Marcel David Pochulu

SIGNIFICADOS ATRIBUIDOS A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICA DURANTE UN DESARROLLO PROFESIONAL DOCENTE

RESUMEN. La presente investigación tuvo como objetivo determinar los significados institucionales y personales que atribuyó un grupo de profesores al resolver problemas con un software de geometría dinámica, durante un desarrollo profesional docente. Las características metodológicas de la investigación fueron de tipo cualitativo e interpretativo. No se partió de hipótesis previamente establecidas sino que, a partir de los datos recogidos, se generaron categorías y conjeturas cuya validez fue testada en el transcurso del trabajo. Con la investigación se muestra que este particular desarrollo profesional docente, así como el uso de software de geometría dinámica, ayudaron a modificar las concepciones sustentadas por los profesores sobre los objetos matemáticos, y las ajustaron a los significados de referencia.

PALABRAS CLAVE: Significado institucional, significado personal, resolución de problemas, desarrollo profesional docente, software de geometría dinámica.

ABSTRACT. The aim of this research is to establish the institutional and personal meanings attributed by a group of teachers when solving problems using dynamic geometric software during professional teacher training. The methodological characteristics of the research were qualitative and interpretative. Rather than using previously established hypotheses as a starting point, collected data was used and categories and conjectures were generated, the validity of which was tested during the research. The research shows that this particular professional teacher training, as well as the use of dynamic geometric software, helped to modify the conceptions of teachers in relation to mathematical objects and helped them to adjust them to the reference meanings.

KEY WORDS: Institutional meaning, personal meaning, problem solving, professional teacher training, dynamic geometric software.

RESUMO. A presente pesquisa teve como objetivo determinar os significados institucionais e pessoais que um grupo de professores atribuiu ao resolver problemas com um software de geometria dinâmica, durante um desenvolvimento profissional docente. As características metodológicas da pesquisa foram do tipo qualitativo e interpretativo. Não se partiu de hipóteses previamente estabelecidas, mas sim de categorias e suposições geradas a partir dos dados recolhidos, cuja validade foi testada no transcurso do trabalho. Com a pesquisa, mostra-se que este desenvolvimento profissional docente específico, assim como o uso do software de geometria dinâmica, ajudaram a mudar as concepções sustentadas pelos professores sobre os objetos matemáticos, e as ajustaram aos significados de referência.

PALAVRAS CHAVE: Significado institucional, significado pessoal, solução de problemas, desenvolvimento profissional docente, software de geometria dinâmica.

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2010) 13 (3): 307-336.
Recepción: Septiembre 3, 2007 / Aceptación: Julio 20, 2010.

RÉSUMÉ. Ce travail de recherche a pour but de déterminer les significations institutionnelles et personnelles qu'un groupe de professeurs a attribuées lorsqu'ils résolvaient des problèmes grâce à un logiciel de géométrie dynamique pendant leur travail d'enseignant. Les caractéristiques méthodologiques de ce travail de recherche furent d'ordres qualitatif et interprétatif. Notre réflexion ne s'est pas basée sur des hypothèses préalablement établies mais sur les données obtenues afin de créer des catégories et d'émettre des conjectures dont la validité fut vérifiée au cours de ce travail. Avec ce travail de recherche, nous montrons que ce développement professionnel particulier des enseignants, auquel s'ajoute l'utilisation du logiciel de géométrie dynamique, a contribué à modifier les conceptions propres aux professeurs en ce qui concerne les objets mathématiques et qu'ils ont adapté ces dernières aux significations de référence.

MOTS CLÉS: Signification institutionnelle, signification personnelle, résolution de problèmes, développement professionnel des enseignants, logiciel de géométrie dynamique.

1. Planteamiento del problema de investigación

En los últimos años se han generado procesos de oferta y demanda de capacitación docente con un crecimiento inédito de propuestas, que se distinguen por la heterogeneidad de propósitos, formatos, alcances y calidad. A su vez, desde los organismos oficiales y las instituciones educativas de Argentina se ofrece una gran variedad de proyectos y experiencias de formación continua que procuran incidir en los procesos educativos de modo integrado, lo cual ha redundado en una mejor oferta de capacitación para los docentes.

Así, han surgido diversas propuestas desde el Ministerio de Educación de la República Argentina y los Ministerios de Educación Provinciales, las cuales han alentado a que se generen proyectos de innovación en el campo de la capacitación docente. En particular, la Agencia Córdoba Ciencia SE –a través de un convenio de cooperación interinstitucional firmado con el Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba, la Universidad Nacional de Córdoba y la Academia Nacional de Ciencias– realizó una convocatoria para innovaciones en el aula, cuya finalidad apuntó a concretar programas y proyectos que propiciaran la transferencia multidimensional en las clases de los resultados de investigaciones y desarrollos científicos y técnicos.

Con esta convocatoria, realizada en el año 2005, se pretendía lograr mejoras continuas en la calidad de las prácticas de enseñanza y aprendizaje, a través de un proceso dinámico que pudiera complementar los componentes técnicos y operativos impuestos desde los organismos oficiales. Estas ideas, que sientan sus raíces en el desarrollo profesional docente –tal como lo conciben Imbernón (1998), Andreone, Martín y Bosio (2001), Bairral (2002), Ponte y Chapman (2006), así como otros investigadores de la temática– asume que los profesores pueden ser verdaderos agentes sociales, planificadores y gestores de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En este encuadre, un grupo de siete profesores de matemática, adscrito a una escuela secundaria de Argentina, llevó a cabo un proyecto de innovación en el aula que tuvo como propósito general la revisión, reafirmación y construcción de conceptos y procedimientos de geometría plana a partir de estrategias de resolución de problemas con utilitarios geométricos. Con esta finalidad, los profesores se introdujeron en el espacio geométrico interactivo que posibilita la geometría dinámica y crearon un ambiente de aprendizaje colaborativo, tendiente a producir material teórico y práctico –centrado principalmente en la resolución de problemas– para ser utilizado posteriormente con los alumnos de segundo año de la escuela secundaria (12 a 13 años).

La resolución de problemas es un tema recurrente dentro de las orientaciones curriculares de Argentina, y ha sido establecida como una de las cinco competencias educativas prioritarias para todas las instituciones educativas de los distintos regímenes, ciclos y niveles de la Provincia de Córdoba (MEPC, 2003). No obstante, los significados atribuidos a los problemas que emergen de los textos escolares e investigaciones en Didáctica de la Matemática involucran la distinción entre *ejercicio* y *problema*, la noción de *situación problemática* y la idea de *pensar matemáticamente* (Noda, 2001), lo cual genera diferentes interpretaciones por parte de los profesores que deben poner en práctica las nuevas tendencias en educación matemática. A su vez, la expresión *resolución de problemas* es ocupada para actividades muy diversas y, en consecuencia, ha tenido varios significados.

Por otro lado, las tendencias actuales sugieren que las situaciones problemáticas para la clase de matemática debieran plantear interrogantes que estimulen activamente la participación de los estudiantes, llevándolos a la acción, y a que se construya el nuevo conocimiento mediante la interacción entre el que ya se posee y los saberes que surgen al tratar actividades relevantes para su práctica. Asimismo, que los problemas debieran ser presentados en contextos adecuados para facilitar su evolución hacia formas más elaboradas y coherentes con las propuestas educativas actuales (MEPC, 2003).

Estas condiciones, sumadas a las que están presentes cuando se resuelven y diseñan actividades escolares para ser abordadas con recursos informáticos, llevaron a poner el foco de atención en las concepciones y significados atribuidos por los profesores a los objetos matemáticos que emergen de la resolución de problemas. En tal sentido, el objetivo general para esta investigación fue determinar los significados institucionales y personales, referidos a la resolución de problemas con utilitarios geométricos, que sustentaban los profesores de matemática en los distintos momentos del desarrollo profesional por el que atravesaron.

En este trabajo se asume que el desarrollo profesional ocurre a través de múltiples formas y procesos que no sólo pueden incluir la realización de cursos, sino también otras actividades como proyectos, intercambios de experiencias, lecturas y reflexiones. Asimismo, que corresponde esencialmente a un movimiento que va desde dentro hacia fuera, en el sentido de que el profesor es el sujeto de formación en lugar del objeto de formación. Esta razón hace necesario partir de sus experiencias y conocimientos previos.

2. Referentes teóricos

Como primer referente teórico de esta investigación, se consideraron algunas nociones del Enfoque Ontológico y Semiótico del conocimiento e instrucción matemática (EOS), que han desarrollado Godino y sus colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007; D'Amore y Godino, 2007; Ramos y Font, 2008, entre otros). Sólo se mencionarán aquellos conceptos y definiciones que se encuentran involucrados directamente en el presente artículo, con el fin de facilitar la lectura de cualquier lector no interiorizado con ellos.

