Eruin Alonso Sánchez Ordoñez

RAZONES, PROPORCIONES Y PROPORCIONALIDAD EN UNA SITUACIÓN DE REPARTO: UNA MIRADA DESDE LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO[1]

Ratio, Proportion and Proportionality: from the Anthropological Theory of Didactics perspective

RESUMEN

En el trabajo con razones y proporciones, un tipo de situaciones ampliamente desarrollado es la repartición de herencias o de premios en efectivo, conocidos comúnmente como repartos proporcionales. En este artículo se analizan, a través de una investigación de intervención, los sistemas de prácticas desplegados por estudiantes de grado séptimo de educación básica, niñas y niños entre 11 y 14 años de edad, en el tratamiento de una situación de reparto proporcional, a saber, repartir un premio entre cuatro personas, las cuales dieron aportes diferentes para la inversión inicial. Además se muestra de qué manera los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad, son usados para enfrentar la situación, estos usos son explicados a partir de los fundamentos teóricos y metodológicos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD).

PALABRAS CLAVE:

- *Razones*
- *Proporciones y proporcionalidad*
- *Situaciones de reparto proporcional directo*
- *Sistemas de prácticas*
- *Teoría Antropológica de lo Didáctico*

[1] El artículo surge del trabajo desarrollado en el proyecto: "*Razones, proporciones y proporcionalidad en términos de variación y correlación entre magnitudes: una posible forma para comprender los caminos y dificultades de los estudiantes en la construcción de dichos objetos matemáticos*". Proyecto realizado como trabajo de tesis para optar al título de Magister en Educación. Línea Enseñanza de las Ciencias y la Tecnología, de la Universidad del Cauca.

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2013) *16* (1): 65-97.
Recepción: Agosto 18, 2011 / Aceptación: Octubre 2, 2012.

ABSTRACT

There are some kinds of situations which are fully developed such as the distribution of a heritance or a prize when teaching ratio and proportions. This article analyzes, with an intervention research, the system of practice that is used by students from 7th grade in elementary school when solving a deployment of proportional distribution. The exercise was to divide a prize into four people, who contributed with different amounts in the initial investment. It also shows how the concepts of ratio, proportion and proportionality are used to solve a problem on a theoretical and methodological basis by using the Anthropological Theory of Didactics (ATD).

KEY WORDS:

- *Proportional distribution*
- *System of practice*
- *ATD*

RESUMO

No trabalho com razões e proporções, um tipo de situação amplamente desenvolvido é a divisão de heranças ou de prêmios em dinheiro, conhecidos normalmente como divisões proporcionais. Neste artigo, são analisados, através de uma pesquisa de intervenção, os sistemas de práticas no tratamento de uma situação de distribuição proporcional aplicados por estudantes de sétimo ano da educação básica. A situação consistiu na distribuição de um prêmio entre quatro pessoas que deram contribuições diferentes no investimento inicial. Mostra também de que maneira os conceitos de razão, proporção e proporcionalidade são usados para enfrentar a situação a partir dos fundamentos teóricos e metodológicos da Teoria Antropológica do Didático (TAD).

PALAVRAS CHAVE:

- *Rações*
- *Proporções e proporcionalidade em situação de reparto*
- *Uma visão a partir da Teoria Antropológica do Didáctico*

RÉSUMÉ

Un genre des situations utilisés largement quand on travaille avec des rapports et proportions sont les répartitions des héritages ou les distributions des prix (des sommes d'argent), connus généralement comme des partages proportionnels. Par le moyen d'une recherche d'intervention, dans cet article on analyse la façon dont les étudiants du septième degré de l'enseignement primaire font face au traitement d'une situation de partage proportionnel. La situation a consisté en la répartition d'un prix entre quatre personnes qui ont fait des apports différents à l'inversion initial. Cette recherche montre aussi la façon dont les concepts de rapport, proportion et proportionnalité sont utilisés par les élèves pour faire face à la situation d'après les fondements théoriques et méthodologiques de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD).

MOTS CLÉS:

- *Partages proportionnels*
- *Systèmes des pratiques*
- *TAD*

1. Introducción

Los repartos proporcionales son trabajados tradicionalmente en el aula de clase a través de situaciones referidas al reparto de herencias, dinero en efectivo y ganancias en compañías comerciales. Tal forma de trabajo generalmente obedece al proceso de enseñar las teorías, los teoremas, los conceptos y las fórmulas que permiten hacer repartos proporcionales con números y a continuación se proponen situaciones como las anteriormente enunciadas para que los estudiantes apliquen directamente lo enseñado. En este sentido, la estrategia de resolución empleada por los estudiantes será aquella que el profesor institucionalizó, la cual se aplicará mecánicamente.

El proyecto de investigación, base del presente artículo, fue desarrollado con estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa "Los Comuneros" ubicada en el municipio de Popayán, ciudad capital del departamento del Cauca (Colombia). Es una institución de carácter público que atiende estudiantes mayoritariamente de los estratos socioeconómicos uno y dos[2], algunos de ellos en condición de desplazamiento forzado. La institución educativa tiene un énfasis en salud[3] y desarrolla un proyecto de acuerdos de convivencia[4], en tal sentido el plan de estudios contempla la inclusión en cada una de las áreas fundamentales (matemáticas, español, ciencias naturales, ciencias sociales, educación física, educación artística, religión, ética, inglés, informática y tecnología) de contenidos y aplicaciones relacionadas con la promoción de la salud, la prevención de la enfermedad y la práctica de los acuerdos de convivencia y ha definido en su Proyecto Educativo Institucional como modelo pedagógico la Pedagogía Dialogante[5]. El plan de estudios en el área de matemáticas ha sido construido tomando como base los Lineamientos Curriculares (1998) y los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (2006) emanados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN). Como estrategia metodológica se

---

2 En Colombia la población está organizada en seis estratos socioeconómicos, numerados del 1 al 6, siendo el 6 el de mayores ingresos económicos y estatus social.

3 Dentro de sus áreas optativas la institución ofrece asignaturas que tienen que ver con la promoción de la salud y la prevención de la enfermedad.

4 Los integrantes de la comunidad educativa han tomado distancia del manual o reglamento tradicional para construir en conjunto unos acuerdos de convivencia que favorezcan el clima escolar.

5 La pedagogía dialogante es un modelo pedagógico que propende por el desarrollo cognitivo, valorativo y praxiológico.

tiene la solución y formulación de problemas y se trabaja el proyecto del juego de ajedrez[6].

El objetivo principal del proyecto de investigación es determinar las estrategias desplegadas por los estudiantes al resolver situaciones de variación y cambio, en particular situaciones referidas a repartos proporcionales. Para tal fin, el carácter proporcional de la situación o el tipo de proporcionalidad no se hizo explícito, para permitir que los estudiantes determinaran si la situación era o no de proporcionalidad y qué tipo de proporcionalidad está presente. A tal proceso de determinación, Modestou y Gagatsis (2010) lo denominan conciencia meta-analógica. Estos autores también agregan que el desarrollo del razonamiento proporcional está ligado a la determinación de la existencia o no de una relación proporcional entre las magnitudes involucradas.

Para Lesh, Post y Behr (1988) la habilidad de los sujetos que les permite,

> Trabajar con situaciones que impliquen la variación, el cambio, un sentido de covariación y comparación múltiple, y la capacidad de procesar y almacenar mentalmente varias piezas de información, se denomina razonamiento proporcional, el cual, está estrechamente ligado con la inferencia y la predicción e involucra tanto métodos de pensamiento cuantitativo como métodos de pensamiento cualitativo. (p. 93)

En cuanto a los procesos de enseñanza y/o aprendizaje de las razones, las proporciones y la proporcionalidad, vale la pena decir que son más de treinta años de investigación y que en este campo, desde una base cognitiva, han tenido una considerable influencia los trabajos de Piaget. A partir de sus estudios, en los que se evidenció la habilidad de los niños para trabajar con ideas de proporcionalidad, se iniciaron discusiones acerca de las comparaciones entre el razonamiento cualitativo y el razonamiento cuantitativo. Por ejemplo, a partir de trabajos realizados en los años sesenta, se concluyó que generalmente la habilidad para razonar proporcionalmente en un sentido cuantitativo aparece después de los 11 o 13 años (Hart, 1988). Esta autora agrega que el razonamiento proporcional es el proceso cognitivo que generalmente se investiga. En este mismo sentido Diez, Palomar, Giménez y García (2007) platean que los trabajos de investigación desarrollados en torno al razonamiento proporcional, en su mayoría, se han centrado en el punto de vista cognitivo. De igual forma, Hart (1988) plantea

[6] La Institución Educativa los comuneros desarrolla unos proyectos propios denominados Proyectos de Integración Comunera (PIC) a los que los estudiantes asisten por interés y por gusto. Uno de estos proyectos es el de ajedrez en el cual se prepara a los estudiantes para participar en torneos intercolegiados.

que luego de los estudios enfocados en investigar el desempeño de los niños en tareas de proporción, investigadores de los años setenta como Lunzer y Pumfrey se preocuparon por describir los métodos que los niños usan para encontrar la respuesta correcta. Así mismo, "Karplus fue uno de los primeros investigadores en categorizar las respuestas de los niños, no como un indicativo de un estado general de razonamiento sino como una demostración de un nivel de comprensión de la proporción" (Hart, 1988, p. 200). En la década de los ochenta Hart y Karplus encontraron que es recurrente el uso de estrategias aditivas por parte de los niños donde se requiere acudir a comparaciones de tipo multiplicativo; Streefland afirmó que el aprendizaje de las razones y las proporciones es un proceso de largo plazo que comienza con una comparación cualitativa. De igual forma, Streefland sugirió que la formalización e introducción de algoritmos no debería darse tan prematuramente y que los niños podrían reconocer mejor las proporciones a través de tareas que sean significativas, útiles y reales para ellos. Finalmente, la fenomenología didáctica de Freudenthal ayudó a los investigadores a relacionar ideas matemáticas complejas con objetos mentales, actividades humanas y fenómenos de la vida real que se adaptan apropiadamente a dichas ideas matemáticas.

