Grecia Gálvez, Diego Cosmelli, Lino Cubillos, Paul Leger,
Arturo Mena, Éric Tanter, Ximena Flores, Gina Luci,
Soledad Montoya, Jorge Soto-Andrade

ESTRATEGIAS COGNITIVAS PARA EL CÁLCULO MENTAL

Cognitive strategies for mental calculation

RESUMEN. Abordamos el estudio de la variedad de estrategias cognitivas, idiosincrásicas o aprendidas, empleadas por alumnos del primer ciclo de la enseñanza básica chilena al practicar actividades de cálculo mental. Presentamos un diagnóstico del desempeño en tareas de cálculo mental aditivo (sumas y restas) de una muestra de alumnos de escuelas subvencionadas por el Estado, en estratos socio-económicos medios y medio-bajos en las ciudades de Santiago y Valparaíso, junto con un catastro de las estrategias observadas, así como una primera versión de un programa desarrollado por nosotros disponible en internet, que permite evaluar el desempeño de los alumnos, incluyendo sus tiempos de respuesta. Analizamos además la correlación entre el desempeño en las tareas propuestas (porcentaje de aciertos y tiempos de respuesta) y el rendimiento escolar promedio en matemáticas.

PALABRAS CLAVE: Cálculo mental, estrategias cognitivas, modos cognitivos, metáforas, tiempos de respuesta.

ABSTRACT. We focus on the study of the variety of cognitive strategies, either idiosyncratic or learned, used by students in the first cycle of elementary education in Chile to practice activities of mental calculation. We present an analysis of performance in additive mental calculation tasks (addition and subtraction) of a sample of students from state-subsidized schools in middle and low-middle socioeconomic strata in the cities of Santiago and Valparaiso. We construct a catalogue of the strategies detected and a first version of a software developed by us and available in the internet, which enables us to assess the student's performance, including their response times. We also analyze the correlation between the performance in the proposed tasks (percentage of correct answers and response times) and the average school achievement in mathematics.

KEY WORDS: Mental calculation, cognitive strategies, cognitive modes, metaphors, response times.

RESUMO. Focalizamos no estudo da variedade de estratégias cognitivas, idiossincráticas ou aprendidas, utilizadas pelos alunos no primeiro ciclo do ensino básico no Chile para a pratica de atividades de cálculo mental. Nós apresentamos uma análise do desempenho em tarefas de cálculo mental aditivo (adição e subtração) de uma amostra de estudantes em escolas de nível

Versión Clame

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2011) 14 (1): 9-40.
Recepción: Febrero 10, 2010 / Aceptación: Enero 20, 2011

socioeconômico médio e médio-baixo subsidiadas pelo estado nas cidades de Santiago e Valparaíso, com um registo das estratégias detectadas e uma primeira versão de um programa desenvolvido por nós, disponivel na internet, para avaliar o desempenho dos alunos, incluindo seus tempos de resposta. Nós investigamos ainda a correlação entre o desempenho nas tarefas propostas (porcentagem de repostas corretas, tempos de resposta) e o desempenho escolar médio em matemática.

PALAVRAS CHAVE: Cálculo mental, estratégias cognitivas, modos cognitivos, metáforas, tempo de resposta.

RÉSUMÉ. Nous abordons l'étude de la variété des stratégies cognitives, idiosyncratiques ou apprises, utilisées par des étudiants du premier cycle d'école primaire au Chili, pour la pratique du calcul mental. Nous présentons une analyse des performances sur des tâches de calcul mental additif (addition et soustraction) d'un échantillon d'élèves d'écoles subventionnées dans des couches à milieu socio-économique faible et moyen dans les villes de Santiago et Valparaiso. Nous présentons un registre des stratégies détectées et une première version d'un logiciel développé par nous et disponible sur internet qui nous permet d'évaluer la performance des élèves, temps de réponse compris. Nous avons aussi étudié la corrélation entre la performance sur les tâches proposées (pourcentages de réponses correctes, temps de réponse) et le rendement scolaire moyen en mathématiques.

MOTS CLÉS: Calcul mental, stratégies cognitives, styles cognitifs, métaphores, temps de réponse.

1. Introducción

1.1. *El cálculo mental en la escuela primaria: ¿Por qué y para qué?*

El cálculo mental (CM) perdió su papel primordial debido a la llegada de las calculadoras, las computadoras y los teléfonos celulares; sin embargo, en las últimas décadas ha recobrado su importancia como una actividad cognitiva reveladora en el proceso de enseñanza-aprendizaje temprano de las matemáticas (Butlen & Pézard, 1992; Beishuizen, 1993; Gómez, 1995; Siegler & Shipley, 1995; Pochon, 1997; Askew, 1999 y 2004; Hidalgo, Maroto & Palacios, 1999; Ortega & Ortiz, 2002; Brissiaud, 2003). Butlen y Pézard (1992) plantean como su primera hipótesis de trabajo el hecho que el CM constituye un dominio privilegiado para examinar las concepciones numéricas de los alumnos y su disponibilidad (p. 325). El CM, eclipsado por el desarrollo tecnológico en la década de los setenta, como medio de cálculo rápido y eficaz, y relegado a un segundo plano por la reforma de las "matemáticas modernas" en diversos países, resucitó sin embargo un par de décadas después como un medio excepcionalmente adecuado para favorecer en los alumnos (Lethielleux, 2005, p. 17-18):

Versión Clame

- El desarrollo de la atención, la concentración y la memoria
- La familiarización progresiva con los números, al punto de poder “jugar con ellos”, expresar un número de variadas maneras, según el contexto del cálculo, y aprovechar las propiedades fundamentales de las operaciones numéricas básicas (asociatividad, conmutatividad, distributividad)
- La expresión, puesta en común, discusión y comparación —en una dinámica colectiva— de una variedad de procedimientos y estrategias para calcular, en función de las relaciones entre los números con los que se está operando

1.2. *El cálculo mental en la enseñanza básica chilena*

El Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC) definió al CM como un área de interés destacado en los programas de primero a cuarto año de Educación General Básica (escolaridad primaria), reformulados en 2002 y aún vigentes, en los que se promueve explícitamente el aprendizaje de estrategias de cálculo mental. No obstante, en la mayoría de las aulas todavía se enseña procedimientos únicos de cálculo escrito que utilizan y memorizan los alumnos, por lo cual son incapaces de detectar y corregir los errores en su aplicación, quedando supeditados a las correcciones del profesor para validar sus resultados. De este modo, aunque hayan manipulado material concreto e icónico cuando aprenden los números en el primer y segundo año de la educación básica, surge una neta ruptura cognitiva con el ulterior aprendizaje mecánico y simbólico de algoritmos. Este hecho avala lo conjeturado por Radford y André (2009):

> Puede ser que uno de los problemas con la enseñanza tradicional, centrada en el papel y el lápiz, es que no permite hacer conexiones durables con la experiencia sensorial vivida por los alumnos en sus primeros años escolares[1]. Por tanto, la fórmula aparece abstracta, sin fundamento y desprovista de sentido (p. 246).

Desde nuestro punto de vista, apropiarse de las estrategias del CM implica utilizar de manera flexible y “oportunista” las propiedades del sistema de numeración y de las operaciones aritméticas para sustituir un cálculo que se propone en una situación dada por otro equivalente, pero más sencillo. Así, se desarrollan estrategias no convencionales “situadas”, en el sentido que consideran la situación numérica donde se plantea el cálculo a realizar.

1 Propósitos similares a éstos son los de Arzarello, Bosch, Gascón y Sabena (2008).

Parece claro que los planes y programas del MINEDUC no están siendo aplicados adecuadamente en las aulas. Esto se constata en los resultados insuficientes que obtienen los alumnos en evaluaciones estandarizadas, como el test del Sistema Nacional de Medición de la Calidad de la Educación (SIMCE), y en las diferencias que dicha medición revela entre colegios, comunas y regiones del país. Cabe notar que un buen desempeño en el CM da una ventaja importante para responder rápida y correctamente muchas de las preguntas (todas de selección múltiple). El test, cuya índole es más cercana a TIMMS que a PISA, define tres niveles de logro de aprendizaje: inicial, intermedio y avanzado.

Los últimos resultados del test SIMCE, aplicado a cuarto y octavo año básico, indican un escaso progreso académico de los alumnos en la prueba de Educación Matemática (Beyer, 2010; Mineduc, 2010). Por ejemplo, en 2009, el 37% de los alumnos de cuarto año resultó clasificado, a escala nacional, en un modesto "nivel inicial" de logro de aprendizajes, que corresponde a un grado de apropiación mínimo de los contenidos curriculares.

Por otra parte, a través de entrevistas y encuestas tanto a alumnos como a profesores, así como experiencias de aula, hemos reunido evidencia indirecta y diversa de que el CM no es una práctica generalizada en nuestro país. La enseñanza habitual no sólo no lo fomenta, sino que tiende a bloquear en los niños la búsqueda de estrategias alternativas para abordar problemas, incluyendo los más elementales. En realidad, parecería que se tiende a cristalizar las respuestas de los niños porque pierden de manera progresiva la espontaneidad y se "sedimentan", dejando como única vía de acción la reproducción de técnicas previamente memorizadas (Espinoza, Barbé & Gálvez, 2009).

Nos interesamos, entonces, en estimular y facilitar la práctica de un CM "situado" y "reflexivo" que supere el "psitacismo algorítmico" en que suele desembocar el entrenamiento tradicional del cálculo, donde los alumnos aprenden de memoria recetas universales, válidas para números cualesquiera, independientemente de su forma y de las relaciones particulares que existen entre ellos.

