

PEDRO GÓMEZ, MARÍA C. CAÑADAS

DIFICULTADES DE LOS PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN FORMACIÓN EN EL APRENDIZAJE DEL ANÁLISIS FENOMENOLÓGICO

DIFFICULTIES IN MATHEMATICS TEACHERS TRAINING
IN LEARNING PHENOMENOLOGICAL ANALYSIS

RESUMEN

En este artículo exploramos el aprendizaje del análisis fenomenológico en un programa de máster de formación de profesores de matemáticas de secundaria en ejercicio basado en el modelo del análisis didáctico. A partir de una descripción de los aspectos teóricos y técnicos de la noción de fenomenología, establecemos una serie de acciones que permiten describir la actuación de los grupos de profesores en formación en sus producciones escritas. Encontramos que los grupos no manifestaron dificultades de aprendizaje con la idea de situación, que tuvieron dificultades con las ideas de fenómeno y contexto —particularmente en relación con la noción de característica estructural—, y que lo hicieron en mayor medida respecto a la idea de subestructura y su relación con la noción de contexto.

PALABRAS CLAVE:

- *Análisis fenomenológico*
- *Dificultades*
- *Educación secundaria*
- *Formación de profesores*
- *Matemáticas*

ABSTRACT

In this paper, we explore the learning of phenomenological analysis in a mathematics secondary teacher education master program based on the didactical analysis model. From the description of theoretical and technical aspects, we establish a set of actions that allow us to describe the groups of teachers' performance through their written documents. We found that the groups did not have learning difficulties with idea of situation, had difficulties with the ideas of phenomenon and context — particularly when referring to the notion of structural characteristic—, and showed serious difficulties with the idea of substructure and its relation to the notion of context.

KEY WORDS:

- *Phenomenological analysis*
- *Difficulties*
- *Secondary*
- *Teacher education*
- *Mathematics*



RESUMO

Neste artigo vamos explorar a aprendizagem de análise fenomenológica em um programa de mestrado em ensino de matemática no Secundário baseado no modelo de análise didactico. Mediante de uma descrição dos aspectos teóricos e técnicos desta nação, estabelecemos uma série de ações que ajudam a descrever o desempenho de grupos de professores estagiários em seu trabalho escrito. Nós descobrimos que os grupos não apresentaram dificuldades com a idea de situação, expressam algumas dificuldades com as idéias do fenómeno e contexto —particularmente em relação à noção e característica estrutural— e revelou problemas graves com a idéia de sub-estrutura e sua relação à noção de contexto.

PALAVRAS CHAVE:

- *Análise fenomenológica*
- *Dificuldades*
- *Ensino Secundário*
- *Formação de Professores*
- *Matemática*

RÉSUMÉ

Dans cet article, nous explorons l'apprentissage de l'analyse phénoménologique dans un programme de master en métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation de mathématiques de secondaire que suit le modèle de l'analyse didactique. De la description des aspects théoriques et techniques de cet organisateur curriculaire, nous établissons une série d'actions qui aident à décrire la performance des groupes de professeurs stagiaires dans leur travail écrit. Nous avons constaté que les groupes n'ont montré aucune difficulté avec l'idée de la situation, ont exprimé quelques difficultés avec les idées de phénomène et de contexte —en particulier en ce qui concerne la notion de caractéristique structurelle— et ont révélé de graves problèmes avec l'idée de sous-structure et de sa relation avec la notion de contexte.

MOTS CLÉS:

- *Analyse phénoménologique*
- *Difficultés*
- *Enseignement secondaire*
- *Formation des enseignants*
- *Mathématiques*

1. INTRODUCCIÓN

Un concepto matemático es un medio para organizar un conjunto de fenómenos. Con base en esta idea, Freudenthal (1983) sugiere comenzar la instrucción por los fenómenos y, a partir de ellos, enseñar al alumno a manipular los conceptos, como medios de organización de esos fenómenos (pp. 28-32). En este sentido, “la realidad no solamente es un área de aplicación, sino que también es una fuente de aprendizaje” (Treffers, 1993, p. 89). El análisis fenomenológico de un tema de las

matemáticas escolares es un procedimiento que permite establecer los fenómenos que dan sentido al tema, identificar los contextos que organizan esos fenómenos y las subestructuras que les sirven de modelo, y describir las relaciones entre esas subestructuras y esos contextos. La capacidad de un profesor para realizar el análisis fenomenológico de un tema contribuye a su habilidad para diseñar, seleccionar o adaptar tareas que promuevan el desarrollo de las competencias que le pueden permitir a los escolares “plantear, formular e interpretar problemas mediante las matemáticas en una variedad de situaciones” (OCDE, 2005, p. 75). Por consiguiente, el análisis fenomenológico es una herramienta con la que los profesores pueden analizar los temas matemáticos que enseñan. Por esta razón, el análisis fenomenológico forma parte de los contenidos de algunos programas de formación de profesores de matemáticas. Su enseñanza y aprendizaje son procesos complejos. Algunas investigaciones han puesto de manifiesto las dificultades de los profesores en formación con respecto a la noción de fenomenología y la heterogeneidad de significados parciales que ellos construyen para cada tema. Por ejemplo, Gómez (2007) encontró que los profesores en formación no logran producir un análisis fenomenológico detallado de su tema en el que los fenómenos propuestos se organicen de acuerdo con la relación entre contextos y subestructuras. En este artículo, caracterizamos en detalle algunas de estas dificultades.

Este estudio se enmarca en la problemática de investigación en Educación Matemática que se centra en el conocimiento del profesor de matemáticas (e.g., Beijaard, Korthagen, & Verloop, 2007; Hill, 2011; Hurrell, 2013). Dentro de esta problemática, existen líneas de investigación que se preocupan por los procesos de aprendizaje de los profesores, en general (Gess-Newsome & Lederman, 2001; Sánchez, 2011), y por esos procesos de aprendizaje cuando los profesores participan en programas de formación (Borko, 2004; Carter, 1990; Cavanagh & Garvey, 2012). En particular, nuestro estudio aborda la reivindicación de los expertos en Educación Matemática de que, para planificar e implementar las clases de matemáticas, los profesores en formación deben conocer el tema a enseñar desde múltiples perspectivas (Cooney, 2004; Shulman, 1986) y ser capaces de analizarlo desde esas perspectivas para producir información que fundamente sus decisiones de planificación (Charalambous, 2008; Sullivan, Clarke, Clarke, & O’Shea, 2010). En este sentido, abordamos la solicitud de Simon (2008) sobre la necesidad de investigaciones que estudien el aprendizaje y la enseñanza de conceptos pedagógicos en la formación de profesores de matemáticas.

De la variedad de conocimientos y habilidades que configuran la competencia de planificación del profesor de matemáticas (Gómez, 2006), en este artículo nos centramos en un aspecto particular: la capacidad del profesor para relacionar un

tema de las matemáticas escolares con los fenómenos y contextos que ese tema organiza. Es decir, nos centramos en las ideas universalmente reconocidas de Freudenthal (1983) sobre fenomenología didáctica en matemáticas y que, en el contexto de la Didáctica de la Matemática en España, se han concretado como análisis fenomenológico (Puig, 1997).