El EOS entiende por objeto a todo aquello que puede ser indicado, señalado o referenciado cuando se hace, comunica o aprehende matemática. La introducción del término *objeto* es una metáfora que consiste en trasladar una de las características de las cosas físicas (la posibilidad de separación de otras "cosas") a la matemática. Por tanto, todo lo que se pueda "individualizar" en matemática será considerado como objeto (un concepto, una propiedad, una representación, etc.). Ahora bien, como respuesta a la cuestión *¿qué es un objeto matemático?*, el EOS propone la construcción de otro objeto, al que denomina "sistema de prácticas", y hace su correspondencia semiótica, en la que concierne al significado para la persona o la institución correspondiente (Godino y Batanero, 1994).

La noción de *significado de los objetos matemáticos* alude a la acción (interiorizada o no) que efectúa un sujeto en relación con dichos objetos. Es decir, los significados vienen a constituir sistemas de prácticas operativas, regulativas y discursivas que se crean para la expresión que designa el objeto matemático. El EOS considera distintos tipos de significados, que categoriza en institucionales y personales.

Una institución está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. Así, el compromiso mutuo con la misma problemática conlleva a realizar prácticas sociales compartidas, las cuales suelen tener rasgos particulares (generalmente condicionadas por los instrumentos disponibles de las mismas), reglas y modos de funcionamiento, por lo que están ligadas a la institución a cuya caracterización contribuyen (Godino y Batanero, 1994).

De acuerdo con las circunstancias contextuales (juego de lenguaje donde se encuentra el sujeto), una misma expresión puede referirse a un objeto personal o institucional. Si se trata de los objetos que intervienen en las prácticas que realiza un sujeto individual para resolver una actividad escolar, se entiende que se trata de un objeto personal. Por el contrario, si se alude a documentos curriculares, libros de texto o explicaciones de un profesor ante su clase, se considera que son objetos institucionales.

Cuando se planifica un proceso de instrucción sobre un objeto matemático para un grupo de estudiantes, el profesor comienza a delimitar lo que dicen las instituciones matemáticas y didácticas sobre el objeto. Por lo general, se acude a los textos matemáticos correspondientes, a las orientaciones curriculares, a lo expresado por los "expertos" en las prácticas operativas y discursivas inherentes al objeto, así como a los conocimientos personales previamente adquiridos. Con todo ello se construye un sistema de prácticas que el EOS designa como *significado institucional de referencia* del objeto.

A partir del significado de referencia, los profesores seleccionan, ordenan y delimitan la parte específica que van a proponer a sus estudiantes durante un proceso de estudio. Asimismo, toman en cuenta el tiempo disponible, los conocimientos previos de los alumnos y los medios instruccionales disponibles. De este modo, logran un sistema de prácticas planificadas sobre el objeto matemático para cierto proceso instruccional, que conforma el *significado institucional pretendido*.

De igual manera, se repara en el sistema de prácticas (operativas y discursivas) que efectivamente tuvieron lugar en la clase de matemática, las cuales sirven de referencia inmediata para el estudio de los alumnos y las evaluaciones de los aprendizajes, y vienen a constituir el *significado institucional implementado*. Por último, las respuestas a una colección de tareas o cuestiones que se incluyen en las pruebas de evaluación será una muestra del *significado institucional implementado.* Si bien conviene distinguir conceptualmente los cuatro tipos de significados institucionales, el EOS aclara que en los procesos de instrucción reales se mezclan e interactúan constantemente entre ellos.

Como segundo referente teórico de la investigación, se hizo necesario establecer un significado institucional de referencia sobre la resolución de problemas. Al explorar los significados atribuidos a la resolución de problemas en la literatura se hallaron concepciones que varían notablemente, pues han estado supeditadas a los paradigmas sobre los que se fundamentaron las diversas teorías.

Si bien pueden encontrarse similitudes en los principios y argumentaciones, se puede apreciar una falta de consenso a la hora de implementar cada una de las ideas. Así, se piensa en resolver problemas como "contexto", como una "habilidad" o "hacer matemática" (Stanic y Kilpatrick, 1989); el problema como "criterio", "móvil" o "recurso" del aprendizaje (Charnay, 1998; Villella, 2001), o enseñar "para", "sobre" o "a través de" la resolución de problemas" (Gaulín, 2001; Font, 2003), y se continuaría con una extensa lista si se analizan los trabajos de investigación que abordan la temática.

La variedad de significados sobre "problema" y "resolución de problemas" llevó a considerar apropiado hacer una clasificación, de acuerdo con las particularidades que compartían. Para ello, se recurrió a la construcción propuesta por Stanic y Kilpatrick (1989), que reúne estos significados en tres grandes categorías:

Primer significado: resolver problemas como contexto. Desde esta concepción, los problemas son utilizados como vehículos al servicio de otros objetivos curriculares, y juegan cinco roles principales:

- *Como una justificación para enseñar matemática*: Al menos algunos problemas relacionados con experiencias de la vida cotidiana son incluidos en la enseñanza para mostrar el valor de la matemática.
- *Para proveer especial motivación a ciertos temas:* Los problemas son frecuentemente usados para introducir temas, con el convencimiento implícito o explícito de que favorecerán el aprendizaje de un determinado contenido.
- *Como actividad recreativa*: Muestran que la matemática puede ser "divertida" y que hay usos entretenidos para los conocimientos matemáticos.
- *Como medio para desarrollar nuevas habilidades*: Se cree que, cuidadosamente secuenciados, los problemas pueden proporcionar a los

estudiantes nuevas habilidades y proveer el contexto para discusiones relacionadas con algún tema.

- *Como práctica*: La mayoría de las tareas matemáticas en la escuela caen en esta categoría. Se muestra una técnica a los estudiantes y luego se presentan problemas de práctica hasta que se ha dominado la técnica.

En cualquiera de estas formas, los problemas son usados como medios para algunas de las metas antes señaladas. Por tanto, la resolución de problemas no es vista como una meta en sí misma, sino como facilitador del logro de otros objetivos y tiene una interpretación mínima: resolver las tareas que han sido propuestas.

Segundo significado: resolver problemas como habilidad. La resolución de problemas es vista frecuentemente como una de tantas habilidades a ser enseñadas en el currículo de matemática, donde se resuelven problemas "no rutinarios" como una habilidad de nivel superior, que es adquirida luego de haber resuelto problemas rutinarios (habilidad que, a su vez, se adquiere a partir del aprendizaje de conceptos y destrezas matemáticas básicas). No obstante, las técnicas de resolución de problemas son enseñadas como un contenido, que incluye problemas de práctica relacionados, para que puedan ser dominadas. Este significado también puede ser entendido cuando un profesor diseña los problemas para que de la resolución emerja un contenido matemático.

Tercer significado: resolver problemas es "hacer matemática". Este significado sienta sus bases en el hecho de asumir que el trabajo de los matemáticos es resolver problemas, y que la matemática realmente consiste en problemas y soluciones. En este sentido, González (2004) dice que en la actividad resolutoria de problemas matemáticos el resolutor pone en juego los siguientes elementos: 1) conocimientos de contenido matemático; 2) herramientas heurísticas para el abordaje del problema; 3) una representación mental del proceso de resolución de problemas; 4) la conciencia de sus propias debilidades y fortalezas como resolutor.

González también argumenta que "hacer matemática" en el aula con el uso de la resolución de problemas demanda la constitución de un contexto didáctico que se caracterice por: 1) una concepción de la matemática que haga énfasis en los procesos propios del pensamiento matemático; 2) la creación de oportunidades para realizar tareas intelectualmente exigentes; 3) la generación de un clima que propicie la libertad para pensar; 4) la realización de actividades de mediación cognitiva tanto individual como socializada; 5) la construcción de un repertorio de herramientas heurísticas; 6) la adopción de un modelo representativo del proceso de resolución de problemas.

3. Metodología de la investigación

El trabajo de investigación fue desarrollado como un estudio de caso. Su diseño metodológico se basó, por un lado, en la determinación y análisis de los significados institucionales y personales que se le atribuyen a los objetos matemáticos involucrados en la resolución de problemas; por el otro, en el análisis e interpretación de las actividades de resolución, diseño y puesta en práctica de estos objetos matemáticos por parte de los profesores involucrados en el proyecto.

La elección del diseño metodológico devino por considerar el EOS que propone Godino (2003) para las investigaciones en didáctica de la matemática, del que se esbozaron algunos conceptos estructurales en la sección anterior.

Debido a que el fin de la investigación fue caracterizar los significados institucionales de objetos matemáticos –por ejemplo, la resolución de problemas de geometría plana–, se identifica al trabajo principalmente como una *semiometría;* por consiguiente, asume un carácter descriptivo. Así, la “medida” de estos significados –no desde un punto de vista psicométrico o matemático estricto, sino en un sentido más general– tuvo un carácter cualitativo que estaba asociado a personas determinadas, institución, contexto fenomenológico y momento temporal específico.

