Cecilia Crespo Crespo, Rosa María Farfán, Javier Lezama

ARGUMENTACIONES Y DEMOSTRACIONES: UNA VISIÓN DE LA INFLUENCIA DE LOS ESCENARIOS SOCIOCULTURALES

RESUMEN. Este trabajo presenta una visión de las argumentaciones y demostraciones matemáticas desde la óptica de la socioepistemología. Permite comprender que en distintos escenarios las argumentaciones utilizadas poseen características distintas de las que posee la argumentación deductiva. La presencia en el aula de distintos tipos de argumentaciones a veces no puede explicarse desde la lógica aristotélica. Asimismo, la no aparición de formas basadas en la lógica aristotélica en escenarios no matemáticos, da la posibilidad de comprender que en ese carácter de producto sociocultural, se construyen argumentaciones en escenarios no académicos que son transferidas por los estudiantes al escenario escolar, ya que ellos viven simultáneamente ambos tipos de escenarios.

PALABRAS CLAVE: Socioepistemología, argumentaciones, construcción sociocultural, escenario.

ABSTRACT. This paper presents a vision of mathematical arguments and demonstrations from a socio-epistemological point of view. It allows us to understand that the arguments used in different settings are different to those of deductive arguments. The presence in classrooms of different types of arguments cannot always be explained using Aristotelian logic. Likewise, the non-appearance of forms based on Aristotelian logic in non-mathematical settings, provides us with the possibility of understanding that, with regards socio-cultural aspects, arguments are constructed in non-academic settings which are transferred by students to school settings, due to the fact that they simultaneously experience both settings.

KEY WORDS: Socioepistemology, arguments, socio-cultural construction, setting.

RESUMO. Este trabalho apresenta uma visão dos argumentos e demonstrações matemáticas a partir da visão sócio-epistemológica. Permite compreender que, em cenários diversos, os argumentos usados possuem características distintas daquelas que o argumento dedutivo possui. A presença em aula de diferentes tipos de argumentos às vezes não pode ser explicada a partir da lógica aristotélica. Do mesmo modo, a ausência de formas baseadas na lógica aristotélica em cenários não matemáticos permite compreender que, nesse caráter de produto sócio-cultural, são construídos argumentos em cenários não acadêmicos que são transferidos pelos estudantes ao cenário escolar, já que eles vivem de maneira simultânea em ambos os tipos de cenários.

PALAVRAS CHAVE: Sócio-epistemologia, argumentos, construção sócio-cultural, cenário.

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2010) 13 (3): 283-306.
Recepción: Enero 15, 2010 / Aceptación: Septiembre 15, 2010.

RÉSUMÉ. Adoptant une perspective socio-épistémologique, ce travail présente les résultats d'une réflexion concernant les argumentations et les démonstrations dans le domaine des mathématiques. Cette recherche permet de comprendre que dans différents milieux, les argumentations utilisées sont dotées de caractéristiques qui diffèrent de celles relevant de l'argumentation déductive. La présence dans la salle de cours de différents types d'argumentations ne peut parfois pas s'expliquer à partir de la seule logique aristotélicienne. De même, l'absence de formes basées sur la logique aristotélicienne, dans des milieux qui ne sont pas en relation avec les mathématiques, permet de comprendre que pour ce genre particulier de produit socioculturel, des argumentations dans des lieux non académiques sont construites et que ce sont les étudiants qui les transfèrent vers le milieu scolaire étant donné qu'ils vivent simultanément dans ces deux types de milieux.

MOTS CLÉS: Socio-épistémologie, argumentations, construction socioculturelle, milieu.

1. Introducción

En el aula de matemática se detectan dificultades relacionadas con las demostraciones matemáticas. Los estudiantes de distintos niveles educativos no sólo no saben realizar demostraciones de propiedades matemáticas, sino que en muchas oportunidades no comprenden su importancia; llegando a preferir otros tipos de argumentaciones no deductivas. Estos fenómenos ha sido estudiados por numerosos especialistas desde distintos marcos teóricos (de Villiers, 1993; Duval, 1999; Godino y Recio, 2001; Hanna, 1996, 2000; Harel & Sowder, 1998; Ibañes, 2001; Recio, 1999, Crespo Crespo, 2005, 2007a; Crespo Crespo y Farfán, 2006).

La socioepistemología permite una mirada al aula de matemática comprendiendo los escenarios socioculturales como vitales para la construcción del conocimiento. En relación con la demostración, este marco teórico ha sido útil para comprender cómo las demostraciones son generadas por la comunidad matemática y cómo sus características están condicionadas a las de ésta (Crespo Crespo, 2005, 2007a). De esta manera, es posible abordar desde la visión de este marco teórico en el que se estudia la formación del discurso escolar a partir de la reinterpretación de significados (Cantoral, 2001), las argumentaciones que se manifiestan tanto en el aula de matemática como en otros escenarios en los que se construye socialmente conocimiento. O sea que permite estudiar la manera en que algunas formas de argumentación que son aprendidas en escenarios escolares influyen en las que se utilizan en escenarios cotidianos y cómo otras que habiendo sido construidas en escenarios escolares de la matemática llegan a escenarios no escolares.

2. Las demostraciones como prácticas sociales de la comunidad matemática

La comunidad matemática puede ser vista como una institución del saber, considerando que "por institución se entienden las formas o estructuras fundamentales de la organización social tal como son establecidas por la ley o la costumbre de un grupo humano dado" (Souto, Mastache, Mazza y Rodríguez, 2004, p.19).

Bajo esta concepción, la comunidad científica es entendida como guardiana y transmisora del saber de su ciencia. Se considera que los conocimientos científicos son establecidos por consenso entre los científicos. La ciencia no es un fenómeno de hombres aislados, sino de grupos en interacción. En esta concepción de ciencia, cobra importancia el contexto social. "La noción de institución da cuenta de la historia y de los valores fundacionales que estructuran el poder social y su distribución" (Souto et al., 2004, p. 20). Para la comunidad científica, es preocupación fundamental el desarrollo de la coherencia interna de la ciencia y las maneras en las que se llega a un conocimiento fiable y comprobado. Las posturas relacionadas con estos mecanismos de validación han evolucionado dentro de la filosofía de la ciencia, reflejándose en la comunidad científica misma.

La actividad humana que caracteriza la validación del conocimiento matemático es demostrar. La demostración se lleva a cabo de acuerdo con reglas y estrategias acordadas de manera explícita o implícita por la sociedad matemática. Estas se constituyen en una normativa indispensable para que una demostración sea aceptada como forma de validación de una proposición matemática.

Consideraremos entonces, a la demostración como una práctica social de la comunidad matemática que se lleva a cabo fundamentalmente para validar el conocimiento matemático adquirido por la sociedad. Esta práctica social no es la misma de una comunidad a otra y se ha modificado de una cultura a otra. Esto es claramente comprensible desde la socioepistemología, ya que en cada escenario sociocultural, refleja las características de éste, pero su finalidad básica ha sido la legitimación del saber matemático, aunque no es esta su única función.

