas con sentido para ellos, se les facilita entender por qué deben usar ciertos procedimientos para resolver los problemas matemáticos involucrados en estas situaciones (Carolan, Prain, y Waldrip, 2008; Greeno y Hall, 1997; Roth y Bowen, 1994). Por ejemplo, Greeno y Hall (1997) argumentan que, si los niños necesitan construir tablas y gráficas para un reporte de un proyecto, ellos aprenderán si estas representaciones son efectivas para comunicar sus resultados o no. "Pero si los estudiantes simplemente completan la tarea de construir representaciones en formas previamente especificadas, ellos no tendrán la oportunidad de aprender las ventajas y desventajas de ciertos tipos de formas de representación…" (Greeno y Hall, 1997, p. 1-2).

Además, en nuestra propia investigación encontramos que no es únicamente un problema de comprensión del enunciado escrito. Por supuesto, es cierto que aquellos niños que no entienden el enunciado no pueden resolver el problema, pero no todo aquel que comprende el enunciado es capaz de plantear una solución con sentido (Lotero Botero et al., 2011).

En efecto, entonces, los problemas matemáticos de enunciado verbal son usados comúnmente en evaluaciones del aprendizaje, pero los resultados muestran que una gran población de estudiantes tiene serias dificultades para resolverlos. A continuación, expondremos nuestra hipótesis de por qué ciertos estudiantes pueden solucionar correctamente un problema y cuáles son las características de los recursos cognitivos que ponen en juego.

4. Hipótesis de los Cuadros de Significado

La hipótesis de los cuadros de significado implica que cuando un sujeto resuelve un problema, éste pone en juego una gran cantidad de recursos cognitivos y epistémicos que generan un alto orden local en su sistema cognoscitivo general. Para usar una metáfora visual, un cuadro de significado es una estructura que se construye entre la comprensión semántica de un problema y la solución visible y material que se le da al problema. Esta estructura está compuesta por recursos cognitivos en forma de pequeñas unidades que pertenecen a tres clases: (a) abstracciones fenomenológicas simples que derivan en esquemas anticipatorios (diSessa, 1993; Von Glasersfeld, 1997), (b) conocimientos de sistemas representacionales (diSessa y Sherin, 2000; Greeno y Hall, 1997), y (c) expectativas epistémicas acerca de cuál debería ser la solución bajo determinadas condiciones particulares (Conlin, Gupta, y Hammer, 2010; Scherr y Hammer, 2009). Además, debido a que el producto del cuadro de significado es una estructura visible y material, este significado se expresa como un recurso semiótico (Goodwin, 2003; Kaltenbacher, 2007) que inicia en quien genera el cuadro y es completado por quien lo interpreta.

Así como los p-prims (diSessa, 1993), el cuadro de significado no implica la utilización de un sistema de conocimiento previamente archivado mentalmente que se activa al momento que el sujeto reconoce la correspondencia entre la estructura de este modelo abstracto con la estructura de una situación particular, al estilo de los expertos (Chi et al., 1981). En cambio, se entiende el cuadro de significado como el acto de construcción de solución dentro de una estructura local de conocimiento (a partir inicialmente de esquemas anticipatorios). El desarrollo de una estructura local se refiere a un desarrollo situado, en pequeños pedazos, multidimensional e inestable (diSessa, 1993, 2002; Lesh y Lehrer, 2003). Un esquema anticipatorio se refiere a los patrones de comportamiento que son generados por la expectativa de vivencias pasadas y la predicción acerca de cómo se actúa en circunstancias similares (Von Glasersfeld, 1997). En el caso del aprendizaje, un esquema anticipatorio existe cuando no se ejecutan las actividades que llevarían a una solución, sino que se anticipan sin tener que ser implementadas (Hackenberg, 2010).

En efecto, así como las actividades constructivas propuestas por Lesh y colaboradores (Lesh y Doerr, 2000; Lesh y Lehrer, 2003), la construcción de un cuadro de significado implica algo más que dar una breve respuesta a la pregunta y, en cambio, involucra el desarrollo explícito de una explicación. En este sentido, el sujeto construye un sistema conceptual expresado en un sistema representacional que es útil y cumple con un propósito de sentido para el sujeto (Lesh y Carmona, 2003).

La idea de que existe un *cuadro* hace referencia a que el sujeto percibe esta organización local con un sentido de completitud. Es decir, cuando el sujeto construye una respuesta al problema, él o ella subjetivamente percibe que está completa, coherente e integrada, sobre todo cuando la persona considera que ha dado con la respuesta *correcta*.

Ahora bien, el significado es construido subjetivamente, pero es visible y externalizado como una comunicación de sentido. Por ello, el significado de cada cuadro es completado también por la interpretación de la persona que lo recibe o evalúa y de la práctica social en la que se enmarca. Por ejemplo, la solución de un problema es considerada como solución debido a que hay un parámetro de *solución final*. Aquel quien determina la solución final interpreta la solución presentada por el primer sujeto y puede determinar su completitud, coherencia y congruencia. No obstante, esta tercera persona no usa criterios arbitrarios, sino que se basa en la organización de las prácticas prevalentes de su grupo sociocultural (Brown, Collins, y Duguid, 1989; Lave y Wenger, 1991) y en la racionalidad de la disciplina de conocimiento en la que se circunscribe (Habermas, 1984).

Así pues, el cuadro de significado es construido por una persona, como un proceso cognitivo que aparece como un significado privado. El conocimiento matemático es, no obstante, una composición dialéctica entre un modo de conocimiento instrumental y otro comunicativo. El significado privado se relaciona con el esquema o invariante proveniente de la experiencia instrumental. A su vez, la representación de la solución se halla en la intersección entre la intersubjetividad de quien crea el cuadro y de quien observa e interpreta el significado. La representacion de la solucion hace que el significado sea publico, y este significado publico puede interpretarse como completo o incompleto, coherente o incoherente.

Estos cuadros de significado son considerados completos cuando articulan los invariantes o esquemas apropiados a situaciones particulares (Nunes y Bryant, 2005). Pero no siempre expresan el sentido por medio de signos y reglas convencionales, sino que pueden hacer uso de otros recursos semióticos para integrar la articulación de todas las partes (Hull y Nelson, 2005; Kaltenbacher, 2007; Yañez y Chávez, 2009). Por ejemplo, en el caso que en el presente artículo ilustramos, los niños resolvieron un problema matemático de repartición por medio de dibujos sin apelar necesariamente a procedimientos algorítmicos.

4.1. *Cuadros de Significado Matemático*

Usualmente la escuela no promueve la formación de cuadros de significado, es decir, la integración y articulación de diversas piezas de habilidades y recursos cognitivos en la actividad de solución de problemas. En cambio, la escuela ha fomentado la memorización de partes incompletas que se hacen pasar por un todo. O por lo menos, en las expectativas del aprendiz, éste confunde la parte con el todo, es decir, la proposición de un algoritmo aislado con el cuadro completo de significado.

El cuadro de significado matemático se expresa como una manera de solucionar un problema que requiere no sólo un alto nivel de organización, sino también integrar diversos elementos de pensamiento lógico, representacional, y situado – es decir, el desempeño de un sujeto haciendo uso del contexto (Carraher, Carraher, y Schliemann, 1985; Nunes y Bryant, 2005).

Asumimos que los cuadros de significado que se convierten en el fundamento de conceptos matemáticos provienen originariamente de la posibilidad de comprender los problemas como actividades de transformación, conservación y organización, previstos por ejemplo en la lógica de significaciones (Piaget y García, 1997; Piaget y Inhelder, 2007). En este sentido, originariamente el cuadro de significado matemático se correlaciona con la capacidad del niño de poner en juego la secuencia de transformaciones, conservaciones e invariantes que son fundacionales de la competencia matemática.

Este sentido de secuencialidad incorpora la capacidad de anticipar otras partes del problema que no pueden ser representadas en un único momento (Hackenberg, 2010; Von Glasersfeld, 1997). Un dibujo, un algoritmo, una gráfica, siendo representaciones particulares de una solución, implican otros pasos del procedimiento que pueden quedar implícitos en el cuadro pero que hacen parte de la capacidad de anticipación del niño. Por ejemplo, como ilustraremos más adelante, el niño o niña puede dibujar grupos iguales de canicas de varios colores diferentes para resolver un problema de repartición, pero la acción de repartición es anticipada y por ello queda implícita mas no representada explícitamente.

4.2. *Cuadros de Significado en torno a las Operaciones de Correspondencia*

Una parte de nuestras investigaciones se ha centrado en apoyar el aprendizaje de las operaciones aritméticas basadas en la correspondencia (Lotero Botero et al., 2011). Ésta operación lógico-matemática es de gran importancia en el pensamiento numérico del niño, y es fundamental para la comprensión de muchos otros conceptos matemáticos, tales como la multiplicación, división, fracción, razón, proporción y función (Hackenberg, 2010; Nunes y Bryant, 2005).

Aquí presentamos el estudio de la solución de un problema matemático relacionado con la multiplicación y división que involucra la comprensión de la operación de correspondencia. Este problema de enunciado verbal es un problema complejo dado que comprende varios pasos para su solución. Algunos de estos pasos requieren efectuar la operación mental de correspondencia uno a muchos.