A su vez, las características metodológicas de la investigación son de tipo interpretativo y cualitativo, ya que se pretendió arribar a una comprensión profunda sobre las actividades llevadas a cabo por este grupo colaborativo de profesores mediante un análisis inductivo/constructivo (Lincoln y Guba, 1985). El diseño metodológico escogido lleva a situar la investigación en los siguientes campos:

- *Etnográfico*, dado que se pretendió comprender los acontecimientos tal y como los interpretan los sujetos investigados, a través de una inmersión en su pensamiento y práctica.
- *Longitudinal*, ya que la información fue obtenida en diferentes momentos del desarrollo profesional docente que llevaron a cabo los profesores.
- *De campo*, porque la información se obtuvo en el lugar de trabajo de los sujetos investigados.
- *Hermenéutica*, en el sentido de que se hicieron interpretaciones sobre las interpretaciones que hacían los sujetos investigados.

La investigación se llevó a cabo en tres fases claramente diferenciadas. Para la primera, se analizó el proyecto que presentaron los siete profesores a la convocatoria de innovaciones en el aula emitida por los organismos oficiales. Asimismo, se analizaron y caracterizaron las actividades que dieron los profesores para trabajar en geometría con sus alumnos bajo los siguientes aspectos: estilo de formulación de la consigna; tipo de proceso que demanda la resolución de la actividad; cantidad de soluciones potenciales de la actividad; habilidades geométricas que pretende desarrollar la actividad; grado de reflexión que involucra la resolución de la actividad, y procesos heurísticos que se ponen en juego.

Posteriormente, se hicieron entrevistas semiestructuradas a los profesores que fueron grabadas en cintas de audio, con el propósito de indagar en las concepciones sobre los problemas y resolución de problemas en la enseñanza de la geometría.

Como consecuencia de la primera fase, se determinaron los significados institucionales pretendidos para resolver problemas mediante el software de geometría dinámica, con anterioridad y al momento de iniciar el desarrollo profesional.

En la segunda fase, se caracterizaron las producciones hechas por los profesores a lo largo del proceso de desarrollo profesional (que duró ocho meses) en términos de diseño, interpretación recreada a nivel de clase, la actitud como resolutores de problemas, tipologías de situaciones problemáticas desarrolladas, así como las secuencias que proyectan en las propuestas de trabajo para ser implementadas con los alumnos.

A su vez, se analizaron tanto las concepciones sobre la resolución de problemas y las características de participación que presentaban los docentes en las etapas de resolución y producción de actividades sugeridas durante la capacitación, como las que adoptaron como diseñadores de problemas para ser trabajados con sus alumnos. También se realizaron entrevistas individuales, que fueron planteadas como semiestructuradas, con la intención de tener una aproximación a las fortalezas y debilidades que le asignaban los profesores al desarrollo profesional docente por el cual estaban transitando.

De esta fase se pudieron especificar algunos rasgos distintivos que presentaba el desarrollo profesional docente, tendientes a favorecer la reflexión sobre la actividad de resolución de problemas geométricos con recursos informáticos.

Para la tercera y última fase se caracterizaron los problemas que diseñaron los profesores al finalizar el desarrollo profesional docente. Las actividades fueron analizadas considerando las variables propuestas para la primera fase de la investigación.

Como consecuencia de esta fase, se determinaron los significados institucionales pretendidos que se atribuían a los objetos matemáticos que derivaban de la resolución de problemas con software de geometría dinámica, al finalizar el desarrollo profesional docente. Colateralmente, se reconocieron algunas variables que evidenciaron un contraste o analogía entre la tarea de resolver problemas y la de diseñarlos para un grupo de estudiantes como eventual audiencia.

4. Análisis de resultados

4.1. *Introducción*

El significado de los objetos personales, matemáticos y didácticos de los profesores se halla sumergido en el flujo de acontecimientos, interrelaciones y relaciones personales que se producen, tanto en el marco de la institución en la que trabajan como fuera de ella. Si bien los significados personales de los objetos matemáticos son una componente del significado institucional de referencia, suelen ser distintos de los significados institucionales pretendidos.

Cabe destacar que el significado institucional pretendido se puede concretar en diferentes documentos, como la planificación de la asignatura, los libros de textos usados para planificar o el material complementario elaborado. Algunos pueden ser impersonales, en el sentido que son los mismos para todos los miembros de la institución, como la planificación de la asignatura o el libro de texto que los docentes decidieron seguir. Otros son estrictamente personales porque son elaborados y utilizados por una sola persona, como las guías complementarias de problemas y ejercicios, o pueden quedar en una situación intermedia, cuando el material sólo es ocupado por algunos profesores, aunque existió un trabajo en equipo previo.

En este trabajo, con la expresión *significado institucional pretendido* se alude a las prácticas operativas y discursivas que contienen los documentos escritos por los profesores en los distintos momentos del desarrollo profesional, sean impersonales, personales o intermedios. Además, se hizo la distinción entre tres momentos para determinar los significados pretendidos *antes del desarrollo profesional docente*, *al iniciar el desarrollo profesional docente* y *al finalizar el desarrollo profesional docente*, los cuales se exponen a continuación. El análisis se complementa con la descripción de algunos rasgos distintivos que tuvo el desarrollo profesional docente, con el propósito de que se comprenda el modo en que finalmente se modificaron los significados institucionales y personales tocantes a la resolución de problemas con software de geometría dinámica.

4.2. *Significados pretendidos antes del desarrollo profesional docente*

El proyecto, titulado *Restaurando el pensamiento geométrico mediante la Geometría Dinámica*, que fue elaborado por los siete profesores de matemática a finales del año 2004, y que los convocaba a un desarrollo profesional docente durante el año 2005, propone recuperar el abordaje de los contenidos geométricos dentro de la institución escolar, con un énfasis específico en las actividades de planteamiento y resolución de problemas con utilitarios geométricos. En el mismo proyecto se especifica, entre sus propósitos y objetivos:

> (...) es posible entregar a los alumnos problemas reales mucho más interesantes de los que se les presentan actualmente, con construcciones no triviales y que demandan de un buen manejo de las transformaciones del plano y propiedades geométricas. Así, se pueden realizar construcciones que simulan el funcionamiento de objetos de la vida cotidiana, tales como el gato elevador, el motor de la máquina de vapor, el mecanismo de brazo oscilatorio o el cilindro hidráulico, la puerta levadiza de los garajes, la aguja en la máquina de coser, la limadora o las máquinas utilizadas en la construcción que utilizan brazos articulados, la grúa, la excavadora, la balanza de dos platillos, el limpiaparabrisas de un auto, el movimiento de la pierna del ciclista al pedalear, el mecanismo de cierre automático de las puertas, etc.

El significado institucional pretendido sobre estos objetos matemáticos, como conjunto de prácticas operativas y discursivas, también se pone en evidencia en la siguiente expresión:

> (...) el presente proyecto es una propuesta para que nuestros alumnos comiencen por explorar, investigar, para luego descubrir propiedades, regularidades, patrones, coincidencias, y a partir de estos descubrimientos plantear conjeturas y analizar su posible validez. De esta manera, estarán generando conocimiento y logrando aquello tan deseado por todos los docentes: estarán aprendiendo a aprender, al mismo tiempo que se revitalizarán los contenidos de Geometría, vinculándolos con los demás tópicos de la Matemática y áreas de conocimientos de la currícula escolar del Nivel Medio.

Más adelante, se refuerza esta concepción entre los propósitos y objetivos del proyecto, y se alude a que:

La resolución de problemas con utilitarios geométricos permitirá generar un espacio de aprendizaje en el que los alumnos:

- Potencien la capacidad visual y constructiva
- Exploren e investiguen sobre figuras geométricas
- Propongan conjeturas y analicen su validez
- Organicen y argumenten sus ideas
- Contrasten las ideas propias con las de los demás

- Establezcan conexiones y relaciones
- Aprendan desde las ideas y no desde las recetas

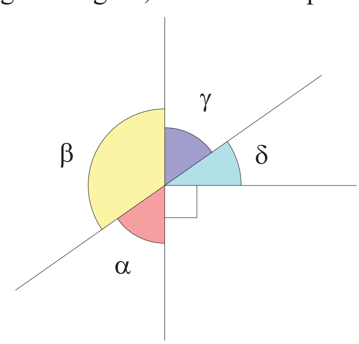
De este modo, los significados institucionales pretendidos son acordes con el significado institucional de referencia que establecen los lineamientos curriculares actuales de Argentina, y a las recomendaciones que sugieren utilizar a la matemática para modelizar situaciones de la vida cotidiana (en este caso, las máquinas y mecanismos). Este significado se encuadraría en el tercer significado que le asignan Stanic y Kilpatrick (1989) a estos objetos matemáticos; es decir, *resolver problemas es hacer matemática*.