El conocimiento matemático que se construye por medio de esta práctica social debe ser entendido en la actividad humana de demostrar, comprendiendo a la práctica social en su función normativa. Es la argumentación, la que es construida en el escenario sociocultural y que se manifiesta en la práctica social de la demostración. La argumentación matemática se refleja en la práctica social de la demostración. Por ello esta investigación se encara indagando acerca de la construcción sociocultural de la argumentación matemática. Esta indagación se llevó a cabo a través del análisis de fuentes históricas, la observación de situaciones de clase y la realización de entrevistas. En la sociedad matemática actual, la deducción rige la práctica social de la demostración. Por ello al referirnos a la demostración, se piensa inmediatamente en argumentaciones deductivas, pero a lo largo de la historia de la matemática, es posible observar que no todas las demostraciones han sido deductivas. La presencia de comunidades matemáticas en escenarios socioculturales distintos lleva a comprender la presencia de estrategias de demostración diversas, de acuerdo con las características aceptadas para la argumentación. Esto también permite comprender la posibilidad de aceptar como válidas algunas y no otras de acuerdo con las características básicas de los escenarios en los que ocurren.

La concepción de escenarios que maneja la socioepistemología toma elementos de la psicología ecológica (Rojas, 2004) y sus características influyen en la construcción del conocimiento matemático. La mirada sobre los escenarios socioculturales, permite una visión de la construcción social del conocimiento situado que caracteriza a la reflexión socioepistemológica. Lo sociocultural es un sistema que abarca todos los fenómenos sociales que surgen de algún grupo social culturalmente situado.

En algunas investigaciones (Crespo Crespo, Farfán y Lezama, 2008, 2009), se ha presentado evidencia de que los principios de la lógica clásica, asumidos como las leyes del pensamiento humano durante siglos, son en realidad construcciones socioculturales. En ciertas culturas, como las desarrolladas en la antigüedad en Egipto, India, China y América precolombina -en las que fue posible construir ciertos conceptos matemáticos como el cero o el infinito-, se utilizaron formas de argumentar con características distintas a las sentadas por los griegos.

En la cultura occidental, sin embargo, la forma de argumentar en la matemática se ha construido en una cultura de base fuertemente aristotélica. Como el avance de la ciencia moderna se basa en razonamientos deductivos, durante siglos se asumió a esta lógica como innata al ser humano, costando comprender la posibilidad de avance de las ciencias sin el pensamiento de base aristotélica de manera subyacente. Pensar en el avance de las ciencias basado en métodos diferentes al hipotético-deductivo, sin lugar a dudas lleva a concepciones distintas de la ciencia (Crespo Crespo, 2010) y a un cambio de paradigma de la ciencia.

3. Argumentaciones utilizadas fuera de escenarios escolares de la matemática

Suele afirmarse que uno de los valores de la enseñanza de la matemática en la escuela es favorecer la adquisición de formas de argumentación que se transfieren a la posterior vida social no escolar. De ser así, significaría que las argumentaciones que se utilizan fuera de escenarios escolares de la matemática, deberían ser las mismas o al menos tener su sustento en las formas de argumentación que se construyen en el aula. Es el interés de esta investigación intentar ver hasta qué punto las formas de argumentación aprendidas en escenarios escolares influyen en las argumentaciones que se utilizan en escenarios cotidianos o característicos de disciplinas no matemáticas.

3.1. *Las argumentaciones cotidianas y en escenarios académicos no matemáticos*

Con el fin de investigar algunas características más acerca de las argumentaciones que se utilizan fuera del aula de matemática, se realizaron dos entrevistas. Una de ellas, a un estudiante de Letras (J.); la otra, a un psicoanalista (D.) que ejerce además la docencia en cursos de formación de profesores de matemática.

Los perfiles de los entrevistados fueron elegidos por su formación alejada de la matemática, pero en contacto con disciplinas en las que la argumentación posee un papel significativo. Tanto en la literatura como en la psicología, es innegable que la argumentación da fortaleza al discurso; sin embargo estas formas de argumentación tienen características distintas. El objetivo fue realizar una descripción de la importancia que tiene para disciplinas y profesiones no matemáticas las formas de argumentación que se construyen en el aula.

Se transcriben a continuación fragmentos y comentarios de ambas entrevistas. Para su realización se elaboró un guión de entrevista orientado a la descripción de las formas de argumentar propias de las áreas en las que se desempeñan los entrevistados y la relación éstas con las que se construyen en escenarios escolares. Sobre el diálogo y teniendo en cuenta el curso que tomaban las respuestas, surgieron otras preguntas.

La primera pregunta planteada se refirió a las concepciones sobre la argumentación y la finalidad en los entrevistados.

La respuesta del psicoanalista, fue clara:

D: Argumentar es darle sentido a algo. Es efectuar una proposición que describa, explique y fundamente la razón de ser de lo que se quiere demostrar. También se argumenta para ganar una batalla dialéctica. Convencer a otro sobre algo.

En el caso del estudiante de letras, recurrió a ejemplos:

J: A mí me parece que, si estás en la calle y dos tipos chocan, entonces uno dice 'Vos me pasaste mal', y el otro dice 'Sí, pero vos ibas demasiado rápido'. Entonces la argumentación en ese sentido sería buscar quién tiene la razón. En un plano completamente empírico: vos, fuiste el culpable o no. Puede ser una culpabilidad, puede ser una responsabilidad.

La primera visión, une la argumentación a la dialéctica, al referirse a una "batalla dialéctica", pero también a dar sentido a las afirmaciones que se realizan, describiendo, explicando y fundamentando "la razón de ser de lo que se quiere demostrar".

La visión del estudiante de letras, se orienta a la determinación de quién tiene la razón y quién está equivocado ante una afirmación. Al ser interrogado acerca de la unión que realiza entre la concepción de argumentación y la de verdad, prosigue identificando un esquema de argumentación y haciendo referencia a la verdad en las ciencias:

J: Y a nivel científico sí sería llegar a una verdad. Por ejemplo, se me ocurre que cuando un científico está argumentando sobre algo, pongámoslo como una pelea. La argumentación es como una pelea entre dos fuerzas que una dice: A y otra dice no A, o una A y otra B.

En estas ideas vertidas, aparece una diferenciación entre la argumentación científica y la argumentación en escenarios no académicos. En la ciencia moderna, aparecen de manera fundamental la bivalencia y el principio del tercero excluido: la idea de que uno tiene la razón y el otro está equivocado. En los escenarios no académicos, la discusión, la defensa de una postura que no parece estar unida fuertemente al tercero excluido, sino a introducir una racionalidad al hacer, tanto en el quehacer profesional o la cotidianidad. En ambos casos, surge la argumentación como una construcción social, que cobra sentido en el intercambio con el otro, en demostrar algo a alguien:

J: Argumentar es demostrar algo frente a una persona, que puede o no estar dispuesta a creerte, pero la idea es la convicción y demostrarle certeza. Tengo que argumentar frente a otro. Sé que no te estoy respondiendo sobre la argumentación en sí, sino sobre el hecho de argumentar, pero creo que está unido a demostrar algo.