El objetivo de investigación de este artículo consiste en identificar y caracterizar las dificultades que grupos de profesores en formación manifestaron en sus producciones escritas sobre las ideas que configuran el análisis fenomenológico. En lo que sigue, presentamos una visión del aprendizaje de esta noción y describimos una conceptualización del análisis fenomenológico; presentamos el método que utilizamos para analizar las producciones de los grupos de profesores en formación; y exponemos e interpretamos los resultados obtenidos. Por último, presentamos las conclusiones de la investigación.

2. MARCO CONCEPTUAL

Los programas de formación de profesores en los que trabajamos se basan en un modelo funcional de la formación de profesores de matemáticas que se estructura mediante el modelo del análisis didáctico (Gómez & González, 2008, 2013a). Una descripción detallada del procedimiento de análisis didáctico se puede ver, por ejemplo, en Gómez (2002, 2007) y Lupiáñez (2009). Estos programas abordan el aprendizaje de los profesores en formación desde una perspectiva social del aprendizaje, desde una visión funcional de las matemáticas y con énfasis en los procesos de aprendizaje de nociones de la Educación Matemática denominadas organizadores del currículo.

2.1. *Aprendizaje de los organizadores del currículo*

Un organizador del currículo es un concepto que (a) forma parte del conocimiento disciplinar de la Educación Matemática y (b) permite analizar un tema matemático con el propósito de producir información sobre el tema que sea útil para el diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas (Rico, 1997). Estructura conceptual, sistema de representación, análisis fenomenológico, y expectativas, limitaciones e hipótesis de aprendizaje son ejemplos de organizadores del currículo. Por ejemplo, cuando los profesores en formación realizan el análisis de los sistemas de representación de su tema, identifican los sistemas de representación más significativos para el tema y establecen las relaciones entre esos

sistemas de representación. De la misma forma, cuando los profesores analizan el tema matemático desde la perspectiva fenomenológica, establecen los fenómenos que dan sentido al tema y los organizan en contextos y subestructuras. En los programas basados en el modelo del análisis didáctico, se pretende que los profesores en formación desarrollen tres tipos de conocimiento sobre los organizadores del currículo: conocimiento teórico, conocimiento técnico y conocimiento práctico. González y Gómez (Gómez & González, 2008, 2009; González y Gómez, 2008, 2014) los caracterizan de la siguiente manera.

Conocimiento teórico. Se refiere al conocimiento disciplinar relacionado con el organizador del currículo que los formadores de ese programa han seleccionado como opción dentro de aquellas disponibles en la literatura.

Conocimiento técnico. Se refiere al conjunto de técnicas que los formadores consideran útiles para producir información sobre el tema con el organizador del currículo.

Conocimiento práctico. Se refiere al conjunto de técnicas que los formadores consideran que son necesarias para usar la información que surge del conocimiento técnico del organizador del currículo en los análisis con otros organizadores del currículo o en el diseño de la unidad didáctica.

Nuestra investigación sobre el aprendizaje de los grupos de profesores en formación se basa en el marco que hemos descrito. En este artículo, nos centramos, en particular, en el desarrollo del conocimiento teórico y el conocimiento técnico de grupos de profesores en formación cuando ellos abordaron el análisis de un tema de las matemáticas escolares con el análisis fenomenológico. Describimos este organizador del currículo a continuación.

2.2. Análisis fenomenológico

Con el análisis fenomenológico, se pretende que el profesor en formación identifique y organice los fenómenos que dan sentido al tema que está analizando (Gómez y Cañadas, 2011). A continuación, describimos este organizador del currículo en términos de su conocimiento teórico y su conocimiento técnico.

Conocimiento teórico

En su sentido básico, dentro del contexto de la Educación Matemática, la fenomenología didáctica es el estudio de los fenómenos (Freudenthal, 1983). Pero el análisis fenomenológico no consiste únicamente en identificar fenómenos que dan sentido a un tema de las matemáticas escolares. Consiste también

en establecer las maneras en que el tema organiza esos fenómenos (Freudenthal, 1983; Puig, 1997). Para ello, consideramos las siguientes ideas clave como constituyentes de su conocimiento teórico: fenómeno, contexto, característica estructural, subestructura, relación entre subestructura y contexto, situación, usos de un tema y problemas a los que el tema da respuesta.

Por ejemplo, si nos interesa identificar fenómenos relacionados con la función cuadrática como tema de las matemáticas escolares, entonces podemos pensar en usos o problemas a los que este tema da respuesta. La antena parabólica de mi casa, el conjunto de todas las antenas parabólicas y el conjunto de todos los reflectores parabólicos son ejemplos de fenómenos que dan sentido al tema. La idea de reflectores parabólicos constituye un contexto que organiza todos los fenómenos que comparten una misma característica estructural que surge de un principio físico: su forma parabólica da lugar a que las ondas confluyan en un mismo lugar —antenas— y a que los rayos de luz se proyecten paralelamente —focos—.

Las características estructurales son aquellas propiedades de un fenómeno que involucran y dan sentido al tema matemático. De esta forma, las características estructurales que comparten los fenómenos que pertenecen a un contexto permiten relacionarlo con una subestructura de la estructura conceptual del tema. Este es un significado del término subestructura más general que el estrictamente matemático (Gómez, 2007). En el caso que estamos ejemplificando, se refiere a la subestructura que establece las propiedades del foco de la parábola. Se establece así una relación biunívoca entre subestructuras y contextos. Subestructuras y contextos son dos formas de establecer las maneras en las que el tema organiza los fenómenos que le dan sentido. Las situaciones son otra forma de organizar los fenómenos que hace referencia al tipo de entorno al que pertenecen. Los fenómenos que son del tipo de reflector parabólico pueden referirse a situaciones personales (la antena parabólica de mi casa), laborales (los focos del edificio donde trabajo), científicas (un micrófono parabólico) y públicas (las antenas del sistema de telefonía móvil) (OCDE, 2003). Estos conceptos y sus relaciones configuran el significado de este organizador del currículo (ver figura 1, más adelante).

Conocimiento técnico

El análisis fenomenológico de un tema implica dos procedimientos: (a) la identificación de fenómenos que dan sentido al tema y (b) la organización de esos fenómenos. Cada uno de estos procedimientos involucra técnicas que surgen del conocimiento teórico del organizador del currículo. Para identificar fenómenos, se

requieren técnicas que permitan distinguir aquellos fenómenos que corresponden al tema de aquellos que no corresponden. Establecer si el tema resuelve un problema relacionado con el fenómeno y determinar si el tema se usa en algún aspecto de ese fenómeno son dos técnicas que cumplen con ese propósito. Usamos estas técnicas para identificar algunos fenómenos que dan sentido a la función cuadrática.

Identificar otros fenómenos que sean “parecidos” a uno dado, desde la perspectiva del tema, y establecer en qué son parecidos es una técnica para caracterizar los fenómenos identificados, aproximarse a sus características estructurales y comenzar a abordar la identificación de contextos, como primer paso para organizar los fenómenos. Siguiendo con el ejemplo anterior de la función cuadrática, de esta forma identificamos los reflectores parabólicos como contexto que engloba diferentes tipos de fenómenos de la función cuadrática. La identificación de contextos implica entonces tres técnicas: (a) identificar los usos del tema; (b) establecer los tipos de problemas que el tema resuelve; y (c) determinar las características que son compartidas por los fenómenos que dan sentido al tema. Estas técnicas orientan la identificación de los fenómenos que se organizan en un mismo contexto.