4.3. *Significados pretendidos al iniciar el desarrollo profesional docente*

Varios meses después de haberse formulado el proyecto de innovación en el aula, en el inicio de un nuevo año académico se les solicitó a los profesores que enumeraran problemas para trabajar en geometría con sus alumnos, los cuales serían readaptados, si era necesario, para su resolución con utilitarios geométricos. Asimismo, se les pidió que detallaran los conocimientos previos que se requerían para resolver el problema y las intervenciones docentes, entre otras cuestiones, para complementar el análisis.

Se transcribe enseguida una selección de actividades, consideradas como buenos problemas por los profesores de matemática participantes del proyecto. Aunque los docentes dieron una mayor cantidad, se les solicitó que señalaran sólo una actividad que podría ser considerada matemáticamente interesante para abordar en una clase. De este modo surgieron las siete situaciones que se exponen:

<u>*Situación 1*</u>: Según la figura, calcula la amplitud de α, β, γ y δ.



$\alpha = x + 10^\circ$

$\beta = 2x + 38^\circ$

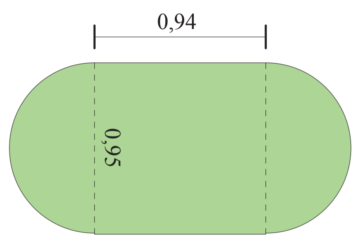
<u>*Situación 2*</u>: (a) Dibuja 1/4 de círculo. (b) Considera el rectángulo inscripto en él, de tal manera que el centro O de la circunferencia sea uno de sus vértices OZYW. (c) Traza la diagonal ZW. (d) ¿Qué longitud tiene XW con respecto al radio OX? ¿Por qué?

Situación 3: La base de un triángulo isósceles mide 36 cm. Cada uno de los lados congruentes mide la tercera parte de la base. Calcular el perímetro del triángulo.

Situación 4: En un triángulo isósceles, un ángulo es igual a los 4/5 de la suma de los tres ángulos del triángulo. Calcular todos los ángulos interiores de ese triángulo.

Situación 5: Ordenar las piezas del tangram por perímetro, de mayor a menor, sin tomar medidas. Dibujarlas. Ahora, medir y controlar si se ubicaron bien.

Situación 6: La figura representa una mesa, y las curvas son semicírculos. ¿Cuántas personas se podrán ubicar si cada una necesita 54 centímetros del borde de la mesa para ubicarse? (aproximar el número π con 3,14 y tomar como resultado el número entero más próximo al resultado obtenido. Las dimensiones que aparecen en el dibujo deben ser consideradas en metros).



Situación 7: Utilizando las piezas del ajedrez[1], calcular: (a) Cada uno de los ángulos internos. (b) Cada uno de los ángulos externos. (c) Indicar cuáles son ángulos cóncavos y cuáles convexos. (d) Sumatoria de ángulos internos. (e) Sumatoria de ángulos externos. (f) Indicar cuántos lados tienen cada polígono (cada pieza de ajedrez). (g) Clasificarlas en figuras cóncavas o convexas. (h) Indicar cuántos vértices posee. (i) Indicar cuántas diagonales posee.

Prácticamente todas las situaciones propuestas por los profesores fueron extraídas de textos escolares o de documentos sobre la enseñanza de la geometría. Ninguna había sido diseñada por los docentes para este fin. Inclusive, en la mayoría de los casos, se presentaron fragmentos fotocopiados de los textos escolares consultados.

El análisis de estas situaciones, junto con las demás que presentaron los profesores, muestra que: a) son actividades con una consigna cerrada en su formulación, con formato académico, y corresponden a los “modelos” de

[1] La profesora argumentó que les entrega a los alumnos una hoja impresa con un diseño plano de las piezas del ajedrez, salvo que olvidó adjuntarla en el momento de entregarla al investigador.

problema que traen muchos textos escolares de matemática; b) demandan un proceso algorítmico de resolución; c) tienen una respuesta única.

De las entrevistas que se hicieron posteriormente a los profesores, se determinó que tenían la convicción de que existe sólo un algoritmo apropiado que garantiza la respuesta a un problema, y la idea de que *los problemas son de cálculo de áreas, regla de tres simple, ecuaciones, perímetro, etc.,* lo que permitiría encuadrarlos en una especie de tipología, de acuerdo con el contenido matemático o procedimiento que involucran. Esta apreciación se veía reforzaba cuando los profesores analizaban los diferentes textos escolares que eran empleados en la institución para la enseñanza y aprendizaje de la matemática, y tipificaban las actividades que hallaban.

En consecuencia, los significados personales e institucionales pretendidos son acordes al primer significado que le asignan Stanic y Kilpatrick (1989) a estos objetos matemáticos; es decir, *resolver problemas como contexto*. Así, la resolución de problemas termina siendo concebida como un proceso que acarrea la aplicación de algoritmos y procedimientos previamente aprendidos. Este modelo se corresponde, a su vez, con el que Charnay (1998) denomina "normativo" (centrado en el contenido), donde el docente trata de comunicar, de "hacer pasar" un saber a los alumnos. Allí se reconoce el problema como criterio de aprendizaje, y el mismo autor expresa:

> Es el modelo de referencia de numerosos manuales, siendo la idea subyacente que es necesario partir de lo fácil, de lo simple, para acceder a lo complejo, y que un conocimiento complejo puede ser, para el aprendizaje, descompuesto en una serie de conocimientos fáciles de asimilar y que, finalmente, todo aprendizaje debe ir de lo concreto a lo abstracto. (1998, p. 57)

Tiempo después, aproximadamente dos meses de haber sido recolectados los listados de problemas producidos por los profesores, se les realizaron entrevistas con la intención de indagar sobre su concepción para los objetos matemáticos "problema" y "resolución de problemas". Surgieron siete caracterizaciones que se transcriben a continuación, en donde se quitaron aquellas expresiones de duda, muletillas o sentencias cortas empleadas por el profesor, puesto que no contribuían a la esencia de lo que se pretendía comunicar y dificultarían la lectura:

> *(1) Yo creo que un problema matemático es una situación que tiene por finalidad alcanzar una meta y que en el camino se presentan obstáculos; entonces se requiere de toma de decisiones porque se parte de un desconocimiento de lo que hay que hacer.*

La resolución de problemas te lleva a realizar tareas que demandan procesos de razonamientos más o menos complejos y no simplemente una actividad asociativa y rutinaria.

(2) Un problema es una situación donde se necesita de un razonamiento complejo, que no es inmediato y no necesariamente tienes una pregunta en el enunciado como muchos de los alumnos creen. Generalmente es difícil de resolver porque hay que hacer análisis de lo que tendrías que hacer y después aplicar conceptos matemáticos.

La resolución de problemas es una estrategia que se utiliza para evaluar a los alumnos y luego, en función del desempeño que tienen, los apruebas o no. [Se ríe]. Bueno, es una estrategia de enseñanza que implica el desarrollo de una serie de habilidades, reglas, técnicas, destrezas y conceptos previamente adquiridos para poder dar una solución.

(3) Un problema depende de la persona, porque si el alumno percibe una dificultad, tiene un problema, y para otro alumno puede ser inmediatala respuesta. Es decir, lo que es problema para un alumno puede no serlo para otro, ya sea porque está totalmente fuera de su alcance, a nivel cognitivo, o porque no tiene los conocimientos necesarios para resolverlo. De todos modos, yo creo que un problema presenta siempre un obstáculo por superar, pero no debe estar tan alejado del alumno que lo inmovilice, ni tan cercano que lo lleve a encontrar un algoritmo o procedimiento conocido.

En cuanto a la resolución de problemas, pienso que es la forma en que uno encara el problema, es decir, los procedimientos y estrategias que pones en juego cuando te enfrentas a él, el análisis que haces de la situación y la manera de resolverlo.

(4) Un problema es una situación que plantea una tarea o un interrogante para los cuales el alumno, o el grupo de alumnos, no tiene previamente en mente un procedimiento de resolución. O sea, un problema lo es en la medida en que el chico al que se le plantea dispone de los elementos para comprender la situación que el problema describe, y no tiene una respuesta totalmente construida que le permita responder de manera casi inmediata.

En cuanto a la resolución de problemas, yo la considero un contenido procedimental, donde partimos de la idea de que aprender no significa la acumulación de conocimientos, sino la adquisición del mismo por medio de una construcción, y donde el alumno no solamente repite lo producido o dicho por otros, sino que lo hace él.

(5) Un problema es aquel en el cual hay involucradas, explícita o implícitamente, operaciones matemáticas y ciertos contenidos, específicamente matemáticos. Puede pertenecer a un contexto que no es matemático, pero creo que es matemático de todos modos porque requiere de conocimientos, habilidades y contenidos de la Matemática para poderlo resolver.