Por su parte, Lamon (1994) plantea que:

> El objetivo principal de los esfuerzos de las investigaciones empíricas ha sido documentar las dificultades que tienen los estudiantes con el razonamiento proporcional e identificar el tema, las tareas, y las variables de contexto que afectan la dificultad del problema. El consenso es que la preferencia por estrategias internas o externas[7] depende fuertemente de la variable tareas. La influencia e interacción de esas variables es tan compleja que nos quedamos con pocas implicaciones para la instrucción. (p.100)

Así mismo, Lamon (2007) manifiesta, a partir de la afirmación de Behr y sus colaboradores en 1992[8], que "El dominio de investigación que incluye fracciones, números racionales, y razones y proporciones no ha alcanzado un nivel de madurez desde el cual ofrecer proposiciones empíricas para la enseñanza, esto es, generalizaciones que se deriven directamente desde los hallazgos empíricos" (p. 632). Además, dice que aunque en los documentos publicados por el NCTM (*National Council of Teachers of Mathematics*) en 1998 y en 2000 no se

[7] Las estrategias externas (between) hacen referencia al análisis entre magnitudes y las internas (within) al análisis en la misma magnitud.

[8] Esta afirmación se refiere a su imposibilidad de encontrar suficientes investigaciones que apuntaran específicamente a la enseñanza de los números racionales.

ofrecen sugerencias para la enseñanza del razonamiento proporcional ni de la proporcionalidad, sí dejan entender implícitamente que esta habilidad de razonamiento es fundamental para el desarrollo del pensamiento matemático y científico. En tal sentido, Lamon (2007) concluye que se hace indispensable tomar conciencia de la urgencia de superar las dificultades de los estudiantes y de los adultos para razonar proporcionalmente y que la instrucción podría jugar un rol activo en la atención de esta emergencia. Los planteamientos de Lamon, fundamentados en resultados de investigaciones sobre razones, proporciones, proporcionalidad y números racionales realizadas entre 1992 y 2007, dejan entrever que para efectos de la acción en el aula todavía se necesita más investigación para mejorar la comprensión de lo que pasa efectivamente en ella.

Desde el punto de vista de la Teoría Antropológica de la Didáctica (Artigue, 2002; Bosh & Chevallard, 1999; Chevallard, 2003; García, 2005), en documentos donde se cuestiona la estructura del conocimiento matemático en la escuela, se menciona que no es suficiente el análisis didáctico de los aspectos de orden cognitivo y matemático, sino que también se debe incluir la organización escolar. Más precisamente, los cuestionamientos a la organización de las razones, las proporciones y la proporcionalidad se han hecho, por ejemplo, desde la desarticulación del currículo.

Al respecto, García (2005) en su tesis de doctorado se plantea por medio de preguntas su problema de investigación:

> ¿Cómo diseñar organizaciones didácticas que permitan articular el conjunto de relaciones entre magnitudes propuestas en el currículo de matemáticas, tanto entre los temas y áreas de una misma etapa como entre las diferentes etapas educativas? ¿Qué características específicas debería poseer una organización didáctica escolar para poder retomar los contenidos antiguos en torno a los sistemas de variación, incluso los estudiados en etapas educativas anteriores, cuestionarlos, desarrollarlos e integrarlos en organizaciones matemáticas más amplias y complejas? (p. 180)

Es decir, se centra en estudiar, desde los elementos teóricos y metodológicos de la TAD, el problema de la desarticulación de las matemáticas escolares, a partir de los procesos de modelización.[9]

Complementariamente, Gascón (2010) dice que el fenómeno de desarticulación de las organizaciones matemáticas, y particularmente el aislamiento escolar

9 La modelización se entiende como el establecimiento de relaciones entre las matemáticas y el mundo real (el mundo real incluye desde la realidad cotidiana hasta la realidad de otras disciplinas científicas).

de la proporcionalidad, ha estado latente desde mediados de los años noventa. A partir de esta consideración, se hace un llamado para cuestionar el modelo epistemológico de la proporcionalidad, presente en los libros de texto y en los diseños curriculares y que se ha vuelto dominante en la institución escolar. En este cuestionamiento se pone en duda hasta qué punto es conveniente aislar la proporcionalidad como objeto de investigación y como objeto de conocimiento matemático para ser enseñado. En tal sentido el autor propone que "El problema didáctico de la proporcionalidad debe ser integrado en el estudio mucho más comprensivo del problema de la enseñanza-aprendizaje de las relaciones funcionales entre magnitudes" (p. 17). Al mismo tiempo propone que para dar una respuesta al problema didáctico anteriormente esbozado es necesario cuestionar las razones de ser de dichas relaciones funcionales, es decir, determinar la pertinencia de trabajar en el aula de clase este tipo de relaciones.

Por su parte, Arzarello, Bosch, Gascón y Sabena (2008) plantean que otro problema para analizar es cómo describir el complejo de ostensivos y su función en la dinámica praxeológica institucional. Por ejemplo, si se considera el caso de la proporcionalidad y de la función lineal, con el fin de comprender las condiciones de evolución de la actividad matemática realizada por los estudiantes en una clase; es importante saber qué herramientas ostensivas les está permitido utilizar y cómo dichos ostensivos les ayudan (o les dificultan) para relacionar la proporcionalidad con otros tipos de praxeologías matemáticas enseñadas.

Además, García (2005) muestra, desde el análisis de los libros de texto usados en la Educación Secundaria Obligatoria (ESO), la excesiva forma aritmetizada como se ha trabajado la proporcionalidad, y exhibe como Chevallard a través de investigaciones desarrolladas entre los años 1985 y 1989 logró realizar una nueva propuesta de trabajo algebraico que trajo consigo una ruptura respecto de la visión del álgebra como aritmética generalizada. Estos trabajos de Chevallard fueron complementados por Bosch en 1991 y 1994.

Los planteamientos anteriores muestran, por un lado, el cuestionamiento que se hace a la organización institucional que se le ha dado a las razones, las proporciones y la proporcionalidad así como el papel de las praxeologías como mecanismos explicativos de la actividad matemática de los alumnos en el aula. Por otro lado, se pone en evidencia la necesidad de seguir construyendo un marco teórico adecuado desde la organización del conocimiento matemático en el aula, considerando aspectos de tipo cognitivo, didáctico, matemático, pero sobre todo, epistemológico; en relación con las razones, las proporciones y la proporcionalidad. Igualmente, se requiere identificar otras situaciones y acciones que permitan, por un lado, dar forma a los objetos razón, proporción y proporcionalidad como objetos matemáticos que contribuyen al entendimiento y dominio del campo conceptual multiplicativo por parte de los estudiantes, y por el otro, identificar la manera como son reconocidas y manipuladas las razones, las proporciones y la proporcionalidad por los estudiantes en situaciones de aula.

Apuntando a satisfacer estos requerimientos se diseñó la situación de reparto, objeto de análisis de este artículo, la cual consistió en repartir una cantidad de dinero en efectivo entre cuatro personas, las cuales dieron aportes diferentes para la inversión inicial. Para este efecto, se contaba con dos series de cantidades covariantes, es decir, series de cantidades que están relacionadas de alguna forma y que además cambian conjuntamente, además podemos decir que existe una relación constante entre estas dos cantidades. Lamon (2007) define la proporcionalidad directa como el constructo matemático que caracteriza la condición o estructura subyacente a este tipo de situaciones y afirma que en la comprensión de la proporcionalidad juega un papel importante la constante de proporcionalidad, la cual expresa la razón constante de las dos cantidades que covarían, cuando dicha covariación se modela a través de una función lineal de la forma $y=kx$ donde k es dicha constante. Para esta autora, la constante de proporcionalidad es un elemento que no es de fácil comprensión para los estudiantes debido a que desde el punto de vista práctico, al enfrentar situaciones de proporcionalidad ocurre que en cada una de ellas surge un valor constante, que no necesariamente será el mismo para otras situaciones o quizá para la misma situación si se cambian algunas condiciones iniciales. En este sentido, es difícil determinar la denominada constante de proporcionalidad, puesto que contrario a lo que sucede con la constante de gravitación en la física (que siempre toma el mismo valor y no depende de las condiciones particulares de cada situación, es decir, que es universal), la constante de proporcionalidad sería más bien relativa.

Ahora bien, al examinar las soluciones exhibidas por los estudiantes se encontró un conjunto de conceptos y de teoremas (roles de la razón, análisis escalares y funcionales, isomorfismos de medidas) presentes de manera informal y a un nivel previo[10] en los sujetos a través de lo que Vergnaud (1983, 1990) denomina teoremas y conceptos en acto o en acción.

