Francisco Cordero Osorio, Claudia Cen Che, Liliana Suárez Téllez

LOS FUNCIONAMIENTOS Y FORMAS DE LAS GRÁFICAS EN LOS LIBROS DE TEXTO: UNA PRÁCTICA INSTITUCIONAL EN EL BACHILLERATO

The functionings and forms of graphs in textbooks: an institutional practice in high school

RESUMEN. En este artículo damos a conocer un marco de referencia, con base en la teoría socioepistemológica, sobre los usos de las gráficas que generan las prácticas institucionales en el bachillerato. Mostramos que los funcionamientos y formas de las gráficas mantienen una relación dialéctica, incluso en los libros de texto, y se van resignificando para dar lugar a otros funcionamientos y formas gráficas, lo cual expresa el desarrollo del uso de la gráfica en tres aspectos: los métodos de uso de la graficación, las comprensiones de las gráficas y su funcionalidad.

PALABRAS CLAVE: Práctica institucional, resignificación, funcionamiento, forma.

ABSTRACT. This article will provide a reference framework based on socio-epistemological theory in relation to the uses of graphs that generate institutional practices in high school. We will demonstrate that the functionings and forms of graphs maintain a dialectical relationship, even in textbooks, and that they redefine themselves in order to make way for other functionings and graphic forms, which expresses the development of the use of the graph in three aspects: the methods for the use of graphic representation, the understandings of graphs and their functionality.

KEY WORDS: Institutional practice, redefining, functioning, form.

RESUMO. Neste artigo damos a conhecer um quadro de referência, com base na teoria sócio-epistemológica, sobre os usos dos gráficos que geram as práticas institucionais no ensino secundário. Mostramos que as funcionalidades e formas dos gráficos mantêm uma relação dialéctica, incluindo nos livros de texto, e se vão re-significando para dar lugar a outras representações e formas gráficas, o que expressa o desenvolvimento da aplicação do gráfico em três aspectos: os métodos de uso da graficação, as compreensões dos gráficos e a sua funcionalidade.

PALAVRAS CHAVE: Prática institucional, re-significação, funcionalidade, forma.

RÉSUMÉ. En se basant sur la théorie socio-épistémologique, cet article définit le cadre référentiel relatif aux utilisations des graphiques qui résultent des pratiques institutionnelles au lycée. Notre texte démontre que les fonctionnements et les formes des graphiques maintiennent une relation dialectique,

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2010) 13 (2): 187-214.
Recepción: Febrero 10, 2009 / Aceptación: Enero 29, 2010.

y compris dans les ouvrages scolaires, et que cela va jusqu'à leur redéfinition. En conséquence, l'analyse de l'utilisation des graphiques se fait sous trois angles : les méthodes d'utilisation de la représentation graphique, les compréhensions des graphiques y leur fonctionnalité.

MOTS CLÉS: Pratique institutionnelle, redéfinition, fonctionnement, forme.

1. Introducción

El universo de gráficas de funciones que integra cualquier programa curricular de bachillerato, como veremos más adelante, es enorme; incluso, a priori, podría ser suficiente para la experiencia escolar de un estudiante. Sin embargo, dicha experiencia está normada por las prácticas institucionales que se manifiestan en el discurso matemático escolar del libro de texto, en los objetivos de los programas y en las interpretaciones de los docentes.

El presente artículo trata de entender la función de ese universo de gráficas en las prácticas institucionales. Para ello, analizamos los usos de las gráficas en los libros de texto y en las experiencias escolares de los estudiantes con base en la teoría socioepistemológica (TS), debido a que provee un marco funcional sobre el desarrollo del uso de las gráficas que señala una relación dialéctica entre el funcionamiento de la gráfica y su forma en situaciones específicas (Buendía & Cordero, 2005).

La metodología ocupada para lograr tal cometido fue analizar los programas de estudio que incluye el bachillerato del Instituto Politécnico Nacional (IPN), a fin de conocer el estatus epistemológico de las gráficas y el momento donde aparecen curricularmente. Esto nos condujo a revisar los libros de texto sugeridos como *principales* en el marco de los contenidos curriculares del grado escolar, y así caracterizar el uso de la gráfica en su funcionamiento y forma. Con base en el análisis a los programas de estudio y la revisión de los libros de texto encontramos seis usos de gráfica: *distribución de puntos, comportamiento geométrico, análisis de la curva, cálculo de área, cálculo de volumen y análisis de información*. De este modo planteamos escenarios de la recta, de la parábola y de la curva sinusoidal para dar evidencia sobre el desarrollo de los usos de las gráficas en el sistema didáctico.

Además, para rendir cuentas de las prácticas institucionales consideramos el episodio de una resignificación de la parábola llevada a cabo por estudiantes universitarios. Identificamos algunos usos de las gráficas y sus desarrollos en los argumentos dentro de una situación específica.

2. La problemática

La matemática se ha constituido socialmente en ámbitos no escolares y su introducción en el sistema de enseñanza obliga a tomar una serie de modificaciones que afectan directamente su estructura y su funcionamiento (Cantoral, 2003), por lo cual habrán de buscarse aproximaciones educativas que permitan adaptar los saberes a las prácticas culturales que ocurren en el seno de la escuela.

Ahora bien, la problemática que subyace a las aproximaciones educativas ocupadas consiste en la tendencia a centrar los objetos matemáticos para referirse al conocimiento matemático escolar (Cordero, 2001; Confrey & Costa, 1996). El dominio matemático obliga a explicar la matemática desde la matemática misma y, en consecuencia, soslaya a lo humano y a los sentidos de todo el saber matemático. Se trata, entonces, de identificar o construir aquellos marcos o prácticas de referencia en los que se manifieste el uso del conocimiento matemático; es decir, donde sucede su funcionamiento y su forma orgánica en la situación específica. Ahí aparecerán elementos que no corresponden a las justificaciones razonadas que norman alguna estructura lógica, sino que atañen a la utilidad del participante en la situación específica. *Es por eso que no nos importa el estudio del conocimiento matemático, sino el estudio de la función del conocimiento matemático*. Para el caso que nos ocupa en esta investigación, no estudiamos las gráficas de las funciones como un desarrollo representacional del concepto de función, sino el desarrollo del uso de las gráficas de las funciones en las prácticas institucionales.

3. La investigación

El objeto de esta investigación es *el uso de las gráficas y su desarrollo en el bachillerato como la práctica institucional que normaría el sentido y funcionalidad de la matemática*. Esa práctica se encuentra presente en el ámbito escolar, pero no de forma explícita. Podríamos decir que la obscurece el hecho de que, en general, no hay una asignatura que trate exclusivamente las gráficas de las funciones, sino siempre están referidas al concepto de función.