En la entrevista al psicoanalista, se intentó que caracterizara las argumentaciones presentes en tres escenarios distintos en los que él actúa: en el ejercicio de su profesión, en el aula y en escenarios cotidianos. En relación a la argumentación relacionada con el psicoanálisis, afirmó:

D: A los tipos de argumentación en el acto psicoanalítico los llamamos intervenciones. En verdad no son argumentaciones propiamente dichas porque no tienen como fin convencer al otro. Las intervenciones a diferencia de las argumentaciones, no tienen como finalidad polemizar o convencer. La intervención en psicoanálisis tiene sentido en tanto movilice los recursos internos que de por sí tiene el paciente en tanto que en ellos aparece la verdad que no quiere saber, es decir, su propia verdad inconsciente.

En relación con estas argumentaciones, se observa que se trata de construcciones de naturaleza totalmente distinta de la argumentación matemática, inmersas en prácticas sociales forzosamente diferentes a la demostración. Las prácticas sociales serían en este caso las intervenciones.

Sobre las argumentaciones cotidianas, las respuestas se centraron en ejemplos en los que el fundamento de la argumentación puede no ser la lógica, sino ideas religiosas, científicas, mágicas o intuitivas, surgiendo la necesidad de la argumentación para mantener coherencia interna entre las creencias y los hechos, relacionadas al sentido común:

J: Permanentemente estamos rodeados de argumentaciones. En la familia, con amigos, prendiendo la tele, en la publicidad, en la calle y en la radio. Con mayor o menor grado todas estas argumentaciones tienen una lógica interna.

También las hay de tipo mágico. 'No pases por debajo de una escalera porque tendrás mala suerte', dice la señora de la esquina. Otra que se escucha es de tipo intuitivo, aquel que te dice que si fulana sale con tal chico le va a ir mal, porque lo presiente.

El carácter de argumentación en todos estos casos reside en que hay una coherencia interna de carácter lógico que le da sentido a dicha proposición.

En el aula, identifican dos tipos de argumentaciones. Las de los alumnos, con bases similares a las de la vida cotidiana y las que realiza el docente, unidas muchas veces a esquemas mayéuticos que combinan la inducción y la deducción.

D: En mi práctica profesional como docente muchas veces aparecen argumentaciones similares a las de la vida cotidiana, son la periferia de las clases.

Ahora bien, en lo específico del acto docente, la argumentación que uso es de tipo mayéutica (interrogar al texto o la "cosa"), de tipo inductiva: por ejemplo, a partir de la reflexión que los alumnos hacen de las entrevistas a profesores y estudiantes; y deductivas y sintéticas, a partir de la elaboración de hipótesis sobre el adolescente escolarizado de hoy, el rol docente, el poder en las instituciones y la comunicación entre los distintos actores escolares. Es en esta dimensión donde se realizan las operaciones argumentativas que provocan un aprendizaje determinado. Hay algo que se transmite por fuera del poder argumentativo que se dirige al inconsciente de cada alumno, por más que ellos no se den cuenta. Me refiero a la otra comunicación: a los gestos, a las posturas, al andar la clase y sobre todo al compromiso concreto con ellos; la institución y el saber que se quiere enseñar.

Sobre el final de la respuesta anterior, se ponen de manifiesto elementos de comunicación no verbales y que forman parte de las argumentaciones no académicas.

A continuación se preguntó a los entrevistados acerca de cuáles son los elementos que confieren fuerza a las argumentaciones. El estudiante de letras, concentró la fuerza de una argumentación en elementos relacionados con la comunicación:

J: La fuerza de una argumentación la da la facilidad, la claridad con que hablás, la manera en que hablás. Algo importante es no enmarañarse, creo que tiene que ser inteligible, que sea claro.

La característica que da fuerza, para él es la posibilidad de que el interlocutor comprenda lo que se está afirmando, la idea de claridad se une a la existencia de códigos comunes de los interlocutores.

Al hacer referencia a la fuerza de las argumentaciones en el teatro, las respuestas del estudiante fueron:

J: ¿Qué es lo que le da fuerza? Primero, los actores y, segundo, lo escrito, las palabras. De los actores, el ímpetu. La convicción con que argumentan. Para mí eso es importante y hay que crear. Eso es lo que tiene el teatro.

Para el estudiante en letras, la fuerza de una argumentación se sustenta básicamente en la manera en que se argumenta: se logra una argumentación fuerte cuando se entiende lo que se está afirmando y se lo afirma con convicción. El psicoanalista entrevistado se refiere no sólo a aspectos formales de la argumentación sino también a la importancia de la semántica:

D: Hay dos aspectos que le dan mayor o menor fuerza a una argumentación: uno es en el plano de qué se argumenta, el otro en el plano de cómo se argumenta. Para que una argumentación tenga fuerza debe tener buenos fundamentos, un buen desarrollo y explicitación y por último una conclusión que, a su vez, le sea significativa al otro que me escucha. Si no, no convence.

Otro aspecto abordado en las entrevistas, se refirió a si las formas de argumentar son innatas o construidas. Se buscaba indagar si los entrevistados reconocían su naturaleza de construcción sociocultural o tenían una visión aristotélica de la razón. Las respuestas del estudiante de letras, se orientaron en un comienzo a la influencia del medio familiar y social, pero identificó también influencias de la escuela:

J: Bueno, la herencia familiar es importante en un sentido. En el sentido científico, los libros podrían ser una especie de forma de aprender a argumentar… con método. La forma de argumentar es con método que se adquiere con libros, o con profesores. Y sí, puede ser que la argumentación no sea innata. Por ahí otras culturas pueden argumentar de otra manera. Es seguro... no es innato, es cultural. Lo innato sería la necesidad. La necesidad de estar en el otro. Porque cuando vos pudiste demostrar algo o crear algo, ya estás en el otro.

En esta visión, la argumentación es comprendida como una construcción sociocultural, sin embargo, claramente se observa a través de las dudas y los cambios que presenta la respuesta, que J. no se había planteado nunca esta pregunta. En su planteo la argumentación es una construcción dada como respuesta: la necesidad de "estar en el otro", en este caso a través de la comunicación y la permanencia de las ideas.

El analista también entiende a la argumentación como una construcción sociocultural, pero el reconocimiento de lo innato es diferente:

D: Lo innato es el aparato mental que permite argumentar. Es decir, una mesa no puede argumentar, incluso un humano con un accidente cerebro-vascular, falla en la conexión lógica que requiere toda argumentación, sea de la clase que fuere. En la niñez se aprende la herramienta principal con la que se argumenta, me refiero al lenguaje. Sin un sistema de signos y símbolos compartidos es imposible argumentar. El niño suele argumentar con palabras prestadas. La interacción con la familia aquí juega un papel principal. Con el tiempo, la influencia de la escuela, los maestros, los amigos, la tele, los medios de comunicación, etc. ... le permiten al sujeto construir una trama de argumentos y contra-argumentos que le posibilitan negociar para vivir, sea en su trabajo, en su familia, y en toda relación interpersonal.