Para el desarrollo del artículo inicialmente se presentan los elementos teóricos-metodológicos de la Teoría Antropológica de la Didáctica, después la organización matemática de los repartos proporcionales, es decir, las teorías y las tecnologías que sustentan las técnicas de resolución, seguida de una descripción de la metodología, de la población objeto de estudio y del método empleado, para finalmente presentar los sistemas de prácticas de los estudiantes acompañados de una discusión de los resultados.

[10] Hace referencia a preconceptos o conocimientos previos de los sujetos.

2. Elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico

Bosh y Chevallard (1999) consideran que el saber matemático es una forma particular de conocimiento y es el fruto de la acción humana en contextos institucionales.[11] Tal fruto es un conjunto de objetos abstractos (o abstracciones) entre los cuales se establecen relaciones y se determinan sus propiedades. El análisis del conocimiento matemático como un conjunto de prácticas sociales institucionalizadas requiere de una forma de análisis que permita la descripción y el estudio de las condiciones de su realización. Dicho análisis, es lo que desde la TAD se ha denominado organización matemática (OM) o praxeología, o en palabras de Espinoza y Azcárate (2000) una OM permite modelizar el conocimiento matemático como actividad humana.

Estas praxeologías, propuestas por el enfoque antropológico, están compuestas por tipos de situaciones (S), problemas π y técnicas τ, las cuales constituyen la praxis o conocimientos técnicos y de tecnologías y teorías que constituirán el logos o saber. Según Espinoza y Azcárate (2000) las técnicas τ se entienden como ciertas maneras de hacer, esto es, como procedimientos que pueden ser empleados para resolver los problemas; las tecnologías θ como los discursos que sustentan, describen, explican y justifican los procesos matemáticos que ahí se encuentran involucrados y los cuales se espera sean más adelante institucionalizados en los procesos de enseñanza y de aprendizaje. La teoría Θ se entiende como el argumento formal que permite justificar rigurosamente dicha tecnología.

Además de las (OM), que conviven en la institución y que tienen que ver con la realidad matemática objeto de estudio, también tenemos las organizaciones didácticas (OD), que se refieren a la manera como tal estudio se da. La noción de estudio, desde la TAD, se aplica en un ámbito más amplio que el del aula de clase y que el de las instituciones didácticas, puede incluir desde la actividad de los investigadores o desde los comerciantes hasta la de los estudiantes. En tal sentido, el proceso de estudio tiene que ver tanto con el proceso de creación de una organización matemática como con el producto de dicho proceso.

[11] Chevallard (2003) toma el concepto de institución en forma amplia, no únicamente en el sentido burocrático. Una Institución es un dispositivo social “total”, que sin duda puede tener una extensión muy pequeña en el espacio social, que permite e impone a sus objetos la ejecución de maneras propias de hacer y de pensar (p. 2). A partir de esta definición de Chevallard, es posible considerar como instituciones a la familia, a la clase de matemáticas, al mismo sistema educativo, al lenguaje, entre otras.

Bajo esta consideración de conocimiento o de saber matemático, se entiende la existencia de los objetos desde el punto de vista relacional, es decir, la existencia de un objeto de conocimiento matemático está ligada al reconocimiento que los sujetos o toda una institución hagan de él. Ahora bien, tal relación (objeto – sujetos, objeto - institución) está enmarcada dentro de las prácticas sociales, por lo tanto, cuando en una institución uno o varios sujetos realizan una acción con un objeto puede decirse que se conoce el objeto. (Bosch & Chevallard, 1999)

Los planteamientos anteriormente expuestos permiten determinar que los objetos de conocimiento matemático surgen de prácticas con las matemáticas ubicadas en diversos contextos geográficos y culturales, en tal sentido, D'Amore y Godino (2007), Godino, Batanero y Font (2009) entienden una práctica matemática como una actuación particular o conjunto de actuaciones, en el abordaje de problemas matemáticos específicos (de un individuo o de una institución). Esta práctica está determinada por formas de razonar, comunicar, validar o generalizar y habitualmente no existe de manera aislada sino que está asociada a sistemas de prácticas que interaccionan entre sí.

3. Organización matemática de los repartos proporcionales[12]

A continuación se presenta la situación (S), el problema π, las técnicas τ, las tecnologías θ y las teorías Θ que permiten la organización de los procesos de estudio que orientaron la intervención pedagógica realizada con los estudiantes del grado séptimo[13] del presente trabajo.

[12] Las definiciones al igual que las tipologías que se presentan en esta sección han sido tomadas de una comunicación interna denominada "*Praxeologías matemáticas en torno al número racional, las razones, las proprociones y la proporcionalidad"* elaborada por Obando, Vasco y Arboleda (2009), las cuales fueron ampliamente debatidas en las distintas sesiones de asesoría abordadas para la elaboración del proyecto, del cual surgió el presente artículo, a las que se ha agregado una organización en función de elementos teóricos de la TAD, toda vez que en la tesis antes mencionada las definiciones y las tipologías no se encuentran organizadas de tal manera.

[13] El sistema educativo colombiano está divido en educación básica y educación media. La educación básica va desde grado primero hasta grado noveno y la media comprende décimo y undécimo.

3.1. *Situación de Repartos proporcionales (rp)*

Son aquellas situaciones en las que se trabaja con una serie de cantidades de magnitud que se comparan entre sí para determinar su comportamiento, ya sea con respecto a otra serie de cantidades de magnitud o de una serie de números. Una forma de modelar estas situaciones es: Sean M_1 una magnitud y $A = \{ a_i \in M_1 , i = 1 , 2 , \ldots , n \}$ una serie de cantidades de magnitud de M_1 con $A \subseteq M_1$ tales que la razón entre cualquier par de ellas sea la misma que la razón entre el par de cantidades correspondientes en otra serie de cantidades de magnitud $B = \{ b_i \in M_2 , i = 1 , 2 , \ldots , n \}$ de M_2 con $B \subseteq M_2$, entonces

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} .$$

Esta expresión nos muestra, por un lado, que no es suficiente con reconocer las series de razones que se deben comparar, sino también reconocer que esa serie de razones son iguales entre sí, pero sobre todo que existe una relación aditiva entre ellas, esto es, la razón de la suma de todas las cantidades de magnitud M_1 a la suma de todas las cantidades de magnitud M_2 es igual a las razones de dicha serie.

El problema asociado con esta situación es π_{rp}: Sean M_1 una magnitud, $A = \{ a_i \in M_1 , i = 1 , 2 , \ldots , n \}$ una serie de cantidades de magnitud de M_1 con $A \subseteq M_1$ tales que guarden la misma proporción que una serie de cantidades de magnitud $B = \{ b_i \in M_2 , i = 1 , 2 , \ldots , n \}$ de M_2 con $B \subseteq M_2$. Conociendo la serie de cantidades de magnitud *A* y la suma de todas las cantidades de magnitud de la serie *B* Determinar cada uno de los valores de la serie *B*. Las técnicas relacionadas son:

τ^1_{rp}: Realizar las siguientes operaciones	– Dividir la suma de las cantidades de magnitud de la serie *A* entre la suma de las cantidades de magnitud de la serie *B*. – Multiplicar (o dividir) el cociente obtenido anteriormente por cada cantidad de magnitud de *B* para encontrar la cantidad de magnitud correspondiente en *A*.

τ^2_{rp}: Realizar los siguientes procedimientos	– Plantear la proporción $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n} (i=1,2,\ldots,n)$. – Calcular el respectivo b_1.
τ^3_{rp}: Realizar los dos procedimientos siguientes	– Determinar que parte es a_1 con respecto a la suma de todas las cantidades de magnitud a_1. – Aplicar la parte obtenida a la suma de todos los b_1 para determinar el b_1 correspondiente.
τ^4_{rp}: Expresar mediante una representación tabular la forma como se correlacionan las series de cantidades A y B.	
τ^5_{rp}: Realizar las siguientes operaciones	– Dividir la cantidad de magnitud a_1 entre la cantidad de magnitud b_1 (o viceversa). – Multiplicar o dividir la cantidad de magnitud a_2 por la cantidad $\frac{a_1}{b_1}$ (o $\frac{b_1}{a_1}$).
τ^6_{rp}: Determinar cuántas veces aumenta (o disminuye) la cantidad de magnitud a_2 con respecto a la cantidad de magnitud a_1 y aplicar este mismo aumento (o diminución) a la cantidad de magnitud b_1 para hallar b_2.	
τ^7_{rp}: Determinar el valor de una cantidad b_i como una suma de las cantidades de magnitud de B correspondientes a cada $a_i \in A$.	
τ^8_{rp}: Determinar el valor de una de las cantidades de magnitud a partir de una representación (tabular, cartesiana, estadística o icónica) realizada.	

3.2. *Tecnologías*

A continuación se presentan y codifican[14] las tecnologías, las cuales inicialmente aparecen en los estudiantes en un nivel intuitivo como conceptos y teoremas

[14] Para la codificación de las tecnologías se han utilizado subíndices de dos letras los cuales corresponden a las iniciales del nombre de la tecnología.

en acto, en el sentido de Vergnaud (1983,1990) y más adelante deberán ser formalizados e institucionalizados en el proceso de enseñanza.