Las características estructurales de los fenómenos pueden dar pistas sobre aquellos aspectos matemáticos del tema que organizan los fenómenos pertenecientes a un contexto. La identificación de la subestructura matemática que modeliza un contexto puede surgir de esta reflexión. Esto fue lo que hicimos al identificar la propiedad física que comparten los reflectores parabólicos y establecer su relación con la subestructura matemática que define las propiedades del foco de la parábola. Pero también es posible usar otra técnica: analizar la estructura conceptual del tema e identificar posibles subestructuras en ella, para establecer cuáles de esas subestructuras adquieren sentido —se usan, resuelven problemas— para, al menos, un fenómeno y de qué manera se relacionan con los contextos. Este sería el caso de identificar el modelo $x = x_0 + v_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} a (t - t_0)^2$ como subestructura que organiza todos los fenómenos de movimiento de cuerpos en un campo de fuerzas uniforme.

Finalmente, se hace necesario desarrollar técnicas para presentar los resultados del análisis e incluir la organización de los fenómenos en términos de situaciones. En la figura 1, resumimos esquemáticamente las ideas clave e indicamos los lugares donde aparecen algunas de las técnicas del conocimiento técnico de la fenomenología (técnicas para identificar subestructuras, técnicas para identificar contextos o técnicas para establecer relaciones entre subestructuras y contextos, entre otras).

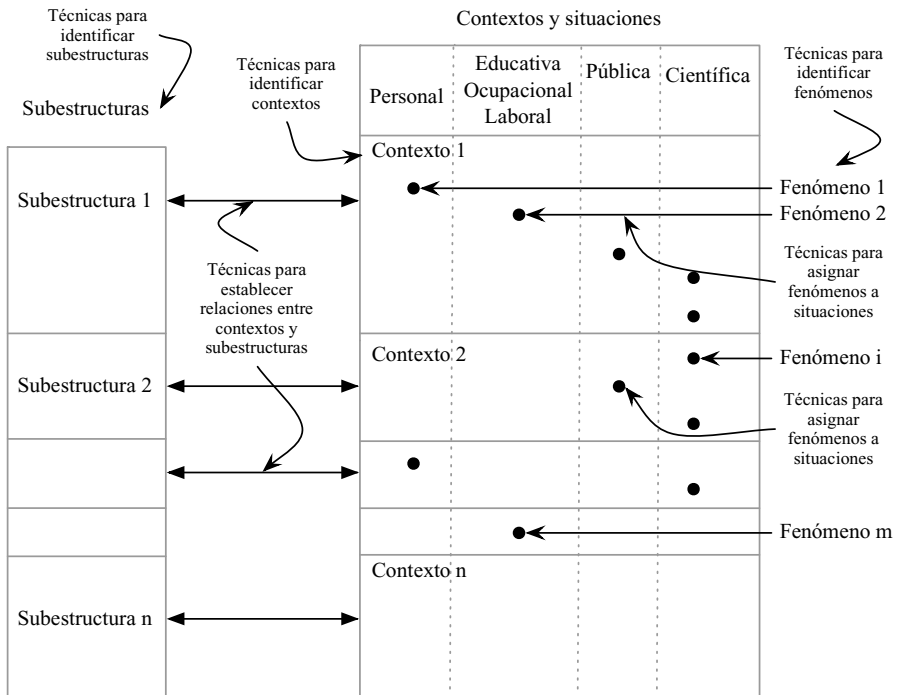


Figura 1. Ideas clave y técnicas del conocimiento técnico en el análisis fenomenológico

Para el ejemplo de la función cuadrática, una subestructura es aquella que establece las propiedades del foco de la parábola, que identificamos al reconocer las características estructurales de los reflectores parabólicos como contexto, en el que se incluyen como fenómenos los focos de los coches, siendo este un fenómeno ubicado en una situación pública.

Con referencia a este marco conceptual, el objetivo de investigación de este estudio consiste en identificar, describir y caracterizar las dificultades de aprendizaje que unos grupos de profesores en formación manifestaron en términos de las ideas clave que configuran el conocimiento teórico del análisis fenomenológico y de las técnicas que conforman su conocimiento técnico.

3. MÉTODO

En esta sección, describimos el tipo de investigación que realizamos, el contexto en el que desarrollamos el estudio, los sujetos participantes, y los procedimientos de recolección, codificación y análisis de la información.

3.1. *Tipo de investigación*

Con este estudio pretendemos contribuir al conocimiento de la comunidad en Educación Matemática sobre el aprendizaje del análisis fenomenológico de profesores en formación. Lo hacemos con base en un estudio de caso de carácter exploratorio y descriptivo. Es una investigación de corte naturalista (Erlandson, Harris, Skipper, & Allen, 1993) en la que la información surge de manera natural de un contexto de formación diseñado para contribuir al conocimiento de los participantes. En términos de los propósitos y los métodos de la investigación en Educación Matemática propuestos por Schoenfeld (2000), este trabajo (a) se enfoca al propósito aplicado de basarse en la comprensión de fenómenos de aprendizaje para contribuir a la mejora de la enseñanza y (b) presenta una “prueba de existencia”, al proporcionar evidencias empíricas de un caso concreto de aprendizaje en una línea de investigación en Educación Matemática. Por estas razones, no pretendemos que los resultados de este estudio sean replicables, puesto que sería imposible restablecer todas las condiciones naturales del contexto de formación de donde surge la información. De la misma forma, no se pretende que los resultados sean extrapolables directamente a otros contextos. No obstante, este estudio contribuye al conocimiento de investigadores y formadores sobre aspectos concretos de los procesos de aprendizaje de profesores de matemáticas en formación.

3.2. *Contexto*

Realizamos el estudio en el contexto de la Maestría en Análisis Didáctico (MAD). Esta es una maestría de profundización en Educación Matemática ofrecida por la Universidad de los Andes en Bogotá (Colombia) para profesores de matemáticas en ejercicio de educación básica secundaria y educación media (de 11 a 16 años).

El programa de MAD está fundamentado en un modelo funcional de la formación de profesores de matemáticas y aborda el aprendizaje de los organizadores del currículo que configuran el análisis didáctico (Gómez y González, 2013a). El principal propósito de esta maestría es ofrecer oportunidades para que los profesores en formación puedan complementar y profundizar en el conocimiento didáctico necesario para la planificación, puesta en práctica y evaluación de unidades didácticas de matemáticas (Gómez, Cañadas, Flores, González, Lupiáñez, Marín *et al.*, 2010). El análisis didáctico se utiliza como herramienta para que los profesores en formación analicen un tema de las matemáticas escolares, de tal forma que este análisis les sea útil para justificar el diseño, implementación y evaluación de una unidad didáctica (para una descripción detallada del programa y de su fundamentación ver Gómez *et al.*, 2010; Gómez y González, 2013a, 2013b; Gómez y Restrepo, 2010).