Hay investigaciones en la matemática educativa que explican a la gráfica como una representación del concepto de función o como un proceso para construir el objeto función, que utilizan perspectivas semióticas o cognitivas (Duval, 1988; Dubinsky & Harel, 1992); sin embargo, existen pocos estudios que expliquen los usos de las gráficas y sus desarrollos. En algún sentido, sabemos su construcción, pero no su uso.

Ahora bien, la importancia de realizar estudios sobre el uso del conocimiento matemático consiste en que nos ofrecen indicadores para formular marcos de referencia que hagan una matemática funcional en la escuela (Cordero, et al, 2009; Cordero, 2008; Suárez, 2008; Rosado, 2004; Domínguez, 2003; Campos, 2003).

4. La teoría socioepistemológica

La perspectiva socioepistemológica no mira a los conceptos y sus diferentes estructuraciones de manera aislada, sino atiende a las prácticas que producen o favorecen la necesidad de tales conceptos. Es decir, intenta crear un modelo que refiera la construcción social del conocimiento matemático y poner al descubierto sus causas reales: el reto es formular epistemologías sobre las prácticas sociales que generan el conocimiento matemático (Cantoral & Farfán, 2003).

Para lograr tal cometido, se reconoce al humano haciendo matemáticas en vez del producto hecho por el humano. Considerar la producción matemática implica explicar la matemática desde la matemática misma; en cambio, reparar en el humano haciendo matemáticas obliga a mirar otros dominios científicos y prácticas de referencia donde se resignifica el conocimiento matemático. La perspectiva teórica asume a las prácticas sociales como las acciones de un grupo social que tiene significados propios e intención, ubicado en un contexto histórico o actual, que actúa de acuerdo con ideologías predominantes y utiliza a la matemática como herramienta para construir conocimiento (Cordero, 2001). Una vez identificadas las prácticas sociales que dieron y dan cuenta del conocimiento matemático necesitan ser reinterpretadas para integrarse al sistema didáctico, donde precisan de la intencionalidad (de producción, en el sistema didáctico) para que se desarrollen en las condiciones del sistema.

El marco teórico trata a los fenómenos de producción y difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple, al incorporar el estudio de las interacciones entre la epistemología del conocimiento, la dimensión sociocultural del saber, los procesos cognitivos que le son asociados y los mecanismos de institucionalización por vía de la enseñanza (Cantoral & Farfán, 2004). Las cuatro componentes de la construcción del conocimiento las miramos de manera sistémica, ya que identificamos la dimensión *social* considerando a la graficación como práctica institucional, la *epistemológica* distingue los usos de la gráfica y los ubica en escenarios particulares, sin mirar los conceptos u objetos matemáticos preestablecidos (la gráfica como representación del concepto de función), la *cognitiva* asume al conocimiento como una serie de procesos sustentados por mecanismos que se han desarrollado en el seno de las prácticas institucionales, mientras que la *didáctica* se ocupa de la difusión del conocimiento a través del discurso matemático escolar, examinando sus implicaciones didácticas y las resignificaciones del conocimiento matemático.

Debido a que nos proponemos entender el uso de las gráficas con la perspectiva socioepistemológica, diseñamos un marco de referencia que evidencie los funcionamientos y formas de los usos de las gráficas en que se resignifica la matemática.

5. La graficación como práctica institucional

La institucionalización consiste en distinguir al saber como un producto material continuo, donde lo continuo refleja su permanencia en la vida que es transformada por el conocimiento y, a su vez el conocimiento es modificado. Este continuo no se destruye porque hay ciertas formas de actuar impuestas o sugeridas desde fuera del individuo que son encarnadas en sucesos individuales, donde las formas son las instituciones (Durkheim, 1982). Así, la institucionalización es un proceso puramente social que ya no es propio del individuo, sino del grupo humano a la que pertenece (Covián, 2005). En la investigación ubicamos a la gráfica en un nuevo estatus y asumimos el uso de las gráficas como una práctica institucional, puesto que ha permanecido en el discurso matemático escolar y se ha ido transformando para establecerse tal como lo conocemos en la actualidad. El estatus hace relevante, epistemológicamente hablando, el desarrollo del uso de las gráficas, donde las gráficas se resignifican al debatir entre sus funcionamientos y formas dentro de la situación específica. En los próximos apartados veremos tres ejemplos de funcionamientos y formas del uso de las gráficas.

5.1. *El uso de las gráficas en la situación de la linealidad del polinomio*

La *linealidad del polinomio* (Rosado, 2004) es un argumento que permite identificar la parte lineal de un polinomio, $ax + b$, en la recta tangente a la curva del mismo polinomio, haciendo el cruce con el eje Y en $x = 0$. Una vez constituido el argumento, se puede hacer el esbozo de gráficas de polinomios. Esta propiedad crea un nuevo *funcionamiento* que permite generar un comportamiento tendencial de la gráfica, resignificando a la derivada. El procedimiento canónico al graficar una función y trazar la recta tangente en un punto se invierte, con lo que se identifica la linealidad del polinomio: primero se traza la recta (parte lineal del polinomio) y después se traza la curva para buscar el comportamiento tendencial del polinomio en relación con la recta trazada. Tal procedimiento debate contra el trazo de la recta tangente, cuya *forma* es una secuencia de conceptos: dibujar la gráfica de la función, señalar un punto sobre la gráfica y trazar la recta tangente en ese punto (Rosado, 2004; Cordero, 2004).

5.2. *El uso de las gráficas en Oresme. El modo en que las cosas varían*

La *modelación-graficación* (Suárez & Cordero, 2008) es un argumento que permite trabajar aspectos de variación y cambio a través de gráficas o figuras. En el libro de Oresme titulado *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum*[1] (Oresme, 1968) usa la matemática de la época, la geometría y las proporciones para estudiar el modo en el que las cosas varían. El uso de las figuras no está anclada a la representación analítica, que históricamente es posterior, ni dependía de la asociación de puntos respecto a coordenadas rectilíneas; su *funcionamiento* y *forma* estaba basada en la posibilidad de representar diferentes grados de intensidad de una cualidad por medio de segmentos y diferentes cambios por medio de figuras. Un segmento de la mitad de otro representaba un grado menor de una cualidad, exactamente de la mitad. Un triángulo rectángulo representaba la variación desde el grado más alto (o cero) de forma proporcional hasta un grado cero (o más alto). De esta manera, las figuras tenían propiedades que eran intrínsecas a la cualidad misma, como la proporcionalidad.