1.3. *El presente trabajo*

En vista de lo expuesto, nos proponemos sentar las bases de un examen diagnóstico, en primera instancia, sobre la capacidad del CM aditivo que tienen alumnos del primer ciclo de la Enseñanza General Básica chilena, un registro de las estrategias observadas y la primera versión de un programa web (disponible en Ecocam, 2009) que permita diagnosticar y estudiar el desempeño de los estudiantes en el CM.

Versión Clame

Dicho programa consigna las respuestas, el porcentaje de aciertos y los tiempos de respuesta de los alumnos. Para comprender mejor los procesos en juego, investigamos además la correlación entre el desempeño en CM y el rendimiento escolar en matemáticas.

Con este trabajo, esperamos preparar el terreno para una versión de nuestro programa que sea *sensible al contexto* (Abowd et al., 1999) y pueda detectar las estrategias que ocupan los alumnos y ayudarlos a desarrollar otras más eficaces, situadas y relevantes para su comprensión de los números y su operatoria.

Creemos que si se continúa la propuesta del presente trabajo, ésta podría jugar un rol importante en el apoyo al desarrollo de destrezas del CM, las cuales permitan a los niños transitar por las matemáticas utilizando reglas que vayan incorporando de manera progresiva. Esperamos así contribuir a que desarrollen su capacidad para razonar sobre nuevos problemas en matemáticas y en otros ámbitos de la vida.

2. Marco teórico

Nuestro marco teórico se apoya en la hipótesis general que la actividad cognitiva opera con base en metáforas, desde lo más concreto a lo más abstracto (Johnson & Lakoff, 2003; Gallese & Lakoff, 2005; Radford & André, 2009). Las matemáticas aparecen así no como una ciencia desencarnada, abstracta e ideal, sino como una creación de la "mente corporizada" del hombre (hecha cuerpo, *embodied* en el original inglés, aseguran Varela, Thomson y Rosch, 1991), que tiene una permanente actividad metafórica, la cual va desde los niveles más elementales a los más sofisticados (Sfard, 1994; Presmeg, 1997; Lakoff & Núñez, 2000). Las metáforas conceptuales pueden ser vistas como mecanismos neurológicos que permiten adaptar los sistemas neuronales utilizados por la actividad sensoriomotriz para crear formas de razonamiento abstracto (Lakoff, 2003).

De este modo, aparece otra forma de enseñar y aprender matemáticas, si se reconoce que la cognición matemática es corporizada y está íntimamente ligada con nuestro funcionamiento sensoriomotor (Gallese & Lakoff, 2005). Por tanto, junto con Gallese y Lakoff (2005), así como Radford y André (2009), divergimos de la teoría del desarrollo cognitivo de Piaget, que veía al desarrollo sensoriomotor como base previa al desarrollo conceptual ulterior del niño. El conocer, y el aprender en particular, surgen en nuestra visión como un *acoplamiento enactivo* de nuestro cuerpo con el mundo, donde las modalidades sensoriales (la visión, el

Versión Clame

tacto o el oído) aparecen integradas a la motricidad y la anticipación. ¡Conocemos moviéndonos en, e interactuando con, el mundo! (Varela, Thomson & Rosch, 1991; Gallese & Lakoff, 2005; Masciotra, Roth & Morel, 2007; Stewart, Gapenne & Di Paolo, 2010). Por tanto, apoyamos la concepción *multimodal* de la cognición y el pensamiento (Gallese & Lakoff, 2005; Radford & André, 2009), que sustenta la hipótesis de que el uso y práctica de metáforas sensoriomotrices es relevante al aprender matemáticas (Radford & André, 2009, p. 244-266).

Ahora bien, las metáforas —principalmente las conceptuales— que son más impactantes y significativas para nuestros procesos cognitivos conllevan habitualmente un tránsito de un modo de representación a otro, o de un modo cognitivo a otro. En consecuencia, una primera descripción de nuestra multimodalidad cognitiva involucraría los tres *modos internos de representación* que propone Bruner (1996): *enactivo* (basado en la acción y la motricidad), *icónico* (sustentado en imágenes) y *simbólico* (fundamentado en símbolos y lenguajes). En el exitoso modelo didáctico de Singapur, que aplica explícita y sistemáticamente dicho marco teórico en la formación de maestros y en el trabajo en aula, estos modos de representación son llamados: *concrete, pictorial, abstract* (Yeap, 2005).

Durante su desarrollo cognitivo, el niño transita desde lo enactivo a lo simbólico, pasando por lo icónico, pero no habría que creer que éste es un progreso unidireccional, sin retorno: la resolución de diversos problemas se hace posible muchas veces por un tránsito "descendente" de lo simbólico a lo icónico o a lo enactivo, como sucede en la activación de metáforas sensoriomotrices (Soto-Andrade, 2007a, 2007b, 2008).

Nuestra multimodalidad cognitiva también se expresa en los *modos cognitivos,* es decir, en los modos en que se procede al abordar situaciones problemáticas y al pensar en general. Adherimos aquí a la descripción de cuatro modos cognitivos básicos, obtenidos a partir de la doble dicotomía *verbal-no verbal* y *secuencial-no secuencial*, propuesta por Flessas (1997), la cual fue desarrollada en la neuropsicología del niño por Flessas y Lussier (2005). Cabe señalar que estas dicotomías tienen una base neurofisiológica: la primera corresponde a la dicotomía *hemisferio izquierdo - hemisferio derecho,;* y la segunda, a la dicotomía *frontal-occipital* (Luria, 1973; Flessas & Lussier, 2005).

Una primera clasificación de los contenidos matemáticos en términos de dichos estos modos cognitivos fue esbozada por Flessas y Lussier (2005), mientras que su relevancia explícita en la didáctica de las matemáticas ha sido ejemplificada en el trabajo de Soto-Andrade (2006, 2007a, 2007b, 2008). Actualmente podemos extender esta clasificación mediante una tercera dicotomía: *funcional-predicativo* (Schwank, 1999), para obtener finalmente ocho modos cognitivos básicos.

En el contexto educativo, la existencia e importancia de tal diversidad de estrategias y modos cognitivos ha sido reconocida paulatinamente durante las últimas décadas por Luria (1973), Siegler y Shrager (1984), de la Garanderie (1989), Bruner (1996), Flessas (1997), Flessas y Lussier (2005), Gardner (2005) y Soto-Andrade (2007a, 2007b).

Las metáforas no sólo cumplen un rol cognitivo, sino también didáctico, ya que suministran tanto medios de aprehender y construir nuevos conceptos como herramientas amigables para resolver eficazmente situaciones problemáticas complejas (Presmeg, 1997; Lakoff & Núñez, 2000; Soto-Andrade, 2006, 2007a, 2007b, 2008).

Por ello, en el aprendizaje de las matemáticas el CM es un dominio donde el uso de metáforas como forma de "re-presentar" (presentar de otra manera) o de "imaginarse" un problema deviene no sólo algo explícito, sino también necesario. La suma algorítmica vertical se escribe de manera natural en el papel, pero si al calcular mentalmente no nos reducimos a visualizar el algoritmo escrito, surgen metáforas como juntar, añadir, llenar o avanzar, cuya activación pone en juego capacidades sensoriomotrices relevantes para el CM. Por ejemplo, para restar 51-18 nos vemos yendo de la cuadra 18 a la 51 de una larga avenida; caminamos primero hasta la 20, donde tomamos el bus expreso que se detiene sólo cada diez cuadras. Descendemos en la cuadra 50 y caminamos una más para llegar a nuestro destino. En total: $2+30+1=30+(2+1)=30+3=33$.

De este modo, vemos cómo en lugar de la aplicación mecánica de un algoritmo memorizado (resta con reserva), el niño puede recurrir a una "visualización numérica" que podría estar ligada a una activación idiosincrásica de la metáfora de la pista numérica, bajo la forma "sumar es avanzar, restar es retroceder", o también "restar es recorrer lo que falta" (Lakoff & Núñez, 2002; Soto-Andrade, 2006, 2007a, 2007b, 2008). Por supuesto, esta posible activación depende de la experiencia previa del niño, su modo cognitivo predominante, sus interacciones sociales, el contrato didáctico vigente en el aula, entre otros aspectos.

Esta postura teórica, en lo cognitivo y en lo didáctico, es avalada por el hecho de que distintos periodos del desarrollo cognitivo requieren o facilitan el uso de distintos tipos de competencias —estrategias o metáforas— por parte del incipiente cogitante. En efecto, como muestran Gogtay et al. (2004), distintas regiones cerebrales y, correlativamente, distintos tipos de funciones (motrices, sensoriales, asociativas, atencionales) maduran en diferentes

versión Clame

momentos del desarrollo, entre los 4 y los 21 años. A grandes rasgos, primero aparece lo sensoriomotor, luego lo asociativo y finalmente lo referente al control atencional. Esto sugiere que una intervención temprana, donde se fomente el uso de metáforas sensoriomotrices antes que las representaciones abstractas, es coherente con las etapas de desarrollo del cerebro, en particular con el de la materia gris (Radford & André, 2009, p. 221-222).