MAD tiene una duración de dos años y está compuesto por 8 módulos. Cada módulo está constituido por cuatro actividades. Los profesores que participan en MAD se organizan en grupos de 4 o 5 personas para trabajar las actividades que se les proponen. Cada grupo escoge un tema concreto de las matemáticas escolares sobre el que trabaja a lo largo del programa y tiene asignado un tutor, quien lo guiará en el trabajo. Los formadores presentan e introducen el contenido de cada módulo durante una semana presencial al comienzo de cada módulo y presentan las actividades a realizar a lo largo del módulo.

Cada actividad dura dos semanas. Para cada actividad, los profesores en formación elaboran un borrador y lo envían a su tutor por correo electrónico al final de la primera semana de trabajo. El tutor reacciona al trabajo por la misma vía. Los profesores en formación mejoran su trabajo con base en esos comentarios y preparan y realizan una presentación final al término de la segunda semana.

Los profesores que cursaron MAD 1 (2010-2011) se organizaron en 6 grupos y abordaron los siguientes temas de las matemáticas escolares: (a) números enteros, (b) introducción al lenguaje algebraico (dos grupos), (c) rectas en el plano y (d) ecuaciones trigonométricas (dos grupos). Las presentaciones finales de los futuros profesores en cada actividad del módulo 2 fueron presenciadas por la formadora responsable del módulo (segunda autora de este trabajo) y el coordinador de MAD 1 (primer autor de este trabajo). Las presentaciones se grabaron en vídeo. En este módulo, los grupos de profesores abordaron su tema de las matemáticas escolares a través de tres organizadores del currículo que conforman el análisis de contenido: (a) estructura conceptual, (b) sistemas de representación y (c) fenomenología. En este artículo, nos centramos en el último de los organizadores del currículo mencionados, al que se dedicó una de las actividades propuestas en el módulo.

3.3. *Sujetos*

Los sujetos participantes en la investigación fueron los 26 profesores de matemáticas matriculados en MAD 1. Todos eran profesores de secundaria en ejercicio en colegios públicos y privados de Colombia. La mayoría de ellos eran licenciados en Matemáticas y Física o en Matemáticas. Una quinta parte de ellos eran licenciados en educación básica con énfasis en Matemáticas. Todos eran menores de 40 años y se habían graduado hacía al menos 10 años.

3.4. *Recogida de información*

La actividad sobre análisis fenomenológico constituyó el ámbito en el que se recogió la información. Los objetivos que se pretendían con esta actividad eran los siguientes.

- Que los profesores dieran sentido a la fenomenología como organizador del currículo.
- Que los grupos de profesores realizaran el análisis fenomenológico de su tema.

En el texto que describe la actividad a los profesores en formación se solicitaba lo siguiente.

- Identificar y delimitar los fenómenos que dan sentido a los conceptos.
- Identificar los conceptos que organizan los fenómenos.
- Identificar las subestructuras matemáticas del tema que permiten organizar grupos de fenómenos.
- Establecer las relaciones entre los fenómenos y las subestructuras matemáticas.
- Organizar los grupos de fenómenos que comparten características estructurales mediante la identificación de contextos.
- Establecer las relaciones entre los contextos y las subestructuras matemáticas.
- Identificar las situaciones donde se utilicen las subestructuras matemáticas.

Al final de la primera semana de trabajo, los grupos de profesores en formación produjeron el borrador de la actividad en formato Word o PowerPoint. En el caso del formato Word, la extensión máxima era de 1000 palabras y para el formato PowerPoint, el documento se restringió a 8 diapositivas. La información sobre la presentación final se obtuvo tanto del archivo PowerPoint, como del vídeo de la presentación.

3.5. *Acciones*

Con objeto de codificar y analizar las producciones de los grupos en la actividad, utilizamos la idea de acción. Una acción de un grupo de profesores en formación hace referencia a una actuación concreta que él realiza cuando se enfrenta al análisis de un tema haciendo uso de un organizador del currículo y que pone en evidencia en su producción textual. Las acciones deben ser observables en las producciones, surgen del análisis de la descripción del organizador del currículo y de codificaciones preliminares de los datos, y se organizan de acuerdo con las ideas clave que caracterizan su conocimiento teórico y con las técnicas que configuran su conocimiento técnico. Dado que las acciones se pueden ejecutar sobre cualquier tema de las matemáticas escolares y que las producciones de

todos los grupos para cualquier tema se codifican con esas acciones, las producciones se pueden comparar en términos de esas acciones, independientemente del tema de las matemáticas escolares que trabajen los grupos.

En la descripción del análisis fenomenológico que presentamos en el marco conceptual, mencionamos las ideas clave para este tipo de análisis: fenómenos, contextos, subestructuras, relaciones entre subestructuras y contextos, y situaciones. Por ejemplo, “Identificar fenómenos” es una acción que se refiere al conocimiento teórico de la idea de fenómeno, mientras que “Organizar fenómenos con subestructuras” es una acción que se refiere al conocimiento técnico de la idea de subestructura. Con base en el marco conceptual, los requerimientos de la actividad y una codificación previa de las producciones de los grupos, desglosamos las diferentes acciones para cada una de las ideas clave implicadas en el análisis fenomenológico y obtuvimos el listado que recogemos en la tabla 1, organizado según la idea clave con la que se encuentran vinculadas. Representamos cada acción por medio de un código en el que el primer carácter es un guión que solamente aparece cuando la acción depende de otra acción¹, el segundo hace referencia a la idea clave con la que se relaciona (fenómeno [F], contexto [C], subestructura [B], relación [R] o situación [S]), el tercero distingue su correspondencia con el conocimiento teórico (O) o conocimiento técnico (C), y el cuarto identifica el orden del código dentro de la idea clave y el tipo de conocimiento. En la tabla I recogemos el listado de acciones y el código correspondiente. Por ejemplo, la acción “Identificar fenómenos” tiene el código FO1 porque corresponde a la idea de fenómeno (F), se refiere al desarrollo del conocimiento teórico (O) y es la primera acción relativa a fenómenos (1).

3.6. Codificación

Los dos autores de este artículo codificamos los documentos del borrador y las presentaciones finales de la actividad sobre análisis fenomenológico. En la codificación, utilizamos las acciones anteriores, atendiendo a si, en un documento, se realizaba o no la acción, incluyendo además comentarios que consideramos

¹ Una acción depende de otra si la información que se produce al realizar la segunda es necesaria para realizar la primera. Por ejemplo, “Utilizar apropiadamente los usos” (-FC5) depende de que, previamente, se hayan identificado usos (FO4).

² En este caso, los investigadores identificamos todos los contextos posibles. Así, esta acción hace referencia a que los profesores en formación identifican la mayoría de esos contextos posibles para el tema en el que trabajan.