5.3. *El uso de las gráficas en Euler. La propiedad asintótica de las funciones*

Euler (1748), en su libro *Introducción al análisis del infinito*, ofrece un uso de las gráficas para determinar que las propiedades analíticas de las funciones son intrínsecas a las curvas: el funcionamiento de la gráfica consiste en caracterizar el comportamiento de la curva mediante las formas de las ramas que la componen. Así, Euler usa las gráficas como curvas compuestas de ramas con comportamiento y forma. En ese sentido, la asintoticidad es un comportamiento al infinito *intrínseco* de las ramas de ciertas curvas, lo cual alude a que el comportamiento al infinito

---

[1] M. Clagett, *Nicole Oresme and the Medieval Geometry of Qualities and Motions, A treatise on the uniformity and difformity of intensities known as Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum*. University of Wisconsin Press, Madison 1968 (con traducción inglesa y comentarios).

tiene *forma* y, en consecuencia, pudiera ayudar a resignificar a la línea recta asíntota como asíntotas curvilíneas. Dicho estatus epistemológico de lo asintótico es importante porque en el discurso matemático escolar advierte del privilegio de la asíntota de una función como una recta (Domínguez, 2003).

Los usos de las gráficas significan que la graficación puede llevar a cabo múltiples realizaciones y hacer ajustes en su estructura para producir un patrón o generalización deseable; es un medio que soporta el desarrollo del razonamiento y de la argumentación. En sí misma es un tipo de modelación que trasciende y se resignifica, con lo que transforma al objeto en cuestión (Cordero, 2006a). Tal estatus epistemológico sobre el uso de la gráfica lo ubica, con cierta factibilidad, de ser un producto material continuo. La argumentación gráfica en las diversas situaciones de uso permite el continuo. Ahora bien, para que el continuo no se destruya se requiere lograr un estatus cultural de la argumentación gráfica; de aquí la conveniencia de pensar a la graficación como una práctica social. Esto es lo que tendremos que saber desarrollar en el sistema educativo.

Conferir a la investigación el desarrollo de usos de la gráfica implica en forma directa tratar el empleo del conocimiento en una situación específica, donde la resignificación manifiesta no sólo el uso del conocimiento, sino también su desarrollo que norma la práctica social; ambas se oponen al desarrollo conceptual del conocimiento. Los usos dependen de la situación específica, por lo cual tiene sentido formular que las gráficas tienen una función orgánica (funcionamiento) en la situación expresada de alguna forma, y como dependen de la situación viven una relación dialéctica entre los funcionamientos y formas de las gráficas (Cordero, 2008).

A continuación, convenimos en describir cómo van apareciendo las gráficas en el currículo del bachillerato desde una perspectiva de desarrollo de conceptos, a fin de lograr un contraste con las categorías de usos y su desarrollo de las gráficas para apreciar ciertas ventajas que atienden a la problemática en cuestión.

6. Las gráficas en el currículo del bachillerato

Para describir cómo se presentan las gráficas en el bachillerato tecnológico bivalente del Instituto Politécnico Nacional en el área físico-matemáticas se realizaron dos etapas. La primera fue revisar el programa de estudios de los seis semestres de matemáticas para identificar el momento en que curricularmente se presenta la gráfica. La segunda consistió en una revisión de los libros de texto sugeridos en los programas de estudio para tener un indicador del discurso matemático escolar de las gráficas.

A continuación delineamos el contenido esencial de cada uno de los programas de estudio, ya que permite apreciar el papel que desempeña la gráfica de la función.

Semestre 1, Álgebra: El objetivo general del curso se enfoca en el dominio de modelos algebraicos lineales y cuadráticos a través del uso de los lenguajes simbólico y gráfico. Para ello, se resuelven ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales y cuadráticas con una incógnita. La solución del sistema de ecuaciones por el método gráfico se obtiene a partir de una tabla y un intervalo de valores previamente establecido, con lo que se trazará la gráfica. Se hace hincapié en que al utilizar la resolución gráfica para las ecuaciones o sistemas de ecuaciones éstas se transforman en funciones y, por tanto, las incógnitas se transforman en variables. En este semestre también se hace un primer acercamiento a las funciones polinomiales y racionales, donde su representación gráfica permite observar su comportamiento (IPN, 1995).

Semestre 2, Geometría y Trigonometría: El objetivo general del curso es el desarrollo de habilidades del pensamiento como el razonamiento, análisis, reflexión, comunicación y valoración. Se busca relacionar los conocimientos de la aritmética, álgebra, geometría y trigonometría. En geometría se abordan conceptos, postulados y teoremas de la geometría euclidiana, así como la noción intuitiva de función, concepto de función exponencial y logarítmica, sus propiedades, cambios de base y resolución de las ecuaciones exponencial y logarítmica con una variable. En trigonometría se establecen los fundamentos teóricos de las funciones trigonométricas y su relación entre ellas. La representación de las funciones logarítmicas, exponenciales y trigonométricas se da a través de la tabulación con valores previamente establecidos (IPN, 1995).

Semestre 3, Geometría Analítica: El objetivo general del curso es la introducción al estudio de los sistemas de coordenadas y métodos de la geometría analítica. Para ello, se estudian tanto las relaciones entre la representación gráfica y algebraica como los lugares geométricos de la recta, la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola, al igual que sus propiedades y rasgos relevantes. En el caso de la recta y la parábola se trazan varias ecuaciones en un mismo sistema coordenado para que el estudiante se de cuenta del papel que desempeñan los parámetros de una ecuación. También se presentan ejemplos de ecuaciones paramétricas en que se trazan punto a punto sus trayectorias, como la cicloide, las cicloides alargada y acortada, la hipocicloide y la epicicloide. De igual forma, se presenta al estudiante el trazado de curvas en coordenadas polares como las espirales y rosas, entre otras figuras, con la finalidad de que enriquezca el universo de formas geométricas al que está acostumbrado y se familiarice con este tipo de coordenadas (IPN, 1995).