Ante la pregunta directa de si es posible que distintas culturas utilicen diversas formas de argumentación, respondió:

D: Sí, absolutamente. La forma de argumentar tiene todo que ver con el contexto cultural y socio-histórico. La razón de dicha diferencia es que el proceso mismo de argumentación se va construyendo desde la estructura misma del lenguaje hasta la interacción social cotidiana. Se negocia diferente de acuerdo a la cultura. Y allí, en el modo de negociar se ve el poder de la argumentación.

Finalmente se les preguntó a los entrevistados si habían estudiado cursos de lógica y cuál había sido su utilidad. Esta pregunta se orientaba a detectar cuál es la importancia que le confieren a la lógica aristotélica para su aplicación en escenarios no matemáticos de diversa índole. El analista afirmó:

D: Tuve lógica aristotélica en el secundario y simbólica en la facultad. Me sirvió de poco para mi práctica docente y de nada para mi práctica clínica.

El estudiante de letras en su respuesta acerca de la utilidad de la lógica aristotélica estudiada en su curso de lógica, no le confirió mayor utilidad:

> J: Sí, a veces cuando te estás comiendo un asado, por ejemplo, con mis amigos. Empezamos: "Si p entonces q, no p, no q". Te juro que funciona. Pero nosotros lo decimos riendo, lo que pasa es que claro, es como que te ponés como una calculadora. A cada letra le ponés una frase, es gracioso, no sé, los filósofos son así, también. Me parece divertida. No le encuentro otra utilidad.

Ambas respuestas, muestran que para los entrevistados, la lógica aristotélica no es aplicada fuera de escenarios académicos de la matemática. Sus percepciones de la lógica se reducen al curso en el que la estudiaron o tiene perfiles lúdicos.

3.2. *Reflexiones acerca de la argumentación en escenarios no matemáticos*

Las dos entrevistas cuyos fragmentos se acaban de reportar, muestran que las argumentaciones que se realizan en escenarios no matemáticos no se sustentan en principios aristotélicos. No son estos principios los que les dan fuerza, ni es el estudio formal de la lógica reconocido como base para la adquisición de formas de argumentación en escenarios no académicos ni correspondientes a disciplinas no matemáticas.

Sin embargo, las argumentaciones son reconocidas por ellos como construcciones culturales. Los entrevistados, al tener que responder sobre qué es lo innato acerca de las argumentaciones, no respondieron que fuera la manera de razonar, ni la lógica, sino que en un caso se consideró al "*aparato mental*" describiendo al mismo desde el punto de vista biológico o quizá psicológico y, en el otro, la necesidad de "*estar en el otro*" a través del convencimiento o la creación de algo. Estas dos respuestas, una de base científica a través de la biología y, la otra de base filosófica, dan la posibilidad de mirar cómo la forma de razonar no es vista como algo innato en áreas no matemáticas.

Las argumentaciones son reconocidas con sentido en lo social, en la comunicación, en el intercambio con el otro, en demostrar algo a alguien. También evidenció la existencia de elementos de comunicación no verbales y que forman parte de las argumentaciones no académicas. Estas influyen en la argumentación cotidiana, pero son ignoradas en el aula.

De las entrevistas surge el reconocimiento de diferencias entre la argumentación científica y la argumentación en escenarios no académicos, y también en las formas de argumentación presentes en distintos escenarios.

Las respuestas obtenidas refuerzan las evidencias en el sentido de que la argumentación es una construcción sociocultural, agregando elementos importantes. En los escenarios no matemáticos se construyen formas de argumentación distintas a las que se construyen en el aula de matemática; estas no son aplicadas en aquellos. Las formas de argumentar que se construyen en cada escenario son distintas entre sí, se basan en fundamentos lógicos de distinta naturaleza, cobran vigencia en el consenso de la sociedad que actúa en ese escenario. La lógica aristotélica no es innata. Pero si la lógica no es innata, ¿qué es lo innato? La necesidad de convencer, de hacer que el otro crea en lo que se dice, de lograr que reconozca que lo que se dice es verdad.

4. Argumentaciones que llegan al aula de matemática

A veces se encuentran en el aula modos de razonamiento que no son acordes con la tradición clásica, obtenidos por transferencia a escenarios académicos de formas de argumentar que son utilizados en escenarios cotidianos no académicos. La visión socioepistemológica de la matemática debe tener en cuenta estas formas de razonamiento, la manera en las que son realizadas y cómo se reflejan en el aprendizaje y validación de resultados matemáticos.

En matemática se utilizan distintas formas de argumentaciones deductivas que se ponen de manifiesto a través de las demostraciones matemáticas. Estas no siempre son aceptadas por los estudiantes. Por ejemplo, en el caso de las argumentaciones por reducción al absurdo, es posible detectar rechazo de las mismas por parte de estudiantes de carreras informáticas (Crespo Crespo y Farfán, 2005), o bien simplemente cuestionamiento de formas de argumentación que no consideran brinden la suficiente claridad a su juicio (Crespo Crespo, 2007b).

A continuación se presentan algunas de estas formas de argumentación no deductivas que se han detectado en el aula de matemática y que no suele ser tenidas en cuenta siempre por los docentes: en muchas oportunidades son incluso ignoradas en las situaciones de clase o bien simplemente consideradas erróneas. No se trata de una enumeración exhaustiva, sino de aquellas cuya aparición es frecuente (Crespo Crespo, 2007b). Consideramos que su reconocimiento, estudio y análisis dará origen a interrogantes que conducirán a nuevas investigaciones relacionadas con su posible naturaleza y aprovechamiento. Mostraremos que en los cursos de matemática, no todas las maneras de razonar que se ponen de manifiesto en los estudiantes son deductivas, sino que ellos recurren a otras formas de argumentación para justificar y comunicar resultados y en muchas ocasiones les dan más valor que a las argumentaciones deductivas.

4.1. *Argumentaciones abductivas*

El término abducción fue introducido por Pierce, para designar razonamientos en los que teniendo como premisas una implicación y el consecuente de ésta, se deduce su antecedente.

En la lógica clásica este es un razonamiento no válido. Esta falacia suele ser utilizada, sin embargo, en diversos escenarios para la producción de conocimiento. En escenarios no académicos es utilizado en situaciones en las que se busca una explicación; también fue considerado válido en la India antigua (Hiriyanna, 1960).

La obtención de la conclusión en una argumentación abductiva no se realiza a partir de los datos o premisas, sino que involucran una manera de mirar e interpretar las mismas, extrayendo de ellas informaciones significativas y poniéndolas en relación con otros hechos que las expliquen. La conclusión se enuncia a veces por medio de un "tal vez" o un "quizá". La fuerza de las creencias acerca de la manera en la que se desarrollan los hechos o el valor de las pruebas a las que se someten las conclusiones resultan fundamentales en el momento de afirmar la conclusión.

En el aula de matemática, los alumnos muchas veces buscan explicaciones de la verdad o la falsedad de una proposición. La concepción de los condicionales en los estudiantes suele ser causal y es común que al preguntarles la explicación de cierto proceso que hayan utilizado en la resolución de un problema, acudan a razonamientos abductivos. Esto quizá se deba a que confundan la estructura condicional con la bicondicional y de esta manera asignan a las argumentaciones abductivas carácter de válidas.