TABLA I
Acciones

<i>Acción</i>	<i>Código</i>
<i>Fenómenos</i>	
Identificar fenómenos	FO1
Identificar fenómenos válidos	FO2
Identificar problemas	FO3
Usar problemas para identificar fenómenos	-FC1
Utilizar al menos un problema para identificar al menos un fenómeno	-FC2
Utilizar apropiadamente los problemas	-FC3
Identificar usos	FO4
Utilizar los usos para identificar fenómenos	-FC4
Utilizar apropiadamente los usos	-FC5
<i>Contextos</i>	
Identificar contextos	CO1
Identificar contextos válidos	-CO2
Identificar una proporción de, al menos, el 80% de todos los contextos posibles ²	-CC1
Identificar características estructurales	CO3
Usar características estructurales para identificar fenómenos	-CC2
Organizar fenómenos con contextos	-CC3
<i>Subestructuras</i>	
Identificar subestructuras	BO1
Identificar subestructuras válidas	-BO2
Hacer referencia a la estructura conceptual	BO3
Describir las subestructuras	-BC1
Organizar fenómenos con subestructuras	-BC2
<i>Relación de subestructuras y contextos</i>	
Establecer relaciones	-RO1
Establecer relaciones válidas	-RO2
Establecer todas las relaciones	-RO3
Justificar las relaciones entre los principios y las características estructurales	-RO4
Proponer justificaciones válidas	-RO5
<i>Situaciones</i>	
Proponer situaciones	SO1
Proponer situaciones válidas	-SO2
Usar PISA para clasificar	-SC1
Usar bien PISA	-SC2
Usar alguna clasificación	SC3

relevantes para los objetivos de este trabajo. Cada uno de los dos investigadores cumplimentamos la información de manera independiente, y comparamos y discutimos los resultados para lograr acuerdos consistentes y compartidos. Hecho esto, revisamos la información para obtener la versión final de la codificación de la información.

A continuación, presentamos un ejemplo de la codificación para una parte del trabajo de uno de los grupos. El grupo en cuestión trabajó las razones trigonométricas y en el borrador elaboraron esta parte del trabajo mediante tablas. Para la presentación final (ver ejemplo en figura 2), se pueden observar varias subestructuras (figura 2, columna izquierda), su correspondencia uno a uno con sus contextos (figura 2, columna central), y el listado de fenómenos que se relacionan con cada par subestructura-contexto. Por ejemplo, para el contexto “Resolución de triángulos cualesquiera dados dos ángulos y el lado opuesto”, recogen el rastreo de un satélite y la distancia de la tierra a la luna como fenómenos concretos. Como se observa en la parte inferior de la figura 2, este grupo utilizó las situaciones según la clasificación de PISA (OCDE, 2003). El proyecto PISA define situación como “la parte del mundo del estudiante en la que se localizan los ejercicios que se le plantean” (p. 35) y establece cuatro categorías para clasificar las situaciones: personal, educativa, pública y científica. Para los fenómenos presentados en el primer contexto, consideran que se tratan de situaciones científicas.

IDENTIFICACIÓN DE SUBESTRUCTURAS QUE ORGANIZAN FAMILIAS DE FENÓMENOS			
subestructura	contexto		FENÓMENOS
teorema del seno $a = \frac{b \sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$ $\alpha = \arcsin\left(\frac{a \sin \beta}{b}\right)$ $b = \frac{a \sin(180 - \alpha - \arcsin(\frac{c \sin \alpha}{a}))}{\sin \alpha}$	Resolución de triángulos cualesquiera 1. Dos ángulos y un lado opuesto.	- Rastreo de un satélite - Distancia de la tierra a la luna	1,2,3 1,3
	2. Dos lados y el ángulo opuesto	- GPS - Altitud de un aeroplano	1,2,3 1,3
	3. Dos lados y ángulo no comprendido entre ellos	- Longitud de un túnel - Triangulación de objetos	1,3 1,2,3
		- Longitud diagonales de un paralelogramo	1,3
personal científica educativa Pública			S

Figura 2. Tabla-resumen de fenómenos de razones trigonométricas

A partir de la información de la figura 2 y con base en el trabajo de este grupo y la descripción de las acciones de la tabla 1, codificamos esta producción con los códigos FO1, FO2, CO1, -CO2, -CC1, -CC3, BO1, -BC2, -RO1, -RO2, -RO3 y SO1. Por ejemplo, en relación con los fenómenos, este grupo puso en evidencia la identificación de fenómenos válidos para el contenido matemático (FO1 y FO2). En lo que concierne a los contextos, identificó contextos válidos (CO1 y -CO2), reconoció una proporción de contextos superior al 80% de entre los posibles (-CC1) y organizó fenómenos con los contextos identificados para ese tema (-CC3).

3.7. *Análisis*

A partir de los datos obtenidos de la codificación, establecimos cuántos grupos realizaron cada una de las acciones, tanto en el borrador como en la presentación. Ubicamos las acciones en una tabla (ver tabla II), siendo una entrada el número de grupos (de 0 a 6) que podían realizar una acción en el borrador; y la otra entrada el número de grupos que realizaban la acción en la presentación final. Por ejemplo, la acción “Identificar fenómenos válidos” (FO2) fue realizada por tres grupos en el borrador y cinco grupos en la presentación final. Por lo tanto, se ubica en la celda (3,5) de la tabla II.

Organizamos la información y los resultados en torno a las ideas clave que configuran el análisis fenomenológico (fenómeno, contexto, subestructura, relaciones subestructuras-contextos y situaciones). A partir del número de grupos que lograron superar una determinada acción definimos la dificultad de una acción para los grupos. Consideramos que una idea clave es difícil si como máximo dos grupos lograron realizar la acción, ya sea en el borrador o la presentación; es medianamente difícil si la mitad de los grupos lograron realizarla en el borrador y la presentación; es menos difícil si tres o cuatro grupos lograron realizarla en el borrador y en la presentación; y es fácil si cinco o seis grupos lograron realizarla en el borrador y en la presentación. Consideramos que se ha producido una *progresión* cuando el número de grupos que realizan una determinada acción es mayor en la presentación que en el borrador de la actividad. La progresión puede ser un indicador de que la ayuda del tutor pudo contribuir a resolver esas dificultades. Una *regresión* se produce cuando el valor es menor en la presentación que en el borrador.

4. RESULTADOS

La tabla II resume los resultados obtenidos. Las filas y las columnas indican el número de grupos que realizaron una acción en el borrador y en la presentación, respectivamente. Por ejemplo, en la celda (3,5) de la tabla, se observa que tres grupos propusieron fenómenos válidos (FO2) en el borrador y cinco lo hicieron en la presentación final. Dado que hemos considerado que una acción fue difícil si pocos grupos pudieron realizarla tanto en el borrador como en la presentación, las acciones difíciles se encuentran en las primeras cuatro filas y columnas de la tabla. Hemos delimitado esa zona de la tabla con una línea gruesa de color negro. Las acciones más difíciles (-RO4 y -RO5) se ubican en la celda (0,0) de la tabla. Análogamente, las acciones fáciles se ubican en la última fila y columna de la tabla —celda (6,6)—. Hemos identificado esta celda con una línea gruesa gris claro. Diferenciamos estas acciones de aquellas que se encuentran en la mitad de la tabla, en las celdas (3,5) y (5,5), que denominamos medianamente difíciles, y a las que hemos asignado un borde grueso de color gris oscuro. Las progresiones se encuentran en las celdas (0,3) y (3,5). Se identifican en la tabla por un borde punteado. Finalmente, las regresiones se encuentran en las celdas (3,1) y (3,2) y han sido identificadas en la tabla con un borde discontinuo.

TABLA II
Dificultad de las acciones

		Presentación						
Br.		0	1	2	3	4	5	6
0		-RO4, -RO5			CS3, -CT2			
1			FO4, -FC4 -FC5					
2				FO3, -FC1 -FC2, -FC3				
3			-RO2	-BO2	BO3, -BC1		FO2, -RO3 -CO2, -CC1	
4								
5							SO1, -SO2 -SC1, BC2 -RO1, -SC2	
6								FO1, CO1 -CC3, BO1, SC3

Nota. Br. = borrador.