Nuestra hipótesis es que los niños, dado que ellos aún no han recibido instrucción formal en los algoritmos de multiplicación y división, únicamente serán capaces de solucionar este problema si crean un cuadro de significado completo, basado en el pensar y representar la acción de repartir una colección de objetos. Otros autores han llamado *proto-esquemas* a la capacidad lógico-matemática que demuestran los niños previa a la instrucción escolar (Resnick, Bill, y Lesgold, 1992), e incluso se han propuesto diversas estrategias que los niños utilizan cuando no dominan los respectivos algoritmos aritméticos (Mulligan y Mitchelmore, 1997). Aquí proponemos que la capacidad de crear cuadros de significado explicaría el por qué algunos niños son capaces de proponer una solución viable al problema y otros no. Aquellos niños quienes logran construir el cuadro de significado completo consiguen comprender, resolver y comunicar la respuesta correcta. Aquellos niños que no forman un cuadro de significado completo no logran resolver el problema de manera correcta, pero dependiendo de cuan completo esté el cuadro la respuesta puede ser rastreada hasta conocer el tipo de recursos cognitivos que fueron movilizados en el planteamiento de la solución.

En efecto, un cuadro de significado completo es la manera ideal como un sujeto puede responder a las preguntas: ¿puedo resolver el problema?, ¿qué operación mental necesito?, ¿cómo expreso la solución?, ¿cómo apoyo mi pensamiento en ésta representación externa?, ¿qué esperan los adultos que sea mi respuesta? Es evidente que nuestra hipótesis no implica que estas preguntas se realicen de manera consciente en la mente del sujeto. No obstante, la hipótesis sí presume que un cuadro de significado se construye dando respuesta a estas preguntas.

Las preguntas que han guiado la presente investigación son: ¿qué soluciones dan los niños a problemas complejos de repartición a partir de un enunciado escrito?, ¿qué características tendrían estas soluciones en tanto construcciones de cuadros de significado?, ¿qué recursos cognitivos y habilidades de pensamiento se ponen en juego en la construcción de un cuadro de significado? Responder a estas preguntas contribuirá a ampliar nuestro conocimiento teórico y metodológico sobre la resolución de problemas en varios aspectos. En primer lugar, servirá para contribuir a un conocimiento más detallado, multidimensional y sistemático del pensamiento, competencia y desempeño de niños en edad escolar, así como a la manera como intentan dar solución a problemas matemáticos complejos. En segundo lugar, investigaciones de esta línea sirven para comprender cómo apoyar la enseñanza para desarrollar la capacidad de solución de problemas, que tengan en consideración la realidad compleja y sistemática del conocimiento de los niños.

A continuación, ilustraremos la hipótesis de los *cuadros de significado* presentando varios casos de soluciones que niños y niñas de 6 y 7 años de colegios públicos dieron a un problema matemático con formato de enunciado textual. Este problema fue llamado *el caso de los niños y las canicas de colores* e hizo parte de una prueba más extensa con varios puntos de competencia matemática para estudiantes entre transición y tercero de educación básica. Los estudiantes recibieron nueve meses de instrucción basado en el programa educativo *Matemáticas a Color* (Lotero Botero et al., 2011).

5. Metodología

5.1. *Participantes*

Los datos aquí presentados fueron tomados de una investigación macro que incluyó 1038 estudiantes de grados Kínder a Tercero, 26 profesores y tres colegios de estrato socioeconómico bajo de la ciudad de Medellín, Colombia. Los participantes que respondieron al problema de repartición de las canicas que aquí examinamos fueron parte de una muestra aleatoria de 72 niños de un total de 243 niños en cinco grupos de primero de primaria de los tres colegios involucrados. Las 72 respuestas fueron revisadas en su totalidad por varios miembros del equipo de investigación y fueron clasificadas con respecto a diferentes niveles de complejidad y completitud de los cuadros de significado que los niños construyeron. Con mayor detenimiento se examinan las respuestas de ocho estudiantes (M = 3, F = 5). Estas respuestas fueron escogidas debido a que sus características son representativas de la tipología obtenida, como se explica en la sección de resultados.

5.2. *Materiales e Intervención*

En la investigación macro mencionada, los estudiantes de grados kínder a 3° trabajaron con *Matemáticas a Color* la mayor parte del tiempo de sus clases regulares de matemáticas entre marzo y noviembre de 2011. Los estudiantes recibieron cada uno, de acuerdo a su respectivo grado, tres cuadernos de un programa de matemáticas básicas desarrollado por los autores, denominado

Matemáticas a Color. Además de los cuadernos de guías, *Matemáticas a Color* incluye un conjunto de materiales tangibles (bolitas y plantillas, cubos de madera, regletas Cuisenaire) con el cual cada niño/niña trabaja autónomamente, disponiéndolos de acuerdo con las pautas establecidas en esos cuadernos.

Las actividades de aprendizaje del programa fueron diseñadas a partir de concebir las operaciones aritméticas como representaciones simbólicas de acciones de transformación de cantidades (el detalle de este diseño se presenta en otros artículos, Andrade Londoño, Andrade Lotero, y Lotero Botero, en elaboración). La filosofía del programa Matemáticas a Color asume que la educación matemática en la escuela primaria debe, en primer término, fomentar el desarrollo del pensamiento matemático de los niños y sólo subsidiariamente su capacidad de cálculo. Esto implica que el niño pueda dar sentido a esa simbología matemática en un proceso de construcción de significado guiado por un diseño pedagógico intencional con ese fin. Es decir, la simbología matemática es un punto de llegada en un proceso de aprendizaje, y no un punto de partida.

Los estudiantes trabajan actividades de transformación de cantidades de agregar o quitar, o de componer y repartir grupos iguales. Siguiendo las pautas de las guías y con los objetos tangibles, los estudiantes disponen los objetos y luego representan dichas disposiciones en dibujos, palabras y, finalmente, símbolos matemáticos. Sin embargo, en el grado de primero de primaria sólo se trabajó la representación simbólica de la suma y la resta, pero no la de multiplicación y división.

Las actividades con manipulativos no son usados como una ilustración o ejemplo de algún principio u operación matemático. Por el contrario, estas actividades conducen a los niños a experimentar por sí mismos las transformaciones posibles bajo una lógica empírica, y luego, representarlas con dibujos, palabras y símbolos. Como cualquier otra acción, la transformación de cantidades implica una sucesión de momentos. De lo que se trata aquí es que los niños experimenten estas transformaciones, tomando conciencia de los momentos de la secuencia: cantidad inicial, cantidad que transforma, cantidad final. El niño organiza objetos tangibles en una secuencia espacial, en la cual cada posición corresponde a cada momento de la secuencia temporal de la transformación.

El ejemplo de la Figura 1 de una guía de trabajo para el grado primero, la cual le pide al estudiante en la parte de arriba que debe hallar la cantidad que resulta luego de quitar tres bolitas a la cantidad inicial de tres bolitas. En la parte de debajo de la guía se debe hallar la cantidad que resulta luego de agregar cuatro bolitas a la cantidad inicial de cuatro bolitas.

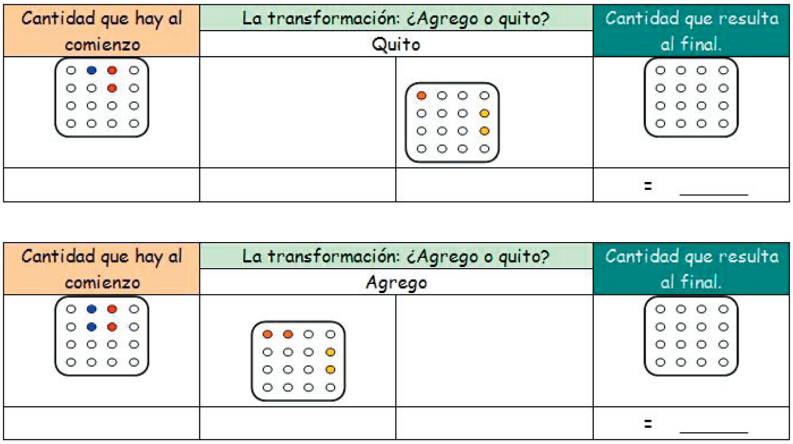
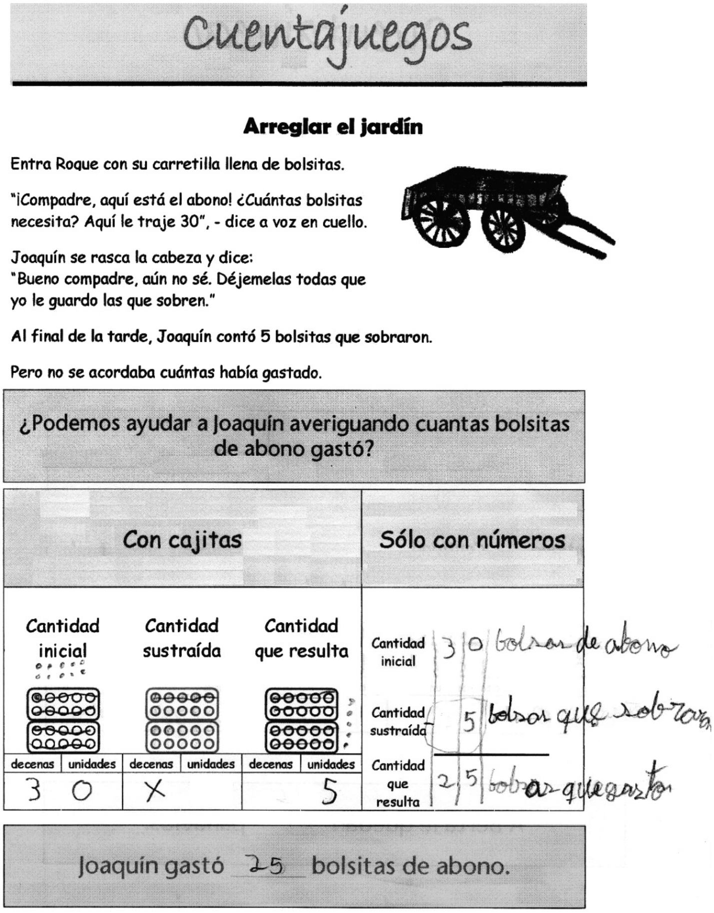


Figura 1. Las operaciones de suma y resta como actividades de agregar o quitar.