Semestre 4, Cálculo Diferencial: El objetivo general del curso se enfoca en el estudio de las funciones, sus gráficas, comportamientos, propiedades y aplicaciones. Se aborda la noción de función como la expresión de una cantidad en términos de otra, al igual que la resolución de problemas que lleven a plantear funciones y solucionarlas por medio de tablas de valores o de gráficas, mediante el análisis e interpretación de las relaciones entre las variables. El estudiante trazará las gráficas de las funciones algebraicas, trigonométricas, logarítmicas y exponenciales a través de una tabla de valores para que recuerde las nociones de dependencia funcional y variables dependientes e independientes. Se pone atención a las nociones de dominio y rango, además de señalar que no toda relación x e y es una función. Por otra parte, se estudian las características de la función y el trazado de su gráfica de acuerdo con los puntos críticos o ceros de la función, y se realiza el análisis de la curva conforme a los criterios de la primera y segunda derivada. Es decir, el alumno analizará los intervalos donde la función es creciente o decreciente, sus concavidades, los puntos máximos, mínimos o de inflexión, así como resolverá problemas de máximos y mínimos (IPN, 1996).

Semestre 5, Cálculo Integral: En este curso se continúa con el estudio de las funciones, sus gráficas, comportamiento, propiedades y aplicaciones. Se destaca la relación entre la integral y la derivada a través de procesos gráficos, numéricos y algebraicos. También se determinan las áreas de regiones limitadas por gráficas de funciones mediante rectángulos inscritos y circunscritos. Para el cálculo de volumen se desarrolla la idea de sólido de revolución por el método del disco o capas y el cálculo de la longitud de arco. Para lo anterior, se ocupan los distintos métodos de integración (IPN, 1996).

Semestre 6, Probabilidad y Estadística: El objetivo del curso es permitir al alumno que no sólo se introduzca en el estudio de los fenómenos aleatorios, su interpretación, importancia, tratamiento y aplicación, sino también en el uso de técnicas de muestreo para el análisis e interpretación de datos numéricos y la apropiación de las reglas para el cálculo de probabilidades y distribuciones de probabilidad. Se estudia la toma de datos y su representación por medio de histogramas, diagramas de barras y polígono de frecuencias, entre otros, así como las distribuciones normal y binomial para la toma de decisiones, la representación gráfica que puede tener una toma de datos y la lectura e interpretación de la representación gráfica. (IPN, 1996).

El programa descrito alude que en el bachillerato la gráfica es la herramienta para comprender el concepto de función. Con auxilio de la gráfica se señala el dominio y el rango de funciones y se ilustra la dependencia entre variables, de modo que también se establezca la contraparte: *cuándo una gráfica no es la representación de una función*. El uso de la gráfica también comprueba o ilustra la solución de sistemas de ecuaciones, observa cualitativamente el comportamiento de la función y permite representar cálculos como el área y el volumen; es decir, la gráfica es tipificada como el instrumento que ayudará a desarrollar el concepto de función y a establecer sus propiedades según las secuencias semestrales que sugiere el programa.

La segunda etapa consistió en revisar los libros de textos sugeridos en los programas de estudios, a los que consideramos como el medio de difusión de la producción matemática y el marco de referencia que genera el discurso matemático manifestado en la práctica del profesor y el estudiante (Flores, 2005; Cordero & Flores, 2007). Como resultado de la revisión hecha a los libros de texto, hallamos un universo amplio de gráficas de funciones por las que transita el estudiante a lo largo de sus estudios de bachillerato. La gama de gráficas es impresionantemente vasta. Por su importancia construimos la Tabla I[2] con la finalidad de visualizar, en conjunto, el universo de gráficas mediante el cual el discurso matemático escolar vive durante seis semestres.

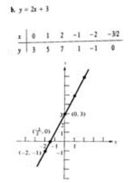
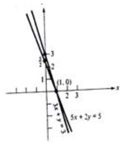
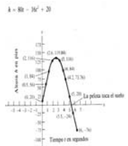
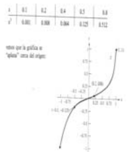
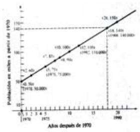
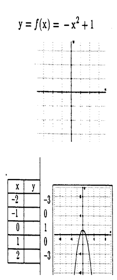
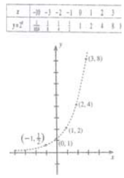
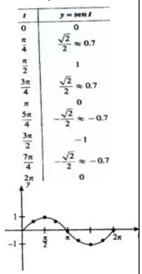
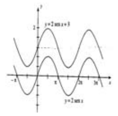
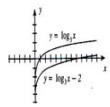
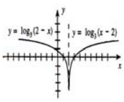
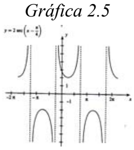
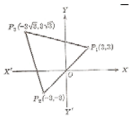
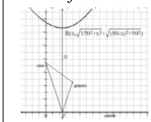
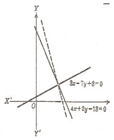
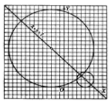
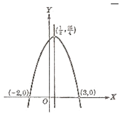
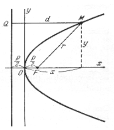
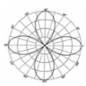
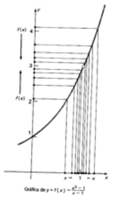
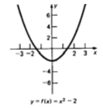
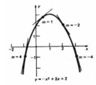
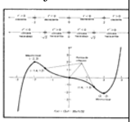
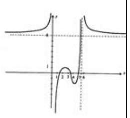
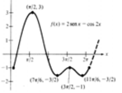
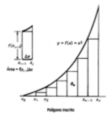
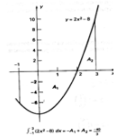
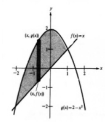
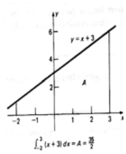
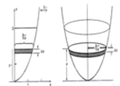
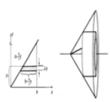
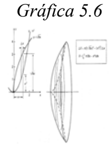
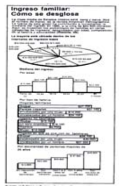
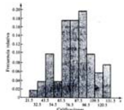
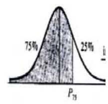
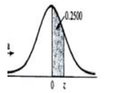
La lectura a la tabla I puede ser vertical u horizontal: la primera nos hace apreciar el bagaje gráfico por cada semestre y la segunda el tránsito de gráficas entre semestres. Todo ello sucede en tres años, lo cual significa que el discurso matemático escolar está permeado de gráficas de las funciones en el bachillerato; éstas son referidas para representar algún concepto matemático o alguna mecanización de operaciones.

En un a priori, podríamos decir que el estudiante de bachillerato debería ampliar su dominio del concepto de función al vivir con tal gama de gráficas en sus cursos de matemáticas. Sabemos que, en general, desafortunadamente no es el caso, pues para que los alumnos universitarios grafiquen una función cuadrática requieren de hacer una tabla numérica para dar valores a la variable independiente y calcular el valor de la variable dependiente, sin esperar en el dibujo de la gráfica una forma conocida o familiar de la función correspondiente (Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez & Garza, 2000).