Veamos un ejemplo de pensamiento abductivo, que se presentó en alumnos de primer año de ingeniería en sistemas. Se presentó a los estudiantes: "Probar que si el cuadrado de un número natural es par, dicho número es par".

La demostración presentada por varios alumnos fue: *a es par, entonces se puede escribir a=2k. El cuadrado de a es:* $a^2=(2k)^2=4k^2$ *que es par.* Al corregir este tipo de demostraciones, se suele afirmar que se trata de una confusión de la hipótesis y la tesis del teorema. Se trata en realidad de un razonamiento abductivo.

En los estudiantes tanto de nivel medio como incluso a nivel universitario en carreras de ingeniería, es posible detectar una confusión entre las afirmaciones condicionales y bicondicionales. Las dificultades en el "si" y "si y solo si", parten de esa confusión.

4.2. *Argumentaciones inductivas*

También es frecuente encontrar en el aula argumentaciones inductivas. Los alumnos en ciertas oportunidades, ante un enunciado de una propiedad matemática, prueban una cantidad finita, e incluso no muy grande, de casos aislados, concretos, y de eso concluyen que cierta proposición es verdadera, sin comprender que a partir de una cantidad finita de casos no es posible inferir su veracidad para todos los casos.

Por ejemplo, preguntamos a un grupo de alumnos de segundo año de escuela media: "¿De qué cuadrilátero se trata si tiene sus diagonales iguales, perpendiculares y que se corten mutuamente en partes iguales?". Los alumnos comenzaron a trazar segmentos perpendiculares que verifican las condiciones solicitadas: perpendiculares, que se corten mutuamente en partes iguales y que sean iguales entre sí. Cada uno probó en uno o dos casos, compararon resultados, y respondieron: *'Se trata de un cuadrado'.*

Esta situación se repite en distintos cursos y en distintas ramas de la matemática. Es muy usual que los alumnos extraigan conclusiones a partir de razonamientos inductivos. Las argumentaciones inductivas producen en ellos convicción.

Los razonamientos inductivos conducen a conclusiones más o menos probables, pero no otorgan garantía de la verdad de la proposición. Los razonamientos inductivos no dependen únicamente de la cantidad de casos ensayados y observados. En matemática se trabaja en general con conjuntos infinitos, por lo tanto existen infinitos casos, lo cual muestra que por inducción al probar un número finito de casos es posible que no se haya encontrado justo un caso que falsee la propiedad.

El esquema inductivo es uno de los más habituales entre los estudiantes. Además éstos no son conscientes de sus limitaciones, ya que no dan pruebas de su rechazo cuando se les presenta una argumentación inductiva. Sus pruebas inductivas consisten muchas veces en la presentación de un ejemplo o dos, rara vez muestran un contraejemplo, e incluso no expresan que éste invalide la prueba. Los profesores hemos intentado hacer evidente a los estudiantes la falibilidad de la inducción, sin embargo, muchos son los casos en los que este es uno de los métodos más utilizados por los alumnos, y que quedan satisfechos de las conclusiones que mediante él extraen.

4.3. *Argumentaciones no monotónicas*

Una característica de las lógicas tradicionales es la monotonicidad. Esto significa que agregando nuevas proposiciones (premisas) a un razonamiento, nunca se invalidan viejas conclusiones. O sea que el conjunto de conclusiones o teoremas crece monótonamente con el conjunto de premisas. Dicho de otra manera: si una proposición es posible que sea inferida a partir de cierto conjunto de premisas, por más que se agreguen nuevas premisas, la proposición seguirá siendo inferida.

Recientemente han aparecido sistemas lógicos que violan la propiedad de monotonicidad. En primera instancia, se tiende a afirmar que la monotonicidad es completamente natural en el pensamiento humano, pero esto no es cierto. Las primeras detecciones de pensamiento no monotónico se han realizado justamente en el contexto del sentido común humano, en escenarios cotidianos. Lo que caracteriza esta manera de razonar en el ser humano es la habilidad para inferir de una información incompleta. En la vida cotidiana, estamos acostumbrados a no paralizar nuestros pensamientos ante una parcial ignorancia. Para actuar debemos ser capaces de "dibujar" conclusiones, aún sin tener la evidencia suficiente que garantice su corrección. Obviamente estas conclusiones pueden invalidarse a la luz de nuevas informaciones.

Por ejemplo: Es lunes por la mañana y debo contactarme con María. El único hecho establecido es que María trabaja de 8 a 16 en su oficina. Asumo que está allí y llamo por teléfono. Tengo la chance de encontrarla allí, pero es sólo la chance, aunque si me preguntan diré que estoy segura de que está en la oficina. Me atiende una de sus compañeras de trabajo y me informa que está con gripe. Esto cambia la situación. Debo llamar a su casa. La proposición "*María está en la oficina*", que era verdadera es ahora falsa.

Este es un caso en el que se puede apreciar claramente un razonamiento no monotónico. Podemos decir que el razonamiento no monotónico es la forma de razonar por sentido común. Para minimizar el riesgo de cometer errores en nuestros razonamientos, empleamos nuestro conocimiento y experiencia antes de decidir si una conclusión es aceptada y, aunque algunas inferencias de la vida real se tornen erróneas, siempre les demandamos que sean "racionales". La existencia de una justificación racional es el requerimiento fundamental para que cualquier conclusión sea aceptada.

La lógica clásica permite realizar inferencias seguras y consistentes; no obstante, los razonamientos humanos no siempre son consistentes, por las inferencias que realizan los alumnos en el aula a veces tampoco lo son, ya que transfieren esta forma de razonar desde un escenario no académico a uno que sí lo es. La no monotonicidad de las argumentaciones también aparece en oportunidades en las aulas. El uso de contraejemplos está relacionado con este tipo de argumentación ya que se basa en la aplicación de razonamientos que se realizan a partir de conocimientos incompletos (por ejemplo por medio de la prueba de un número finito de casos) en los que se accede en determinado momento a un caso que invalida la afirmación que los estudiantes consideran válida por la aplicación de una inducción. Otra manera de encontrar esta forma de razonamiento es como consecuencia de la aplicación de una abducción que es considerada válida y luego el hallazgo de un contraejemplo.

Volvamos al ejemplo que se presentó en el caso de las argumentaciones abductivas, pero enunciemos de distinta manera la propiedad: "Probar que si el cuadrado de un número es par, dicho número es par". Un alumno presentó la siguiente demostración:

> Sea $a^2=2k$. Entonces a tiene que ser par, pues como 2 es primo y la descomposición en números primos de a es única entonces a tiene un factor 2, entonces k tiene que tener un factor 2 para el otro a. Entonces $a=2u$ (siendo $u=k/2$) y por lo tanto a es par. Pero 2 es par y $\sqrt{2}$ no es par pues no es entero. Entonces la propiedad es falsa.