3. Trabajo relacionado y antecedentes

3.1. *Trabajo relacionado*

El cálculo mental ha sido un ingrediente frecuente de los programas escolares, pero su abordaje ha evolucionado desde la memorización de relaciones numéricas —como las tablas de multiplicar— hacia proposiciones didácticas que lo designan como CM *reflexivo* o *pensado* (Butlen & Pezard, 1992; Beishuizen, 1993; Butlen, 2007; Brissiaud, 2007; Pochon, 1997; Williamson, 2008; Gálvez, 2009), sin descartar su componente "automatizada" (Lethielleux, 2005; Anselmo, Evesque-Sagnard, Fenoy, Planchette & Zuchetta, 2008).

Brissiaud (2003) propone enseñar el CM para "extender la red de relaciones numéricas conocidas" más allá de las relaciones de vecindad, y posibilitar que los alumnos pongan en práctica procedimientos "espontáneos" de cálculo pensado. Se trata de un cálculo particularizante, donde el alumno debe aprender a hacer "buenas elecciones" frente a cada caso (Brissiaud, 2003, p. 162).

Descubrir las estrategias cognitivas que utilizan los alumnos de manera efectiva para calcular mentalmente nos informa sobre "la idea que se hacen de los números" (Butlen & Pezard, 1992). Una visión análoga se expresa en la escuela alemana de Didáctica de las Matemáticas, que desde hace cerca de dos siglos se ha interesado en las "maneras de imaginarse" (*Vorstellungen*) los objetos y procesos matemáticos (Vom Hofe, 1995). Euler ya decía que "los niños podrían imaginarse los números negativos como deudas" (loc. cit.). Cabe señalar que el rol operacional de las *Vorstellungen* corresponde al de las metáforas conceptuales (Soto-Andrade, 2006, 2007a, 2007b), en el sentido de Lakoff y Núñez (2002), y al de la representación mediante "materiales concretos" en numerosos educadores matemáticos, como Montessori (1967), Gattegno (1998) y Dienes (2003).

Alsina (2007) explora las correlaciones entre el *ejecutivo central* y la mejor performance en pruebas aritméticas de cálculo, que equivale esencialmente a la capacidad de *memoria de trabajo* (lo que uno mantiene presente o co-presente en la memoria al realizar una tarea). Un ejemplo clásico es mantener en la memoria (por repetición, imagen u otro medio) un número de teléfono, desde su recepción hasta su uso. La investigación de Alsina sugiere que sería interesante hacer una estimación de las capacidades individuales que tienen los estudiantes en su memoria de trabajo y correlacionarlas con su desempeño en CM; posiblemente tendremos una baja memoria de trabajo en los niños con más débil desempeño en CM. Asimismo, una forma de remediar la baja capacidad de memoria de trabajo sería no sólo entrenar a los niños a recordar números —como parece sugerir Alsina—, sino también utilizar estrategias alternativas como estimular la representación sensoriomotriz (vía metáforas) de las operaciones aritméticas, lo cual entroncaría con los trabajos de Gogtay et al. (2004) sobre los periodos de desarrollo cerebral. Recordemos que, según Gogtay, las regiones atingentes a la memoria de trabajo (corteza prefrontal y dorsolateral, fundamentalmente) maduran más tardíamente que las sensoriomotrices.

La postura teórica que enfatiza el rol de las metáforas sensoriomotrices en el aprendizaje de las matemáticas y la práctica del CM ha recibido últimamente un nuevo sustento experimental por parte de la neurociencia cognitiva, en relación con la metáfora de la recta numérica ("los números son ubicaciones en una recta"), como proponen los trabajos de Dehaene y sus colaboradores. En efecto, Knops, Thirion, Hubbard, Michel y Dehaene (2009) muestran que los circuitos corticales para la atención espacial contribuyen a la aritmética mental en los seres humanos, en el caso específico de los movimientos oculares hacia la derecha o la izquierda cuando se da la suma o la resta de un número positivo. Así, al calcular 18+5 (respectivamente 18–5) se detecta, con ayuda de la Imaginería por Resonancia Magnética (IRM) de alta resolución, una variación de la actividad cerebral evocada, que es análoga a la generada por un movimiento ocular correspondiente a un desplazamiento en cinco unidades hacia la derecha (respectivamente, hacia la izquierda) en una recta virtual.

Por otra parte, destacamos los trabajos de Siegler y sus colaboradores (Siegler & Shrager, 1984; Siegler, 1989; Siegler & Shipley, 1995; Shrager & Siegler, 1998), quienes critican la visión piagetiana que afirma que para cada estadio del desarrollo cognitivo del niño hay una estrategia claramente dominante. Ellos invocan una evidencia experimental de que, desde pequeños, los niños ocupan una variedad de estrategias para realizar cálculos numéricos, en particular los mentales. Siegler (1989) advierte que el análisis cronométrico de los tiempos de respuesta no permite detectar en forma certera el uso de distintas estrategias, aunque la no normalidad de la distribución de tiempos de respuesta puede sugerirlo. Por ello, recomienda que se aborde su estudio combinando la cronometría con entrevistas y observaciones de los alumnos.

Versión Clame

Los países que tienen mejores resultados en las pruebas comparativas internacionales de matemáticas, como Corea, China, Japón, Singapur o Australia, han considerado al CM en sus estándares. Este puede ser un factor relevante, aunque también incide el hecho de que, en los países del extremo oriente, el formato lingüístico de los números facilita el CM, a diferencia de lo que sucede en Francia o en países de habla hispana (Miura, 2001). Otro factor importante es sin duda el uso intensivo del ábaco en el primer ciclo básico en dichos países, lo cual genera una componente importante del CM automatizado; por ejemplo, el de los complementos a 10. Cabe señalar que en Japón se promueve el CM desde temprana edad. El objetivo es evitar que el cálculo se convierta en una simple rutina y lograr que el alumno se mantenga explorando individual y colectivamente otras facetas de la materia en estudio. El diseño de estrategias de cálculo es una de ellas, mientras que explicar los cálculos mentales es una forma de aprendizaje y comunicación (Isoda, Arcavi & Mena, 2008).

3.2. *Antecedentes en Chile*

A comienzos de los años noventa, llegaron a Chile varias misiones de la Cooperación Francesa con el fin de apoyar al MINEDUC en el desarrollo de estrategias para mejorar el aprendizaje de las matemáticas en la escolaridad básica. Una recomendación clave fue promover el CM, definido como “cálculo pensado” (Butlen & Pezard, 1992; Pochon, 1997; Brissiaud, 2007; Butlen, 2007) y asociado a los contenidos que estipulaban los programas.

Otra acción importante para fomentar el CM se dio en el marco de la campaña “Numeracy”, impulsada en Inglaterra a comienzos del 2000 (Brown, Millett, Bibby & Johnson, 2000; Brown, Askew, Baker, Denvir, & Millett, 2002; Brown, Askew, Millett & Rhodes, 2003), con la visita a Chile de Michael Askew, importante promotor del CM (Askew, 1999, 2004; Askew, Denvir, Rhodes & Brown, 2000). Según Askew, uno de los grandes cambios fue la mayor confianza que manifestaron los niños para operar mentalmente con los primeros cien números, en lugar de limitarse al uso de lápiz y papel. Actualmente, para fomentar esa confianza los cálculos algoritmizados sólo son enseñados a partir del quinto grado en el Reino Unido (Askew, 2004).

Las orientaciones francesas e inglesas fueron acogidas por el equipo de matemáticas del *Programa de las 900 Escuelas*, auspiciado por el MINEDUC, e incluidas en la capacitación de los profesores del primer ciclo básico (primero

Versión Clame

a cuarto año). Se publicó material escrito con las propuestas de actividades para las clases de matemáticas (Riveros, Gálvez, Navarro & Zanocco, 1996), así como traducciones de textos de apoyo para la enseñanza de estrategias del CM (Ebbutt, Mosley & Skinner, 2005; Askew, Ebbutt & Mosley, 2006); además, se organizó concursos de CM para alumnos de tercero y cuarto años a lo largo de todo país. Posteriormente, se incluyó el CM como un área de interés destacado, en los programas oficiales de estudio de primer ciclo, reformulados en 2002 y que aún siguen vigentes.

Sin embargo, la evidencia de aula indica que, a pesar de estas acciones, el CM no es una práctica generalizada en las escuelas de Chile. La enseñanza habitual de hecho no sólo no lo fomenta, sino que tiende a desincentivar en los niños la búsqueda de estrategias alternativas para abordar problemas, incluyendo los más elementales, y privilegia la reproducción memorística de procedimientos estandarizados para calcular, que ellos manejan en forma precaria, de ahí que tengan gran riesgo de cometer errores o de olvidar pasos de la secuencia prescrita.

4. Hipótesis de investigación

En el presente trabajo nos proponemos aportar evidencia en favor de las siguientes hipótesis:

1) Para resolver tareas de CM, los alumnos emplean un repertorio diverso de estrategias que incluye tanto las convencionales —típicamente enseñadas en la escuela— como otras, no convencionales, que son eventualmente idiosincrásicas, aprendidas o desarrolladas por ellos mismos. Sin embargo, esperamos encontrar sólo una minoría de estudiantes que ocupen estrategias basadas en metáforas o representaciones.
2) Es posible detectar cronométricamente —midiendo tiempos de respuesta— la coexistencia de estrategias rápidas y lentas para abordar ciertas tareas específicas de CM; las convencionales son a menudo las más lentas. Asimismo, es posible comparar el grado de dificultad real de las diversas tareas propuestas.
3) Con base en los estudios de casos preliminares en grupos piloto, realizados en la primera etapa de nuestra experimentación (datos que no presentamos), los cuales han mostrado que, junto con alumnos de

Versión Clame

alto Rendimiento Escolar en Matemáticas (REM) y alto nivel de desempeño en CM, hay otros de mediocre REM, pero de alto CM, esperamos que haya una correlación global prácticamente nula entre el desempeño en CM y el REM. Esto se debería a la presencia de segmentos mixtos (alto en uno, bajo en otro) que son porcentualmente tan importantes en nuestra muestra como el segmento superior (altos ambos), donde sí esperamos una correlación positiva significativa.