Analizamos estos resultados con base en la descripción de las acciones de la tabla I y atendiendo a las zonas que hemos identificado en la tabla II. Primero, establecemos los resultados en términos de la dificultad de las acciones. Después, analizamos las progresiones y, finalmente, describimos las regresiones.

Hay 15 acciones que resultaron difíciles para los grupos. Aunque cinco grupos establecieron relaciones entre los contextos y las subestructuras, tres propusieron relaciones válidas en el borrador y solamente uno en la presentación. Este grupo no justificó esas relaciones en términos de principios y características estructurales. Solamente un grupo identificó usos del tema y los utilizó para identificar fenómenos. Los tres grupos que distinguieron características estructurales en la presentación, las usaron para identificar fenómenos. Solamente dos de ellos justificaron apropiadamente ese uso. Aunque todos los grupos distinguieron contextos en el borrador y en la presentación, tres propusieron contextos válidos en el borrador y cinco lo hicieron en la presentación. De la misma forma, aunque cinco grupos establecieron relaciones entre contextos y subestructuras en el borrador y en la presentación, tres de ellos establecieron relaciones válidas en el borrador y solamente uno de ellos lo hizo en la presentación. Solamente dos grupos identificaron problemas en el borrador y en la presentación y los usaron apropiadamente para identificar fenómenos. Aunque todos los grupos distinguieron subestructuras en el borrador y en la presentación, y cinco de ellos las usaron para organizar los fenómenos, tres de ellos hicieron referencia a la estructura conceptual en los dos documentos y describieron las subestructuras correspondientes. De esos cinco grupos, tres distinguieron subestructuras válidas en el borrador y dos en la presentación. Solamente un grupo organizó los fenómenos con la ayuda de las subestructuras. Cinco grupos propusieron situaciones de forma adecuada con base en la clasificación de PISA.

Se aprecian progresiones en el trabajo con las características estructurales. Ningún grupo las distinguió en el borrador. No obstante tres de ellos lo hicieron y las usaron para identificar fenómenos en la presentación. También encontramos varias regresiones. Tres grupos propusieron contextos válidos en el borrador, pero solamente uno lo hizo en la presentación. De la misma forma, tres grupos presentaron subestructuras válidas en el borrador, pero solamente dos lo hicieron en la presentación.

5. INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS

Los resultados que presentamos en el apartado anterior nos llevan a establecer las dificultades que los grupos manifestaron al realizar el análisis fenomenológico de

un tema de las matemáticas escolares. Abordamos la dificultad de una idea clave atendiendo a varios criterios. El primero de ellos, que se evidencia en la tabla II, tiene que ver con el número de grupos que realizaron las acciones correspondientes a cada una de las ideas clave consideradas en el análisis fenomenológico y que hemos analizado tanto en el borrador como en la presentación. El segundo criterio tiene en cuenta el número de grupos que realizaron la acción de manera válida en el borrador y en la presentación. En ambos casos establecimos una escala de dificultad que dependía del número de grupos que no realizó una acción en el borrador y sí la realizó en la presentación. El tercer criterio de dificultad se refiere al caso en el que se constaten regresiones para la acción. A continuación, interpretamos los resultados que presentamos en el apartado anterior en términos de estos criterios.

La idea de fenómeno es fundamental para la realización del análisis fenomenológico y por ello se solicitó a los grupos que identificaran fenómenos relacionados con su tema y que los organizaran según contextos y subestructuras. Todos los grupos identificaron fenómenos para su tema en el borrador. Sin embargo, sólo la mitad de ellos distinguieron fenómenos válidos. Esto pone de manifiesto que algunos grupos tuvieron dificultades con esta idea clave. Esto se aprecia, por ejemplo, en el hecho de que dos grupos confundieron la idea de fenómeno con la idea de situación y de sistema de representación, respectivamente. Identificamos otro ejemplo en un grupo que escogió fenómenos de temas diferentes al suyo. Todos los grupos menos uno propusieron fenómenos válidos en la presentación, poniendo en evidencia que los grupos que manifestaron dificultades en el borrador pudieron resolverlas. La formadora propuso dos técnicas para identificar fenómenos: (a) mediante usos y (b) mediante problemas. Solo uno de los grupos utilizó los usos del tema para identificar fenómenos y dos grupos utilizaron los problemas para el mismo fin, tanto en el borrador como en la presentación. Dado que, pese a no haber utilizado las estrategias presentadas en la instrucción, los grupos lograron identificar fenómenos, concluimos que las estrategias que la formadora presentó no resultaron útiles para los grupos.

La actividad requería que los grupos distinguieran contextos y los usaran para organizar los fenómenos. Todos los grupos lo hicieron en el borrador y en la presentación. No obstante, solamente la mitad de los grupos propuso contextos válidos en el borrador. Otros dos grupos lograron hacerlo en la presentación. Por consiguiente, desde la perspectiva del conocimiento teórico de las ideas clave, los grupos manifestaron un nivel de dificultad para la idea de contexto similar al que se constató para la idea de fenómeno. Aunque todos los grupos lograron organizar los fenómenos en contextos, ninguno de ellos utilizó la idea de característica estructural para hacerlo en el borrador y solamente la mitad

de ellos lo hizo en la presentación. Este resultado pone en evidencia la dificultad de los grupos con la idea de característica estructural.

La idea de subestructura también generó dificultades. Aunque todos los grupos identificaron subestructuras para su tema, la mitad de ellos identificó subestructuras válidas en el borrador y dos grupos lo hicieron en la presentación final. Por lo tanto, se observa una regresión para esta idea clave, que pone de manifiesto la dificultad de los grupos con el conocimiento teórico de la noción de subestructura. Los grupos que identificaron subestructuras válidas son los mismos que hicieron referencia a la estructura conceptual. Por otra parte, cinco grupos organizaron los fenómenos mediante las subestructuras, tanto en el borrador como en la presentación. Puesto que al menos la mitad de los grupos propuso subestructuras que no eran válidas, la organización que estos grupos hicieron de los fenómenos tampoco era válida. Estos resultados indican que los grupos tuvieron dificultades importantes con el conocimiento teórico de la idea de subestructura y, por ende, con su conocimiento técnico para organizar fenómenos.

Establecer la relación entre subestructuras y contextos es una acción que depende de que los grupos hayan establecido subestructuras y contextos válidos, y de que las relaciones que establecen sean válidas. Aunque cinco grupos intentaron realizar esta acción en el borrador y la presentación, de los tres grupos que presentaron subestructuras válidas en el borrador, ninguno propuso relaciones válidas en ese documento. Por su parte, uno de los dos grupos que presentaron subestructuras válidas en la presentación, propuso relaciones válidas en ese documento. Estos resultados muestran que los grupos manifestaron claras dificultades con la idea de relación entre subestructuras y contextos, tanto por su dependencia de otras ideas, como por la dificultad de la idea en sí misma.