La demostración presentada tiene dos partes. En la primera utiliza una argumentación deductiva. En la segunda, descubre un contraejemplo (o lo que elalumno cree que lo es) y a partir de ahí afirma que la propiedad es falsa. Sin embargo, en el examen presenta ambas argumentaciones. En realidad no utilizó una premisa presente en el planteo del problema, que se trata de números enteros.

4.4. *Argumentaciones visuales*

Existen estudios actuales acerca de los aportes que pueden hacer las demostraciones visuales a la comprensión de la demostración matemática, basadas en la visualización (Hanna, 2000). Éstas se sustentan en la utilización de representaciones visuales, el uso de diagramas y otros elementos que ayuden a visualizar las propiedades que se desea demostrar.

Son conocidas las demostraciones de propiedades aritméticas que provienen de la época de Pitágoras. En ellas, la percepción de las formas da origen al reconocimiento de los números. Los recursos visuales permiten en este caso identificar y generar números poligonales. Si se continúa este proceso, en el cálculo del término n-ésimo de la sucesión de números poligonales, es posible transitar desde la fórmula recurrente para generar un número poligonal obtenida como hemos visto a partir de la visualización hasta su formulación explícita.

Otro tipo de argumentaciones visuales son las que utilizan recursos computacionales. Pueden mencionarse como ejemplos las construcciones en *Cabri Geomètre* de los puntos notables de un triángulo. Los alumnos utilizan estas construcciones para visualizar las propiedades correspondientes de las ubicaciones de estos puntos. Quienes utilizan estos recursos en el aula, defienden que en realidad al experimentar con los gráficos obtenidos se están probando los mismos para una cantidad infinita de casos y que a partir de ellos es posible referirse a demostraciones visuales. Sin embargo, se preguntan otros cómo extraer la información implícita de las representaciones visuales que permitan construir una demostración válida (Hanna, 2000).

Para los estudiantes, quizá esta sea la manera que menos aceptan de argumentación no deductiva, "no creen" en los gráficos debido a la cantidad de veces que han oído que los dibujos pueden engañar.

4.5. *Argumentaciones a conocimiento cero*

Hace unos años, ha surgido la expresión "demostraciones a conocimiento cero" para identificar ciertas formas de argumentación (Hanna, 1997). Se trata de una prueba interactiva basada en protocolos de conocimiento cero. En ella, una persona trata de demostrar a otra que sabe algo, sin enseñarle o transmitírselo. Es una forma de presentar una propiedad matemática a un interlocutor, convenciéndolo de la veracidad del teorema correspondiente y de que el demostrador la conoce. Durante esta comunicación se busca el convencimiento y la aceptación del otro.

Esta forma de demostración es sustancialmente distinta a la que se aplica en la matemática clásica, sin embargo es de interés desde el punto de vista socioepistemológico en cuanto caracteriza una práctica social constituida por el intercambio de opiniones acerca de ideas matemáticas en escenarios académicos en los que no se presenta la demostración completa, pero que surge de ella la aceptación del resultado.

Su aplicación en el aula se realiza con gran frecuencia, incluso con fines didácticos. Por ejemplo cuando se desea que los estudiantes comprendan y acepten un resultado matemático, pero el docente no se focaliza en la presentación de la demostración en sí del resultado. Un caso concreto de este tipo de argumentación puede ser el tratamiento dado al Teorema de Gödel en cursos superiores de matemática en los que se analiza el resultado y su repercusión en la matemática, haciendo alusión a que su demostración se realiza por medio de la traducción algebraica de proposiciones, pero sin presentar una demostración del mismo.

La utilización de argumentaciones a conocimiento cero, sin embargo no es aceptada por los docentes cuando un estudiante intenta aplicarla para justificar una afirmación. Este hecho provoca en ellos confusiones, ya que no logran comprender las causas por las que los docentes las aplicamos cuando no hacemos hincapié en la justificación, sino en la interpretación y aplicación de propiedades. Su utilización en escenarios no académicos es también usual.

4.6. *Argumentaciones gestuales*

No todas las formas de argumentar que encontramos en el aula son verbales. La dimensión gestual de las acciones de visualización también tiene presencia en el aula de matemática (Aparicio y Cantoral, 2006). En este trabajo, se describe de qué manera el aspecto gesticulativo permite a los estudiantes concebir y trabajar el concepto de función en general y en particular el de función continua en un punto, como un objeto susceptible de ser operado. Los alumnos, en su construcción de estas ideas, son capaces de transitar a través de diferentes representaciones, algebraica, numérica, geométrica, icónica, verbal y gestual. Realizan gesticulaciones en relación a las nociones de continuidad y discontinuidad puntual. Por ejemplo, a través de sus manos, comunican ideas como la continuidad a través de movimientos suaves que se desplazan por las curvas. Otros conceptos que unen a gestos son los de discontinuidades, asíntotas e infinito. Estos gestos enfatizan otros tipos de argumentaciones, combinándose con estas en el lenguaje que utilizan en el aula de matemática.

Algunos especialistas (Corballis, 2002) identifican los gestos como el origen del lenguaje humano, afirmando que gestos como el de apuntar a algo son más elementales que otras representaciones más complejas como la palabra y que los gestos pueden representar propiedades y acciones de manera más universal que el lenguaje verbal. Esta teoría podría explicar las causas por las que ante la necesidad de dar una explicación y de ser entendido por el otro, de no poseer terminología específica, se acuda a gestos de manera inconciente que ayuden a la expresión de ideas y argumentaciones.

5. Algunas reflexiones acerca de las argumentaciones de los estudiantes

A veces en la tarea docente preocupa que los estudiantes no lleguen a los resultados que como profesores quisiéramos, no se entiende cómo no realizan argumentaciones deductivas correctas. Es posible escuchar de algún docente la expresión "no razonan". "Pero los alumnos razonan siempre. Dicho de otra manera, los alumnos no razonan solamente porque la tarea lo demanda [...]. Los alumnos establecen espontáneamente analogías, generalizan, se dan explicaciones, encuentran regularidades, etc." (Panizza, 2005, p.94). En efecto, lo que ocurre es que sus formas de razonar no coinciden siempre con la manera deductiva clásica fundamentada en la tradición aristotélica. Están transfiriendo al escenario del aula formas de argumentación que son propias de escenarios no académicos, de la manera que utilizamos con frecuencia en razonamientos cotidianos.

Resulta importante tener en cuenta que los alumnos viven en dos escenarios básicamente: por un lado, el escenario escolar, de tipo académico en el que construyen conocimientos a partir de bases intencionales; por otro, el escenario cotidiano, no académico en el que se desenvuelven, interactúan con sus pares y construyen conocimientos de manera no intencional, sino por necesidad de interacción y comunicación. En este último, los conocimientos que son construidos poseen significatividad para ellos por ser originados por necesidad, lo construido tiene ese valor. La situación de que los estudiantes interactúen en ambos escenarios, ocasiona que no delimiten con claridad lo construido en cada uno e intenten la transferencia de un escenario a otro.