Adicionalmente, los libros de Matemáticas a Color contienen problemas de enunciado verbal, llamados *Cuentajuegos*, en los que los estudiantes trabajan la organización del significado de la narración, acomodándolo en la representación del significado de la transformación, a la manera de una sucesión lineal. En la Figura 2 se ejemplifica un problema para el grado primero que implica organizar una sucesión en la que se halla directamente el resultado de la transformación. Particular énfasis se pone en que el significado de la narración incluya el sentido de la sucesión temporal de las acciones sobre las cantidades. Además, se le pide al niño o niña que represente la solución al problema en varias modalidades, con los manipulativos, con los dibujos de los manipulativos, y con la notación aritmética y números. En este problema el estudiante debe hallar la cantidad de bolsas que se han gastado luego de conocer que había 30 y al final de la tarde quedaron 5.

Al final de la experiencia en el mes de noviembre se pidió a una muestra aleatoria de 72 de los estudiantes de primer grado participantes, el 30% del total, completar una prueba de veinte preguntas. La prueba se llevó a cabo en un salón diferente al salón de clases y los estudiantes contaron con una hora y media para responder. El cuestionario apuntaba a evaluar el estatus de cada estudiante con respecto a su logro de los estándares desarrollados para matemáticas de primer grado (MEN, 2003). Un aspecto importante de esta prueba es que incluyeron preguntas para evaluar la capacidad de solución de problemas a partir de un enunciado verbal. Se incluyeron dos tipos de problemas de enunciado, uno que denominamos simple, que podría ser resuelto mediante una sola operación matemática, y otro complejo, involucrando más de un paso para su solución. Además, se incluyó un cuestionario de comprensión de lectura del texto de estos problemas.



Cuentajuegos

Arreglar el jardín

Entra Roque con su carretilla llena de bolsitas.

"¡Compadre, aquí está el abono! ¿Cuántas bolsitas necesita? Aquí le traje 30", - dice a voz en cuello.

Joaquín se rasca la cabeza y dice:
"Bueno compadre, aún no sé. Déjemelas todas que yo le guardo las que sobren."

Al final de la tarde, Joaquín contó 5 bolsitas que sobraron.

Pero no se acordaba cuántas había gastado.

¿Podemos ayudar a Joaquín averiguando cuantas bolsitas de abono gastó?

Con cajitas						Sólo con números
Cantidad inicial		Cantidad sustraída		Cantidad que resulta		Cantidad inicial: 3 0 bolsas de abono
						Cantidad sustraída: 5 bolsas que sobraron
decenas	unidades	decenas	unidades	decenas	unidades	Cantidad que resulta: 2 5 bolsas que gastó
3	0	X			5	

Joaquín gastó 25 bolsitas de abono.

Figura 2. El problema de arreglar el jardín

Las veinte preguntas del cuestionario de primer grado se dividieron de la siguiente manera: 1-3) formar una cantidad X a partir de escoger los numerales apropiados que sumen tal cantidad — por ejemplo, formar el 12 escogiendo entre el 5, 7, 6, 8; 4-6) escribir en numerales la cantidad escrita en palabras — por ejemplo, siete decenas y cuatro unidades; 7-12) encontrar el resultado de operaciones de suma o resta modelando cantidades visibles o abstractas — por ejemplo, el dibujo muestra una bolsa y dos dulces por fuera, dentro de la bolsa hay cuatro dulces, ¿cuántos dulces hay en total?; 13-15) encontrar la diferencia entre dos cantidades — por ejemplo, María tiene cinco años y Juan tiene nueve, ¿cuál es la diferencia de edad entre los dos niños?; 16) comprensión de una gráfica de barras comparando cantidades; 17-19) preguntas de comprensión de lectura del problema complejo; 20) problema complejo (como se describe más adelante). Estos tópicos y la estructura conceptual en la que se basan están fundamentados en las trayectorias de aprendizaje para conceptos matemáticos elaborados por Cobb y McClain (2002), Sarama y Clements (2004) y Nunes y Bryant (2005).

Las muestras de trabajo presentadas a continuación corresponden al problema complejo de la prueba de grado primero. Este problema se ilustra a continuación.

5.2.1. *El Problema de la Repartición de Canicas*

El problema complejo de la prueba de grado primero contenía el siguiente enunciado:

> "Un grupo de amigos se ha reunido a jugar a las canicas. Son 3 niñas y 2 niños. Entre todos han comprado una bolsa de canicas. Las canicas son de dos colores: 20 canicas verdes y 5 canicas azules. Los niños quieren repartir las canicas por partes iguales. Además, quieren que a cada uno le corresponda la misma cantidad de cada color. ¿Cómo repartirán las canicas el grupo de amigos?"

La prueba idealmente se soluciona determinando la repartición en partes iguales de dos conjuntos de canicas en correspondencia con un conjunto de niños. Un ejemplo de solución es: repartir las canicas verdes en cinco partes iguales; repartir las canicas azules en cinco partes iguales; asignar una parte de canicas verdes y una parte de canicas azules a cada niño. O, de otra manera, repartir una a una las canicas verdes a cada niño hasta que se acaben; luego repartir las canicas azules una a una a cada niño hasta que se acaben.

5.2.2. *Análisis de Contenido*

El tipo de análisis que aquí se plantea asume que el contenido del texto emerge en el proceso mismo en el que el investigador analiza un texto relativo a un contexto particular (Bell, 2001; Krippendorff, 2004). La atención se centra en el proceso del análisis mismo y no ignora las contribuciones del analista acerca de qué cuenta como contenido. Entre otras, algunas características importantes de este tipo de análisis asumen que (a) los textos (escritos o multimodales) no tienen cualidades objetivas independientes de quien los lee; (b) los textos no tienen un único significado; (c) los textos tienen significado relativo a su contexto en particular; y (d) las inferencias que se realizan deben tener en cuenta el corpus de datos que conforma el contexto del texto (Krippendorff, 2012).

En el caso del análisis de representaciones visuales el análisis es similar a las representaciones verbales, pero estas dos difieren en algunas dimensiones. Por ejemplo, el discurso verbal se expresa linealmente mientras que el dibujo es una unidad no lineal (Yañez y Chávez, 2009). Este hecho crea diferentes posibilidades y limitaciones a la manera como el sujeto construye y comunica los significados (Penn, 2000). En todo caso, la calidad del análisis de contenido depende de que las hipótesis sean precisas y los conceptos estén claramente definidos y sin ambigüedades (Bell, 2001). Además, es necesario que las respuestas a las preguntas de investigación se fundamenten empíricamente tanto en la observación directa como en la argumentación plausible a partir de la observación del contenido (Bell, 2001; Krippendorff, 2012). En la presente investigación las representaciones visuales que construyeron los niños fueron analizadas con respecto a las siguientes preguntas:

- ¿qué procesos cognitivos son evidentes en el dibujo?,
- ¿de qué manera expresan y cómo se apoyan en la representación del problema?, y
- ¿qué consideran los niños, dado las características evidenciadas en las dos preguntas anteriores, que debe ser la respuesta correcta?

A continuación, presentamos los resultados cuantitativos de la prueba marco y luego analizamos varios ejemplos de cómo niños de primero de primaria, entre los seis y siete años, dieron individualmente respuesta al problema de las canicas. Se intentará ilustrar qué son los cuadros de significado y cómo ésta hipótesis explica cuáles son las soluciones exitosas que presentaron los niños a este problema.

Desafortunadamente, no poseemos registro en video o un diario de campo para señalar qué partes comenzó a dibujar primero el niño o la niña, o cuáles fueron sus razones para incluir o dejar de incluir ciertos elementos. Por ello, la reconstrucción de los cuadros de significado fue triangulada entre los integrantes del equipo de investigación. Cada hipótesis expresada fue argumentada y sustentada en la evidencia — es decir, en las partes del dibujo que justifican cada hipotesis — y luego debatida hasta que cualquier diferencia de interpretación fuese dirimida. En ocasiones se recurrió a los diarios de clase de los profesores, así como a las impresiones registradas por los investigadores a lo largo del acompañamiento del proyecto.

6. Resultados

Las respuestas a la prueba general (no solo a la pregunta del problema complejo) fueron evaluadas dándole un valor numérico de *1* a una respuesta correcta y *0* a una respuesta incorrecta o no respuesta. Estos valores numéricos se tabularon como se presenta en la Tabla 1 que resume los porcentajes de éxito en comprensión de lectura y resolución del problema complejo, en este caso el problema de la repartición de las canicas, así como el promedio de éxito en las 20 preguntas de la prueba.