3.2.1. *Análisis escalar* (θ_{ae})

Tiene que ver con el hecho de poner en relación las variaciones de una de las magnitudes con respecto a las variaciones en la otra (o cuando se analizan las relaciones entre las cantidades de la misma magnitud). El análisis escalar se basa en las dos primeras propiedades de la función lineal, lo cual permite la realización de procedimientos de gran utilidad en el tratamiento de las situaciones, ya que centran su estudio en los procesos de variación, esto es, en determinar cómo varían las cantidades de magnitud de una misma magnitud para luego trasladar dicha variación a las correspondientes cantidades de magnitud de la otra magnitud. El análisis escalar implica reconocer que dadas M_1 y M_2 dos magnitudes, a_1 y a_2 dos cantidades de magnitud de M_1, y b_1 una cantidad de magnitud de M_2; si $b_1 = (a_1 + a_2)$ y si $b_1 = \lambda a_1$ entonces $f(b_1) = f(a_1) + f(a_2)$ y $f(b_1) = \lambda f(a_1)$, respectivamente. En este caso λ es un número racional sin unidades, denominado factor escalar, el cual resulta del cociente entre cualesquiera dos cantidades de magnitud de una misma magnitud y puede ser interpretado como una razón.

3.2.2. *Análisis funcional* (θ_{af})

Se debe reconocer que para cualquier par de valores a_1, $f(a_1)$ se tiene que $f(a_1) = \lambda a_1$, donde λ es un número racional con unidades, llamado constante de proporcionalidad. En este caso se pretende establecer una relación funcional entre las cantidades de magnitud de una magnitud y su correspondiente valor en la otra magnitud.

3.2.3. *La cuarta proporcional* (θ_{pr})

Generalmente se establece que la razón entre dos cantidades de magnitud es igual a la razón entre otras dos cantidades de magnitud, o más específicamente, se plantea una relación entre relaciones, ésta es una relación de equivalencia y ya no corresponde a una razón sino a una proporción. Formalmente, dadas M_1 y M_2 dos magnitudes relacionadas en un sistema lineal con a_1 y a_2, dos cantidades de magnitud de M_1 y b_1 y b_2, las cantidades de magnitud correspondientes en la magnitud M_2 se cumple que para estas cuatro cantidades de magnitud se verifica la siguiente relación: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$

3.3. *Las teorías presentes en una situación de reparto proporcional*

La razón

Tradicionalmente los libros de texto y los maestros han definido la razón como el cociente indicado entre dos números enteros. Por su parte en el libro V de los Elementos de Euclides se define así: "Una razón es una clase de relación con respecto al tamaño entre dos magnitudes de la misma clase[15]". (Heath, 1908, p. 114). En este caso Heath considera que la expresión "relación con respecto al tamaño" puede ser interpretada como un sinónimo de magnitud relativa, esto es, dadas M_1 y M_2 dos magnitudes, y a_1, b_1 cantidades de magnitud de cada magnitud, respectivamente, con b_1 la unidad de medida. La razón de a_1 a b_1 puede entenderse como una especie de cuantificación (quantuplicity) de a_1 con respecto a b_1, en otros términos, como relación parte todo: la cantidad de magnitud a_1 expresa cuántas veces está contenida en la cantidad de magnitud b_1.

Por tanto, en general, se puede considerar una razón como una especie de cantidad que afirma un tipo de relación entre dos cantidades fijas. Esto es, la razón expresa una forma de comparación entre estas dos cantidades y puede obrar como relator o como operador.

3.3.1. *Razón como relator*

Dadas dos magnitudes M_1 y M_2 y dos cantidades de magnitud a_1 y b_1 que pertenecen a M_1 y M_2 respectivamente. Se determina una cantidad $\rho = R(a_1, b_1)$ entre las dos cantidades de magnitud dadas. Esta relación, R, es de carácter cuantitativo y se puede expresar como sigue:

$$\mathrm{R}: M_1 \times M_2 \rightarrow Q$$

$$(a_1, b_1) \rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \rho = R(a_1, b_1)$$

Se debe tener en cuenta que si M_1 y M_2 son magnitudes homogéneas entonces ρ es una cantidad numérica que expresa la relación parte-todo entre las dos cantidades comparadas. En este caso Q es el conjunto de los números racionales o más generalmente, los reales. Si M_1 y M_2 son magnitudes heterogéneas, entonces ρ es una cantidad con unidades que expresa la cantidad de unidades de a_1 por cada unidad de b_1, en cuyo caso Q puede ser una nueva cantidad.

15 En el lenguaje moderno las magnitudes de la misma clase se denominan homogéneas.

3.3.2. *Razón como operador*

La razón puede ser usada para ampliar o achicar y será vista como un operador. Sean M_1 y M_2 dos magnitudes y a_1 y b_1 dos cantidades de magnitud que pertenecen a M_1 y M_2 respectivamente luego existe una operación unaria, O, de la forma:

$$O: M_1 \rightarrow M_2$$

$$a_1 \rightarrow O(a_1) = \rho \times a_1 = b_1$$

Si M_1 y M_2 son magnitudes homogéneas entonces ρ es una cantidad numérica que expresa un factor de ampliación o reducción que, aplicado sobre la cantidad de magnitud a_1 produce la cantidad de magnitud b_1. Ahora, Si M_1 y M_2 son magnitudes heterogéneas, entonces ρ es una cantidad con unidades que actúa como operador transformando la cantidad de magnitud a_1 en la cantidad de magnitud b_1.

3.4. *Las transformaciones lineales*

Una transformación lineal es una función f de un espacio vectorial real M_1 en un espacio vectorial M_2 que asigna a cada vector $a \in M_1$ un único vector $af \in M_2$ y que satisface las siguientes propiedades:

Propiedades de las transformaciones lineales:

i. Homogeneidad con respecto a la suma: $f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2)$

ii. Homogeneidad con respecto a la multiplicación por un escalar: $f(\lambda a) = \lambda f(a)$

iii. $\forall a \in M_1, \dfrac{f(a)}{a} = \alpha$

Las anteriores propiedades pueden enunciarse así:

> Dadas M_1 y M_2 dos magnitudes relacionadas en un sistema lineal, a_1 una cantidad de magnitud de M_1 y b_1 una cantidad de magnitud de M_2 se cumple que:
>
> Cuando la cantidad de magnitud a_1 aumenta al doble, al triple, ..., la cantidad de magnitud b_1 aumenta al doble, al triple, ...
>
> Cuando la cantidad a_1 disminuye a la mitad, a la tercera parte, ..., la cantidad b_1 disminuye a la mitad, a la tercera parte, ...

A partir de esta definición de transformación lineal y de la enunciación de sus propiedades se establece una relación con la proporcionalidad simple directa en el sentido que se cuenta con dos magnitudes y sus respectivas series de cantidades de magnitud que se correlacionan linealmente mediante una relación funcional de la forma:

$$f\colon M_1 \rightarrow M_2$$

$$a_1 \rightarrow f(a_1) = k \times a_1 = b_1$$

donde k es la llamada constante de proporcionalidad y f es una función lineal que representa tal proporcionalidad. Bajo este sustento teórico se da la siguiente definición de uno de los roles de la razón:

Razón como correlator entre cantidades

La razón puede expresar una propiedad invariante a dos series de cantidades de magnitud, que se pueden poner en correspondencia uno a uno, y donde la razón es el operador lineal que permite definir la función que correlaciona ambos conjuntos, esto es, a través de la razón se puede establecer una correlación entre dos cantidades de magnitud. Dadas dos magnitudes M_1 y M_2 y dos series de cantidades de magnitud M_1 y $A = \{a_i \in M_1, i = 1, 2, \ldots, n\}$ y $B = \{b_i \in M_2, i = 1, 2, \ldots, n\}$ con $A \subseteq M_1$ y $B \subseteq M_2$, que cumplen con la condición que para todo $a_i \in A$ existe un único $b_i \in B$ tal que $\frac{b_i}{a_i} = \frac{b_2}{a_2} = \ldots = \frac{b_n}{a_n} = \rho$ entonces existe una función F tal que:

$$F\colon A \rightarrow B$$

$$a_1 \rightarrow f(a_1) = \rho \times a_1 = b_1$$

de donde se tiene que para todo $a_i \in A$ y para todo $b_i \in B$ $\rho = \frac{b_i}{a_i}$

La razón ρ es un transformador lineal que aplicado sobre cantidades de magnitud de A, produce cantidades de magnitud correspondientes en B. Al igual que en la razón como relator o como operador las series de cantidades de magnitud A y B, pueden ser homogéneas o no. En el caso de ser homogéneas ρ será un número real, mientras que si son heterogéneas será una cantidad con unidades.

4. Una investigación de intervención

La experiencia profesional como docente de básica (grado 1 a grado 9) y media (grados 10 y 11) llevó a descubrir la necesidad de realizar una investigación desde la propia práctica profesional, puesto que se tenía una cierta información del trabajo de los alumnos, se había reflexionado sobre sus respuestas, sobre sus gestos, sobre el interés demostrado, entre otras cosas; es decir, en palabras de Ponte, Oliveira, Brunheira, Varandas y Ferreira (1998), se estaba en un proceso de construcción de conocimiento profesional, el cual se basa sobre todo en la experiencia, no sólo individual sino de todo un cuerpo profesional.