La comprensión de las demostraciones matemáticas como prácticas sociales conduce de inmediato a analizar las maneras de argumentar que están presentes en el aula y a pensar acerca de las causas por las que surgen y de qué manera adquieren o no aceptación por parte de los alumnos. El análisis del valor social de estas formas de argumentar, puede dar luz acerca de la comprensión de los mecanismos de validación y explicación de las construcciones matemáticas en el aula.

6. Una escuela que no sólo enseña a argumentar, una escuela que debe comprender cómo argumentan los estudiantes

Consideramos que resulta indispensable una mirada sobre la escuela actual en función de las argumentaciones. Las instituciones educativas se mantienen, o al menos intentan mantenerse, con características que les fueron propias hace años: intentan mantener sus tareas de manera disciplinadamente racional, esto es "que permitan distinguir con claridad los espacios del que sabe y del que aprende, del que manda y del que obedece, así como quién es el que evalúa al aprendiz, y cuándo y cómo" (Barbero, 2008, p.65).

Sin embargo estas instituciones educativas están entrando en un período de crisis que deberá desembocar en un replanteo de sus actividades, de los roles que en ellas se desempeñan. Barbero plantea claramente que la causa de la crisis es que no es posible pensar un modelo escolar que marque los espacios y tiempos de aprendizaje en la sociedad actual "Estamos pasando de una sociedad con sistema educativo a una sociedad educativa" (Barbero, 2008, p.66). Esta idea parece esencial, ya que llama la atención a buscar fuera de la escuela los conocimientos que se construyen y a tratar de identificar la manera en la que se construyen. La escuela pasa a ser, bajo esta concepción, una instancia más de aprendizaje, pero no la única: se encuentra inmersa en una sociedad en la cual se construye conocimiento, se construye cultura. "Una cultura adolescente o juvenil es un lenguaje, una forma de autopresentación, una estética, un conjunto de criterios de percepción y valoración, un mundo de fantasías y proyectos, que muchas veces entran en conflicto con la cultura escolar" (Tenti Fanfani, 2008, p.22). Esto produce un desencuentro entre los estudiantes y las instituciones educativas si no se intenta comprender cómo se transfiere lo construido de una cultura a otra, desde un escenario al otro. Debemos intentar que no sea una mera transferencia sino que se aproveche el intercambio para enriquecer ambos.

El aula no permanece aislada del exterior, a ella entran los avances, pero también los problemas que se suscitan en escenarios exteriores de la escuela. Por ello los investigadores coinciden cada vez más en la necesidad de mirar "fuera de la escuela" para comprender lo que ocurre en su interior. Quienes investigamos y enseñamos matemática vamos comprendiendo que sin esta mirada se abre una brecha entre la forma de pensar de alumnos y docentes, pues los estudiantes traen a la escuela construcciones que realizan fuera de ella, emergentes de culturas provenientes de escenarios no académicos, y que la escuela de hace unos años y la actual no está preparada para asimilar ni comprender. "Esta invasión de la sociedad en la vida escolar es una de las novedades de la agenda actual y está poniendo en tela de juicio muchos dispositivos y modos de hacer las cosas en las instituciones educativas" (Tenti Fanfani, 2008, p.15)

El diálogo entre la escuela y la sociedad se ha tornado más difícil y más necesario en los últimos años. Las instituciones educativas eran lugares en los que se conservaban y transmitían valores construidos por la sociedad. Los estudiantes debían adaptarse a la cultura y las reglas de la institución, legitimadas anteriormente por la sociedad. "Las cosas del mundo no debían contaminar el quehacer escolar" (Tenti Fanfani, 2008, p.17). Pero en la actualidad, la escuela ha perdido el monopolio de la transmisión del conocimiento y la cultura. Las relaciones entre la escuela y los escenarios no académicos se han vuelto dinámicas, ambos escenarios deben interactuar.

El lenguaje de los estudiantes no coincide con el que imparte la escuela. Sus formas de expresarse, de razonar, de percibir, de representar y de valorar entran en conflicto muchas veces con la cultura escolar. Acabamos de mostrar la presencia en el aula de algunas formas de argumentar no deductivas. Éstas en algunas oportunidades parecen incluso más convincentes para los estudiantes. Indudablemente han sido construidas en escenarios no académicos, siendo utilizadas en la sociedad para comunicarse, justificar, inferir o defender ideas.

La socioepistemología al reconocer la construcción social del conocimiento y comprender que éste se lleva a cabo en un escenario determinado y a veces se transfiere a otros escenarios, estudia la manera en la que se produce esa transferencia. En el caso particular del objeto de nuestro estudio -las argumentaciones-, hemos podido detectar que las argumentaciones utilizadas por los alumnos en la escuela a veces son construidas fuera de ella. Los cambios deben pasar por una profunda reflexión que conduzca a comprender la manera de compatibilizar y aprovechar en la escuela las ideas construidas fuera de ella.

7. Consideraciones finales

Desde la visión de la socioepistemología, se puede pensar que la comunidad científica matemática tiene como una de sus atribuciones cuidar las formas de validación del conocimiento de esta ciencia. Consideraremos, entonces, a la demostración como una práctica social de la comunidad matemática que se lleva a cabo fundamentalmente para validar el conocimiento matemático adquirido por la sociedad. Esta práctica social, no es la misma de una comunidad a otra, se ha modificado de una cultura a otra. La demostración debe unirse a la normativa, es la que establece cuáles serán las demostraciones aceptadas por esa comunidad.

Al hablar de demostración, no nos restringimos a las demostraciones deductivas características de la comunidad matemática con influencia aristotélica. La concepción socioepistemológica de la matemática, que la reconoce como una ciencia que se construye en un escenario sociocultural, permite ampliar la mirada y tratar de comprender nuestra aula, no viéndola como un escenario aislado.

La presencia de comunidades matemáticas en escenarios culturales distintos lleva a comprender la presencia de estrategias de demostración diversas, de acuerdo con las características aceptadas para la argumentación. Los esquemas de argumentación que actualmente son aceptados dentro de la matemática de nuestra comunidad tienen características que se originaron a través de un largo proceso por el que la lógica aristotélica se convirtió en el sello del comportamiento intelectual en la cultura occidental. Después de Aristóteles, la racionalidad se convirtió en una modalidad del pensamiento que obtiene su legitimidad en leyes o principios que se consideraron universalmente aceptados y propios del pensamiento humano y esta fue la base de la ciencia moderna.

El esquema actual de escuela, inmersa en la sociedad occidental, de base aristotélica, reproduce en la matemática el esquema aristotélico de ciencia, e intenta que los estudiantes razonen utilizando formas de argumentar deductivas. En esta investigación, hemos detectado la presencia en el aula de formas de argumentar no deductivas, que en oportunidades parecen incluso más convincentes para los estudiantes que las deductivas. Muchas de éstas han sido construidas en escenarios no académicos y llegan luego al escenario escolar, donde por lo general, son rechazadas por los docentes. Son utilizadas en la sociedad para comunicarse, justificar, inferir o defender ideas.

Para lograr que los alumnos comprendan la necesidad de argumentar matemáticamente e incluso de demostrar propiedades matemáticas, resulta indispensable que construyan la significatividad de la argumentación. La importancia de favorecer escenarios donde se alcance este objetivo, deberá ser comprendida por los docentes a partir de asumir las demostraciones matemáticas como prácticas sociales.