[2] La fuente donde se obtuvieron las gráfica fueron: Para el Semestre 1, IPN (2004) y Gustafson (1996); para el Semestre 2, Swokowski (1998); para el Semestre 3, IPN (2003), Efimov (1969), Lehmann (1998) y Rider (1966); para los Semestres 4 y 5, Larson (1982) y Purcell (1992), y para el Semestre 6, Jonson (1976).

TABLA I

Gráficas en los libros de texto

Semestre 1 Álgebra	Semestre 2 Geometría y Trigonometría	Semestre 3 Geometría Analítica	Semestre 4 Cálculo Diferencial	Semestre 5 Cálculo Integral	Semestre 6 Probabilidad y Estadística
 *Gráfica 1.1*  *Gráfica 1.2*  *Gráfica 1.3*  *Gráfica 1.4*  *Gráfica 1.5*  *Gráfica 1.6*	 *Gráfica 2.1*  *Gráfica 2.2*  *Gráfica 2.3*  *Gráfica 2.4*  *Gráfica 2.5*  *Gráfica 2.6*	 *Gráfica 3.1*  *Gráfica 3.2*  *Gráfica 3.3*  *Gráfica 3.4*  *Gráfica 3.5*  *Gráfica 3.6*  *Gráfica 3.7*  *Gráfica 3.8*	 *Gráfica 4.1*  *Gráfica 4.2*  *Gráfica 4.3*  *Gráfica 4.4*  *Gráfica 4.5*  *Gráfica 4.6*	 *Gráfica 5.1*  *Gráfica 5.2*  *Gráfica 5.3*  *Gráfica 5.4*  *Gráfica 5.5*  *Gráfica 5.6*  *Gráfica 5.7*	 *Gráfica 6.1*  *Gráfica 6.2*  *Gráfica 6.3*  *Gráfica 6.4*

La gama de gráficas (tabla I) es ineludible en el bachillerato; lo que se debe cuestionar es por qué no conlleva un conocimiento matemático confiable o más fortalecido para el estudiante. Esto confirma que el conocimiento es tratado en el bachillerato como utilitario, pero no resulta funcional (Cordero, 2008). Desde nuestra perspectiva socioepistemológica, buscamos un significado al universo de gráficas del bachillerato para que se favorezca el desarrollo de una matemática funcional[3].

En el siguiente apartado discutimos el uso de las gráficas con respecto a sus funcionamientos y formas.

7. El uso de las gráficas: el funcionamiento y la forma

Se identificaron los distintos momentos en que aparece la gráfica durante el bachillerato y se enfocó la atención en las distintas situaciones donde se utilizaba la gráfica. Eso condujo a entender el *funcionamiento* que desempeñaba en esa situación y, a la vez, cada funcionamiento ofreció una *forma* específica para ser abordado. La relación funcionamiento y forma, como ya lo dijimos, es dialéctica, ya que ambos elementos dan origen a un *uso de gráfica*. Es decir, los funcionamientos y formas de las gráficas debaten entre sí y se van reorganizando para dar lugar a otros funcionamientos y formas gráficas, lo cual significa que la gráfica se resignifica. La resignificación es interpretada como la construcción del conocimiento mismo en la organización del grupo humano, normado por lo institucional, que se manifiesta en el uso del conocimiento dentro de una situación específica (Cordero, 2005; 2008).

Así, nuestro foco de atención fue identificar cuáles son las situaciones específicas que están presentes en el bachillerato y cómo es abordada la gráfica. En ese sentido, la gráfica va asociada a situaciones de acción u operaciones algebraicas en determinados momentos: conocer la forma gráfica de una función, su interpretación geométrica, su asociación curva-expresión algebraica para comprender sus transformaciones, análisis global de la curva, cálculo del área y volumen bajo la curva. Una situación particular donde no interviene la función es la recopilación de datos, o la interpretación de ellos.

[3] *Matemática funcional* quiere decir un conocimiento incorporado orgánicamente en el humano que lo transforma y que le transforma su realidad. Todo ello se opone al conocimiento utilitario (Cordero & Flores, 2007).

Por la naturaleza de cada situación, los usos que aparecen tienen funciones específicas que conllevan formas específicas. El uso tiene inherentes al binomio funcionamiento y forma. El uso de la gráfica lo ubicamos como el papel que desempeña en la situación y se manifiesta por sus funcionamientos y formas. Así, el funcionamiento son las ejecuciones, acciones u operaciones que desempeña la gráfica en la situación, mientras que la forma son las clases de esas ejecuciones, acciones u operaciones (Cordero & Flores, 2007).

En el bachillerato identificamos seis usos de gráfica, según la situación que se presente.

El *uso distribución de puntos* surge cuando la situación atañe al conocimiento de la forma gráfica de una función. Se presenta mediante *formas* como tablas con valores previamente establecidos, gráficas y ecuaciones con *funcionamientos* como la ubicación de puntos, el desplazamiento en el plano cartesiano, la variación de los puntos para el trazado de curvas continuas o no. Esto se muestra en las gráficas de la tabla I de Álgebra (1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6), de Geometría y Trigonometría (2.1, 2.2), de Geometría Analítica (3.1, 3.7) y de Cálculo Diferencial (4.1).

El *uso comportamiento geométrico* (Campos, 2003; Flores, 2005; Cordero & Flores, 2007) surge cuando la situación alude a la interpretación geométrica de una función o asociación curva-expresión algebraica, con la finalidad de comprender cómo se dan las trasformaciones de las funciones. Este uso se presenta a través de *funcionamientos* como la obtención de nuevas gráficas de funciones a partir de una ya conocida con *formas* tales como la traslación horizontal o vertical, el estiramiento o la reflexión de la gráfica. Esto se ilustra en las gráficas de los cursos de Geometría y Trigonometría y Geometría Analítica (2.3, 2.4, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6 y 3.7).

El *uso análisis de la curva* aparece cuando la situación está dirigida hacia la curva, específicamente a su variación; es decir, hace un análisis global de la curva. Dicho uso se presenta con *funcionamientos* como el análisis del comportamiento —ya sea creciente o decreciente— en los intervalos de la función para ubicar los puntos máximos y mínimos, los puntos de inflexión (si los hay) y la concavidad de la curva en ciertos intervalos. Las *formas* en que se presenta lo anterior es mediante una tabla de variación y los criterios de la primera y segunda derivada, que refieren las gráficas del curso de Cálculo Diferencial (4.2, 4.3, 4.4. 4.5 y 4.6).