TABLA I
Porcentaje de éxito en la prueba de salida del proyecto macro

Comprensión de Lectura Problema Complejo	*Problema Complejo*	*Éxito Total en la Prueba (20 Preguntas)*
76,8%	47,3%	64,2%

Como se puede apreciar, el 47,3% de los niños solucionaron correctamente el problema de repartición de las canicas no obstante no haber recibido enseñanza formal en multiplicación o división. Además, llama la atención que a pesar de que más de las tres cuartas partes de los estudiantes comprendieron adecuadamente el enunciado del problema (76,8%), sólo menos de la mitad propuso una respuesta acertada. Es claro que la comprensión de lectura, aunque condición necesaria, no es suficiente para resolver un problema matemático adecuadamente.

Desde nuestra perspectiva, en lo que media entre la comprensión de lectura y la solución adecuada del problema aparece lo que hemos denominado *cuadros de significado*, como se discute a continuación. Es de notar que todos los nombres de los participantes que aparecen en el texto son seudónimos.

6.1. *Un Cuadro de Significado Completo: El Caso de Samuel*

En la Figura 3 puede apreciarse la solución planteada por Samuel, un estudiante de la profesora Milena. Una primera mirada a esta respuesta evidencia una gran cantidad de detalles y diferentes modos de expresión. Esta solución es lo que nosotros llamaríamos un cuadro de significado completo. En el recuadro de solución puede apreciarse el dibujo de dos niños y tres niñas, veinte canicas de color verde y cinco azules, cinco grupos de canicas correspondiendo a cada niño, y una descripción escrita de esta correspondencia. A continuación, comentamos parte por parte este cuadro de significado.

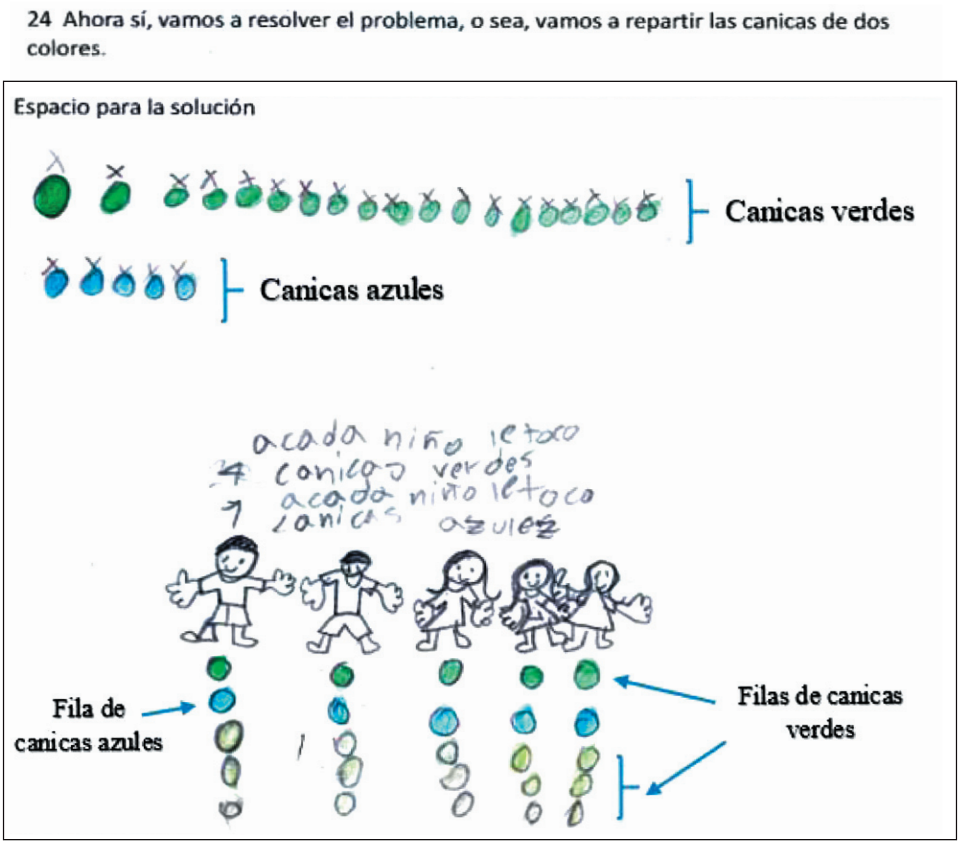


Figura 3. La solución planteada por Samuel

En el espacio de solución, en el primer cuarto de arriba para abajo, Samuel dibujó una fila horizontal de veinte canicas verdes y otra de cinco canicas azules. Todo apunta a que éste fue el comienzo de la solución del problema. Aquí el niño parece situarse tomando representacionalmente el total de las canicas a repartir. Las equis que aparecen encima de cada canica fueron colocadas posteriormente, como un apoyo para la solución. Este elemento será comentado más adelante.

En el espacio de solución, en el tercer cuarto de arriba para abajo, Samuel dibujó dos niños y tres niñas. Es posible que este haya sido la segunda parte dibujada. Hasta aquí, se han dibujado las condiciones cuantitativas iniciales del enunciado.

En un tercer momento, suponemos con base en la evidencia, Samuel comenzó a repartir los conjuntos de canicas. En el espacio de solución, en el cuarto inferior de la hoja, hay cinco grupos de canicas en filas verticales, y cada grupo contiene cuatro canicas verdes y una azul. Podemos observar que esta organización responde a una operación de correspondencia uno a muchos. Ahora bien, esta operación mental estuvo apoyada en la manera como se utilizó el espacio de solución. Arriba comentamos como las filas horizontales de canicas tienen unas equis anotadas encima de cada canica. He aquí la ilustración de una secuencia de transformación en donde la solución está distribuida entre la capacidad del niño de realizar una operación mental y la organización espacial de la representación. Suponemos que Samuel utilizó el segundo procedimiento ilustrado por nosotros en el análisis de la prueba. Esto es, repartió una a una las canicas verdes a cada niño hasta que se acabaron; luego repartió las canicas azules una a una a cada niño hasta que se acabaron. Para Samuel, la repartición implicó que a medida que tachaba secuencialmente de a una canica en las filas horizontales del primer cuarto del espacio del problema, iba haciendo un círculo debajo de cada niño asignándole una canica.

Finalmente, en el centro del espacio de solución se encuentra una descripción verbal de las cantidades que compone cada grupo de partes iguales que le correspondió a cada niño. Es de destacar que Samuel usó la expresión *a cada niño*. Esta expresión lleva implicada la operación de correspondencia y, según nuestra experiencia enseñando matemáticas a grupos de diversas edades, no es una expresión que se entienda fácilmente. Samuel escribió: “A cada niño le tocó 4 canicas verdes. A cada niño le tocó 1 canica azul.”

6.2. *Cuadros de Significado Coherentes pero Parciales: Los Casos de Camila y Estefanía*

A continuación, presentamos otros casos que evidencian cómo los cuadros de significado pueden estar completos para el niño, pero que para el adulto que interpreta pueden ser soluciones parciales. En estos casos, el adulto con su interpretación incluye y asigna las partes que le hacen falta al cuadro de significado. Estos cuadros, no obstante, parcialmente completados para el adulto, están lo suficientemente completos y explícitos como para que el significado sea externamente comprensible.

El cuadro de significado construido por Camila es suficientemente coherente para ser considerado completo, a pesar de que la solución al problema no se haya hecho tan explícita como en el caso de Samuel (ver Figura 4). Es posible ver que se incluyeron las variables cuantitativas del enunciado del problema en este dibujo. Aquí se encuentran tres niñas y dos niños, veinte canicas verdes y cinco azules. Además, hay cinco bolsas, una para cada niño. Dentro de cada bolsa hay cuatro canicas verdes y una azul.