La resolución de problemas implica un proceso más profundo que abarca, entre otras cosas, la resolución de un ejercicio específico. Pero va más allá, debido a que en el proceso se requiere de habilidades, conocimientos y estrategias más elaboradas de las que necesita un ejercicio.

(6) Yo creo que un problema existe cuando tienes tres elementos bien definidos: una situación inicial donde te aparecen los datos y las incógnitas; una situación final planteada como un objetivo que se pretende alcanzar, y las restricciones o condiciones que se te imponen, que dicho de paso te dan las pautas respecto de los métodos, actividades o tipos de operaciones que podrías estar usando para resolverlo.

Para resolverlo es importante disponer de un gran número de estrategias y conocimientos básicos de Matemática, que te permitan hacer transferencias a los efectos de poder hallar la solución al problema. Cuando hablo de estrategias me refiero a procedimientos para acercarse a una solución, pero no a procedimientos algorítmicos como de los ejercicios.

Hasta aquí, los significados personales otorgados a los objetos matemáticos "problemas" y "resolución de problemas" se circunscriben a resolver problemas como contexto, o como habilidad, de acuerdo con la caracterización de significados que plantean Stanic y Kilpatrick (1989).

La siguiente argumentación fue dada por una de las profesoras, y se puede hallar algunas diferencias con las anteriores en las concepciones implícitas que subyacen, puesto que se aproximan a la noción de que resolver problemas es "hacer matemática". Vale la pena destacar que la profesora, en la institución, está a cargo de preparar a los alumnos para certámenes de la Olimpiada Matemática Argentina. Ella expresó que:

(7) Un problema sería una situación a la que no es posible darle una respuesta por aplicación directa de algún algoritmo o procedimiento que uno conoce con anterioridad, sino que, para resolverlo, es preciso poner en juego conocimientos diversos, matemáticos o no, y buscar relaciones nuevas entre ellos.

La resolución de problemas supone una chispa de creatividad e inventiva permanente y exige perseverancia. Obviamente que es muy bueno conocer técnicas y procedimientos, pero vistos en acción, porque la solución se obtiene con ayuda de procedimientos más bien heurísticos.

Si enseñáramos bien en la escuela la resolución de problemas, los alumnos comprenderían la utilidad que tiene la Matemática en el mundo que los rodea, además de ofrecerles un contexto sólido para el aprendizaje y la aplicación de la Matemática.

Finalizadas las entrevistas, se advirtió la falta de correspondencia entre las caracterizaciones que los profesores habían dado a los objetos matemáticos "problema" y "resolución de problemas" con los ejemplos que se proponían para trabajar con los alumnos, y con lo expresado en el propio proyecto.

Estas disonancias entre lo que se "decía" y "hacía" llevó a hacer nuevas entrevistas para lograr una aproximación a lo que en realidad los profesores pensaban. En este sentido, Ernest (1989) dice que el sistema de creencias de los profesores, entendido como un conjunto estructurado del grupos de visiones, concepciones, valores o ideologías que posee un docente frente a los elementos más relevantes que entran en juego en su ejercicio profesional, se mueve en tres niveles: *el nivel de lo que el profesor "piensa"*, *el de lo que "hace"* y *el de lo que "dice"*. Según Gómez y Valero (1996), lo que el profesor piensa no es algo que se pueda observar directamente; es a través de lo que el profesor dice y hace donde se manifiesta su pensamiento. Esta técnica de triangulación impide que se acepten fácilmente como válidas las primeras impresiones y permite ampliar la claridad de los constructos desarrollados. De allí la importancia que se le dio a una nueva entrevista con los profesores.

Con esta intención, en una jornada de trabajo realizada con los siete profesores, se les advirtió sobre las inconsistencias encontradas. Sin embargo, ellos argumentaron que no trabajaban con problemas en las aulas porque consideraban que sus alumnos no estaban preparados para resolverlos; era necesario que manejaran contenidos geométricos previamente para poder enfrentarse a un "verdadero problema". Asimismo, que se requería demasiado tiempo abordar problemas como lo establecían los lineamientos curriculares. Los argumentos y razones que daban los profesores guardaban total correspondencia con los hechos que describe Ramos (2006) en su investigación, ya que la autora argumenta que los docentes manifiestan dos tipos de problemas relacionados con la incorporación de una enseñanza contextualizada y modelizada de la matemática: el primero es cognitivo (falta de recursos previos de los alumnos) y el segundo tiene que ver con argumentos mediacionales (falta de tiempo). Esto podría estar indicando que los profesores priorizan la comprensión de los conceptos en el refuerzo de ejercicios algorítmicos y rutinarios en lugar del conceptual sobre los temas desarrollados.

La situación anterior evidentemente recae en un modelo de enseñanza y aprendizaje que lleva a instruir a los alumnos en una destreza meramente operativa, que puede ser realizada con poca o ninguna reflexión. Si bien este tipo de actividad puede ser necesaria en algunos casos, no es suficiente para comprender los conceptos matemáticos, más cuando éste es el fin último que alegaron los profesores para incorporar a los problemas en el tratamiento de los distintos tópicos que comprendían las clases de geometría.

Entre las instancias de reflexión que se llevaron a cabo en las diferentes jornadas de trabajo, surgió como una concepción muy fuerte que el alumno aprende del hacer del profesor. Esta creencia que se vio reforzada cuando los docentes acordaron plenamente con una de las profesoras cuando expresó:

> (…) Lo que pasa que si al chico no le planteas ejemplos de algunos ejercicios tipo para que arranque, no te hace nada en clase, y después no tiene cómo guiarse para hacer los otros de la guía.

Esta noción guarda relación con la presentación de muchas y variadas actividades para resolver, como sugerían los profesores, donde la resolución de problemas termina siendo concebida como un proceso que acarrea la aplicación de un algoritmo o procedimiento previamente aprendido. Esta concepción, además, se diferenciaba notablemente de lo que habían expresado los profesores en las entrevistas.

Posiblemente en las entrevistas los docentes se vieron influenciados por algún modelo ideal sobre el *deber ser docente*, lo cual no permitió que lo que se decía reflejara en verdad lo que se pensaba. No obstante, la reflexión sobre las acciones concretas de los profesores pudo mostrar, al menos en parte, lo que realmente se pensaba sobre estos objetos matemáticos.

En síntesis, al iniciar el desarrollo profesional docente los profesores concebían a los problemas como una situación que involucra contenidos geométricos previamente abordados, donde toda la información necesaria para obtener la solución viene dada en el enunciado, y cuya finalidad es lograr afianzar el dominio de una técnica o aplicación de un concepto.

4.4. *La resolución y diseño de problemas con utilitarios geométricos durante el desarrollo profesional docente*

Al iniciar con la capacitación en la resolución de problemas con utilitarios geométricos, se llevaron a cabo interesantes diálogos entre los diferentes actores, donde se pusieron de manifiesto algunas concepciones y creencias de los profesores sobre la resolución y diseño de problemas con nuevos recursos.

De inicio, la carencia de formación e información sobre los nuevos recursos para la clase de matemática creó en los profesores ciertos mitos que lograron enceguecer, de alguna manera, el modo de aprovecharlos de manera efectiva en el aula. Algunas de estas creencias fueron:

- Se espera que sea el programa el que, en un rol protagónico, realice todas las operaciones y ejecute todo por sí solo. Creencia, por otro lado, que es análoga a la que sustentan los alumnos sobre el uso de calculadoras cuando piensan que con ellas podrán solucionar todos los problemas matemáticos que se les presenten.
- Quienes están llevando a cabo una capacitación deben tener el rol protagónico, muy propio de las “exposiciones de venta” (de software o, en general, de medios informáticos) las que, por otra parte, están extendidas como representación social circulante. Esto conlleva a que se explique las bondades y virtudes del recurso, y se entreguen listas o secuencias de actividades para ser trabajadas tanto en el aula como con “ese” programa. Esta posición, inclusive, lleva a elevar marcas comerciales a la posición que debieran ocupar instrumentos (*Problemas para Cabri* o *Excel*, por ejemplo, en lugar de *Problemas para utilitario geométrico* o *administrador de hojas de cálculo*).
- Es suficiente lograr cierta familiarización operativo-instrumental con los nuevos recursos para lograr adoptarlos posteriormente a una fructífera relación didáctico-disciplinar en el diseño de propuestas para los alumnos. Esta creencia puede ser apreciada también en algunas capacitaciones con nuevos recursos, donde sólo se centran en lo operativo e instrumental.