En el proceso de argumentación matemática, visto desde el punto de vista social, surge la necesidad de interpretar enunciados y condiciones, de convencer por medio de las argumentaciones aceptadas como válidas dentro del grupo social, pero para ello es necesario estar convencido uno mismo de la necesidad y validez de las formas de argumentación que se utilizan.

Las formas de argumentar cambian de un escenario a otro, se encuentran unidas no sólo a técnicas y estructuras aceptadas por la sociedad, sino que también reflejan la concepción de verdad que posee dicha sociedad y la lógica que sustenta su pensamiento. La valorización de los distintos procesos de argumentación no debe llevar a pensar la no existencia de demostraciones; sino a la comprensión de éstas como una construcción sociocultural que tienen validez dentro del consenso de una sociedad.

Desde la óptica de la socioepistemología, la demostración matemática no debe pensarse como una estructura predeterminada propia de la matemática, sino de cada escenario en el que se desarrolla la matemática. Es necesario realizar un estudio profundo de las formas de argumentación propias de nuestros escenarios académicos para poder reconocer y valorar las formas de argumentación presentes en ellos, para determinar cuáles pueden ser aceptadas dentro de esos escenarios y cuáles deberán ser modificadas, mediante su previa interpretación y tras llegar a un consenso en el escenario correspondiente acerca de las características que debe tener una argumentación para ser considerada válida en él.

Consideramos que en relación con las argumentaciones y con el enfoque socioepistemológico, la escuela actual debería prestar atención a las formas de argumentar que se construyen fuera de la escuela y que penetran en ella a pesar de que los docentes de matemática las rechacen. Esta búsqueda fuera de la escuela puede dar claves acerca de los conocimientos que se construyen y a tratar de identificar la manera en la que se fundamentan. De esta manera, la escuela pasaría a ser una instancia más de aprendizaje, pero no la única; ya que se encuentra inmersa en una sociedad en la cual se construye conocimiento.

Los estudiantes no pueden abstraerse fuera de uno de estos escenarios: ambos les otorgan identidad, por medio del surgimiento de sus representaciones, argumentaciones y formas de comunicación. Tiempo atrás, el conocimiento fluía en un solo sentido: se construía en la escuela y se transmitía fuera de ella. El conocimiento construido fuera de la escuela no tenía cabida dentro de ella, por eso no se manifestaban con tanta fuerza formas de argumentación no deductivas y si lo hacían, eran fácilmente ignoradas y anuladas. Hoy pugnan por entrar e incluso intentan reemplazar a las existentes. La situación actual nos conduce a mostrar interés en ellas y a encarar investigaciones que se planteen si es posible su aprovechamiento en el aula para la construcción del conocimiento matemático.

Referencias bibliográficas

Aparicio, E. y Cantoral, R. (2006). Aspectos discursivos y gestuales asociados a la noción de continuidad puntual. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 9* (1), 7-30.

Barbero, J. (2008). Reconfiguraciones de la comunicación entre escuela y sociedad. En E. Tenti Fanfani (Comp.) *Nuevos temas en la agenda de política educativa* (pp.65-99). Buenos Aires: Siglo XXI.

Cantoral, R. (2001). Sobre la articulación del discurso matemático escolar y sus efectos didácticos. En G. Beitia (Ed.), Universidad de Panamá, Ciudad de Panamá, Panamá: *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 14* (1), 64 – 75.

Corballis, M. (2002). *From Hand to Mouth: The Origins of Language*. Princeton: Princeton University Press.

Crespo Crespo, C. (2005). *El papel de las argumentaciones matemáticas en el discurso escolar. La estrategia de deducción por reducción al absurdo*. Tesis de Maestría no publicada. CICATA-IPN, México.

Crespo Crespo, C. (2007a). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología.* Tesis de Doctorado no publicada. CICATA-IPN, México.

Crespo Crespo, C. (2007b). Los estudiantes ante formas de argumentar aristotélicas y no aristotélicas. Un estudio de casos. *Revista Electrónica de Investigación en Ciencias 2* (1), 84-100.

Crespo Crespo, C. (2010). Reflexiones acerca de la ciencia y la enseñanza de la matemática en las postrimerías de la modernidad. Revista Academia (en prensa).

Crespo Crespo, C. y Farfán, R. (2005). Una visión de las argumentaciones por reducción al absurdo como construcción sociocultural. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8* (3), 287-317.

Crespo Crespo, C. y Farfán, R. (2006). Las argumentaciones por reducción al absurdo como construcción sociocultural. En G. Martínez (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19,* 766-781. México: Clame.

Crespo Crespo, C., Farfán, R. M. y Lezama, J. (2008). Acerca de la existencia de formas de argumentación construidas fuera de escenarios escolares que llegan al aula de matemática. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21,* 825-835. México: Clame.

Crespo Crespo, C., Farfán, R. M. y Lezama, J. (2009). Algunas características de las argumentaciones y la matemática en escenarios sin influencia aristotélica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 12 (1), 29-66.

de Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Épsilon 26*, 15-30.

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva*? México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Godino, J. D. y Recio, Á. M. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática*. Enseñanza de las ciencias 19* (3), 405-414.

Hanna, G. (1996). The ongoing value of proof. In A. Gutiérrez & L. Puig (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 21-34). Valencia, España: University of Valéncia. Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: an overview. *Educational Studies in Mathematics 44* (1-3), 5–23. doi: 10.1023/A:1012737223465

Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students´ proof schemes: Results from exploratory studies. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld & J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education. III CBMS Issues in Mathematics education (7),* (pp. 234-283). Providence, RI: American Mathematical Society.Hiriyanna, M. (1960). *Introducción a la filosofía de la India*. Buenos Aires: Editorial Sudamericana.

Ibañes, M. (2001). *Aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática en alumnos de primer curso de bachillerato*. Tesis Doctoral no publicada. Universidad de Valladolid, Valladolid.

Panizza, M. (2005). *Razonar y conocer*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Recio, Á. M. (1999). *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y aprendizaje de la demostración matemática.* Resumen de la Tesis Doctoral presentado en el III SIDM, El Escorial.

Rojas, J. (2004). *Elementos para una psicoecología de la acción*. Tesis de Doctorado no publicada. Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona.

Souto, M., Mastache, A., Mazza, D. y Rodríguez, D. (2004). *La identidad institucional a través de la historia. Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González"*. Buenos Aires, Argentina: Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González".

Tenti Fanfani, E. (2008). Mirar la escuela desde fuera. En E. Tenti Fanfani (Comp.), *Nuevos temas en la agenda de política educativa* (pp.11-26). Buenos Aires: Siglo XXI.

Autores:

Cecilia Crespo Crespo. Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González". Buenos Aires, Argentina; crccrespo@gmail.com

Rosa María Farfán. Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y Estudios Avanzados, Cinvestav, México; rfarfan@cinvestav.mx

Javier Lezama. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Cicata del IPN, México; jlezamaipn@gmail.com