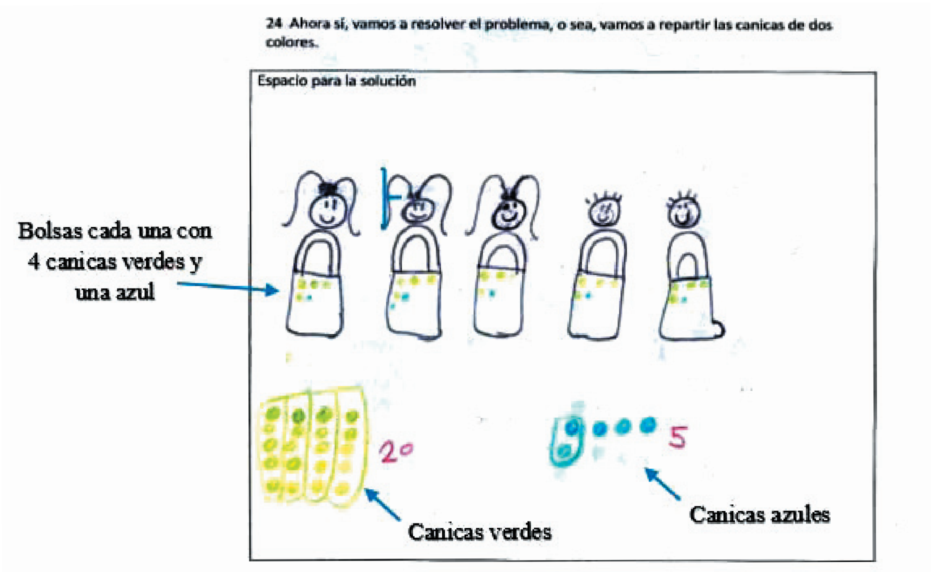


Figura 4. El dibujo realizado por Camila

Esta es nuestra interpretación del cuadro de significado de Camila: Ella comenzó dibujando las niñas y los niños. Estos dibujos, a diferencia de Samuel, no presentan al niño completo, sino sólo su cabeza. Se utilizó una convención cultural, como es la forma del cabello y el peinado, para indicar el género del sujeto. En este sentido, la representación de los niños es más abstracta que la que utilizó Samuel. Luego, Camila dibujó una bolsa por cada niño pensando que la respuesta al problema era encontrar la cantidad de canicas que debían ir en correspondencia con cada una de estas bolsas. Después, dibujó el total de canicas verdes y azules. Pero no es un conjunto desorganizado. Por el contrario, las canicas se encuentran organizadas en filas y columnas, como en una especie de tabla. Además, las cantidades de canicas están simbolizadas cada una con un numeral, 20 y 5. Lo que es más interesante, sin embargo, es observar las agrupaciones que realizó dentro de las tablas de canicas. Ella dividió las 20 canicas verdes en grupos de cinco. Debido a que son cinco niños y sólo cuatro canicas verdes por cada niño, deducimos que primero se intentó utilizar la primera estrategia de solución, la cual implica una forma de agrupamiento, pues inicialmente quería repartir grupos. No obstante, esta estrategia no le funcionó porque las tablas no se organizaron análogamente con el número de grupos. Camila se encontró en un callejón sin salida en su primer intento de acomodación de tantos grupos con relación a tantas unidades porque organizó filas de a cuatro canicas siendo cinco niños, es decir, la fila de niños no es del mismo tamaño que las filas de canicas. Camila termina remitiéndose a la segunda estrategia también utilizada por Samuel, repartir de a una canica por cada niño hasta que se acaben. El agrupamiento de dos canicas azules puede haber obedecido al mismo intento fallido. Finalmente, es evidente que su respuesta se encuentra en las bolsas que dibujó debajo de cada niño. Hay cuatro canicas verdes y una azul en cada bolsa. Sin embargo, no incluyó una respuesta verbal o con números para indicar este resultado, pero no obstante es evidente que percibió, así como nosotros también, que había llegado a la respuesta correcta.

En resumen, consideramos que Camila construyó un cuadro de significado completo. No obstante, este cuadro no está tan completo como el que realizó Samuel. Este segundo tipo de cuadro incluye una sofisticación representacional importante, y se hallan diferentes sistemas representacionales. Así como Samuel, ella también utilizó la representación para apoyarse en la resolución del problema. Utilizó la organización espacial de las canicas en una tabla para ayudarse a encontrar la cantidad de canicas que iban en la bolsa de cada niño. Es decir, primero se representaron las condiciones iniciales y luego se apoyó en esta representación para realizar la acción de repartición. Además, al haber dibujado una bolsa por cada niño, organizó la representación en el sentido de identificar en dónde debía encontrarse la respuesta al problema, es decir, la cantidad de canicas de cada color en cada bolsa. No obstante, el cuadro no incluyó una respuesta escrita o en símbolos numéricos.

De otra parte, el cuadro de significado de Estefanía está completo, pero parece menos complejo y organizado que el de Camila (ver Figura 5), porque no organizó espacialmente las canicas, ni tampoco dibujó unas bolsas para cada niño. Su respuesta está implícita en la parte superior de cada niño, en donde dibujó correctamente la cantidad de canicas verdes y azules que le corresponden a cada uno. No obstante, existe menos información para interpretar el modo como resolvió el problema. Una explicación es que las pequeñas líneas dibujadas encima de las canicas verdes son un indicio de que listó en correspondencia cada canica del grupo de abajo con las canicas que iba dibujando encima de cada niño. La manera poco ordenada de estos grupos anuncia que Estefanía debió haber requerido mayor concentración de su parte para no cometer un error a lo largo del procedimiento. No obstante, es posible que la organización espacial de los dibujos de los niños le haya facilitado ir colocando las canicas mientras repartía una a una. También es posible que haya hecho un conteo para verificar que ya estaba el total de canicas que se repartía, demostrando un dominio del principio de conservación de la cantidad. Finalmente, tampoco incluye números para expresar su respuesta.

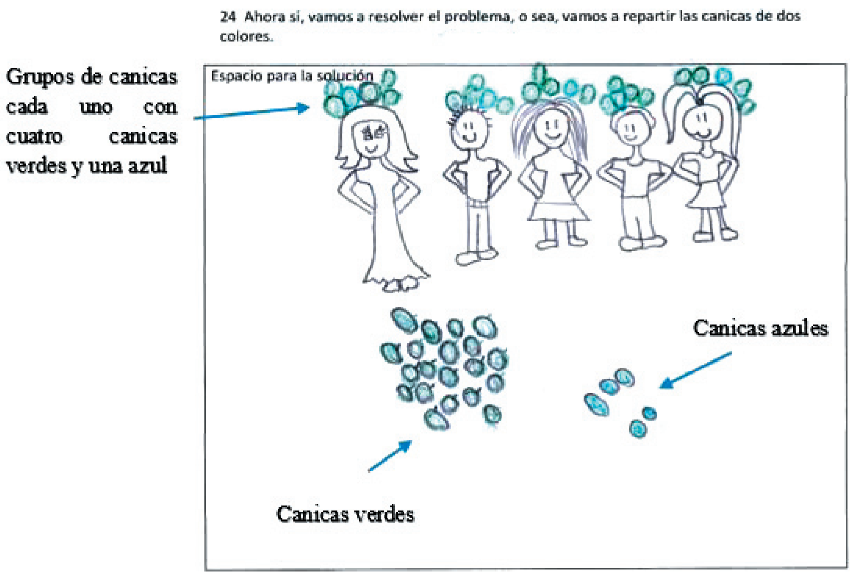


Figura 5. La solución planteada por Estefanía

En estos tres cuadros completos de significado, el de Samuel, Camila y Estefanía, se aprecian las tres cantidades implicadas en la acción de repartir: la cantidad total a repartir, el número de grupos, y la cantidad de cada grupo. Reconocer estas tres cantidades y otorgarle el significado que le corresponde en la acción es de vital importancia para el aprendizaje formal de la multiplicación (Lotero Botero et al., 2011).

6.3. *Cuadros de Significado Incompletos: Los Casos de Karen y María*

A continuación, presentamos dos cuadros de significado incompleto, los cuales ilustran que no todos los niños lograron concebir el problema como una totalidad. Además, estos dibujos también reflejan que la solución de un problema incluye una gran cantidad de partes organizadas en un sistema de representación. Si alguna parte clave falla, o si la organización de estas partes no es coherente, el significado del cuadro queda incompleto.

El dibujo realizado por Karen ilustra un cuadro de significado incompleto (ver Figura 6). A diferencia de los cuadros presentados anteriormente, aquí el dibujo se muestra mucho más simple y plano. En la parte superior, dibujó 25 canicas del mismo color. En la parte inferior, dibujó cinco bolsas con cinco canicas cada una. En realidad, se han dibujado correctamente el total de canicas y de niños, pero estos no se encuentran diferenciados; las canicas por colores y las bolsas por niñas y niños. El total de 25 canicas, si uno ignorase el color de las canicas, se encuentra repartido correctamente de a cinco canicas por cada una de las cinco bolsas. No obstante, es evidente que esta no es la respuesta correcta al enunciado del problema, pues el color de las canicas importa en este contexto. Sin embargo, Karen ha demostrado que tiene el dominio numérico de la repartición, y de la asignación en correspondencia, aunque no utiliza numerales. Es evidente que siguió la misma lógica de repartición que los ejemplos anteriores, es decir, primero dibujó las canicas, luego las bolsas, y luego se apoyó en el dibujo para colocar la cantidad de canicas dentro de cada bolsa.

Nosotros, adultos investigadores, completamos el significado del cuadro interpretando la ausencia de diferenciación entre los dos colores de canicas. Sin esta variable, la solución planteada no responde a las expectativas presentadas en el enunciado original del problema. No conocemos la razón por la cual Karen no realizó esta distinción. Podemos especular que no era porque no contase con lápices de diferente color, dado que las canicas están en amarillo, las bolsas de color azul, y las canicas dentro de las bolsas en negro. Tampoco sabemos si para ella misma este cuadro de significado estaba completo. Lo cierto es que éste evidencia que la construcción requiere incluir coherentemente una gran cantidad de elementos, algunos de ellos que aquí hacen falta, pues no evidenció tener domino sobre lo que más adelante se formaliza como organización de conjuntos disyuntos.

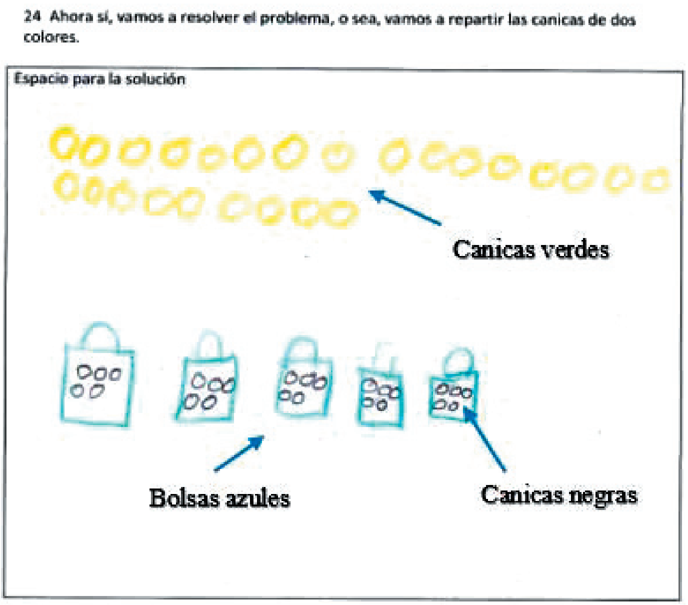


Figura 6. La solución planteada por Karen

Asimismo, el dibujo realizado por María es otra muestra de un cuadro de significado incompleto (ver Figura 7). No es sólo la ausencia de color lo que demuestra que el resultado está incompleto. Según nuestra interpretación, únicamente se dibujan las variables cuantitativas iniciales del enunciado del problema. Al lado izquierdo dibujó veinte canicas y al lado derecho cinco. En el centro, hacia la izquierda, dibujó tres niñas y hacia la derecha dos niños. No obstante, no fue más allá en su búsqueda de una solución. Es evidente que no intentó efectuar la repartición de canicas de cada color para cada niño.