A su vez, también se presentaron otros obstáculos que debieron superarse, los cuales devienen de:

- El tiempo didáctico[2], el tiempo de aprendizaje[3] y la vivencia que le procura a los profesores (algunos perciben como inconveniente el entrenamiento y capacitación por los que deben pasar para emplear los utilitarios eficazmente).
- Las modalidades docentes en relación con determinadas posturas epistemológicas de la matemática y su didáctica.
- El distanciamiento que pareciera interponer los instrumentos informáticos a quienes no se sienten diestros, como menguante de los conocimientos que tienen de matemática.
- Los que quieren aprender meramente lo operativo del manual del utilitario geométrico y nada más.

Cuando se superaron todas estas instancias y se logró una puesta en común en cuanto a la finalidad de la resolución de problemas con utilitarios geométricos (acorde con lo expresado en el propio proyecto formulado por los profesores), se atravesó por la etapa de resolver y diseñar problemas para la clase de geometría. Los acuerdos con los profesores comprendieron lo siguiente:

- Proponer problemas que los alumnos tendrían que intentar resolver principalmente en grupos. Se descartarían los problemas sobre modelizaciones geométricas de maquinarias y mecanismos por el nivel de complejidad que acarreaban supuestamente para los alumnos, y por la enorme cantidad de tiempo que demandarían.
- En el proceso de puesta en común de las soluciones, además de resolver los problemas se irían construyendo los conceptos de la unidad, que se relacionarían y organizarían para ser aplicados primero a ejercicios y después en la resolución de problemas más complejos.
- Puesto que se pretendía que los conceptos, propiedades y procedimientos surgieran a partir de generalizaciones y de procesos de abstracción "adecuados" para la edad de los estudiantes (12 a 13 años), la argumentación deductiva tendría que ser casi inexistente. Las razones que se esgrimían apuntaban a que los alumnos no estaban acostumbrados a realizar demostraciones ni que las comprendían.

Ahora bien, diseñar un problema con recursos que ya se dominan, usando criterios con los que se coincide y siguiendo pautas aparentemente simples, puede

[2] Pensado como las duraciones temporales de las diversas actividades que tuvieron lugar durante la capacitación en resolución de problemas con utilitarios geométricos.

[3] Concebido como el tiempo que un sujeto requiere para lograr los objetivos de aprendizaje relativos a un contenido dado.

juzgarse sencillo y considerar irrelevante su examen. Sin embargo, construir buenos problemas escolares, con útiles clásicos o modernos, implica todo un desafío que requiere de aprendizaje, experiencia, espacio, tiempo y aceptación de la revisión crítica a lo realizado (Abrate y Pochulu, 2008). Es mucho el tiempo que necesita destinarse para que los profesores aprendan a manejarse en un ambiente de geometría dinámica bajo cierto posicionamiento didáctico, operarlo con soltura (muchos están por primera vez frente a un utilitario geométrico), solucionar problemas con nuevos recursos, identificar las diferentes herramientas del programa y diseñar actividades con lo que acaban de aprender a usar.

De todos modos, el significado personal de los profesores sufrió transformaciones progresivas, al irse ampliando el campo de problemas asociado con el objeto matemático (también debido a cierto esfuerzo que realizaron por atravesar un cambio conceptual), lo cual llevó a la atribución de sentidos que pueden ser diferentes en las etapas que se consideren del desarrollo profesional.

Si se tiene en cuenta el estilo, presentación y criterios didácticos de los problemas que diseñaron inicialmente los profesores para ser trabajados en un ambiente de geometría dinámica, se observa que coinciden con los más habituales que aparecen en los libros escolares de matemática recomendados para extraer actividades. Asimismo, si no mediaba un posicionamiento didáctico que modificara el ambiente por parte de quienes tenían a cargo la capacitación en resolución de problemas con software de geometría dinámica también era intenso el contraste de estilo, contenido, modalidad y encuadre didáctico entre los problemas que diseñaban los profesores para sus alumnos y los que fueron presentados a lo largo de su trayecto de aprendizaje[4].

Algunos profesores, al iniciar sus borradores, demostraron un apego a la rigidez de lo conocido, por lo que emplearon el utilitario como una simple pizarra más moderna. Después de las primeras orientaciones y sugerencias por parte de quienes estaban a cargo de la capacitación, se animaron a rediseñar y plantear situaciones más ligadas con las posibilidades de poner en evidencia las mismas propiedades o las relaciones que pueden encontrarse, ya sea desde el discurso o desde prácticas trabajosas e imprecisas con lápiz y papel.

4 En la capacitación se les presentaban problemas con consignas abiertas que incitaban a la formulación de conjeturas e hipótesis, y ponían en juego diversas competencias heurísticas. En contraparte, los profesores diseñaban problemas de respuesta única y que demandaban algún proceso algorítmico para su resolución.

De igual manera, surgieron cuestiones interesantes para su análisis, ya que en ocasiones los profesores hicieron su diseño considerando que tenían una actividad realmente ilustrativa y representativa para cierto contenido. Al estar inmersos en un desarrollo profesional, el contexto brindó la oportunidad para presentarla a otros colegas y ver cómo reaccionaban o comentaran lo que les había ocurrido en el camino de la resolución. Muy a menudo sucedió que, cuando se pensaba que se había logrado un buen diseño, al exponerlo se evidenciaba que requería hacerle varios ajustes para volverlo realmente representativo[5].

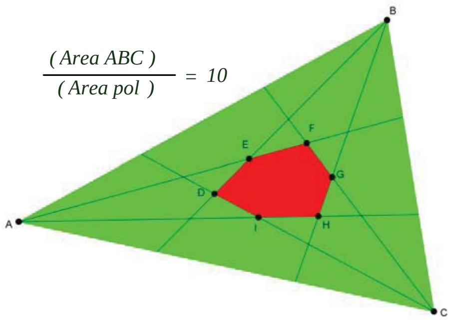
En este punto, el diseño de problemas escolares surgió en el repertorio de tareas docentes porque las devoluciones en intercambio colaborativo lograron promover (aunque no lo garantizan) la revisión reflexiva que conduce a la evolución de las propuestas iniciales, las cuales se fueron modificando hasta constituirse en interesantes situaciones problemáticas. Además, en este caso el trabajo colaborativo y el diseño con otros profesores vino a presentarse como necesario, conveniente y práctico, mientras que los utilitarios geométricos ofrecieron un virtual banco de pruebas conceptual para redescubrir experimentalmente contenidos que, por vía de la institucionalización, conformarían saberes matemáticos. Concebir problemas valiéndose de esta interacción constructiva fue un desafío de diseño que llevó a los profesores a replantearse su propio rol en las clases de matemática.

No obstante, la mayoría de los profesores descartaron los intentos infructuosos de las acciones implementadas en la resolución de problemas, y los trajeron a colación en sus conversaciones como errores u omitieron directamente hablar de la situación. Por ejemplo, se les propuso explorar el teorema de Morgan (Figura 1), cuyo enunciado establece: *Si los puntos que dividen en n partes iguales los lados de un triángulo son conectados a los vértices opuestos, se obtiene un polígono (hexágono) cuya área es una fracción del área del triángulo original.* Se les solicitó que encontraran una relación entre el número de divisiones (n) y la razón de áreas (R).

Algunos profesores intentaron plantear un modelo lineal, con lo que incurrieron en un error muy frecuente por parte de los alumnos, pues tienden a extender modelos lineales a contextos no lineales cuando resuelven diversos problemas (Villarreal, Esteley y Alagia, 2005). La evidencia muestra que dejaban rezagados en sus diseños cualquier conocimiento derivado de estas situaciones

5 Suele ser intenso el contraste que se presentaba entre lo que los profesores "ven" (como representación del medio en que trabajan) antes de sumergirse en las prácticas propias de las resoluciones de problemas con utilitarios geométricos, lo que "ven" después y, a medida que avanzan, lo que esperan que "vean" sus estudiantes y lo que parecen "ver" efectivamente los alumnos.

y no los ponían cabalmente en juego al plantear problemas destinados a los estudiantes. La intención de quienes estaban a cargo de la capacitación era que los docentes sostuvieran estos intentos poco exitosos de resolución (o puntas de errores de todo tipo) en los diseños de los problemas, y los convirtieran en situaciones problemáticas para trabajar con los alumnos. Incluso, al principio se les insistió para que nos los borraran y aceptaran que estaban atravesando por un cambio conceptual y que, en todo caso, podían aprovechar la inédita situación de encontrar dificultades ante la nueva perspectiva para registrar y comprender lo que sucedía en sus alumnos.



Número de divisiones por lado (n)	*Razón entre áreas (R)*
3	*10*
5	*28*
7	*55*
9	*91*
11	*136*
13	*190*
…	…

Figura 1. Teorema de Morgan.