El *uso cálculo de áreas y volúmenes* surge cuando la situación se centra en hallar el área o volumen de una figura limitada por funciones. Aquí se percibe que para los cálculos anteriores el foco de atención no está en la gráfica misma, sino en la unidad de análisis que describe la o las gráficas para establecer la función a integrar y realizar el cálculo respectivo. El *funcionamiento* de la gráfica sirve para definir la superficie del área o bien la superficie a rotar para el cálculo del área y el volumen, mientras que la *forma* del funcionamiento se da a través de la integración, como aparece en las gráficas de Cálculo Integral (5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5 y 5.6).

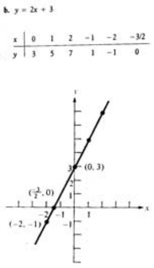
El *uso análisis de información* (Flores, 2005; Cordero & Flores, 2007) se manifiesta cuando la situación recopila datos o bien los interpreta. Este uso incluye *formas* como tablas, gráficas de barras, poligonales, histogramas y la curva normal, cuyos *funcionamientos* son para el análisis de información. Si bien en la curva normal se trata el área de una región, no se enfoca en el cálculo del área de la curva, sino más bien en la aplicación de una fórmula y el uso de una tabla de valores, donde el resultado que se obtiene es representado en la curva con el fin de hacer el análisis de información pertinente. Esto puede apreciarse en las gráficas del curso de Probabilidad y Estadística (6.1, 6.2, 6.3 y 6.4).

En resumen, los usos de la gráfica identificados en cada uno de los semestres de bachillerato son:

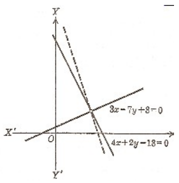
- Semestre 1. Distribución de puntos
- Semestre 2. Distribución de puntos y comportamiento geométrico
- Semestre 3. Distribución de puntos y comportamiento geométrico
- Semestre 4. Distribución de puntos y análisis de la curva
- Semestre 5. Comportamiento geométrico, análisis de la curva, cálculo de área y cálculo de volumen
- Semestre 6. Análisis de información.

Los usos de la gráfica expuestos anteriormente son categorías donde los funcionamientos y formas debaten entre sí, lo cual permite que se vayan transformando y modificando. Esto conlleva un desarrollo de usos, un concepto que significa que hay una resignificación de la gráfica *porque se forman construcciones, se hacen distinciones entre ellas, se ponen en juego clases de actividades y usos del conocimiento donde no sólo se da un lenguaje de herramientas, sino también se desarrolla* (Cordero, 2008). Para ejemplificar lo anterior, se plantean los escenarios de la recta, la curva sinusoidal y la parábola.

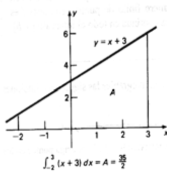
El escenario de la recta. El discurso matemático escolar trata con la recta en la tercera unidad del primer semestre, donde el uso de la gráfica concierne a la distribución de puntos (ver gráfica 1.1), mientras que funcionamiento se centra en la ubicación de puntos para el trazado de la recta a través de la forma tabular. Una vez que se reconoce cómo es la ecuación y la forma de la recta, este uso evoluciona para dar lugar al comportamiento geométrico (ver gráfica 3.3), cuyo funcionamiento es la asociación gráfica-expresión algebraica, y se presenta mediante las formas de la transformación de funciones (traslación horizontal y vertical, estiramientos y reflexión). Aquí el estudiante de algún modo puede inferir la posición de la recta, que posteriormente se usa para calcular el área y el volumen (ver gráficas 5.4 y 5.6); el funcionamiento de la gráfica radica en definir el área que genera la superficie del área a calcular, y sus formas surgen a través de la integración. El desarrollo del uso consiste en distribuir puntos, luego en establecer comportamientos geométricos y finalmente en calcular superficies.



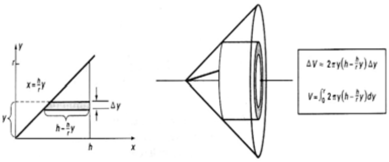
Gráfica 1.1



Gráfica 3.3



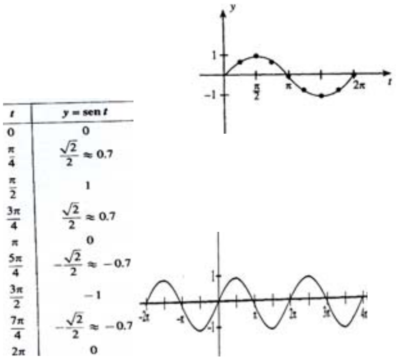
Gráfica 5.4



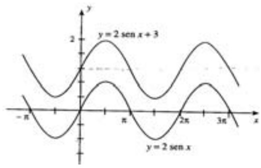
Gráfica 5.6

Figura 1. Escenario de la recta.

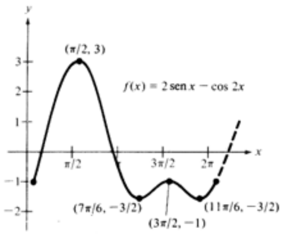
El escenario de la curva sinusoidal. Las curvas sinusoidales aparecen por vez primera en la tercera unidad del curso de Geometría y Trigonometría. Presentan su forma a través de una tabla con valores previamente establecidos, en la que el funcionamiento comprende la ubicación de puntos en el plano cartesiano para trazar la curva en cuestión; esto da lugar al uso distribución de puntos (ver gráfica 2.2), donde se ubican los puntos para unirlos e identificar las formas de las funciones. Una vez conocidas sus representaciones gráficas se presenta el uso comportamiento geométrico (ver gráfica 2.3), cuyo funcionamiento es la asociación gráfica-expresión algebraica, con formas tales como la traslación horizontal y vertical, el estiramiento o la reflexión de la curva. Aunque el estudiante sabe cómo se dan las transformaciones de estas funciones, se continúa con su análisis (ver gráfica 4.6); en este caso, el funcionamiento radica en reconocer los intervalos donde la función es creciente y decreciente, los puntos máximos y mínimos, sus concavidades, así como los puntos de inflexión, mientras que las formas en que se lleva a cabo tienen su base en los criterios de la primera y segunda derivada. El desarrollo del uso sucede al distribuir puntos, establecer comportamientos y analizar las curvas.