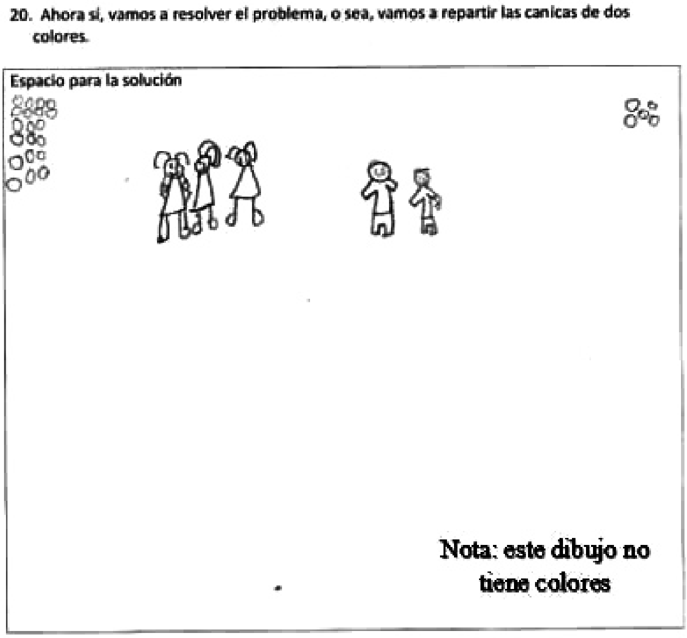


Figura 7. El dibujo realizado por María

En estos dos ejemplos se ilustra que no todos los cuadros de significado pueden ser interpretados completamente. Además, cuando los cuadros de significado están incompletos puede deberse a distintas razones. En el caso de Karen, la falencia parece centrarse más que en la falta de un esquema anticipatorio, en la no inclusión del color como una variable importante del problema. En el caso de María, tal vez es la falta del esquema anticipatorio de la correspondencia uno a muchos, pues su comprensión de la situación y la capacidad para representar las condiciones iniciales del problema sí parecen estar presentes.

6.4. *Cuadros de Significado Incoherentes: Los casos de Manuela y José*

A continuación, presentamos dos dibujos que ilustran cuadros de significado incoherentes. Los dibujos de Manuela (ver Figura 8) y José (ver Figura 9) muestran no sólo ausencia de completitud sino también dificultades para pensar con sentido de conservación lógico-matemática. Manuela dibujó en total diez niños. En su dibujo es posible distinguir que hay tres niñas y dos niños, pero hacia la esquina superior derecha hay otros cinco niños. La ausencia de más elementos deja ver que no intentó nada más, es decir, no llegó a ninguna solución, pues ni siquiera las cantidades iniciales se encuentran representadas. ¿Acaso se trató de una situación sin significado para ella?

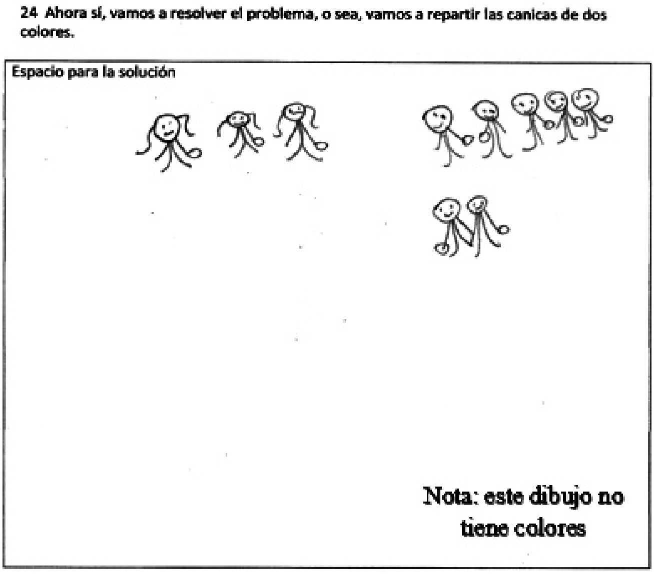


Figura 8. El dibujo realizado por Manuela

El caso de José es muy similar, pues dibujó dos conjuntos de canicas, uno a la izquierda y otro a la derecha. Una inspección minuciosa revela que mientras el conjunto de la derecha puede estar representando el conjunto de canicas azules que enuncia el problema, por su parte, el conjunto de la izquierda, el más grande, no puede estar representando correctamente la cantidad de canicas verdes, debido a que hay dibujadas veinticinco canicas en lugar de veinte. No nos es posible afirmar qué significan estos grupos de canicas. Por ejemplo, ¿representa el grupo de la izquierda el total (25 canicas) y el grupo de la derecha la cantidad de niños y niñas (5), o la cantidad para cada niño (5 canicas)? Podemos inferir que en la representación no se evidencia un intento explícito de establecer la relación de correspondencia.

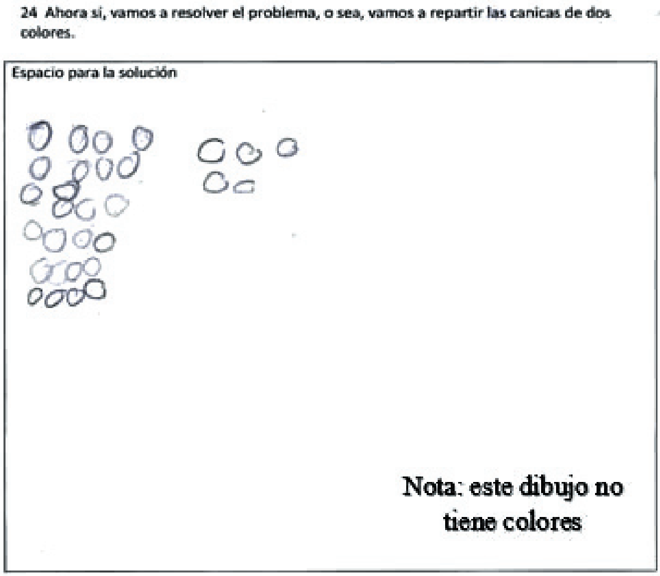


Figura 9. El dibujo realizado por José

En estos dos casos, nos atrevemos a afirmar que estos niños demuestran no haber desarrollado aún un sentido de la repartición en correspondencia. Además, se evidencia una dificultad para producir cuadros de complejidad simbólica y representacional, debido a que tampoco existen números o frases enmarcando los elementos del dibujo.

7. Discusión

Es evidente que los niños pueden representar la solución a un problema matemático de enunciado verbal de diferentes maneras. En otras palabras, no existe una única manera de representar el problema y dar solución al mismo. Sin embargo, luego de revisar la evidencia presentada, no consideramos que la explicación del por qué ciertos niños dan respuesta al problema y otros no se deba a que los primeros se encuentran en una etapa más avanzada de pensamiento o desarrollo cognitivo que estos últimos. Tampoco se debe únicamente a que los niños que resolvieron el problema saben más operaciones o conceptos matemáticos que los otros. En cambio, la evidencia nos muestra que en la solución de un problema intervienen varias competencias y recursos cognitivos de granularidad más pequeña que una etapa de pensamiento, y que incluso van más allá de únicamente el razonamiento lógico-matemático. Nuestra alternativa teórica hace referencia a que, entre la comprensión del problema verbal y la solución correcta, un sujeto debe construir un cuadro de significado completo.

¿Qué es, entonces, el cuadro de significado? Un cuadro de significado implica que cuando un sujeto resuelve un problema, éste pone en juego una gran cantidad de recursos cognitivos y epistémicos para generar un alto orden local en su sistema cognoscitivo. Estos recursos cognitivos están compuestos por pequeñas unidades cognitivas fenomenológicas, así como de otras habilidades y conocimientos de sistemas representacionales particulares. El significado es construido subjetivamente, pero es visible y externalizado como una comunicación de sentido. Por ello, el significado de cada cuadro es completado también por la interpretación de la persona que lo recibe o evalúa.