En síntesis, el desarrollo profesional por el cual atravesaron los profesores ayudó a detectar y analizar, así como a elaborar nuevas conceptualizaciones en torno al enseñar, el aprender y la relación con el conocimiento en las aulas. Estos procesos de cambio y formación no sólo generaron revisiones metodológicas que luego se convirtieron en innovaciones para la clase de geometría, sino también consiguieron superar la ruptura entre “quienes piensan” y “quienes hacen” la enseñanza; de este modo, abrieron caminos para objetivar y legitimar lo que se hacía desde el saber práctico, artesanal o *conocimiento de oficio*[6] de las prácticas instruccionales en el contexto cotidiano de la escuela y el aula. Los cambios e innovaciones que finalmente propusieron los profesores para las clases de geometría, donde se incorporaron nuevos recursos, no sentaron sus bases en la novedad u originalidad de las estrategias que podían ser utilizadas, sino en los procesos de análisis críticos que surgieron sobre la relación didáctico-pedagógica (docente, alumno y conocimiento) y el rol que debiera tener cada elemento de esa relación triangular.

[6] Angulo Rasco (1999) define al *conocimiento de oficio* como aquel que surge de la interacción entre el conocimiento teórico recibido en la formación del profesor y la experiencia directa en el ambiente escolar con los alumnos.

4.5. *Significados pretendidos al finalizar el desarrollo profesional docente*

Si bien los acuerdos hechos con los profesores llevaron a quitar del repertorio de problemas aquellos que modelizaban el funcionamiento de maquinarias y mecanismos por el nivel de complejidad que acarreaban, la capacitación en geometría dinámica que estuvo inmersa en el desarrollo profesional docente conllevó a que hubiera otras modificaciones en el significado institucional pretendido.

Cabe aclarar que los diseños de problemas se hacían en forma individual y/o grupal, al mismo tiempo que los profesores aprendían a dominar el nuevo recurso. El análisis que se lleva a cabo en esta sección considera sólo algunos de los problemas diseñados y propuestos en forma personal o en grupo hacia el final de la capacitación. Estas propuestas no se plasmaron posteriormente en una guía de trabajos prácticos para los estudiantes, razón por la cual no se analizan los significados institucionales implementados.

Fue notable ver que en las instancias de resolución y diseño de problemas con un utilitario geométrico los profesores dejaron de ostentar el rol protagónico, y pasaron a ser guías del proceso de enseñanza y aprendizaje de sus colegas. Esto permitió, inclusive, que ayudaran a sus colegas a enfocar los procesos propios de resolución de problemas, discernir sobre las acciones a desarrollar, asesorar sobre evidencias que sirvieran para confirmar o refutar alguna idea, animar a que se generaran conjeturas, promover y desarrollar argumentos convincentes o estimular el diseño de posibles demostraciones. A su vez, el propio proyecto de innovación en el aula, la capacitación en la resolución de problemas con utilitarios geométricos, el trabajo colaborativo, la experiencia de solucionar y diseñar problemas con nuevos recursos, así como el deseo de producir un *estado de cosas mejor*, llevaron a los profesores a querer sustentar prácticas donde los alumnos razonaran y expresaran en voz alta las ideas, tuvieran la iniciativa de hacer preguntas, formularan conjeturas, presentaran soluciones y utilizaran argumentos matemáticos para determinar la validez de las afirmaciones que se plantean en la clase y, fundamentalmente, crear un lugar donde el conocimiento matemático se desarrollara en cooperación.

Dos ejemplos ilustrativos de problemas, aunque muy simples si se los compara con los demás diseños realizados por los profesores, fueron los siguientes:

Problema 1: EFGH es un cuadrilátero inscrito en ABCD por sus puntos medios. ¿Cómo harías para construir el ABCD de modo tal que el EFGH siempre sea un rectángulo? ¿Y para que sea un trapecio? ¿O un romboide?

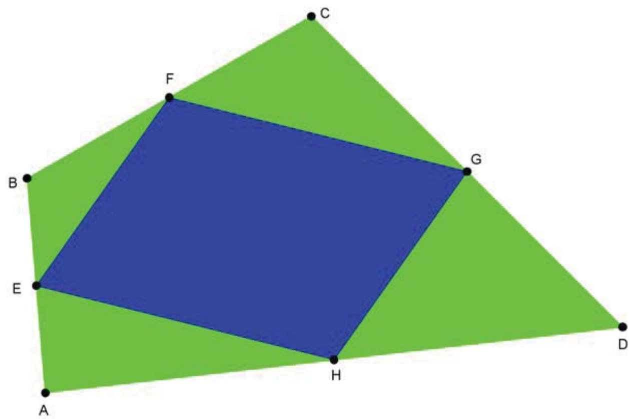


Figura 2. Esquema ilustrativo del problema 1.

Problema 2: El EFGH es un cuadrilátero determinado por las bisectrices del ABCD. ¿Siempre está incluido en el ABCD? ¿Podría no estarlo? ¿Siempre tiene área menor que el ABCD? ¿Podrían tener igual área? ¿Podría tener área mayor? ¿Qué características tendría el ABCD, si fueran posibles cada uno de los casos anteriores?

Si el EFGH es un cuadrado ¿qué características tendría el ABCD? ¿Y si el ABCD es un romboide? ¿ Y si es un rectángulo?

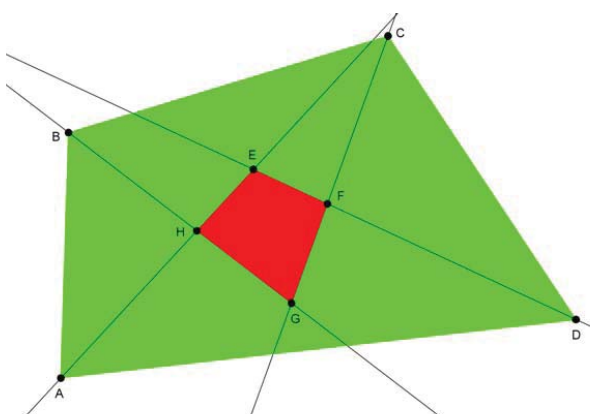


Figura 3. Esquema ilustrativo del problema 2.

El análisis de estos problemas, junto con los restantes diseños de propuestas de actividades realizadas por los profesores, evidenciaron las siguientes características:

- Impulsa a desarrollar estrategias a través de la acción.
- Es compatible con la puesta a prueba, a través de las maniobras dinámicas propias del recurso en búsqueda de una explicación causal.
- Otorga libertad de elección, selección en datos y evaluación de los resultados a lo largo de la búsqueda.
- Admite un desarrollo original y el establecimiento de estrategias más allá de las formalizaciones escolares.
- Se escalona la resolución por etapas y da apertura a nuevas situaciones que podrían constituir renovados problemas.

Así, podríamos situar la resolución de problemas nuevamente en el tercer significado que proponen Stanic y Kilpatrick (1989); esto es, *resolución de problemas es hacer matemática*. No obstante, la expresión *hacer matemática* es concebida por el grupo de profesores como los esfuerzos cognitivos, metacognitivos y comportamentales que realiza una persona cuando se compromete en la realización de una tarea que demanda la ejecución de acciones propias del quehacer matemático, tales como inducir, deducir, inferir, conjeturar, demostrar, despejar, formular, simbolizar, graficar, visualizar, modelizar, definir y argumentar, entre otras.

5. A modo de conclusiones

La resolución de problemas, circunscrita a la enseñanza y aprendizaje de la matemática, ha pasado por diferentes etapas, que van desde ser considerada como una aplicación de conocimientos teóricos *formales* hasta el momento actual, donde comienza a ser tomada como un enfoque direccionador del currículo escolar. Se evidencia, a su vez, una fuerte tendencia a pensar en el estudiante como un protagonista principal en el proceso de enseñanza y aprendizaje, a quien se le reconocen conocimientos y potencialidades que lo constituyen como un miembro capaz de interactuar con los saberes propios de la escuela, donde puede experimentar la potencia y utilidad de la matemática en el mundo que le rodea y desarrollar la resolución de problemas como una habilidad que es extrapolable a otros contextos y disciplinas.

La interpretación implícita —y a veces no tanto— que ha marcado los diferentes lineamientos curriculares de enseñar a los alumnos a “resolver problemas”, ha llevado a que los investigadores busquen proporcionar instrumentos a los profesores y estudiantes para que sean mejores en la resolución. Así, han proliferado un sinnúmero de propuestas de estrategias para resolver problemas, lineamientos para procesos heurísticos, modelos de resolución, entre otras, y con una clara intención de trabajar con situaciones que están más próximos a la vida cotidiana.

Los acercamientos a contextos familiares para el estudiante y la aceptación de sus saberes como válidos en el ámbito escolar han posibilitado, inclusive, que se encuentre otra "cultura del conocimiento" en la escuela. Esta posibilidad de "hacer matemática" en el aula de clases ocupando la resolución de problemas no es tarea sencilla para el profesor que fue formado en otro paradigma, donde muchas veces sustenta su trabajo profesional más en la experiencia práctica que en la teoría científica.