En una etapa ulterior de este trabajo nos proponemos validar la hipótesis que la activación e incorporación de metáforas sensoriomotrices previas facilitarían tránsitos cognitivos en los alumnos, que redundarían en la emergencia de estrategias no convencionales y situadas que mejorarían su desempeño en CM.

5. Objetivos

Nuestros objetivos en el presente trabajo son:

1) Obtener un diagnóstico del desempeño en el CM aditivo que tienen los alumnos de primer ciclo básico en escuelas chilenas subvencionadas por el Estado, las cuales son representativas del nivel socioeconómico promedio del país.
2) Detectar las estrategias, idiosincrásicas o aprendidas, que aplican los alumnos al realizar tareas de CM y hacer un registro de ellas.
3) Ir más allá de una descripción taxonómica (*à la Cuvier*) del espectro de estrategias obtenido con el fin de acceder a una comprensión (*à la Darwin*) de los procesos subyacentes que las facilitan y generan. En particular, trataremos de inferir si los alumnos echan mano de recursos metafóricos para aprehender operaciones, como la suma y la resta, y generar estrategias para resolver tareas de CM aditivo.
4) Investigar la correlación entre el nivel de logro en CM de los alumnos y su REM.

Queremos de esta forma establecer las bases para desarrollar ulteriormente una intervención didactica, con ayuda de un programa sensible al contexto, que facilite a los alumnos el surgimiento de estrategias más eficaces, “situadas” y “oportunistas” para el CM, las cuales se apoyen en la activación de metáforas sensoriomotrices, cambios de modos de representación y tránsito entre

Versión Clame

modos cognitivos. Nuestra idea es que la práctica de estrategias de CM situadas posibilita una mejor comprensión de los números y su operatoria, un mayor control del proceso de cálculo y una mayor fiabilidad de los resultados (menos errores o la posibilidad de percatarse de ellos y corregirlos).

En pos de nuestros objetivos, hemos puesto en obra una estrategia inicial de diagnóstico, cuya metodología y resultados describiremos a continuación.

6. Metodología

Nuestra metodología de investigación integra en gran medida los paradigmas positivista, sociocrítico e interpretativo (Godino, 1993). El uso de los dos primeros se debe a que nos interesa diagnosticar y medir de manera estadística el desempeño de los alumnos en CM para llegar a intervenir didácticamente a mediano plazo, mejorando su desempeño y aprendizaje. Empleamos el tercer paradigma porque no apuntamos simplemente a desarrollar unas recetas o un entrenamiento estereotipados que capaciten a los niños para calcular mentalmente en forma rápida y correcta. Más bien, queremos "medir" el espectro de estrategias que ocupan los alumnos porque creemos que revelan, por su amplitud e índole, su grado de familiaridad con los números y sus operaciones, así como las ideas que se forman de ellos.

Desde una visión interpretacionista, intentamos entender los procesos cognitivos y didácticos subyacentes a las estrategias "oportunistas" y "situadas" de CM, que se desarrollan típicamente a partir de las capacidades psicomotrices básicas de los niños, por vía de metáforas y representaciones que suelen involucrar tránsitos cognitivos.

La primera etapa de nuestro estudio fue de carácter cualitativo y personalizado, ya que contempló el diseño de un instrumento de diagnóstico sobre la capacidad de CM aditivo en alumnos de segundo a cuarto año. Dicho instrumento consistió en un set de 18 tríos de ejercicios que estaban agrupados en seis tareas tipo fundamentales para CM de sumas y otros tantos para el de restas (ver Tabla III o Ecocam, 2009). Las tareas fueron propuestas en un orden creciente de dificultad, que estimamos en nuestro análisis a priori. Nos restringimos a tareas de CM aditivo porque queríamos investigar el desempeño de los alumnos en el tipo más básico de CM posible, estableciendo situaciones típicas del cálculo numérico aditivo, no contextualizado, que planteaba el MINEDUC. Cabe mencionar que las estrategias de solución son en principio enseñadas en el aula.

El instrumento también contemplaba preguntar de manera oral a los niños, cuando habían respondido cada trío, la manera en que lo habían hecho. Las respuestas eran registradas por escrito por las profesoras que administraron el test.

Dos aplicaciones-piloto de este instrumento fueron hechas en una primera etapa por las profesoras colaboradoras, durante el año 2009, en colegios de Santiago y de Valparaíso, las dos principales ciudades de Chile. Fueron seleccionadas escuelas a las que asistían alumnos de estratos socioeconómicos medio y medio-bajo, ya que eran representativas de la mayoría de los colegios chilenos (ver Tabla I). Las profesoras administraron el test a estudiantes de los cursos a los que enseñaban o habían enseñado, o bien de cursos paralelos, en Santiago, y a los de colegios donde habían supervisado prácticas docentes, en Valparaíso.

TABLA I
Primera etapa: Aplicaciones-piloto.

Primera etapa	Primera aplicación	Segunda aplicación
Segundos Básicos	5	2
Terceros Básicos	4	3
Número de alumnos	30 por curso aprox.	12 por curso
Total alumnos	270 aprox.	60

Las experiencias con los niños fueron recopiladas de manera individual por las profesoras en los colegios elegidos, mediante un registro gráfico —conformado por los cuadernillos de respuestas— y otro de observación del profesor-investigador, lo cual permitió realizar una comparación cualitativa y cuantitativa de las diferencias entre los grupos seleccionados. Las mediciones fueron registradas en papel y luego transcritas digitalmente en planillas de cálculo (ver Anexos).

De esta forma, generamos una primera base de datos sobre el desempeño en CM y las estrategias que ocupaban los alumnos de primer ciclo básico. En la primera aplicación se tomó a cursos enteros y en la segunda a una muestra de doce alumnos por curso: cuatro de rendimiento bajo, cuatro de rendimiento mediano y cuatro de rendimiento alto (ver Tabla I).

Versión Clame

A partir de de este trabajo cualitativo diseñamos un programa interactivo que se basó en los mismos ejercicios, pero distribuidos en una secuencia aleatorizada. El programa medía los tiempos de reacción en milisegundos frente a cada ejercicio, con miras a un estudio cronométrico del desempeño de los alumnos y entregaba al final de la sesión una hoja de cálculo con los resultados individuales. El diseño y prueba de este instrumento, que está disponible en línea (Ecocam, 2009), la referimos como la segunda etapa de nuestro estudio experimental, de índole cuantitativa e informatizada.

Una primera aplicación de este instrumento informático se hizo a cien alumnos, 43 de Santiago y 57 de Valparaíso. Cada uno respondió 108 ítems, 54 (18 tríos) del Test de Sumas y 54 del Test de Restas (ver Tabla II).

TABLA II
Segunda etapa: Aplicación informatizada.

Segunda etapa	Número de alumnos
Segundos Básicos	30
Terceros Básicos	59
Cuartos Básicos	11
Total alumnos	100
Total respuestas	10 800

Los resultados fueron tabulados junto con el rendimiento escolar en matemáticas (REM) de los mismos alumnos.

7. Análisis de resultados

7.1. *Porcentajes de acierto por tarea*

Las Tablas III y IV ofrecen los porcentajes de logro en las distintas tareas de CM, desglosadas en sumas y restas, que alcanzaron los cien alumnos de la muestra descrita en la Tabla II.

Versión Clame

TABLA III
Test de sumas

Descripción de tareas	Respuestas erróneas	Respuestas acertadas	% de aciertos
Reconocer si a+b es 10 o no	57	843	93,7
Reconocer si a+b es 100 o no, si a y b son múltiplos de 10	79	821	91,2
Reconocer si a+b es 100 o no, si a y b tienen 5 unidades	312	588	65,3
Escribir las sumas $a+a$ y $a+(a+1)$	139	761	84,6
Escribir la suma a+9	325	575	63,9

TABLA IV
Test de restas

Descripción de tareas	Respuestas erróneas	Respuestas acertadas	% de aciertos
Dado a, escribir su complemento aditivo a 10	187	713	79,2
Dado a, escribir su complemento aditivo a 100, si a es múltiplo de 10	256	644	71,6
Dado a, escribir su complemento aditivo a 100, si a tiene 5 unidades	540	360	40,0
Escribir las diferencias $2a–a$, $2a–(a+1)$, $2a–(a-1)$	352	548	60,9
Escribir las diferencias a–9 y a–11	650	250	27,8
Escribir la diferencia $a–b$, si b es múltiplo de 10, más o menos 1	635	265	29,4

Notamos que hay una gran diferencia en el nivel de logro de las tareas que contenía el diagnóstico; es más débil para las restas que para las sumas, y claramente decreciente en general cuando aumenta el nivel de dificultad a priori de la tarea. Como ya mencionamos, las tareas de sumas y restas tenían un orden creciente de dificultad, de acuerdo con nuestro análisis a priori sobre las reacciones de los alumnos.