Gráfica 2.2



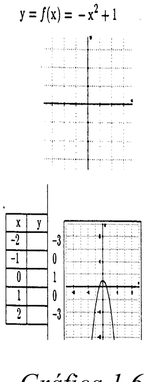
Gráfica 2.3



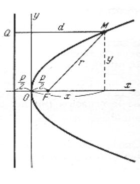
Gráfica 4.6

Figura 2. Escenario del comportamiento sinusoidal.

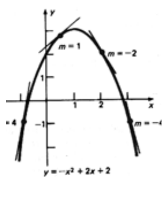
El escenario de la parábola. La primera vez que se presenta la parábola es en la cuarta unidad del curso de Álgebra. El uso de la gráfica concierne a la distribución de puntos (ver gráfica 1.6); la forma de conocer la parábola es mediante una tabla de valores previamente establecidos y la ubicación de puntos en el plano cartesiano, donde el funcionamiento consiste en unir los puntos contiguos para el bosquejo de la curva en cuestión. Este uso dará lugar al comportamiento geométrico (ver gráfica 3.6), cuyo funcionamiento es la asociación gráfica-expresión algebraica y el reconocimiento de los elementos que intervienen (vértice, focos y directriz) con formas como trasformaciones, traslados horizontales y verticales, la contracción o estiramiento. Hasta el momento el estudiante puede, de alguna manera, conocer las distintas posiciones y elementos que tiene una parábola, así como su representación en el plano cartesiano; sin embargo, puede conocer más de ella.



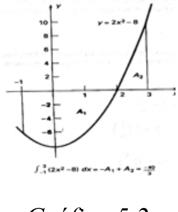
Gráfica 1.6



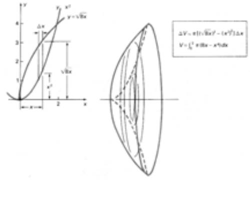
Gráfica 3.6



Gráfica 4.3



Gráfica 5.2



Gráfica 5.7

Figura 3. Escenario de la parábola.

En el curso de Cálculo Diferencial se presenta el uso análisis de la curva (ver gráfica 4.3), donde el funcionamiento se centra en identificar los intervalos donde la función es creciente o decreciente, al igual que sus concavidades, si presenta máximos o mínimos a través de formas como los criterios de la primera y segunda derivada. Se concluye con el uso cálculo de área y volumen (ver gráficas 5.2 y 5.7) en el curso de Cálculo Integral, donde el funcionamiento de la gráfica define la superficie del área o bien la superficie a rotar para el cálculo del área y del volumen, respectivamente, y asume su forma por medio de la integración. El desarrollo del uso se expresa en la distribución de puntos, los comportamientos geométricos y el análisis de curvas, así como en el cálculo de superficies y volúmenes.

Los escenarios anteriores son ejemplos de cómo se desarrolla el uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Al enfocar la atención en el uso de la gráfica se destaca su resignificación a través de situaciones específicas expresadas de alguna forma. En resumen, los tres escenarios (gráficas 1.1, 1.6 y 2.2) representan el *uso distribución de puntos*, y se ocupa la tabulación para distribuirlos en el plano, unirlos y obtener la forma de la gráfica. Las gráficas 2.3, 3.3 y 3.6 ilustran el *uso comportamiento geométrico*, donde se presenta la relación entre una ecuación y su representación gráfica. Las gráficas 4.3 y 4.6 conciernen al *uso análisis de la curva*, donde se analiza su comportamiento creciente o decreciente, así como los máximos, mínimos y puntos de inflexión. Por su parte, las gráficas 5.2 y 5.4 presentan el *uso cálculo de área* y las 5.6 y 5.7 el *uso cálculo de volumen*. Lo anterior muestra que la gráfica evoluciona como herramienta a la par de las formas de hacer de los estudiantes.

El trato con el desarrollo de usos de la gráfica no sólo manifiesta el uso del conocimiento (resignificación) sino también su desarrollo, que norma la práctica institucional.

El análisis hecho a los programas de estudio proporciona el marco de referencia en torno al uso de las gráficas que incluye el Diagrama 1, el cual representa el desarrollo de uso de las gráficas. Así, el primer uso es la *distribución de puntos*, que surge en el primer semestre y también aparece en el segundo, tercero y cuarto. Después surge el *uso comportamiento geométrico* en el segundo semestre y tercer semestre, y a continuación va el *uso análisis de la curva* en el cuarto semestre, finalizando con los *usos cálculo de área* y de *volumen* en el quinto semestre. Los cinco usos de gráfica siguen una secuenciación del cálculo. En el último semestre aparece el *uso análisis de la información*, que está disociado de los otros.

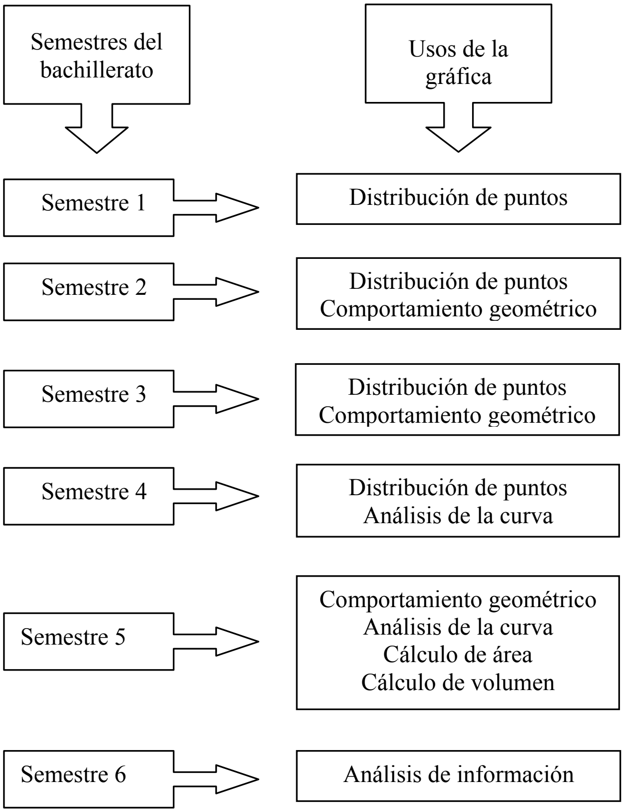


Diagrama 1. Usos de la gráfica en el bachillerato.

8. La funcionalidad de las categorías de uso

Para crear indicadores sobre la funcionalidad de las categorías de uso de las gráficas en las argumentaciones de los estudiantes dentro de escenarios específicos, consideramos como ejemplo a un episodio tocante a la resignificación de la parábola que realizaron estudiantes de la licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco (UJAT). El eje de las actividades de la situación fue la resignificación de la parábola, mientras que cada actividad estuvo compuesta de una secuencia para debatir entre la función y la forma de la parábola, con el fin de que surgieran las argumentaciones gráficas. En los siguientes párrafos se presentan dos extractos del episodio, donde se manifiesta la función de algunas categorías de uso de la gráfica (Campos, 2003).