Con respecto a la geometría dinámica, y en el contexto donde se encontraban los profesores que desarrollaron el proyecto, se pudo constatar que:

– No es fácil encontrar textos escolares que aborden la resolución de problemas con utilitarios geométricos, principalmente a través de situaciones problemáticas significativas, tanto para el alumno como desde el punto de vista de la disciplina y de las potencialidades de los recursos.
– Existe poca literatura relacionada con el tema que sirva de real soporte al profesor para afrontar los cambios de rol que suscita la resolución de problemas con utilitarios geométricos.
– No hay una descripción adecuada de lo que ocurre en estas clases, donde los alumnos resuelven problemas en forma colaborativa.
– Las capacitaciones en el tema de geometría dinámica que se ofrecen a los docentes en el medio local son escasas, y generalmente se centran en la exposición de los recursos informáticos o en sus aspectos operativos, por lo cual no respaldan el enfoque de *resolver problemas es "hacer matemática"*.

No obstante, el significado personal de los profesores sufrió transformaciones progresivas mediante la atribución de sentidos disímiles que hubo en los distintos momentos del desarrollo profesional por el cual atravesaron. Por otra parte, una vez que se concretó la estructura de atribución de sentido, o determinada "lógica de significados" en los profesores y en la institución de prácticas, el *medio*[7] se fundió al complejo nivel de las

[7] El *medio* se extiende en reciprocidad dialéctica entre el primitivo *milieu* (de Brousseau y la Escuela Francesa) y el de *significado de referencia* en relación con el *significado implementado* en el EOS.

intuiciones. En este caso, ya que sería arduo desagregar sus componentes, es preferible designarlo como un medio nutrido de significado (o significados) más que como un esquema de conocimiento de elementos susceptibles al análisis consciente elemental.

De esta forma, el significado institucional pretendido en sus distintas instancias dentro del desarrollo profesional docente surgió en forma diferente, al estar instituido por las prácticas propias de la actividad matemática habilitada en el medio dinámico. Este medio, conceptualizado bajo tales parámetros, brinda más que un mero escenario poblado de recursos casi objetivos y es mucho más que un telón de fondo en que se perfilan objetos de ciertas características de comportamiento geométrico y dinámico, puesto que irrumpe como una entidad de segunda naturaleza, tanto para el profesor como para el alumno, en relación con el saber o conocimiento específico puesto en juego.

A su vez, el encuadre del ambiente dinámico que se presentó durante este particular desarrollo profesional docente conllevó a un cambio conceptual sobre el tratamiento de los objetos matemáticos y, por ende, de los significados institucionales ligados con la resolución de problemas. La adopción de nuevos recursos mostró a los profesores participantes del proyecto que hay otras formas de organizar y planificar los contenidos y, fundamentalmente, que puede gestarse una nueva visión del docente como profesional de la enseñanza. Mediante el trabajo colaborativo e inmerso en un desarrollo profesional docente, a los profesores les fue posible recuperar y compartir lo que las aulas les enseña, ya que se instaló una cultura profesional que no se basó en "hacer en soledad", sino en formarse al lado de colegas, descubriendo y potenciando las buenas prácticas de enseñanza.

El software de geometría dinámica deja las puertas abiertas a la creación y planteamiento de situaciones retadoras y no rutinarias que ofrezcan una oportunidad para "hacer matemática" y pensar matemáticamente en el aula. Pero esto requiere de un docente capaz de considerar su trabajo como profesional, lo cual implica un compromiso con la autorreflexión y el análisis de las necesidades del alumnado (esto supone un mayor grado de autonomía), y que formule hipótesis de progresión curricular donde se admita la experimentación y denoten los niveles de formulación del conocimiento escolar y profesional deseable.

También es cierto que la introducción de estos instrumentos mediadores tiende a desorganizar las estructuras formales de la educación tradicional, por lo cual exigen una transición delicada desde la situación actual a la soñada. De todos modos, lleva a una dinámica de clases muy diferente a la que un profesor está acostumbrado, ya que estos ambientes proporcionan a los estudiantes más poder, responsabilidad, así como una gran oportunidad de aprender sabiamente con su uso y desarrollar sus propios métodos para realizar sus metas.

Finalmente, se destaca que cualquier capacitación en resolución de problemas que se precie de ser efectiva para la enseñanza de la matemática —que también termina conformando un significado institucional de referencia—, no debiera restringir los márgenes de autonomía y decisión de los profesores. Como señala Parra (2005), cualquier intento de transformación de la educación matemática pasa necesariamente por una modificación de las creencias de los actores y del marco en que se desenvuelven. En consecuencia, algunos caminos posibles que conduzcan a la calidad de educación matemática que muchas veces se anhela se encuentran al investigar las prácticas, conocer en profundidad las aulas (ya sea desde enfoques cualitativos más hermenéuticos e interpretativos que explicativos y causales), escuchar las voces de los profesores, generar espacios para los intercambios y en la construcción colectiva de un saber profesional compartido que permita recuperar, al mismo tiempo, una profesión que en muchos contextos ha estado en progresiva pérdida de prestigio.

Referencias bibliográficas

Abrate, R. y Pochulu, M. (2008). *Diseño y resolución de problemas para la clase de geometría*. Córdoba: Universidad Nacional de Villa María.

Angulo Rasco, F. (1999). De la investigación sobre la enseñanza al conocimiento docente. En A. I. Pérez Gómez, J. Barquín y J. F. Angulo (Eds.). *Desarrollo profesional del docente. Política, investigación y práctica* (pp. 261-319). Madrid: Akal.

Andreone, A., Martini, A. M. y Bosio, M. T. (2001). *La investigación en el aula: un camino hacia la profesionalización docente*. Córdoba: Comunicarte Editorial.

Bairral, M. A. (2002). *Desarrollo profesional docente en geometría: análisis de un proceso de formación a distancia*. Tesis de Doctorado no publicada. Universidad de Barcelona, España.

Charnay, R. (1998). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En C. Parra e I. Saiz (Comps.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones* (pp. 51-63). Buenos Aires: Paidós Educador.

D'Amore, B. y Godino, J. D. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 10* (2), 191-218.

Ernest, P. (1989). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. In P. Ernest (Ed.), *Mathematics Teaching. The state of the art* (pp. 249-254). London, UK: The Falmer Press.

Font, V. (2003). Matemáticas y cosas. Una mirada desde la Educación Matemática. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana X* (2), 249-279.

Gaulín, C. (2001). Tendencias actuales de la resolución de problemas. *Sigma. Revista de Matemáticas 19*, 51-63.
Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques 22* (2/3), 237-284.
Godino, J. (2003). *Teoría de las funciones semióticas: un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Granada: Universidad de Granada.
Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques 14* (3), 325-355.
Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 39* (1-2), 127-135.
Gómez, C. y Valero, P. (1996). *Calculadoras gráficas y precálculo: el impacto en las creencias del profesor*. Reporte final de investigación. Bogotá: Universidad de los Andes.
González, F. (2004). *Cómo desarrollar clases de matemática centrada en resolución de problemas*. Mérida: Educere.
Imbernón, F. (1998). *La formación y el desarrollo profesional del profesorado. Hacia una nueva cultura profesional*. Barcelona: Graó.
Lincoln, Y. & Guba, E. (1985). *Naturalistic inquiry*. Newbury Park: SAGE Publication, Inc.
Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba (2003). *Las competencias educativas prioritarias: Un compromiso con la calidad*. Córdoba, Argentina.
Noda, M. A. (2001). *Aspectos epistemológicos y cognitivos de la resolución de problemas de matemáticas, bien y mal definidos. Un estudio con alumnos del primer ciclo de la ESO y maestros en formación*. Tesis de Doctorado no publicada. Universidad de La Laguna, España.
Parra, H. (2005). Creencias matemáticas y la relación entre actores del contexto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8* (1), 69-90.
Ponte, J. P. & Chapman, O. (2006). Mathematics teacher's knowledge and practices. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future.* 461-494. Roterdham, Holland: Sense.
Ramos, A. B. (2006). *Objetos personales, matemáticos y didácticos, del profesorado y cambios institucionales. El caso de la contextualización de las funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales*. Tesis de Doctorado no publicada. Universidad de Barcelona, España.
Ramos, A. B. y Font, V. (2008). Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 11* (2), 233-265.
Stanic, G. & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R. I. Charles and E. A. Silver (Eds.), *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving.* 1-22. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
Villarreal, M., Esteley, C. & Alagia, H. (2005). As produções matemáticas de estudantes universitários ao estender modelos lineares a contextos não-lineares. *Boletim de Educação Matemática 18* (23), 23-40.
Villella, J. (2001). *Uno, dos, tres… Geometría otra vez. De la intuición al conocimiento formal en la EGB*. Buenos Aires: Aique.

Autor:

Marcel David Pochulu. Universidad Nacional de Villa María, Argentina. mpochulu@unvm.edu.ar.