En tal sentido, el interés se centra en realizar una investigación desde la práctica. Esto es, que en lugar de esperar soluciones provenientes del exterior, se pretende empezar con la investigación de los problemas a los que se enfrenta el maestro, con una lógica de intervenir y transformar, sabiendo de antemano a dónde se pretende llegar. Para Ponte (2008) la característica definitoria de esta forma particular de investigación se refiere justo al hecho de que el investigador tiene una relación muy particular con el objeto de estudio: él no estudia un objeto, sino un cierto aspecto de su práctica profesional. De este modo se empieza a hablar menos del profesor como investigador y cada vez más de la investigación sobre la propia práctica. Según Ponte (2008) los artículos sobre investigación, ponen de manifiesto que realizar investigación sobre la propia práctica es una actividad que puede despertar gran interés en los respectivos actores y que es susceptible de proporcionar implicaciones significativas para su práctica profesional.

Cochran – Smith (2003) resume así esta perspectiva:

> Asumir una investigación como forma de ser profesional significa que los profesores y futuros profesores trabajan en comunidades de investigación para generar conocimiento local, dar perspectiva y teorizar su práctica, interpretar e interrogar una teoría y la investigación de los demás. Fundamental en esta noción es la idea de que el trabajo en comunidades de investigación es social y político, es decir, implica problematizar las actuales formas de organización de la escuela; las formas como se construye el conocimiento, evalúa y usa, y los papeles individuales y colectivos de los profesores para promover un cambio. (p. 8)

Esta forma de trabajo investigativo es a lo que se denomina una investigación de intervención y es la que se adoptó en la investigación de la cual surgió el presente artículo.

El método

La actividad que permitió la recolección de la información se desarrolló durante la jornada habitual de los estudiantes de grado séptimo[16] pero por fuera de la clase normal de matemáticas. A los estudiantes se les entregó, de manera individual, una fotocopia en donde estaba escrita la guía de trabajo que debían realizar con la situación de reparto proporcional y algunas preguntas de reflexión surgidas de ella. La actividad tomó cuatro horas, divididas en dos sesiones de dos horas cada una, las que se realizaron en dos días diferentes. Al final de las dos sesiones fueron recogidas las producciones escritas de los estudiantes para analizar sus respuestas y soluciones. El método empleado para el análisis de las estrategias desplegadas integra:

- Un análisis previo de situaciones, tomando como modelo el esquema presentado en (Obando, Vanegas, & Vásquez, 2006; Posada, 2006) que consistió en anticipar cuáles serían las posibles respuestas de los estudiantes y cómo resolvería las situaciones un experto. En este análisis se identificó si los estudiantes recurrían a análisis escalares o a análisis funcionales y se determinó cuál era el rol jugado por la razón en las diversas posibles soluciones, es decir, si la razón obraba como relator, como operador o como correlator entre cantidades de magnitud, según (Obando, et al., 2009), las cuales son consideradas como una parte del bloque teórico que soporta las técnicas empleadas para resolver los problemas de los distintos tipos de situaciones.
- El análisis de las soluciones dadas por los estudiantes a la situación tiene un carácter cualitativo y obedece a descripciones de los procesos empleados. Aunque se cuenta el número de estudiantes que desarrollaron una u otra estrategia, éste se toma como referencia pero no como un elemento básico de interpretación, es decir, no se elaboraron tablas de frecuencia con esas cantidades.

[16] Las edades de los estudiantes oscilan entre 11 y 14 años. Este grupo de estudiantes aún no había realizado un estudio formal sobre las razones, las proporciones y la proporcionalidad.

5. Gestión de la situación "Repartamos el premio"

Situación

Luisa, Pedro, José y Martha (*que no se conocen*) compraron una boleta para la rifa de 12'000.000 de pesos en efectivo. El valor total de la boleta es $10.000. Para la compra Luisa aportó 1.000 pesos, Pedro 2.000, José 3.000 y Martha 4.000 pesos.

(Recuerda escribir las operaciones que realizas)

1. Si las cuatro personas se ganan la rifa :
   a. ¿Quién recibe más dinero? ¿Por qué?
   b. ¿Quién recibe menos dinero? ¿Por qué?
   c. ¿Qué cantidad de dinero le corresponde a cada uno?
2. ¿Cuánto debería recibir José si su aporte hubiese sido de 5.000 pesos?
3. ¿Cuánto debería recibir Martha si su aporte hubiese sido de 7.000 pesos?
4. ¿Cuánto debería haber aportado una de las cuatro personas si hubiese querido ganarse $9'000.000?
5. ¿Cuánto debería haber aportado una de las cuatro personas si hubiese querido ganarse $5'400.000 pesos?
6. ¿Cómo se calcularía la cantidad de dinero recibido de acuerdo con la cantidad de dinero aportado?
7. ¿Cómo se calcularía la cantidad de dinero aportado de acuerdo con la cantidad de dinero que se quiere recibir?
8. El realizador de la rifa informa que en una anterior ocasión realizó la repartición de acuerdo con la siguiente tabla:

Aporte	$500	$1.500	$3.000	$5.000
Premio	$500.000	$1'500.000	$3'000.000	$7'000.000

¿Consideras que está correctamente distribuido el premio? ¿Por qué?

Análisis previo.

La pregunta 1c requiere la determinación de la cantidad de dinero que corresponde a cada uno, en este sentido, las técnicas de resolución asociadas al tipo de problema π_{rp} apuntan a comprobar inicialmente que \$1.000 + \$2.000 + \$3.000 + \$4.000 = \$10.000 (valor total de la boleta); lo cual está sustentado en la teoría de las transformaciones lineales. Además se esperan algunos de los siguientes procedimientos:

Luisa puso la décima parte de la cantidad total de dinero aportado, entonces debe recibir la décima parte de \$12'000.000, es decir, \$1'200.000. Procedimiento que se corresponde con la técnica τ^3_{rp}. Y este resultado podría utilizarse para decir que por cada \$1.000 se recibe \$1'200.000. Aquí se está apoyando en un análisis escalar, tecnología θ_{ae} y la teoría de las transformaciones lineales puesto que al sacar la décima parte de una cantidad en una serie (valor aportado), se reduce a la décima parte el valor correspondiente en la otra serie (valor a recibir). Teniendo esta respuesta para Luisa, el estudiante para determinar el valor del premio correspondiente a los demás puede emplear la técnica τ^4_{rp}, en este caso se construye la siguiente tabla:

TABLA I
Distribución del premio por cada mil pesos de aporte.

M_1	M_2	
\$1.000	\$1'200.000	Lo que le corresponde a Luisa
\$2.000	\$2'400.000	Lo que le corresponde a Pedro
\$3.000	\$3'600.000	Lo que le corresponde a José
\$4.000	\$4'800.000	Lo que le corresponde a Martha
\$5.000	\$6'000.000	Lo que recibiría José si aumenta el aporte
\$6.000	\$7'200.000	
\$7.000	\$8'400.000	Lo que recibiría Martha si aumenta su aporte
\$8.000	\$9'600.000	
\$9.000	\$10'800.000	
\$10.000	\$12'000.000	

O emplear la Tabla i, técnica τ^8_{rp}, y determinar, fundamentado en la tecnología θ_{ae} cuánto le corresponde a Pedro, a José y a Martha.

Sin construir alguna tabla el estudiante podría, para encontrar el valor del premio recibido, utilizar el valor obtenido para Luisa y determinar mediante la técnica τ^6_{rp} que: Pedro invirtió el doble de Luisa luego debe recibir $2\times\$1'200.000 = \$2'400.000$; José invirtió el triple de Luisa luego debe recibir $3\times\$1'200.000=\$3'600.000$ y Martha invirtió el cuádruple de Luisa por lo tanto recibe $4\times\$1'200.000=\$4'800.000$ o también que Martha invirtió el doble de lo invertido por Pedro por lo tanto debe recibir $2\times\$2'400.000=\$4'800.000$. En todos los casos la técnica se fundamenta en un análisis escalar.

También se puede recurrir a un procedimiento fundamentado en la tecnología de las proporciones θ_{pr} apoyada en la teoría de la razón como correlación entre cantidades para buscar el tercer valor en la serie de razones

$$\frac{\$1'200.000}{\$1.000} = \frac{?}{\$2.000} = \frac{?}{\$3.000} = \frac{?}{\$4.000}.$$

O bien, aunque no se plantee explícitamente la serie, se calcule el cuarto valor tomando de dos en dos razones. Es posible que se recurra a las razones formadas con los inversos multiplicativos, esto es,

$$\frac{\$1.000}{\$1'200.000} = \frac{\$2.000}{?} = \frac{\$3.000}{?} = \frac{\$4.000}{?}.$$

Dividir el valor del total del premio \$12'000.000 entre el valor total de la boleta \$10.000, es decir, $\rho = \frac{\$12.000.000}{\$10.000} = \frac{\$1.200}{\$1}$, lo que indica que por cada peso (\$) invertido se ganan \$1.200. Al observar el uso de la primera parte de la técnica τ^1_{rp}, que se fundamenta en la teoría de la razón como relator.

Para determinar el premio a recibir por cada uno de los otros aportantes, se utiliza la segunda parte de la técnica τ^1_{rp}, que consiste en utilizar como operador el valor de la razón como relator encontrada con la técnica anterior, es decir, $\rho(\$2.000) = \frac{\$1.200}{\$1} \times \$2.000 = \$2'400.000$ para el caso de Pedro. Un procedimiento análogo se emplearía para las otras dos personas, aquí se estaría apoyando en la tecnología del análisis funcional.