En la solución de Samuel se encuentra un cuadro de significado completo. En su sistema epistémico general responsable de pensar las operaciones de correspondencias existe evidentemente un alto orden local. Esto significa que existe una alta coordinación, coherencia y congruencia entre todas las partes que componen el cuadro de significado. En efecto, su respuesta contiene muchas partículas de pensamiento y representación organizadas coherentemente. No es sólo la descripción verbal de la repartición la que da respuesta correcta al problema, sino también el dibujo de las filas verticales con las cantidades correctas de canicas por colores, el dibujo de la cantidad de niños y niñas, de las filas horizontales que le sirvieron como apoyo para incluir las variables cuantitativas iniciales del enunciado del problema y para plantear la operación mental de correspondencia uno a uno. Es evidente que Samuel ya posee un claro sentido de conservación de la cantidad. También el cuadro está completo porque evidencia la capacidad de realizar un modelo del problema como una coordinación de un sistema de representaciones gráficas, icónicas, verbales y símbolos numéricos. Es decir, la solución contiene dibujos con colores y formas que simbolizan objetos (y personas) de la realidad, palabras que conforman enunciados y proposiciones que incluyen números para cuantificar estos objetos. Pero no es un simple sistema de representación, sino que esta representación hizo parte de la solución, pues apoyó el pensamiento descargando recursos cognitivos en el tercer paso de la solución. Finalmente, a diferencia de otros estudiantes que no han aprendido matemáticas con el método de Matemáticas a Color, Samuel, así como los otros niños de los colegios participantes en el programa, decidió resolver el problema mediante un dibujo.

En efecto, los niños parecen tener un sentido de qué es lo que se espera de ellos y qué considera el docente debería ser la respuesta correcta a un problema dado. Diferentes enmarcaciones de las condiciones de presentación de un problema llevan a que el niño conciba diferentes respuestas y active diferentes recursos cognitivos para un mismo enunciado (Scherr y Hammer, 2009). Estas diferencias son, por ejemplo, el modo de representación, la suficiencia de la respuesta, así como la expectativa de necesidad de auto-corrección. En la escuela, a los niños tradicionalmente se les enseñado a creer que una respuesta matemática es una respuesta que utiliza un algoritmo y termina en un número (Verschaffel et al., 1994).

El problema es que muchas veces se ha diagnosticado que los niños de estas edades usan operaciones aritméticas sin sentido, debido a que esperan que, por ejemplo, todo problema matemático que incluye dos cantidades es un problema de multiplicación. Adicionalmente, una gran cantidad de padres de familia espera que si su hijo es bueno en matemáticas es porque él o ella multiplican o dividen rápidamente dos cantidades. Estas expectativas socioculturales enmarcan la manera de buscar y presentar la solución de un problema. Sin embargo, los problemas complejos en raras ocasiones incluyen soluciones cuyo resultado se obtenga a partir de la operación de dos cantidades que se enuncian en la descripción del problema.

8. Conclusiones

A lo largo de este artículo hemos ilustrado un fenómeno que hemos llamado *cuadros de significado*. Este fenómeno intenta explicar por qué ciertos niños tienen éxito para hallar la solución a un problema y otros no. Para ilustrar nuestra hipótesis hemos presentado y analizado detenidamente el contenido de ocho dibujos de niños y niñas de 6 y 7 años de varios colegios públicos como solución a un problema matemático con formato de enunciado textual en el contexto de repartición discreta. Este estudio de caso ilustra empíricamente la hipótesis de que los niños generan cuadros de significado para solucionar problemas matemáticos. La evidencia sugiere que las soluciones planteadas parecen poner en juego muchas partículas de recursos cognitivos. Estas partículas pertenecen a al menos tres tipos: a) abstracciones fenomenológicas simples que derivan en esquemas anticipatorios, c) conocimientos de sistemas representacionales, y c) expectativas epistémicas acerca de la solución del problema. Además, entendemos que este significado se expresa como un recurso semiótico que inicia en quien genera el cuadro y es completado por quien lo interpreta.

Debido a que no todos quienes comprenden adecuadamente el enunciado del problema logran proponer una solución adecuada indica, en nuestra opinión, que el problema de la construcción de significado es mucho más profundo que la comprensión de la semántica del texto del problema. Según hemos tratado de exponer, el niño es un sujeto activo que construye un cuadro de significado a la manera de una interfaz entre la comprensión semántica del problema y la comprensión del significado de las operaciones matemáticas como acciones de transformación de cantidades. Esta capacidad para construir cuadros de significado, creemos nosotros, puede haber sido fomentada por las actividades de aprendizaje propuestas en *Matemáticas a Color*. El niño logra interpretar la clase o clases de acciones de transformación implicadas, la incógnita del problema y su relación con las demás cantidades, y proponer una representación que incluye dibujos, cantidades y símbolos. Esto sería lo que media entre la comprensión de la semántica del texto y la posibilidad de proponer y expresar una solución matemática adecuada.

Sin embargo, las limitaciones de la presente investigación son varias. Por un lado, nuestro análisis de contenido proviene de una reconstrucción *post facto*. En futuras investigaciones hemos decidido incluir la metodología de *entrevistas cognitivas* (Clement, 2000; diSessa, 2007) a una pequeña muestra de estudiantes. Por medio de estas entrevistas se pretende conocer, a partir de las verbalizaciones que exponen los mismos estudiantes, las razones por las cuales consideran importante incluir ciertos elementos y no otros en sus dibujos. Por otro lado, nuestro análisis no incluye información acerca del desarrollo micro-genético (Bermejo, 2005; Garcia-Mila, Gilabert, y Rojo, 2011) de estos cuadros de significado. En futuros artículos examinaremos la evidencia longitudinal acerca de cómo un estudiante ensambla poco a poco las piezas necesarias para construir cuadros de significado completos.

Con todo, para nosotros es evidente que la hipótesis de los cuadros de significado es una herramienta teórica y metodológica para la conceptualización de la solución de problemas aritméticos y la organización en correspondencia que subyace al pensamiento matemático. Por ello, es necesario seguir expandiendo nuestro análisis y la aplicación de este marco de referencia a otros campos del pensamiento matemático, a otras áreas disciplinares y, en general, a la solución de problemas.

Agradecimientos

Los datos que se recogieron en este estudio provienen del proyecto No. 4600033072 de 2011, financiado por la Secretaría de Educación de Medellín, Colombia.

Referencias bibliográficas

Adams, R. (2005). *PISA 2003 Technical Report: Programme for International Student Assessment*: OECD Publishing.

Andrade Londoño, E., Andrade Lotero, L. A., y Lotero Botero, L. A. (en elaboración). Beyond the Times-Tables: Making Sense of Multiplication.

Bell, P. (2001). Content analysis of visual images. En T. V. Leeuwen y C. Jewitt (Eds.), *Handbook of visual analysis* (pp. 10-34). Oaks, California: SAGE Publications.

Bello, S. (2004). Ideas previas y cambio conceptual. *Educación química, 15*(3), 210-217. Obtenido de http://depa.fquim.unam.mx/sie/Documentos/153-bel.pdf.

Bermejo, V. (2005). Microgénesis y cambio cognitivo: adquisición del cardinal numérico. *Psicothema, 17*(4), 559-562. Obtenido de http://www.psicothema.com/psicothema.asp?id=3145.

Bodner, G. M., y Domin, D. S. (2000). Mental models: The role of representations in problem solving in chemistry. *University Chemistry Education, 4*(1), 24-30. Obtenido de http://1393-chemed.chem.purdue.edu/chemed/bodnergroup/PDF_2008/70%20Mental%20Models%20UCEd.pdf.

Brown, J. S., Collins, A., y Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher, 18*(1), 32. doi:10.3102/0013189x018001032

Camacho, M., y Good, R. (1989). Problem solving and chemical equilibrium: Successful versus unsuccessful performance. *Journal of Research in Science Teaching, 26*(3), 251-272. doi:10.1002/tea.3660260306.

Carolan, J., Prain, V., y Waldrip, B. (2008). Using representations for teaching and learning in science. *The Journal of the Australian Science Teachers Association, 54*(1), 18-23.

Carraher, T. N., Carraher, D. W., y Schliemann, A. D. (1985). Mathematics in the streets and in schools. *British journal of developmental psychology*. doi:10.1111/j.2044-835x.1985.tb00951.x.

Castillo Ballén, M., Triana, N., Duarte-Agudelo, P., Pérez-Abril, M., y Lemus-Espinosa, E. (2007). Sobre las pruebas saber y de Estado: una mirada a su fundamentación y orientación de los instrumentos en lenguaje. *Bogotá: Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior, ICFES*.

Chi, M. T., Feltovich, P. J., y Glaser, R. (1981). Categorization and representation of physics problems by experts and novices. *Cognitive Science, 5*(2), 121-152. doi:10.1207/s15516709cog0502_2.

Clement, J. (2000). Analysis of clinical interviews: Foundations and model viability. En R. Lesh y A. Kelly (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 547-589). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Cobb, P., y McClain, K. (2002). Supporting students' learning of significant mathematical ideas. En G. Wells y G. Claxton (Eds.), *Learning for life in the 21st century: Sociocultural perspectives on the future of education* (pp. 154-166). New York: Cambridge University Press.

Conlin, L. D., Gupta, A., y Hammer, D. (2010). *Framing and Resource Activation: Bridging the Cognitive-Situative Divide Using a Dynamic Unit of Cognitive Analysis*. Paper presentado en CogSci, Portland, USA. http://dhammer.phy.tufts.edu/home/publications_files/conlin%20gupta%20hammer%20cog%20sci%202010.pdf

diSessa, A. (1993). Toward an epistemology of physics. *Cognition and Instruction, 10*(2-3), 105-225. doi:10.1080/07370008.1985.9649008.

diSessa, A. (2002). Why "conceptual ecology" is a good idea. *Reconsidering conceptual change: Issues in theory and practice*, 28-60. doi:10.1007/0-306-47637-1_2.

diSessa, A. (2007). An interactional analysis of clinical interviewing. *Cognition and Instruction, 25*(4), 523-565. doi:10.1080/07370000701632413.

diSessa, A., y Sherin, B. L. (2000). Meta-representation: An introduction. *The Journal of Mathematical Behavior, 19*(4), 385-398. doi:10.1016/s0732-3123(01)00051-7.