En las sumas (Tabla III), la correlación monótona sólo se quiebra en forma muy clara al plantear las sumas de dobles o “casi dobles”, lo cual sugiere que los

Versión Clame

alumnos han aprendido a "doblar". De hecho, otros estudios de casos muestran que las secuencias de dobles reiterados son más atractivas para los niños desde los 6 ó 7 años que lo que suponía nuestro análisis a priori. En las restas (Tabla IV), también sucedió lo mismo, al plantear tareas de "restar la mitad o casi". Esto sugiere que doblar y partir por la mitad son acciones cognitivas primigenias de nuestra especie, que son especialmente accesibles a los niños.

Además, en las tareas de resta se observa que hay un porcentaje de logro levemente mayor en la sexta tarea, comparada con el de la quinta. Nuestra hipótesis al respecto es que la estrategia de apoyarse en el cálculo fácil, donde se comienza restando 10 o un múltiplo de 10, surge más fácilmente ante el 51 o el 39 que hacen añorar inmediatamente al 50 o al 40, en vista de la dificultad de descontar uno por uno. Esto no sucede al enfrentar al 9 o al 11 porque son más fáciles de descontar uno por uno, pero conllevan una probabilidad de error de cálculo no despreciable. Lo anterior se ilustra en el gráfico de tiempos de respuesta, que contiene la Figura 4, la cual comentaremos en la sección 7.3.

7.2. Estrategias empleadas

La Tabla V indica la frecuencia de empleo de las distintas estrategias que refirieron los alumnos de la muestra correspondiente a la etapa 1, descrita en la Tabla I. En el espectro de estrategias hemos puesto una estructura de árbol, dada por los códigos indicados.

TABLA V

Frecuencias de las estrategias declaradas en etapa 1 (manual).

Código	Descripción de la estrategia declarada	# Casos	%	% Rama
00	No declara o no sabe describir la estrategia usada	118	13	13
111	Contar de a uno, con los dedos	220	23	34
112	Contar de a uno, con palotes	21	2	
113	Contar de a uno, mentalmente	73	8	
12	Contar de a diez	10	1	
20	Reducción a caso más sencillo conmutando	7	1	41
21	Reducción a operaciones más sencillas, ajustando	48	5	
22	Reducción a operar con quinquenas	26	3	
23	Reducción a operar con decenas y unidades por separado	205	22	

Versión Clame

24	Reducción a casos más simples, por descomposición aditiva	17	2	41
25	Reducción a unidades, asimilando decenas a unidades	44	5	
26	Reducción a cálculo de dobles o mitades	38	4	
27	Reducción por deformación a resultados conocidos	4	0,5	
31	Metafóricas: restar es ver cuánto falta para…	37	4	5
32	Metafóricas: restar es descender	10	1	
41	Robóticas: visualizar el algoritmo vertical	35	4	7
42	Robóticas: uso de resultados memorizados	30	3	
	Total de respuestas	*943*	*100*	*100*

Al analizar estos resultados, observamos un porcentaje reducido de respuestas operacionalmente inutilizables (13%) y un espectro de estrategias relativamente estrecho, con predominio de las más rudimentarias —que podrían ser catalogadas como *procedimientos*—; por ejemplo, las de contar uno a uno (un tercio del total), las de conteo y las de reducirse a operar por separado con decenas y unidades (alrededor de un cuarto del total). Incluso, un 4% de los alumnos dijo que visualizaban el algoritmo vertical universal del cálculo escrito para realizar el cálculo mental. Sin embargo, constatamos que más de un quinto de los alumnos aplica estrategias cognitivamente oportunistas y situadas; por ejemplo conmutar en las sumas para comenzar con el sumando más grande o utilizar descomposiciones aditivas adaptadas a los números involucrados, además de las metafóricas (5%). Los resultados personales aportan una clara evidencia a favor de nuestra hipótesis 1.

La Tabla VI indica la frecuencia de empleo de las distintas estrategias referidas por los alumnos de la muestra correspondiente a la etapa 2, descrita en la Tabla II (462 respuestas en total).

TABLA VI

Frecuencias de las estrategias declaradas en etapa 2 (informatizada).

Código	Descripción de las estrategias declaradas	Respuesta acertada	Respuesta errónea	Total	%	% Rama
00	No declara o no sabe describir estrategia	2587	978	3565	88,53	88,53

Versión Clame

111	Contar de uno en uno, con los dedos	48	29	77	1,91	11,10
113	Contar de uno en uno, mentalmente	237	133	370	9,19	
23	Reducción a operar con decenas y unidades por separado	1	2	3	0,07	0.17
25	Reducción a unidades, asimilando decenas a unidades	4	0	4	0,10	
41	Robótica: uso de algoritmo vertical	2	2	4	0,10	0.20
42	Robótica: uso de resultados memorizados	3	1	4	0,10	
	Subtotal	*2882*	*1145*	*4027*	*100*	*100*
	El sistema *no* preguntó a los alumnos	3971	2802	6773		

Observamos que, en el test informatizado de la segunda etapa, nuestro programa preguntó 4 027 veces *¿cómo lo hiciste?* a los alumnos. Hubo sólo 462 respuestas —digitadas por los alumnos— que consideramos como operacionalmente utilizables, con muy poca variación y un claro predominio de los procedimientos de conteo uno a uno. Este nivel de respuesta fue mucho menor a lo esperado, lo cual nos hizo ver que la entrevista hecha por la profesora que administró el test resultó mucho más eficaz para averiguar las estrategias utilizadas que la pregunta de nuestro sistema informático. Ahora bien, la evidencia más significativa a favor de la hipótesis 1 proviene de los datos recabados durante la primera etapa de la experimentación, la manual-personalizada, en la que recogimos testimonios como los siguientes:

Profesora: ¿Cómo calculaste tan rápido 4+9=13?
Amanda (siete años, segundo básico): Pongo primero el 9 en mi mente y después cuento (va estirando los deditos) 10, 11, 12, 13.

Hemos observado que la estrategia de conmutar las sumas “poniendo en la mente” el número más grande aparece desde los siete años; por lo general se estimula mediante las prácticas en el aula. En forma habitual, a esa edad los niños continúan el cálculo contando de uno en uno. En niños de ocho años (tercero

Versión Clame

básico) observamos —como expusimos antes— la estrategia de visualización "en el aire" del algoritmo tradicional, de suma o resta por columnas, eventualmente con reserva.

> Profesora: ¿Cómo lo hiciste para calcular 17+28=45?
> Miranda (nueve años, cuarto básico): Lo hago vertical: 7+8=15. Reservo 1 y 1+2=3, así que da 4. O sea, 45.
> Profesora: ¿Se te ocurre otra manera de hacerlo?
> Miranda (*reflexiona unos 15 segundos*): ¡Ah! Se me ocurrió otra manera. A 28 le sumo 20, que da 48 y ahora le resto 3.
> Profesora: ¿Por qué?
> Miranda: ¡Bah! Porque le sumé 20 en lugar de 17, así que tengo que restar 3. Y también puedo sumar 30 y restar 2. Eso da… (*reflexiona*) 17+30=47, menos 2 son 45.
> Profesora: ¿Y cómo harías 19+13?
> Miranda: Eeem… (*con cara de malicia*) Sumo 20+ 10, que son 30, y le sumo 3 y le resto 1. O sea, 30+3=33, menos 1 son 32.
> Profesora: ¿Por qué?
> Miranda: Bah, porque sumé 10 no más en lugar de 13, y 20 en lugar de 19.

Amanda y Miranda tienen un rendimiento escolar alto en matemáticas (entre 6.5 y 7 de promedio, en una escala de 1 a 7), así como en el test de CM (95 y 96%, respectivamente). Llama la atención que, a pesar de haber "visto" en clases la metáfora de la pista o la recta numérica, ambas tienden espontáneamente a apoyarse en el algoritmo vertical del CM escrito. Sin embargo, Miranda imagina rápidamente métodos alternativos e incluso ofrece lúdicamente dos ajustes simultáneos, al ser cuestionada por la profesora. Como en otros casos, Miranda no recurre espontáneamente a la metáfora de la recta numérica, pero cuando se le muestra una vez cómo podría utilizarla, la aprecia instantáneamente y exclama: ¡Qué fácil!

7.3. *Estudio cronométrico de las tareas del test de cálculo mental (TCM)*

Con nuestro instrumento informático, medimos la distribución de los tiempos de respuesta correcta tanto para el conjunto de tareas (seis de suma y seis de resta, 108 ítems en total) como para las actividades de suma y de resta por separado (Figuras 1 y 2).