Teniendo en cuenta que Pedro aportó la quinta parte del valor de la boleta entonces debe recibir la quinta parte de \$12'000.000, es decir, \$2'400.000. Procedimiento que se corresponde con la técnica τ^3_{rp}. Aquí se está apoyando en un análisis escalar, tecnología θ_{ae} y la teoría de las transformaciones lineales puesto que al sacar la quinta parte de una cantidad en una magnitud (valor aportado) se reduce a la quinta parte el valor correspondiente en la otra magnitud (valor a recibir). Si se parte de la respuesta anterior, entonces Luisa debe recibir la mitad de Pedro y Martha el doble de Pedro, esto es, acudir a la técnica τ^6_{rp} sustentada por la tecnología θ_{ae}.

También se puede utilizar un procedimiento fundamentado en la tecnología θ_{pr} para encontrar el tercer valor en $\frac{\$2.400.000}{\$2.000} = \frac{?}{\$1.000}$ (y de manera análoga para las otras dos personas).

Nota: Cuando se encuentran los valores se comprueba que la suma de las cantidades recibidas por cada uno sea \$12'000.000, en efecto \$1'200.000 + \$2'400.000 + \$3'600.000 + \$4'800.00 = \$12'000.000.

Otras respuestas posibles, pero no necesariamente correctas:

Cada uno recibe \$12'000.000 ÷ 4 = \$3'000.000. Aquí no se evidencia un pensamiento proporcional cualitativo.

Emplear la técnica τ^8_{rp}, en este caso construir la siguiente tabla:

TABLA II
Una distribución proporcional.

	APORTE	PREMIO RECIBIDO
	\$ 1.000	\$ 1'500.000
	\$ 2.000	\$ 2'500.000
	\$ 3.000	\$ 3'500.000
	\$ 4.000	\$ 4'500.000
TOTAL	\$ 10.000	\$12'000.000

Nota: Los valores de la columna "premio recibido" pueden ser otros, pero la idea es que el que aporte más reciba más y la suma obtenida sea \$12'000.000. Se evidencia pensamiento proporcional cualitativo y la relación parte-todo, pero no se evidencia presencia de pensamiento multiplicativo.

Para la pregunta 2 las posibles técnicas de solución son:

– Utilizar la Tabla i y determinar, mediante la técnica τ^8_{rp}, el valor que recibiría José.

- Tomar de la Tabla i el valor recibido por Luisa, y a partir de la técnica τ^6_{rp} concluir que José recibiría 5 veces lo que recibe Luisa, es decir, $5 \times \$1'200.000 = \$6'000.000$.
- Nuevamente a través de la técnica τ^6_{rp}, como \$5.000 es la mitad de \$10.000 entonces recibe la mitad del premio.
- Realizar la siguiente operación $\rho(\$5.000) = \frac{\$1.200}{\$1} \times \$5.000 = \$6'.000.000$ que se fundamenta en la teoría de la razón como operador.
- Encontrar el valor desconocido en la expresión $\frac{\$1.200.000}{\$1.000} = \frac{?}{\$5.000}$, procedimiento que tiene como fundamento la tecnología θ_{pr}.

Nota: Los valores de la razón de la izquierda dependen de qué valor de premio se encuentra primero, si el de Luisa, el de Pedro, el de Martha o el de José.

Para la pregunta 3 se pueden aplicar técnicas análogas a las empleadas en la pregunta 2.

Por otro lado, si no se tienen los resultados de la Tabla ii, puede observarse que \$7.000 puede obtenerse sumando \$3.000 + \$4.000 que son los valores aportados inicialmente según el enunciado de la situación por José y Martha respectivamente y por lo tanto para este nuevo aporte Martha recibiría $\$3'600.000 + \$4'800.000 = \$8'400.000$, es decir se acude a la técnica τ^7_{rp} fundamentada en la tecnología del análisis escalar, de la forma $f(\$3.000 + \$4.000) = f(\$3.000) + f(\$4.000)$ y de la linealidad de la función.

Acudiendo a la linealidad de la función y teniendo en cuenta que $\$7.000 = 2 \times \$3.000$ (aporte de José) + \$1.000 (aporte de Luisa) y aprovechando los resultados obtenidos en la pregunta 1 se concluiría que por \$7.000 Martha recibe $2 \times \$3'600.000 + \$1'200.000 = \$8'400.000$, esto es, $f((2 \times \$3.000) + \$1.000) = 2 \times f(\$3.000) + f(\$1.000)$.

Como $\$3.000 + \$7.000 = \$10,000$ y según la pregunta 1 por \$3.000 se reciben \$3'600.000 entonces por \$7.000 se recibe $\$12'000.000 - \$3'600.000 = \$8'400.000$. Aquí se evidencia la utilización de la técnica τ^7_{rp}, pero acudiendo a una resta de cantidades de magnitud.

Las preguntas 4 y 5 también corresponden al tipo de problema π_{rp}. Para saber cuánto dinero aportar si se quiere recibir \$9'000.000, algunas técnicas y/o posibles soluciones serían:

- Dividir \$9'000.000 entre \$12'000.000 y el resultado multiplicarlo por \$10.000. Estrategia que se corresponde con la técnica τ^2_{rp} y se sustenta en el uso de la tecnología de las proporciones θ_{pr}, puesto que implícitamente se pretende encontrar el cuarto valor en la proporción:

$$\frac{\$12'000.000}{\$10.000} = \frac{\$9'000.000}{?}$$

- A partir del valor obtenido al dividir el valor total del premio entre el valor total del aporte, buscar un número que multiplicado por dicha razón dé como resultado \$9'000.000, es decir, se está utilizando el siguiente planteamiento $\rho(?) = \frac{\$1.200}{\$1} \times ? = \$9'000.000$ que se fundamenta en la teoría de la razón como operador.

Nota: Podría emplearse un procedimiento análogo para determinar el monto de la inversión para obtener un premio de \$5'400.000.

Para la pregunta 7. El valor de una cantidad *n* de dinero que se va a recibir puede ser obtenido multiplicando la cantidad de dinero *n* por el valor por peso invertido, es decir, que corresponde a la segunda parte de la técnica τ^5_{rp}, esto es, $\rho(n) = \frac{\$1.200}{\$1} \times n\$$ y se apoya en la tecnología del análisis funcional.

Para la pregunta 8 correspondiente a encontrar la cantidad de dinero *x* que se debe aportar de acuerdo con la cantidad de dinero *n* que se quiere recibir se puede:

- Dividir la cantidad *n* de dinero entre \$1.200, fundamentado en la tecnología de la razón como operador asociada a la segunda parte de la técnica τ^5_{rp}, a saber $\rho(x) = \frac{\$1.200}{\$1} \times x = n$.
- Dividir la cantidad *n* entre \$12'000.000 y multiplicar el resultado por \$10.000, o de otra forma, $n \times \frac{\$10.000.}{\$12'000.000}$ Este resultado proviene de despejar *x* en la proporción $\frac{\$12'000.000}{\$10.000.} = \frac{n}{x}$ procedimiento que es soportado por la tecnología θ_{pr} soportada por la teoría de la razón como correlación entre cantidades. En cierta forma el procedimiento anterior está vinculado con la técnica τ^5_{rp} y con la técnica τ^2_{rp}.

En este ejercicio es posible que surja otro tipo de representación que sería la ecuación $10.000n = 12'000.000x$.

5.1. *Conceptos y tecnologías*

Los conceptos que están involucrados en la situación tienen que ver con: la correspondencia entre dos series *A: Dinero invertido; las cantidades de esta serie corresponden a los* a_i *y B: Dinero recibido; las cantidades de esta serie corresponden a los* b_i que son subconjuntos de una *Magnitud (M)* – dinero en pesos. Por tratarse de valores en pesos ($), la magnitud es continua, esto es, las cantidades de magnitud de *M* pueden ser medidas a partir de números racionales. La teoría que sustenta las tecnologías asociadas a los tipos de problemas que se espera que los estudiantes resuelvan en esta situación de reparto proporcional simple directo es la correspondiente a la estructura formal de las transformaciones lineales. Además se espera que surjan, a un nivel intuitivo, los roles de la razón, como relator, como operador, como correlator entre cantidades, los análisis funcionales y escalares y la cuarta proporcional.

5.2. *Respondiendo las preguntas de reflexión*

Las preguntas ¿Quién recibe más dinero? y ¿Quién recibe menos dinero? exigen de los estudiantes análisis de índole cualitativo, para lo que no se ha codificado una técnica particular. Con respecto a la primera, se encontraron varios tipos de respuesta (las respuestas para la segunda pregunta son análogas), a saber:

"Martha, porque ella aportó más dinero que los demás". Ésta fue la respuesta mayoritaria. Se evidencia el reconocimiento de una de las condiciones de la proporcionalidad directa, esto es, quien aporta más, recibe más.

"Las cuatro personas reciben lo mismo porque todos aportaron para la rifa". Posteriormente, al dialogar[17] individualmente con cada uno de ellos se constató que esta respuesta obedece a dos razones: En la vida cotidiana, cuando estamos entre amigos o entre conocidos y compramos algo de comida o de bebida aportando entre todos, incluso si alguien no aporta, lo que compramos se distribuye en partes iguales. En particular ellos comentan que cuando salen al descanso y van a la tienda del colegio con un amigo, si ellos compran y el otro no tiene dinero para colaborar, lo que se compra se comparte de manera equitativa. En este punto se insistió en suponer que las personas no se conocen, pero su respuesta se mantuvo y fue así como surgió la segunda razón. "*Si uno de los cuatro no hubiera hecho su aporte no se hubiese podido comprar la rifa y ninguno se habría ganado el premio*". Esta respuesta fue dada por cinco estudiantes.