Los grupos no manifestaron dificultades con la idea clave de situación. Cinco grupos identificaron situaciones válidas para sus temas, según la clasificación de PISA presentada por la formadora, tanto en el borrador, como en la presentación final. El otro grupo utilizó otra clasificación de situaciones. Todos los grupos organizaron apropiadamente los fenómenos en las clasificaciones propuestas.

El análisis anterior permite clasificar las ideas clave del análisis fenomenológico de acuerdo con la dificultad que manifestaron los grupos. La idea de situación no presentó dificultades para los grupos. Los grupos manifestaron un nivel de dificultad similar con el conocimiento teórico de las ideas de fenómeno y contexto. No obstante, ellos pusieron en evidencia una dificultad mayor a la hora de caracterizar los contextos en términos de sus características estructurales. Las mayores dificultades se presentaron con las ideas de subestructura y de relación entre subestructuras y contextos.

6. SÍNTESIS Y CONCLUSIONES

El objetivo de investigación de este estudio consistió en establecer y caracterizar las dificultades que seis grupos de profesores en formación manifestaron cuando analizaron un tema de las matemáticas escolares desde la perspectiva del análisis fenomenológico en un plan de formación de profesores de matemáticas de secundaria en ejercicio. Para lograr este objetivo, asumimos una posición acerca del aprendizaje de quienes participan en planes de formación basados en el modelo del análisis didáctico y, a partir de ese modelo de aprendizaje, describimos el conocimiento teórico y el conocimiento técnico de este organizador del currículo que se esperaba que los grupos de profesores en formación desarrollaran durante su formación. Con base en esta descripción, en la información que se proporcionó durante la instrucción, en los requisitos de la actividad que los grupos debían realizar y en codificaciones preliminares de las producciones de los grupos, establecimos un lista de acciones que los grupos podían realizar y hacer explícitas en sus producciones —borrador y presentación— al abordar la actividad. Organizamos estas acciones atendiendo al conocimiento teórico y al conocimiento técnico de las ideas clave que configuran el análisis fenomenológico. Para cada acción, establecimos el número de grupos que la realizó en el borrador y en la presentación. Este análisis nos permitió establecer y comparar la dificultad de las acciones. Con base en esta información, establecimos las dificultades que los grupos pusieron de manifiesto para cada una de las ideas clave involucradas. Encontramos que los grupos no manifestaron dificultades con la idea de situación, manifestaron algunas dificultades con las ideas de fenómeno y contexto —particularmente en relación con la idea de característica estructural— y pusieron de manifiesto serias dificultades con la idea de subestructura y su relación con la noción de contexto.

El estudio fue de carácter exploratorio y descriptivo. No obstante, podemos formular conjeturas acerca de las razones por las que los grupos manifestaron diferentes niveles de dificultad para las nociones que tendrán que ser contrastadas en investigaciones posteriores. La primera tiene que ver con la complejidad de su conocimiento teórico. Mientras que el significado de algunas ideas clave —como fenómeno o contexto— involucra un número reducido de conceptos, otras ideas clave —como la de subestructura o la que se refiere a la relación entre subestructuras y contextos— involucran un mayor número de conceptos y de relaciones entre ellos. Y, en la medida en que el conocimiento teórico de una idea clave es más complejo, también lo es su conocimiento técnico. Adicionalmente, el significado de algunas ideas clave involucra otras ideas clave del análisis fenomenológico, lo que genera la dependencia de unas acciones con otras. Esto implica que la realización correcta de una acción de este tipo depende

de que se hayan realizado correctamente las acciones de las que depende. Por ejemplo, mientras que la idea de fenómeno no depende de otras ideas clave relacionadas con el análisis fenomenológico, la relación de subestructuras y contextos depende de la identificación de subestructuras, contextos y del establecimiento de relaciones entre ellos. También, para la muestra considerada, observamos que algunos profesores en formación tienden a usar el significado del lenguaje cotidiano e ignorar el significado técnico de algunos de los términos que caracterizan el conocimiento teórico de las ideas clave. Por otro lado, es posible conjeturar que la dificultad en la realización del análisis fenomenológico depende del tema de las matemáticas escolares que se esté analizando. Es posible que haya temas de las matemáticas escolares para los que la identificación de fenómenos, contextos y subestructuras sea más evidente que para otros. En este estudio, no hemos explorado empíricamente esta conjetura para los temas en los que trabajaron los seis grupos.

Los resultados presentados en este artículo invitan a la reflexión sobre la instrucción llevada a cabo con los grupos de profesores en formación (Adler & Jaworski 2009), en el sentido del propósito práctico de la investigación en Educación Matemática propuesto por Schoenfeld (2000). Conocer las ideas clave que generan más dificultades en los profesores identifica aquellas cuestiones que se deben atender con mayor atención en su formación. Además, desde la perspectiva del diseño y el desarrollo de la instrucción en el programa de formación, la distinción entre su conocimiento teórico y su conocimiento técnico parece clave. El aprendizaje de un organizador implica tanto entender su significado como conocer las técnicas que permiten poner en práctica ese conocimiento teórico. La instrucción debe promover el desarrollo coordinado de esos dos tipos de conocimiento. Los ejemplos parecen también jugar un papel importante. Mientras que en las sesiones de instrucción se presentaron ejemplos en los que las acciones estaban realizadas adecuadamente, los resultados nos llevan a resaltar la importancia de introducir ejemplos en los que las acciones no estén correctamente realizadas. Conjeturamos que la presentación de contraejemplos puede contribuir al desarrollo del conocimiento teórico y técnico de las nociones.

En este trabajo, hemos propuesto un procedimiento para hacer operacional las ideas de conocimiento teórico y conocimiento técnico de un organizador del currículo, con el propósito de analizar las actuaciones de los grupos de profesores en formación y describir y caracterizar algunos aspectos de su proceso de aprendizaje. Este procedimiento utiliza la idea de “acción” como elemento central para la codificación y análisis de las producciones de los grupos. Una acción se refiere a una actuación concreta que los grupos pueden realizar. Las acciones deben ser observables en las producciones, surgen del análisis de la descripción

conceptual del organizador del currículo y de codificaciones preliminares de los datos, y se organizan de acuerdo con las ideas clave que caracterizan su conocimiento teórico y con las técnicas que configuran su conocimiento técnico. El análisis de la codificación de las producciones en términos de acciones nos permitió establecer la dificultad que los grupos manifestaron para cada noción y comparar los niveles de dificultad de las diferentes ideas clave. Hemos mostrado que el esquema metodológico que utilizamos permite describir algunos aspectos relevantes del aprendizaje de los grupos de profesores en formación a partir de un conjunto reducido de manifestaciones de esas actuaciones. Consideramos que esta es una contribución metodológica de esta investigación.

Este artículo complementa conceptual y metodológicamente otros estudios que estamos realizando. Mientras que este se centra en el conocimiento teórico y el conocimiento técnico del análisis fenomenológico y focaliza su atención en las dificultades que los grupos manifestaron al trabajar con ese organizador del currículo en términos de esos dos tipos de conocimiento, otros estudios tienen en cuenta el conocimiento práctico del organizador del currículo y focalizan su atención en cómo los grupos desarrollan los tres tipos de conocimiento correspondientes (Arias, 2011; González, Gómez y Restrepo, 2015; Polo, González, Gómez y Restrepo, 2011; Suavita, 2012).