Versión Clame

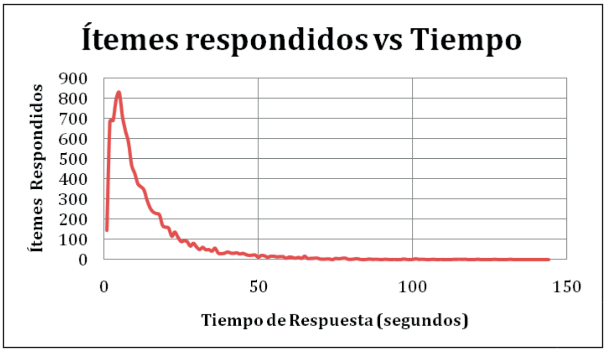

Figura 1. Tiempos de respuestas correctas en el TCM

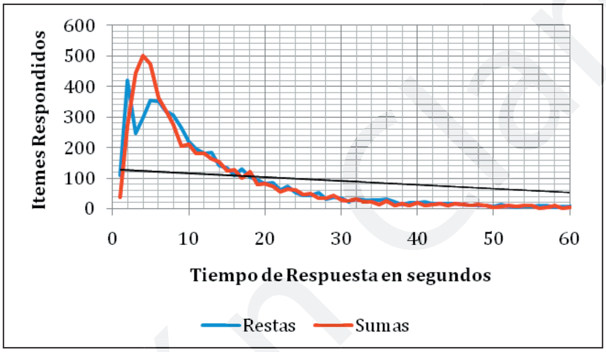

Figura 2. Tiempos de respuesta correcta por tipo de tarea del TCM (resta o suma)

El estudio cronométrico del TCM ofreció una distribución global de los tiempos de respuesta que tuvieron los alumnos en el test, cuyo perfil recordaba una distribución de Poisson. Esto parece ser un efecto de "grandes números", ya que había un universo de 10 800 respuestas a los ítems. Al filtrar las respuestas correctas se mantuvo el perfil poissoniano para las tareas de suma, pero se reveló un interesante perfil que evocaba a una superposición de dos distribuciones poissonianas para las tareas de resta (Figura 2). Esto pudo deberse a la presencia de al menos dos tipos de estrategias —una rápida y una lenta— que operaban en la población estudiada, o al simple hecho de que había tareas sorpresivamente más difíciles que otras. Este tipo de fenómeno, que ha sido comentado en la literatura (Siegler & Shrager, 1984; Siegler, 1989; Shrager & Siegler, 1998), es más nítido cuando estudiamos la distribución de los tiempos de respuesta correcta de los alumnos a ítems específicos.

En efecto, como preveía nuestro análisis a priori (hipótesis 2), al graficar los tiempos de respuesta para las tareas resolubles por varias estrategias aparecieron perfiles que no eran poissonianos, sino multimodales, que aludían a una superposición de varias distribuciones poissonianas (Figuras 3 y 4).

Figura 3. Tiempos de respuesta acertada: suma

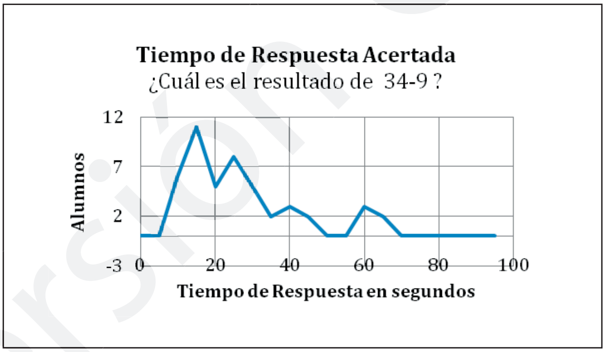

Figura 4. Tiempos de respuesta acertada: resta

En el caso del ítem *¿8+2 vale 10?*, la gran mayoría de los alumnos sabía la respuesta de memoria o bien contó rápidamente con los dedos “8, 9, 10”, lo que permitió pronosticar un perfil poissoniano. Con respecto al ítem *¿2+8 vale 10?*, donde nuestro análisis a priori preveía una estrategia rápida (conmutar y contar 8, 9, 10) y una lenta (contar 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10), el gráfico obtenido, bastante diferente del anterior, aportó evidencia a favor de la presencia de una estrategia rápida y a lo menos de una lenta.

Versión Clame

Para el ítem 34-9, la distribución de tiempos sugirió fuertemente la presencia de dos estrategias rápidas y una o dos más lentas. Conjeturamos que las estrategias rápidas eran 34-9=34-10+1 y 34-9=35-10.

También consideramos el tiempo promedio de los alumnos para responder, acertada o erróneamente, los ejercicios de cada tipo de tarea (Tablas VII y VIII).

TABLA VII
Tiempo Promedio de Respuesta: Restas (en segundos

Tareas de resta	Erróneas	Acertadas	Todas
Dado *a*, escribir su complemento aditivo a 10	9,4	9,3	9,33
Dado *a*, escribir su complemento aditivo a 100, si *a* es múltiplo de 10	13,4	11,7	12,17
Dado *a*, escribir su complemento aditivo a 100, si *a* tiene 5 unidades	17,2	16,1	16,76
Escribir las diferencias *a–a /2, a–(a /2 +1), a–(a /2 -1)*	16,8	14,2	15,21
Escribir las diferencias *a –9* y *a –11*	16,3	25,2	18,78
Escribir la diferencia *a–b*, si *b* es múltiplo de 10, más o menos 1	14,6	24,6	17,58
Tiempo de respuesta promedio	*15,4*	*14,6*	*14,97*

TABLA VIII
Tiempo Promedio de Respuesta: Sumas (en segundos)

Tareas de suma	Erróneas	Acertadas	Todas
Reconocer si a+b es 10 ó no	7,6	6,2	6,3
Reconocer si a+b es 100 ó no, si a y b son múltiplos de 10	8,8	6,6	6,8
Reconocer si a+b es 100 ó no, si a y b tienen 5 unidades	9,7	11,1	10,6
Escribir la sumas a+a y a+(a+1)	15,1	12,5	12,9
Escribir la suma a+9	17,4	19,9	19,0

Versión Clame

Escribir la suma a+b si b es múltiplo de 10 más o menos 1	18,9	26,0	22,7
Tiempo de respuesta promedio	*14,9*	*12,5*	*13,04*

Se observa una variación monótonamente creciente de los tiempos de respuesta cuando aumenta el grado de dificultad a priori en las tareas de suma, mientras que en las de resta dicha progresión se quiebra en la cuarta tarea, que involucra mitades o casi, y se invierte el orden de tiempos para las dos últimas. Vemos que se repite el patrón de los porcentajes de respuestas correctas observado para las tareas de resta (como se expuso en el apartado 7.1), pero mostrando ahora un orden decreciente. Tenemos así dos indicadores sobre el grado de dificultad de las tareas (porcentaje de respuestas correctas y tiempos de respuesta correcta), los cuales indican exactamente el mismo reordenamiento: se debe intercambiar la tercera y la cuarta tarea, así como la quinta y la sexta, para describir de manera más fiel la progresión en el grado de dificultad para las tareas de resta.

Constatamos así que los resultados cronométricos hasta ahora obtenidos aportan evidencia a favor de nuestra hipótesis 2.

7. 4. *Correlación entre el REM y el TCM*

Hallamos una correlación global débilmente negativa (-0,141), no significativa, entre el REM y el desempeño en el TCM (medido por el porcentaje de respuestas correctas), en lugar de la correlación prácticamente nula que pronosticamos en nuestra hipótesis 3.

Por otra parte, la segmentación propuesta en la hipótesis 3 dio resultados bastante acordes con lo esperado. Recordemos que esta segmentación estaba motivada por estudios de casos que mostraban a alumnos de REM medio o bajo con un mejor desempeño en CM que alumnos de alto REM. Dichos estudiantes calculaban eficazmente con lápiz y papel, pero solían tener problemas al restar mentalmente 15–9, aunque eran capaces de restar sin dificultad 4275–2316 usando el algoritmo vertical escrito. Esto nos sugirió que segmentáramos cada serie de datos en dos partes respecto a su media (5,7 para el REM y 88,7 para el TCM), con lo cual aparecieron naturalmente cuatro segmentos (subconjuntos) importantes de la población que presentaban algunos coeficientes de correlación parciales interesantes, como muestra la Tabla IX:

TABLA IX
Correlación REM - TCM, segmentada

Muestra segmentada	REM Promedio: 5,7	TCM Promedio: 88,7%	Correlación para cada subconjunto
Segmento inferior (17,2 % del total)	<	<	0,11
Segmento mixto 1 (25 % del total)	<	>	0,19
Segmento mixto 2 (23,4 % del total)	>	<	-0,14
Segmento superior (21,9 % del total)	>	>	0,62

observa —como habíamos previsto— que los segmentos mixtos son mayoritarios, e incluso uno de ellos tiene correlación débilmente negativa (aquel de alto REM y bajo TCM). De los cuatro segmentos predomina el de alto TCM y bajo REM, que —conjeturamos— incluye a niños que quizá no habían logrado memorizar bien los algoritmos estándares, pero emplearon recursos idiosincrásicos propios (eventualmente visuales o metafóricos) para abordar las tareas de CM. Las profesoras que aplicaron el TCM notaron un efecto positivo en la autoestima de los niños que abarcó este segmento cuando se enteraron de su éxito en el TCM, Como señalamos en nuestra hipótesis 3, apareció una significativa correlación positiva en el segmento superior de alto REM y alto TCM.

8. Discusión y conclusiones

En el presente trabajo hemos obtenido un primer registro de las posibles estrategias de CM que ocupan alumnos de segundo a cuarto año de Educación General Básica en Chile. Asimismo, hemos generado la primera versión de un programa *ad hoc*, capaz de obtener y procesar información sobre las conductas de los alumnos cuando realizan determinados ejercicios. En una etapa ulterior, planeamos extender dicho programa para que logre detectar las estrategias espontáneas de los alumnos (Abowd et al., 1999) e incidir en ellas. La extensión convertirá al programa en un *context-aware system* que adaptará su conducta de acuerdo con el contexto percibido (Hirschfeld, Constanza

Versión Clame

& Nierstrasz, 2008). En este caso, el contexto es la *estrategia* usada por el alumno y la adaptación es el *tipo de ejercicio* que el programa muestra para promover el uso de una estrategia más eficaz o adecuada.

Consideramos importante que los niños tengan la posibilidad de trabajar con representaciones gráficas intuitivas, ya que al incorporarlas a nuestro sistema informático podremos también investigar con más precisión el rol —poco apreciado hasta ahora— que cumple la visualización geométrica en la generación de estrategias situadas eficaces para el cálculo mental.