Domin, D., y Bodner, G. (2012). Using students' representations constructed during problem solving to infer conceptual understanding. *Journal of Chemical Education, 89*(7), 837-843. doi:10.1021/ed1006037.

Flores, F. (2004). El cambio conceptual: interpretaciones, transformaciones y perspectivas. *Educación química, 15*(3), 256-269. Obtenido de https://eva.fing.edu.uy/pluginfile.php/68483/mod_resource/content/4/Flores_cambioconceptual_EdQuimica15%283%292004.pdf.

Garcia-Mila, M., Gilabert, S., y Rojo, N. (2011). Strategy change in knowledge acquisition: The microgenetic methodology. *Infancia y Aprendizaje, 34*(2), 169-180. doi:10.1174/021037011795377566 Obtenido de http://dx.doi.org/10.1174/021037011795377566.

Gobbo, C., y Chi, M. (1986). How knowledge is structured and used by expert and novice children. *Cognitive development, 1*(3), 221-237. doi:10.1016/s0885-2014(86)80002-8.

Goodwin, C. (2003). The semiotic body in its environment. *Discourses of the body*, 19-42. Obtenido de https://www.researchgate.net/publication/228901991_The_semiotic_body_in_its_environment.

Greeno, J. G., y Hall, R. P. (1997). Practicing representation: Learning with and about representational forms. *Phi Delta Kappan, 78*, 361-367. Obtenido de https://www.researchgate.net/publication/238695196_Practicing_Representation_Learning_with_and_about_Representational_Forms.

Habermas, J. (1984). *The theory of communicative action, Vol. I*. Bostonm, Massachusetts: Beacon Press.

Hackenberg, A. J. (2010). Students' reasoning with reversible multiplicative relationships. *Cognition and Instruction, 28*(4), 383-432. doi:10.1080/07370008.2010.511565.

Hmelo-Silver, C. E., y Pfeffer, M. G. (2004). Comparing expert and novice understanding of a complex system from the perspective of structures, behaviors, and functions. *Cognitive Science, 28*(1), 127-138. doi:10.1016/s0364-0213(03)00065-x.

Hull, G. A., y Nelson, M. E. (2005). Locating the semiotic power of multimodality. *Written Communication, 22*(2), 224-261. doi:10.1177/0741088304274170.

Kaltenbacher, M. (2007). Perspectivas en el análisis de la multimodalidad: desde los inicios al estado del arte. *Revista Latinoamericana de Estudios del Discurso, 7*(1), 31-57. Obtenido de http://www.comunidadaled.org/descarga/7-1.pdf#page=33.

Koedinger, K. R., y Nathan, M. J. (2004). The real story behind story problems: Effects of representations on quantitative reasoning. *The Journal of the Learning Sciences, 13*(2), 129-164. doi:10.1207/s15327809jls1302_1.

Krippendorff, K. (2004). *Content analysis: An introduction to its methodology* (2nd ed.). Beverly Hills: Sage Publications.

Kulm, G. (1990). New directions for mathematics assessment. En G. Kulm (Ed.), *Assessing higher order thinking in mathematics* (pp. 71-80). USA: AAAS.

Lave, J., y Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. New York, NY: Cambridge University Press.

Lesh, R., y Carmona, G. (2003). Piagetian Conceptual Systems and Models for Mathematizing Everyday Experiences. En R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Lesh, R., y Doerr, H. (2000). Symbolizing, communicating, and mathematizing: Key components of models and modeling. En P. Cobb, E. Yackel, y K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms* (pp. 361-384). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Lesh, R., y Lehrer, R. (2003). Models and modeling perspectives on the development of students and teachers. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(2-3), 109-129. doi:10.1080/10986065.2003.9679996.

Lotero Botero, L. A., Andrade Londoño, E. A., y Andrade Lotero, L. A. (2011). La crisis de la multiplicación: una propuesta para la estructuración conceptual. *Voces y Silencios: Revista Latinoamericana de Educación, 2*(Número Especial), 27. Obtenido de dialnet.unirioja.es.proxyiub.uits.iu.edu/descarga/articulo/4058881.pdf.

Lotero Botero, L. A., Andrade Londoño, E. A., y Andrade Lotero, L. A. (2012). *Tangibles, Construction of Meaning and Math Problem Solving*. Paper presentado en The Future of Education 2nd Edition, Florence, Italy. http://www.pixel-online.net/edu_future2012/common/download/Paper_pdf/548-ITL75-FP-Botero-FOE2012.pdf

MEN. (2003). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. http://www.eduteka.org/pdfdir/MENEstandaresMatematicas2003.pdf.

Mulligan, J. T. (1992). Children's solutions to multiplication and division word problems: a longitudinal study. *Mathematics Education Research Journal, 4*(1), 24-41. doi:10.1007/bf03217230.

Mulligan, J. T., y Mitchelmore, M. C. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 309-330. doi:10.2307/749783.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Gonzalez, E. J., y Chrostowski, S. J. (2004). *TIMSS 2003 International Mathematics Report: Findings from IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades*: ERIC.

Nehm, R. H., y Ridgway, J. (2011). What do experts and novices "see" in evolutionary problems? *Evolution: Education and Outreach, 4*(4), 666-679. doi:10.1007/s12052-011-0369-7.

Nunes, T., y Bryant, P. (2005). *Las Matemáticas y su Aplicación: La Perspectiva del Niño*. Buenos Aires: Siglo XXI Editores.

Penn, G. (2000). Semiotic analysis of still images. En M. W. Bauer y G. Gaskell (Eds.), *Qualitative research with text, image and sound: A practical handbook* (pp. 227-245). Thousand Oaks, California: SAGE Publications Ltd.

Piaget, J., y García, R. (1997). *Hacia una lógica de significaciones*. Barcelona: Gedisa.

Piaget, J., y Inhelder, B. (2007). *Psicología del niño*. Madrid: Ediciones Morata.

Resnick, L. B., Bill, V., y Lesgold, S. (1992). Developing thinking abilities in arithmetic class. En A. Demetriou y A. Efklides (Eds.), *Neo-Piagetian theories of cognitive development: Implications and applications for education* (pp. 210-230). New York: Routledge.

Romberg, T. A., Zarinnia, E. A., y Collis, K. F. (1990). A new world view of assessment in mathematics. *Assessing higher order thinking in mathematics, 89*, 21. doi:10.5860/choice.28-2839.

Roth, W. M., y Bowen, G. M. (1994). Mathematization of experience in a grade 8 open-inquiry environment: An introduction to the representational practices of science. *Journal of Research in Science Teaching, 31*(3), 293-318. doi:10.1002/tea.3660310308.

Sarama, J., y Clements, D. H. (2004). Building Blocks for early childhood mathematics. *Early Childhood Research Quarterly, 19*(1), 181-189. doi:10.1016/j.ecresq.2004.01.014.

Scherr, R. E., y Hammer, D. (2009). Student behavior and epistemological framing: Examples from collaborative active-learning activities in physics. *Cognition and Instruction, 27*(2), 147-174. doi:10.1080/07370000902797379.

Silver, W. S., Mitchell, T. R., y Gist, M. E. (1995). Responses to successful and unsuccessful performance: The moderating effect of self-efficacy on the relationship between performance and attributions. *Organizational Behavior and Human Decision Processes, 62*(3), 286-299. doi:10.1006/obhd.1995.1051.

Smith, J. P., diSessa, A., y Roschelle, J. (1994). Misconceptions reconceived: A constructivist analysis of knowledge in transition. *The Journal of the Learning Sciences, 3*(2), 115-163. doi:10.1207/s15327809jls0302_1.

Verschaffel, L., De Corte, E., y Lasure, S. (1994). Realistic considerations in mathematical modeling of school arithmetic word problems. *Learning and Instruction, 4*(4), 273-294. doi:10.1016/0959-4752(94)90002-7.

Verschaffel, L., Greer, B., y de Corte, E. (2000). *Making Sense of Word Problems* (Vol. 42). Lisse, Netherlands.

Von Glasersfeld, E. (1997). *Anticipation in the constructivist theory of cognition.* Paper presentado en CASYS'97 - International Conference on Computing Anticipatory Systems, Liege.

Xin, Y. P., Wiles, B., y Lin, Y.-Y. (2008). Teaching conceptual Model–Based word problem story Grammar to Enhance Mathematics problem solving. *The Journal of Special Education*. doi:10.1177/0022466907312895.

Yañez, C. J., y Chávez, R. M. (2009). Semiótica del dibujo infantil: una aproximación latinoamericana sobre la influencia de la televisión en los niños: casos de estudios en ciudades de Chile, El Salvador y México. *Arte, individuo y sociedad, 21*, 151-164. Obtenido de revistas.ucm.es.proxyiub.uits.iu.edu/index.php/ARIS/article/download/ARIS0909110151A/5765.

Autores

Alejandro Andrade. Indiana University, Estados Unidos. Investigador Asociado de Alandra Investigación Educativa, Colombia. laandrad@indiana.edu

Amparo Lotero Botero. Investigadora Asociada y Directora de Alandra Investigación Educativa, Colombia. a.loterobotero@alandradifuciencia.org

Edgar A. Andrade Londoño. Investigador Asociado de Alandra Investigación Educativa, Colombia. edandrade@alandradifuciencia.org