[17] Estos diálogos quedaron registrados en el modo grabador de sonidos de un celular.

Dicho reparto equitativo quedó evidenciado con el hecho de que algunas respuestas a la pregunta 1c, fueron: Cada uno debe recibir \$3'000.000, resultado de dividir \$12'000.000 entre 4, en ella no se evidencia un pensamiento proporcional cualitativo[18]. Al observar que la respuesta se mantenía en este grupo de cinco estudiantes, se intentó, en primera instancia, acudir a un juego popular que tiene que ver con apuestas, el "Chance", pero al preguntárseles si lo habían jugado, todos dijeron que no, que sus papás sí, pero que ellos no sabían cómo se pagaban los premios en el juego. Por tal razón se recurrió a un segundo planteamiento:

Supongamos que en una empresa hay \$12'000.000 de premio para distribuir entre cuatro de sus trabajadores, de los cuales Martha ha trabajado cuatro horas, José tres, Pedro dos y Luisa una. ¿Quién debería recibir más dinero del premio? Ante este supuesto todos los estudiantes, por separado, sin dudarlo, coincidieron en asegurar que Martha debería recibir más.

Se observa que aunque en esencia las dos situaciones son semejantes y solamente se ha variado el contexto, las diferentes respuestas obtenidas, en cuanto a los análisis de índole cualitativo para las situaciones, demuestran que las distintas formas de razonamiento involucrado (como la división entre cuatro) son correctas en tanto que se están aplicando formas de conocimiento social diferenciado que determinan el tipo de operación que se realiza. En este punto restaría determinar si a partir de esta modificación del contexto los estudiantes logran responder las preguntas de reflexión centrada en análisis cuantitativos, pero tal determinación no fue realizada con los estudiantes con los que se trabajó en el proyecto de investigación que sustenta el presente artículo.

La pregunta 1c requiere la determinación de la cantidad de dinero que corresponde a cada uno, es decir, que se requiere una cuantificación; en este sentido, las técnicas de resolución asociadas al tipo de problema π_{rp} apuntan a comprobar inicialmente que $\$1.000+\$2.000+\$3.000+\$4.000=\$10.000$ (valor total de la boleta), lo cual está sustentado en la teoría de las transformaciones lineales. A partir de la organización de los registros escritos obtenidos, se presentan en las siguientes tablas las respuestas numéricas dadas por los estudiantes:

[18] Vale la pena resaltar que algunos de los que respondieron que Martha recibía más, colocaron como respuesta , esto se debe a que en la resolución de un problema en el cual se hacen varias preguntas, sobre el enunciado de dicha situación, los estudiantes toman cada pregunta como un nuevo problema.

TABLA III

NOMBRE	APORTE EN PESOS	PREMIO EN PESOS
Luisa	1.000	1’000.000
Pedro	2.000	2’000.000
José	3.000	3’000.000
Martha	4.000	4’000.000
TOTAL	10.000	10’000.000

Los estudiantes han identificado que con un mayor aporte se recibe una mayor parte del premio, para tal fin otorgaron $1’000.000 por cada $1.000 invertido, pero no determinaron que la suma de las partes del premio debería darles $12’000.000. En este caso, la técnica empleada por los estudiantes no conduce a una respuesta adecuada puesto que no cumple las condiciones impuestas por las situaciones de reparto proporcional. Esta forma de reparto fue empleada para responder las demás preguntas, es decir, asignar un premio de $5’000.000 a quien aporte $5.000, de igual forma para determinar que quién quiera ganarse $9’000.000 y $5’400.000 debe aportar $9.000 y $5.400 respectivamente.

TABLA IV

NOMBRE	APORTE EN PESOS	PREMIO EN PESOS
Luisa	1.000	1’500.000
Pedro	2.000	2’500.000
José	3.000	3’500.000
Martha	4.000	4’500.000
TOTAL	10.000	12’000.000

Para dar estos valores los alumnos recurrieron a un procedimiento similar al empleado para construir la Tabla iii; sin embargo, identificaron que hacían falta $2’000.000, por lo tanto repartieron este valor en cuatro, es decir, $500.000 para cada uno, combinando un reparto proporcional con un reparto equitativo. En esta técnica nuevamente falla una de las condiciones que impone la forma como están definidos los repartos proporcionales. La utilización de esta forma de reparto se confirma al asignar $5’500.000 a quien aporta $5.000.

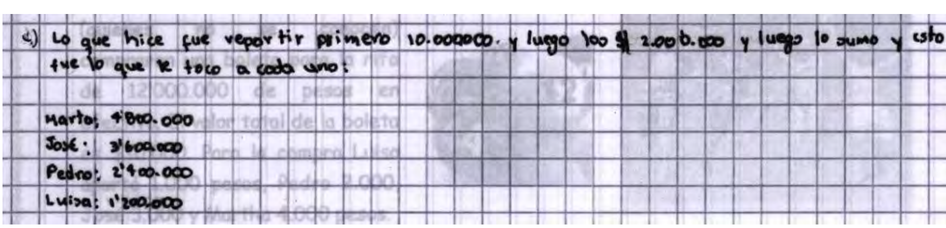
TABLA V

NOMBRE	APORTE EN PESOS	PREMIO EN PESOS
Luisa	1.000	1'200.000
Pedro	2.000	2'400.000
José	3.000	3'600.000
Martha	4.000	4'800.000
TOTAL	10.000	12'000.000

El cálculo de los valores en la tabla v se realizó de dos formas:

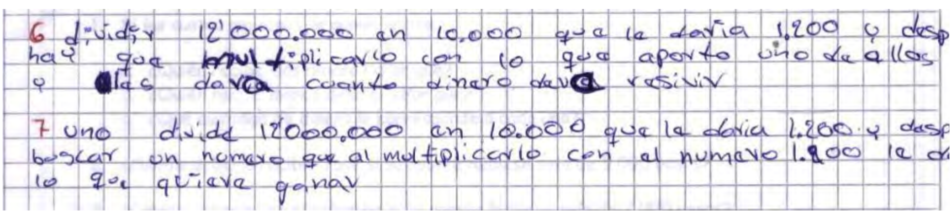
Primera, aplicando la primera parte de la técnica τ^1_{rp}, es decir, determinar cuánto debía repartirse por cada \$1.000, este valor lo obtuvieron dividiendo \$12'000.000 entre \$10.000, es decir, $\rho = \frac{\$12'000}{10.000} = 1.200$. En este momento puede afirmarse que los estudiantes, de manera intuitiva, están utilizando la razón como relator. A continuación se aplica la segunda parte de la técnica τ^1_{rp} en la que la razón pasa de su papel como relator a un papel como operador y a través de análisis funcionales se determina el resto de valores, por ejemplo $f(\$2000) = \rho \times \$2000 = 1200 \times \$2000 = \$2400000$. Se observa que a pesar de que ρ no tiene unidades, sí expresa la cantidad del premio que corresponde a un peso de apuesta.

Segunda, repartiendo primero \$10'000.000 y luego los \$2'000.000. Sumó los dos resultados y esto es lo que le tocó a cada uno. Procedimiento empleado por un estudiante.



Gráfica 1. Una forma para distribuir el premio en la situación 4.

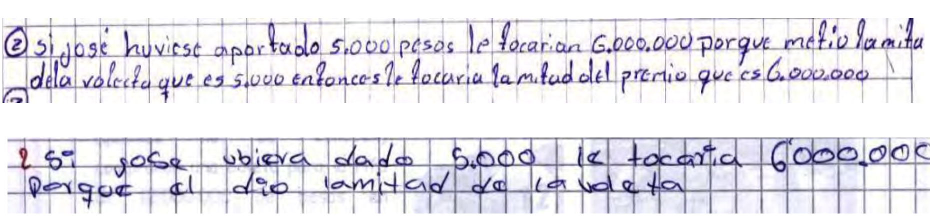
El estudiante establece dos razones, a saber, $\rho_1 = \frac{\$10000000}{\$10000}$ y $\rho_2 = \frac{\$2000000}{\$10000}$, luego las suma para establecer una única razón y a partir de ahí determinar cuánto le correspondió a cada uno. Este procedimiento se corresponde con la técnica τ^1_{rp} la cual es complementada con análisis escalares. Estas dos formas de cálculo se confirman al responder la pregunta correspondiente a determinar el valor que se debe invertir para obtener un premio de $9’000.000, cuestionamiento en el cual se pretende determinar la variable independiente (valor aportado) conociendo la variable dependiente (valor ganado). Quienes encontraron la razón $1.200 dividieron entonces el valor del premio que se quiere ganar entre esta razón y así obtienen el resultado. Es decir, emplean la técnica τ^1_{rp} que se sustenta en la razón como operador y en los análisis funcionales de la forma $f(x)=\rho\times x=\$9000000$, de donde $x=\dfrac{\$9000000}{1200}=\$7500$. Igualmente, se reafirma la utilización de esta técnica al responder las denominadas preguntas de generalización: ¿Cómo se calcularía la cantidad de dinero recibido de acuerdo con una cantidad de dinero aportado? y ¿cómo se calcularía la cantidad de dinero aportado de acuerdo con la cantidad de dinero que se quiere recibir?