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto ha sido apoyado parcialmente por el proyecto EDU2012-33030 del Ministerio de Ciencia y Tecnología de España.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Adler, J. & Jaworski, B. (2009). Public writing in the field of mathematics teacher education. In R. Even y D. Ball (Eds.), *The professional education and development of teachers of mathematics. The 15th ICMI Study* (pp. 249-254). Dordrecht, Holanda: Springer. doi:10.1007/978-0-387-09601-8_26
- Arias, M. (2011). *Actuación de tutores en un programa de formación de postgrado para profesores de matemáticas* (Tesis de maestría no publicada). Universidad de Granada, Granada, España.
- Beijaard, D., Korthagen, F., & Verloop, N. (2007). Understanding how teachers learn as a prerequisite for promoting teacher learning. *Teachers and Teaching*, 13(2), 105-108. doi: 10.1080/13540600601152298
- Borko, H. (2004). Professional development and teacher learning: Mapping the terrain. *Educational Researcher*, 33(8), 3-15. doi: 10.3102/0013189X033008003

- Carter, K. (1990). Teachers' knowledge and learning to teach. In W. R. Houston (Ed.), *Handbook of research on teacher education* (pp. 291-310). New York, NY: MacMillan.
- Cavanagh, M. S., & Garvey, T. (2012). A professional experience learning community for pre-service secondary mathematics teachers. *Australian Journal of Teacher Education*, 37(12), 57-65. doi: 10.14221/ajte.2012v37n12.4
- Charalambous, C. Y. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the unfolding of tasks in mathematics lessons: Integrating two lines of research. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepúlveda (Eds.), *International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 281-288). Morelia, México: PME.
- Cooney, T. J. (2004). Pluralism and the teaching of mathematics. In B. Clarke, D. M. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johansson, D. V. Lambdin, F. K. Lester, A. Wallby, & K. Wallby (Eds.), *International perspectives on learning and teaching mathematics* (pp. 503- 517). Göteborg, Suecia: National Center for Mathematics Education.
- Erlanson, D. A., Harris, E. L., Skipper, B. L., & Allen, S. D. (1993). *Doing naturalistic inquiry. A guide to methods*. Thousand Oaks, CA: Sage.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holanda: Kluwer. doi: 10.1007/0-306-47235-X
- Gess-Newsome, J., & Lederman, N. G. (Eds.). (2001). *Examining Pedagogical Content Knowledge. The Construct and its Implications for Science Education*. Dordrecht, Holanda: Kluwer. doi: 10.1002/sce.10098
- Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, 7(3), 251-293.
- Gómez, P. (2006). Análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 15-35). Huesca, España: Instituto de Estudios Aragoneses.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Gómez, P. y Cañadas, M. C. (2011). La fenomenología en la formación de profesores de matemáticas. *Voces y Silencios: Revista Latinoamericana de Educación*, 2(Especial), 78-89.
- Gómez, P., Cañadas, M. C., Flores, P., González, M. J., Lupiáñez, J. L., Marín, A., et al. (2010). Máster en Educación Matemática en Colombia. En M. T. González, M. Palarea y A. Maz (Eds.), *Seminario de Investigación de los Grupos de Trabajo Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Educación Matemática de la SEIEM* (pp. 7-25). Salamanca, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.
- Gómez, P. & González, M. J. (2008). Mathematics knowledge for teaching within a functional perspective of preservice teacher training. Trabajo presentado en ICME 11 Topic Study Group 27, Monterrey. Obtenido de <http://tsg.icme11.org/document/get/392>
- Gómez, P. & González, M. J. (2009). Conceptualizing and exploring mathematics future teachers' learning of didactic notions. *Indivisa. Boletín de Estudios e Investigación, Monografía XII*, 223-235. Obtenido de <http://funes.uniandes.edu.co/431/1/GomezP09-2909.PDF>
- Gómez, P. y González, M. J. (2013a). Papel del análisis didáctico en el diseño de planes de formación de profesores de matemáticas. En G. Obando (Ed.), *Memorias del 13er Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 656-674). Medellín, Colombia: ASOCOLME.
- Gómez, P. y González, M. J. (2013b). Diseño de planes de formación de profesores de matemáticas basados en el análisis didáctico. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en Educación Matemática. Formación de profesores, innovación curricular y metodología de investigación* (pp. 121-139). Granada, España: Comares.

- Gómez, P. y Restrepo, Á. M. (2010). Organización del aprendizaje en programas funcionales de formación de profesores de matemáticas. En G. García (Ed.), *11º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 22-32). Bogotá, Colombia: CENGAGE Learning.
- González, M. J. y Gómez, P. (2008). Significados y usos de la noción de objetivo en la formación inicial de profesores de matemáticas. *Investigación en educación matemática XII*, 425-434.
- González, M. J. y Gómez, P. (2014). Conceptualizing and describing teachers' learning of pedagogical concepts. *Australian Journal of Teacher Education*, 39(12), 13-30. doi: 10.14221/ajte.2014v39n12.2
- González, M. J., Gómez, P. y Restrepo, Á. M. (en prensa). Usos del error en la enseñanza de las matemáticas. *Revista de Educación*, 370, 71-95. doi: 10.4438/1988-592X-RE-2015-370-297
- Hill, H. C. (2011). The nature and effects of middle school mathematics teacher learning experiences. *Teachers College Record*, 113(1), 205-234.
- Hurrell, D. P. (2013). What teachers need to know to teach mathematics: an argument for a reconceptualised model. *Australian Journal of Teacher Education*, 38(11), 54-64. doi: 10.14221/ajte.2013v38n11.3
- Lupiañez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Granada, Granada, España.
- OCDE. (2003). *Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en matemáticas, lectura, ciencias y solución de problemas*. Madrid, España: Ministerio de Educación y Ciencia. Obtenido de <http://www.oecd.org/pisa/39732603.pdf>
- OCDE. (2005). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana*. Madrid, España: Santillana. Obtenido de <http://www.oecd.org/pisa/39732493.pdf>
- Polo, I., González, M. J., Gómez, P. y Restrepo, A. M. (2011). Argumentos que utilizan los futuros profesores cuando seleccionan tareas matemáticas. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 491-502). Ciudad Real, España: SEIEM.
- Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Ed.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Barcelona, España: ICE-Horsori.
- Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Ed.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona, España: ICE-Horsori.
- Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *PNA*, 5(4), 129-145.
- Schoenfeld, A. H. (2000). Purposes and Methods of Research in Mathematics Education. *Notices of the American Mathematical Society*, 47(3), 641-649. doi: 10.1007/0-306-47231-7_22
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Suavita, M. A. (2012). *Aprendizaje de profesores sobre el organizador del currículo hipótesis de aprendizaje* (Tesis de maestría no publicada). Universidad de Granada, Granada, España.
- Sullivan, P., Clarke, D., Clarke, B., & O'Shea, H. (2010). Exploring the relationship between task, teacher actions, and student learning. *PNA*, 4(4), 133-142.
- Treffers, A. (1993). Wiskobas and Freudenthal. Realistic mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 25(1), 89-108. doi: 10.1007/978-94-017-3377-9_6

Autores

Pedro Gómez. Universidad de los Andes, Colombia. argeifontes@gmail.com

María C. Cañadas. Universidad de Granada, España. mconsu@ugr.es