En términos generales, observamos que nuestros datos, analizados en la sección precedente, ofrecen evidencia a favor de nuestras tres hipótesis, a pesar de algunas instancias inesperadas que expondremos a continuación.

Con relación a nuestra primera hipótesis, tocante a la diversidad del repertorio de estrategias empleadas por los alumnos para resolver tareas de CM, vemos que los datos recopilados tanto en la aplicación manual del test como en la automatizada indican la presencia de diversos procedimientos o estrategias de cálculo mental. No obstante la dificultad que experimentaron los niños para verbalizar su modo de trabajo personal al abordar el test, los testimonios recogidos en ambas modalidades son consistentes entre sí, de ahí que permitan identificar entre cuatro y seis estrategias cualitativamente diferentes, susceptibles de ser aisladas y estudiadas en su relación con otros factores, como la velocidad de respuesta o la dificultad específica del ejercicio resuelto. Algunas de ellas evidencian un grado de familiaridad apreciable con los números y sus propiedades; por ejemplo, conmutar en sumas o descomponer en forma aditiva y oportuna para calcular sumas o restas. Para nuestro estudio, la confirmación de esta primera hipótesis constituye un hito importante debido a que valida —al menos en una parte— la potencial eficacia de nuestro instrumento en desarrollo, el cual fue creado para detectar la existencia de tales estrategias. Dicha fase inicial era obligada en el proceso de implementar un programa sensible al *modus operandi* del estudiante, con el fin de optimizar sus habilidades de cálculo mental.

Por otra parte, ante la dificultad que tuvimos para recabar las declaraciones de los niños sobre sus estrategias al momento de resolver el test computacional, concluimos que en una futura fase de la investigación es recomendable que acoplemos el test informatizado con entrevistas personales a los alumnos, hechas por las profesoras a cargo de la experimentación.

En cuanto a la segunda hipótesis, los resultados permiten concluir que la velocidad de respuesta a los distintos ejercicios del test de CM tiene un grado de

Versión Clame

correlación que varía de significativo a leve, tanto con la complejidad inherente a los ítems como con el tipo de estrategia involucrada.

Un hallazgo sorpresivo de nuestro trabajo exploratorio fue la relativa facilidad con la que los niños calcularon con dobles y mitades. La disminución monótona en el nivel de logro para las tareas de CM, a causa del aumento en su grado de dificultad, se rompió claramente al llegar al cálculo con dobles y mitades. Esto también se apreció al considerar los tiempos de respuesta en las tareas de resta. Podríamos conjeturar que la facilidad para calcular mentalmente doblando y partiendo en mitades se apoya en el "reclutamiento" para el CM de circuitos neuronales desarrollados evolutivamente, en relación con la manipulación de objetos con ambas manos. De hecho, estudios de caso que hemos realizado en paralelo con nuestra investigación muestran que las secuencias de dobles reiterados son más amistosas y atractivas para los niños de 6 ó 7 años (aparentemente, por la fascinación que suscita la progresión generada), un hecho que suponía nuestro análisis a priori.

Por último, es pertinente enfatizar que el espectro de estrategias observadas en nuestro estudio revela una ausencia casi total de representaciones, visualizaciones o metáforas —como la pista o la recta numérica, u otras que utilicen monedas o fichas—, incluso en el caso de niños que ya las han visto en su escuela. Proponemos que estas representaciones o metáforas son utilizadas en actividades anecdóticas o en simples ilustraciones de un algoritmo, en vez de jugar un rol propiamente enactivo, que incida en el proceso cognitivo del alumno y en su construcción de conceptos. Constatamos así una ruptura cognitiva y didáctica entre una experiencia previa concreta y un CM que aparece como un juego aritmético esotérico y desencarnado. Por tanto, concluimos que es urgente promover este tipo de visualizaciones y representaciones en el contexto del CM.

Versión Clame

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto de investigación ha sido subvencionado por el Centro de Investigación Avanzada en Educación (proyecto PBCT CIE-05, año 2009).

Agradecemos a los colegios Altazor y Abrazo de Maipú, de la ciudad de Santiago, y Sagrados Corazones, de Valparaíso, por las facilidades y el apoyo logístico que dieron para aplicar nuestros instrumentos de diagnóstico de cálculo mental.

Agradecemos también al Prof. Dr. Roberto Araya, quien reseñó una primera versión de este trabajo, por sus útiles sugerencias.

Referencias bibliográficas

Abowd, G.; Anind, D.; Dey, K.; Brown, P. J.; Davies, N.; Smith, M. & Steggles, P. (1999). Towards a better understanding of context and context-awareness. In Hans-Werner Gellersen (Ed.), *Proceedings of the 1st international symposium on Handheld and Ubiquitous Computing* (pp. 304-307). Karlsruhe, Germany: Springer-Verlag.

Alsina, A. (2007). ¿Por qué algunos niños tienen dificultades para calcular? Una aproximación desde el estudio de la memoria humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 10* (3), 315-333.

Anselmo, B.; Evesque-Sagnard, S.; Fenoy, K.; Planchette, P. & Zuchetta, H. (2008). *Calcul mental au collègue: Nostalgie ou innovation?* Lyon, France: IREM de Lyon.

Arzarello, F.; Bosch, M.; Gascón, J. & Sabena, C. (2008). The ostensive dimension through the lenses of two didactic approaches. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education 40*, 179-188.

Artigue, M. (2009). Didactical design in mathematics education. In C. Winsløw (Ed.), *Nordic Research in Mathematics Education. Proceedings of NORMA 08* (pp. 7-16). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Askew, M. (1999). Mental methods of computation. In A. Pinel (Ed.), *Teaching, learning and Primary Mathematics.* Derby: Association of Teachers of Mathematics.

Askew, M. (2004). El CM, piedra angular del aprendizaje matemático inicial (entrevista). *Revista de Educación, Ministerio de Educación de Chile 310-311*, 23-25.

Askew, M.; Denvir, H.; Rhodes, V. & Brown, M. (2000). Numeracy practices in primary schools: towards a theoretical framework. [Versión Electrónica]. *Research in Mathematics Education 2*, 63- 76.

Askew, M.; Ebbutt, S. y Mosley, F. (2006). *Enseñanza de estrategias de CM. 3o. y 4o. de Enseñanza Básica*. Santiago, Chile: Galileo Libros.

Beishuizen, M. (1993). Mental strategies and materials or models for addition and subtraction up to 100 in dutch second grades. *Journal for Research in Mathematics Education 24* (4), 294-323.

Beyer, H. (s.f.). Un Simce en movimiento. Obtenido en octubre 12, 2010, de http://www.cepchile.cl/dms/lang_1/doc_4604.html.

Brissiaud, R. (2003). *Comment les enfants apprennent à calculer*. Paris, France: Retz

Brissiaud, R. (2007). *J'apprends les maths (GS-CP-CE1)*. Paris, France: Retz

Brown, M.; Askew, M.; Baker, D.; Denvir, H. & Millett, A. (2002). Is the national numeracy strategy research-based? *British Journal of Educational Studies 46* (4), 362-385.

Brown, M.; Askew, M.; Millett, A. & Rhodes, V. (2003). The key role of educational research in the development and evaluation of the national numeracy strategy. *British Educational Research Journal 29* (5), 655-672.

Brown, M.; Millett, A.; Bibby T. & Johnson, D. C. (2000). Turning our attention from the what to the how: the national numeracy strategy. *British Educational Research Journal 26* (4), 457-471.

Bruner, J. (1996). *The culture of education*. Cambridge, USA: Harvard University Press.

Butlen, D. et Pezard, M. (1992). Calcul mental et résolution de problèmes multiplicatifs. *Recherche en Didactique des Mathématiques 12* (2-3), 319-368.

Butlen, D. (2007). *Le calcul mental entre sens et technique: recherches sur l'enseignement des mathématiques aux élèves en difficulté, du calcul mental à la résolution des problèmes numériques*. Besançon, France: Presses Univ. Franche-Comté.

Dienes, Z. (2003). *Memoirs of a maverick mathematician*. London, UK: Upfront Publishing.

Ebbutt, S.; Mosley, F. y Skinner, C. (2005). *Enseñanza de estrategias de CM. 1ero. y 2o. Enseñanza Básica*. Santiago, Chile: Galileo Libros.

Ecocam (2009). *Experimiento para Ecocam (Kuky)*. Obtenido de www.pleger.cl/research/ecocam.

English, L. (Ed.). (1997). *Mathematical reasoning: analogies, metaphors, and images*. London, UK: Lawrence Erlbaum.

Espinoza, L.; Barbé, J. y Gálvez, G. (2009). Estudio de fenómenos didácticos vinculados a la enseñanza de la aritmética en la educación básica chilena. *Enseñanza de las Ciencias 27* (2),157-168.

Flessas, J. (1997). L'impact du style cognitive sur les apprentissages. *Revue Éducation Francoph 25* (2). Obtenido de http://www.acelf.ca/c/revue/revuehtml/25-2/r252-03.html

Flessas, J. & Lussier, F. (2005). *La neuropsychologie de l'enfant*. Paris, France: Dunod.

Gallese, V. & Lakoff, G. (2005). The brain's concepts: the role of the sensory-motor system in conceptual knowledge. *Cognitive Neuropsychology 22* (3-4), 455-479.

Gálvez, G. (2009). *CM: pensado, reflexionado, simplificado*. Santiago, Chile: Fundación Arauco.