6 dividir 12'000.000 en 10.000 que le daria 1.200 y desp
hay que multiplicarlo con lo que aporto uno de ellos
y les dava cuanto dinero dava resivir
7 uno divide 12000.000 en 10.000 que le daria 1.200 y desp
buscar un numero que al multiplicarlo con el numero 1.200 le d
lo que quiere ganar

Gráfica 2. Una de las respuestas a las preguntas 6 y 7 de la situación 4.

En cuanto a la pregunta “¿Cuánto debería recibir José si su aporte hubiese sido de $5.000 pesos?” se dieron otras respuestas numéricas y otra técnica que se describen a continuación.

Le hubiera tocado $6’000.000, es decir, la mitad del premio, puesto que aportó la mitad del valor de la boleta. Utilizan de manera intuitiva la técnica τ^3_{rp}, fundamentada en la teoría de las transformaciones lineales y de los análisis escalares.


2 si josé huviese aportado 5.000 pesos le tocarian 6.000.000 porque metio la mita
de la voleta que es 5.000 entonces le tocaria la mitad del premio que es 6.000.000
2 si jose ubiera dado 5.000 le tocaria 6000.000
porque el dio lamitad de la voleta

Gráfica 3. Una respuesta para la pregunta 2 de la situación 4.

6. Discusión de resultados

En el primer grupo de preguntas se observó que la gran mayoría de los estudiantes lograron determinar, cualitativamente y sin indicaciones del investigador, que hay una persona que debe recibir más dinero que las otras y otra que recibe menos. Sin embargo para determinar cuánto le corresponde a cada uno, requirieron mayores indicaciones[19] por parte del investigador y decidieron hacer ya sea repartos equitativos o bien repartos que no se correspondían con las condiciones del reparto proporcional. Esto evidenció que los estudiantes acuden con mayor comodidad a análisis de tipo cualitativo que a los análisis de tipo cuantitativo. Además, la cuantificación que realizan los estudiantes se fundamenta principalmente en análisis de índole aditivo, lo cual les permite comprobar que la suma de las cantidades de cada serie debe dar el total. Al respecto de los procedimientos aditivos hay que enfatizar que estos están basados en el reconocimiento de ciertas formas de covariación, y por lo tanto, también están implicadas en los análisis escalares propios de los sistemas lineales directos. La combinación de repartos proporcionales con repartos equitativos tiene que ver con las formas de conocimiento social que los estudiantes usan para determinar el tipo de distribución que debe darse del premio obtenido.

Para dar las respuestas numéricas, algunos estudiantes que repartieron en cantidades diferentes de acuerdo con el aporte dado, no consideraron en primera instancia que la suma era un valor constante, en este caso, 12’000.000 de pesos; y en segunda instancia, ya sea que hayan considerado este hecho o no, los estudiantes no tuvieron en cuenta las relaciones parte-todo, esto es, que una persona que aporta $2.000, por ejemplo, debe recibir la mitad de lo que reciba alguien que haya aportado $4.000.

Teniendo en cuenta que una situación de este tipo, desde la enseñanza tradicional de las matemáticas, se convierte en un ejercicio de aplicación de los repartos proporcionales y posteriormente en un objeto de evaluación en una prueba escrita, la respuesta equitativa dada por los estudiantes en este ambiente

[19] Hay que anotar que para el desarrollo del proyecto base del presente artículo se diseñaron y aplicaron cinco situaciones (la situación de reparto fue la cuarta) y dos subsituaciones además de la realización de dos intervenciones relacionadas con la utilización de las relaciones parte todo, con los procedimientos utilizados en las anteriores tres situaciones y con la construcción e interpretación de gráficas. En este sentido las intervenciones giraron en torno a recomendar la utilización de los avances obtenidos en las situaciones previas y en las dos intervenciones.

será catalogada como errónea y calificada como insuficiente. El hecho de haber preguntado a los estudiantes el porqué de su respuesta permitió, entre otras cosas, determinar que la situación tal vez no era la más adecuada puesto que de por medio estaba el aspecto social y cultural de lo que coloquialmente en Colombia llamamos "*hacer vaca*", y que aunque inicialmente las respuestas de los estudiantes llevaban a pensar que no manejaban ni siquiera de manera cualitativa la proporcionalidad, al final se mostró que no, ya que al cambiar el contexto en el que se desarrolla la actividad, los estudiantes pudieron desde un enfoque cualitativo determinar quién ganaba más y quién ganaba menos.

Las estrategias empleadas por los chicos para cuantificar sus respuestas dejan ver que la razón aparece cambiando continuamente de rol puesto que inicialmente aparece en su papel de relator y luego se utiliza como operador.

Se evidenció la utilización de una serie de conceptos y teoremas en acto relativos a las razones, las proporciones y la proporcionalidad, tales como los análisis escalar y funcional, las propiedades de la función lineal y la aparición de dos de los tres roles de la razón, a saber el relator y el operador. Las técnicas empleadas por los estudiantes dejaron ver que el cociente obtenido al dividir el valor de la rifa entre el valor aportado es empleado como invariante o como constante de proporcionalidad. Lo cual quedó demostrado a través de las estrategias empleadas para resolver las denominadas preguntas de generalización (preguntas 6 y 7).

Las técnicas de solución empleadas por los estudiantes dejan ver la prelación para acudir al razonamiento por analogías (Modestou & Gagatsis, 2010), esto es, observar qué ocurre con las cantidades de magnitud de una de las series para luego trasladar este patrón de comportamiento a las cantidades de magnitud correspondientes en la otra serie.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS enviroment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between tecnichal and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 7*(3), 245-274.

Arzarello, F., Bosch, M., Gascón, J., & Sabena, C. (2008). The ostensive dimension through the lenses of two didactic approaches. *ZDM - Mathematics Education 40*(2), 179-188.

Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). Ostensifs et sensibilité aux ostensifs dans l'activité mathématique. *Recherches en didactique des mathématiques 19*(1), 77-124.

Cochran -Smith, M. (2003). Learning and unlearning: the education of teacher educators. *Teaching and teacher education*, *19*(2), 5-28. DOI: 10.1016/S0742-051X(02)00091-4

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques 19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2003). Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. In S. MAury & M Caillot (Eds.), *Rapport au savoir et didactiques* (pp. 81-104). París, Francia: Editions Fabert.

Diez - Palomar, J., Giménez, J., & García, P. (2007). Una aproximación dialógica de la inclusión en matemáticas en la escuela obligatoria. El caso del razonamientoporporcional. *Educación matemática y exclusión* (pp. 147 - 177). Barcelona, España: Grao.

D' Amore, B. & Godino, J. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamenricana de Investigación en Matemática Educativa 10*(2), 191-218.

Espinoza, L. & Azcarate, C. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto de límite de función: una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de las Ciencias 18*(3), 355-368.

García, F. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales*. Tesis de Doctorado no publicada, Universidad de Jaen. España.

Gascón, J. (2010). Del problem solving a los recorridos de estudio e investigación. Crónica del viaje colectivo de una comunidad científica. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 22, 9-35.

Godino, J., Batanero, C. & Font, V. (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Recuperado el 15 de diciembre de 2009 de http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm

Hart, K. (1988). Ratio and proportion. In J. Hiebert y *M. Behr* (Eds.), *Number concepts and operations in the Middle Grades 2*. (pp. 198-219). Reston, Virginia, USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Heath, T. (1908). *The thirteen books of Euclide's Elements* (Vol. 2). Cambridge, Oxford Cambridge: at the University Press.

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. Toward a theoretical Framework for Research. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 629-667). New York, EE.UU.: Information Age Pub Inc.

Lamon, S. B. (1994). Ratio and Proportion: Cognitive Foundations in Unitizing and Norming. In H. Harel & J. Confrey (Eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp. 89-120). Albany, EE.UU.: State University of New York Press.

Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In J. Hiebert & *M. Behr* (Eds.), *Number concepts and operations in the Middle Grades 2*. (pp. 93-139). Reston Virginia, USA: National Council of Teachers of Mathematics.

MEN. (2006). *Estándares básicos de competencia matemáticas en Lenguaje Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*.. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Modestou, M. & Gagatsis, A. (2010). Cognitive and metacognitive aspects of proportional reasoning. *Mathematical teaching and learning 12*(1), 36-53.

Obando, G., Vasco, C. & Arboleda, L. (2009). *Praxeologías matemáticas en torno al número racional, las razones, las proprociones y la proporcionalidad*. Comunicación interna no publicada. Universidad del Valle. Cali.

Obando , G., Vanegas , M. & Vásquez , N. (2006). *Pensamiento numérico y sistemas numéricos*. Medellín, Colombia: Gobernación de Antioquia. Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia. Dirección de Fomento a la Educación con Calidad.

Ponte, J. P. (2008). Investigar a nossa própria prática: Uma estratégia de formação e de construção do conhecimento profissional. *Revista PNA–Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática 2*(4), 153-180.

Ponte, P., Oliveira, H., Brunheira, L., Varandas, J. & Ferreira, C. (1998). O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. *Quadrante 7*(2), 41-70.

Posada, F. (2006). *Módulo 2 Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico*. Medellín. Colombia: Gobernación de Antioquia. Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia. Dirección de Fomento a la Educación con Calidad.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative Structures. In R. Lesh & M Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 127-124). New York, EE.UU.: Academic Press.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques 10*(2,3), 133-170.

Autor

Eruin Alonso Sánchez Ordoñez. Universidad del Cauca, Colombia. eruinalonso@hotmail.com