Gálvez, G. y Soto-Andrade, J. (2006). Conocimiento matemático para educadoras de párvulos y de niños en básica inicial. En *Los desafíos en la formación de profesores de matemática*. Evento de cierre del proyecto FONDEF D021 1090 (septiembre 6, 2006). Santiago, Chile: Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación.

Garanderie, A. de la (1989). *Les profils pédagogiques. Discerner les aptitudes scolaires*. Paris, France: Éditions du Centurion.

Gardner, H. (2005). *Las cinco mentes del futuro: un ensayo educativo*. Buenos Aires, Argentina: Paidós. Obtenido en abril 8, 2008, de http://www.pz.harvard.edu/PIs/HG_Multiple_Lenses.pdf.

Gattegno, C. (1988). Reflections on forty years of work on mathematics teaching. *For the Learning of Mathematics 8* (3), 41-42.

Godino, J. D. (1993). Paradigmas, problemas y metodologías en didáctica de la matemática. *Quadrante 2* (1), 9-22.

Gogtay, N.; Giedd, J.; Lusk, L.; Hayashi, K.; Greenstein, D.; Vaituzis, A.; Nugent, T.; Herman, D.; Clasen, L.; Toga, A.; Rapoport, J. & Thompson, P. (2004). Dynamic mapping of human cortical development during childhood through early adulthood. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 101* (21), 8174-8179.

Gómez, B. (1995). Los métodos de CM vertidos por la tradición reflejada en los libros de aritmética. *UNO. Revista de Didáctica de la Matemática 2* (5), 91-101.

Hidalgo, S.; Maroto, A. y Palacios, A. (1999). Evolución y destrezas básicas para el cálculo y su influencia en el rendimiento escolar en matemáticas. *SUMA. Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las matemáticas 30*, 37-46.

Hirschfeld, R.; Costanza, P. & Nierstrasz, O. (2008). Context-oriented programming. *Journal of Object Technology 7*,125-151.

Hofe, R. Vom (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte.* Heidelberg, Deutschland: Spektrum Verlag.

Isoda, M.; Arcavi, A. y Mena, A. (Eds). (2008). *El estudio de clases japonés en matemáticas*. Valparaíso, Chile: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Johnson, M. & Lakoff, G. (2003). *Metaphors we live by*. New York, USA: The University of Chicago Press.

Knops, A.; Thirion, B.; Hubbard, E.; Michel, V. & Dehaene, S. (2009). Recruitment of an area involved in eye movements during mental arithmetic. *Science 1324* (5934), 1583-1585.

Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from?* New York; USA: Basic Books.

Lethielleux, C. (2005). *Le calcul mental au cycle des apprentissages fondamentaux* (tome 1). Paris, France: Bordas/Sejer.

Luria, A. (1973). *The working brain*. New York, USA: Penguin.

Masciotra, D.; Roth, W. M. & Morel, D. (2007). *Enaction: toward a Zen mind in learning and teaching.* Twente, Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Stewart, J. R.; Gapenne, O. & Di Paolo, E. A. (2010). *Enaction: towards a new paradigm for cognitive science*. Cambridge, USA: MIT Press.

MINEDUC (2010). *Primera mirada a resultados SIMCE 2009*. Obtenido en septiembre 18, 2010, de http://www.educarchile.cl/Portal.Base/Web/VerContenido.aspx?ID=203472.

Miura (2001). The influence of language on mathematical representations. In A. Cuoco (Ed.), *The roles of representations in school mathematics* (pp. 53-62). Reston, VA: NCTM.

Montessori, M. (1967). *The absorbent mind.* New York, USA: Holt.

Neisser, U. (1967). *Cognitive psychology*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall.

Ortega, T. y Ortiz, M. (2002). Diseño de una intervención para la enseñanza-aprendizaje del CM en el aula. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 5* (3), 271-291.

Parra, C. (1993). CM en la escuela primaria. En C. Parra e I. Sáiz (Comps.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*. (pp. 219-272). Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Parzysz, B.; Bergsten, C.; Matos, J. M. & Pesci A. (2003). Introduction to thematic working Group 1: Role of metaphors and images in learning and teaching mathematics. *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME 3* (pp. 1-4). Obtenido en septiembre 18, 2010, de http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG1/TG1_introduction_cerme3.pdf

Pochon, L-O. (1997). Regard sur le calcul mental. *Math Ecole 36* (179), 19-27.

Presmeg, N. C. (1997). Reasoning with metaphors and metonymies in mathematics learning. In L. English (Ed.), *Mathematical reasoning: analogies, metaphors, and images* (pp. 267-279). London: Lawrence Erlbaum Associates.

Radford, R. y André, M. (2009). Cerebro, cognición y matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 12* (2), 215-250.

Riveros, M.; Gálvez, G..; Navarro, S. y Zanocco, P. (1996). *Tilín-Tilón. Actividades para el desarrollo de la capacidad de calcular. Programa de las 900 Escuelas*. Chile: MINEDUC.

Schwank, I. (1999). On predicative versus functional cognitive structures. In I. Schwank (Ed.), *Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME 1* (Vol. II, pp. 84-96). Obtenido en septiembre 18, 2010, de http://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1proceedings/papers_vol2/g5_schwank.pdf

Sfard, A. (1994). Reification as the birth of metaphor. *For the Learning of Mathematics 141*, 44-54.

Sfard, A. (1997). Commentary: on metaphorical roots of conceptual growth. In L. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images* (pp. 339-371). London, UK: Lawrence Erlbaum Associates.

Shrager, J. & Siegler, R. S. (1998), SCADS: A model of children's strategy choices and strategy discoveries. *Psychological Science 9*, 405-410.

Siegler, R. S. & Shrager, J. (1984). Strategy choices in addition and subtraction: How do children know what to do? In C. Sophian (Ed.), *The origins of cognitive skills* (pp. 229-293). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Siegler, R. S. (1989). Hazards of mental chronometry: an example from children's subtraction. *Journal of Educational Psychology 81,* 497-506.

Siegler, R. S. & Shipley, C. (1995). Variation, selection, and cognitive change. In T. Simon & G. Halford (Eds.), *Developing cognitive competence: new approaches to process modeling* (pp. 31-76). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Soto-Andrade, J. (2006). Un monde dans un grain de sable: métaphores et analogies dans l'apprentissage des mathématiques. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 11*, 123-147.

Soto-Andrade, J. (2007a). Metaphors and cognitive styles in the teaching-learning of mathematics. In D. Pitta-Pantazi & J. Philippou (Eds.). *Proceedings of the Fifth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME 5* (pp. 191-200). Obtenido en marzo 8, 2008, de http://ermeweb.free.fr/CERME5b/

Soto-Andrade, J. (2007b). La cognición hecha cuerpo florece en metáforas… En A. Ibáñez y D. Cosmelli, (Eds.), *Nuevos enfoques de la cognición: redescubriendo la dinámica de la acción, la intención y la intersubjetividad* (pp. 71-90). Santiago, Chile: Universidad Diego Portales.

Soto-Andrade, J. (2008). Mathematics as the art of seeing the invisible… *In 11th International Congress in Mathematical Education, ICME 11*. Obtenido en marzo 8, 2008, de http://tsg.icme11.org/document/get/771

Soto-Andrade, J. (2009). Cognitive transformation in professional development: some case studies. In D. Pitta-Pantazi & J. Philippou (Eds.), Proceedings of the Six Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME 6 (pp. 1911-1920). Obtenido en marzo 8, 2008, de http://www.inrp.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg10-23-soto-andrade.pdf

Varela, F. J.; Thomson, E. & Rosch, E. (1991). *The embodied mind: cognitive science and human experience.* Cambridge, MA: MIT Press.

Yeap, B. H. (2005). Helping every student to develop the ability in mathematical problem solving: The Singapore experience. In S. Chaiyasang, P. Wongyai & R. Janjaruporn, (Eds.), *The Proceeding of Symposium on Mathematics Education: Mathematical Problem Solving* (pp. 3-12). Bangkok, Thailand: Srinakharinwirot University.

Williamson, V. (2008). Mental maths-passive to active. Mathematics Teaching 201, 12-15. Obtenido en agosto 4, 2008, de *Educational Resources Information Center (ERIC)*, www.eric.ed.gov/ERICWebPortal/recordDetail?accno=EJ768897

Autores:

Grecia Gálvez. Centro Félix Klein, Universidad de Santiago de Chile, grecia.galvez@gmail.com

Diego Cosmelli. Escuela de Psicología, Pontificia Universidad Católica de Chile, dcosmelli@puc.cl

Lino Cubillos. Centro de Investigación Avanzada en Educación y Departamento de Estudios Pedagógicos, Facultad de Fiosofía, Universidad de Chile, lcubillo@uchile.cl

Paul Leger. Departamento de Ciencias de la Computación, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, pleger@dcc.uchile.cl

Arturo Mena. Centro de Investigación Avanzada en Educación e Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, arturo.mena@ucv.cl

Éric Tanter. Centro de Investigación Avanzada en Educación y Departamento de Ciencias de la Computación, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, etanter@dcc.uchile.cl

Ximena Flores. Colegio Abrazo de Maipú, xflores21@gmail.com

Gina Luci. Colegio Altazor, Automind Chile, ginalucia2@yahoo.es

Soledad Montoya. Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, soledad.montoya@ucv.cl

Jorge Soto-Andrade. Centro de Investigación Avanzada en Educación y Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile, sotoandrade@u.uchile.cl

Versión Clame