8.1. *Situación: Los argumentos de transformación de la parábola*

La Actividad II (ver anexo) pretende que a través de argumentos geométricos el estudiante primero halle un conjunto de puntos M dadas ciertas condiciones. La definición del lugar geométrico de la parábola es implícita y después, con base en el contexto geométrico, se elabora una tabla de valores para ajustar los puntos M a una curva. Con ello se obtiene el grado de especificidad de la parábola; es decir, sólo se trata de la curva parábola.

Los usos de la gráfica identificados en la actividad corresponden a la *distribución de puntos* y *comportamiento geométrico*.

Extracto de la entrevista. Respuestas de los estudiantes.

Entrevistador: Entonces, los puntos M que están proponiendo son los que están sobre el eje x. [Figura dos-1]. Ahora, qué pasa si queremos calcular puntos M, pero que no estén sobre la recta (salvo el origen), y consideremos que la distancia de un punto a una recta es aquella que cae perpendicular a la recta y es la mínima. Por tanto, ¿cómo encuentro ahora los valores de M?

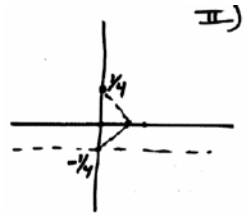


Figura dos-1

Estudiante 1: Existen elementos en donde hay unas funciones que siguen la distancia de cierto punto, la distancia de aquí a nuestra recta y para un punto, para que sean iguales. Hay un elemento que lo cumple; *por ejemplo la parábola. Más bien, la parábola lo cumple.*

Entrevistador: ¿Qué conocen de la parábola?

Estudiante 1: Cualquier punto a una línea recta, cualquier punto de aquí para acá, el punto fijo es igual que de este punto acá.

Entrevistador: Recuerdan cómo se llama ese punto.

Estudiante 2: La recta se llama directriz.

...

Entrevistador: Podrían ustedes con argumentos quizá geométricos poder encontrar el valor que le corresponde a $x = 1/2$. Ustedes conocen que esta distancia es de ½.

Estudiante 1: Hay una forma, utilizando el teorema de Pitágoras, porque yo sé que de aquí para acá mide ¼ y de aquí para acá también mide ¼, entonces ya tendríamos el primer punto que tiene de coordenadas (½, ¼) [Figura dos-2].

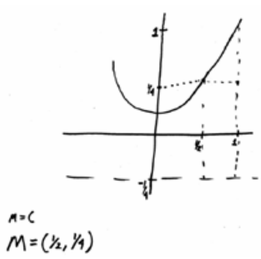


Figura dos-2

Estudiante 2: Lo que ya podemos saber con estos dos puntos es que la parábola abre hacia arriba y ya tenemos el vértice.
Entrevistador: ¿Qué pasaría ahora para el siguiente punto de la tabla?
...

Nota: Retoman lo geométrico (aplicando el teorema de Pitágoras) y después de realizar los cálculos [Figura dos-3].

Estudiante 1: El 1 lo manda al 1.
Entrevistador: Por ejemplo el 2, ¿adónde lo mandaría?
Estudiante 2: A 4.
Entrevistador: ¿Cuál será la relación? Recuerden que dijeron que es una parábola.
Estudiante 1: Entonces sería $f(x) = x^2$ [Figura dos-3].

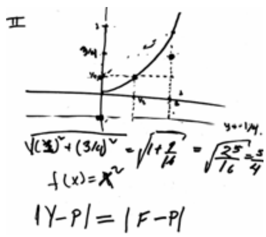


Figura dos-3

El *uso comportamiento geométrico* se observa cuando los alumnos reflexionan la instrucción de la actividad y advierten que se trata de una propiedad de la parábola. Explican su comportamiento geométrico, e incluso antes de afirmar que se trata de una parábola el Estudiante 1 menciona "*existen elementos en donde"*, con lo que alude a los elementos propios de la curva, el foco y la directriz. En otras palabras, reconocieron los elementos que conforman a la parábola y el papel que juegan, atendieron a su comportamiento al cuestionarse si la parábola abría hacia arriba o abajo e identificaron su vértice.

El *uso distribución de puntos* se identifica explícitamente cuando los alumnos recurren al teorema de Pitágoras para saber cómo se ubican los puntos en el plano y que efectivamente describen la trayectoria de una parábola, con lo que advierten la función $f(x) = x^2$.

8.2. *Situación: Los argumentos de transformación de la parábola*

La Actividad V (ver anexo) pone en juego de manera simultánea los elementos considerados para resignificar la parábola según los signos de los parámetros A, B y C de la expresión $f(x) = Ax^2 + Bx + C$. Intencionalmente se confrontan las concepciones locales y globales de la función parábola, cuya función y forma ayudarán a resignificarla según los signos de los parámetros A, B y C. Los usos de la gráfica identificados en la actividad son *comportamiento geométrico y análisis de la curva*.

Extracto de la entrevista. Respuestas de los estudiantes:

Estudiante 1: En este caso ya habíamos dicho que nuestro primer parámetro A cambiaba la concavidad… No, si A es negativo la concavidad era hacia abajo, así que por ahorita... B habíamos encontrado que abría la parábola, B la abría o la cerraba, y C la movía.

Entrevistador: Pero en este caso va enfocada la pregunta más a los signos.

...

Estudiante 2: En este caso yo pienso que el C lo que está haciendo es la altura que tiene la parábola respecto al eje *x*.

Entrevistador: En este caso, ¿qué signo tiene C?

...

Estudiante 1: C nos daría la altura de la parábola.

Estudiante 2: Respecto al eje *x*.

Entrevistador: Si C es positivo.

Estudiante 1: La parábola está arriba del eje *x*; si es negativo está abajo del eje *x*, su vértice.

...

Estudiante 2: El de la actividad sería positivo; *el parámetro C nos dice el punto donde va a cortar al eje la parábola.*

...

Estudiante 2: B de hecho es la traslación de la parábola.

...

Entrevistador: *Cuando* $B = 0$*, ¿por dónde está pasando?*

Estudiante 1: Por el origen.

Entrevistador: Quiere decir que este término se hace cero. Cuando los valores son negativos, ¿hacia dónde se está subiendo la parábola?

Estudiante 1: Hacia el eje positivo. Es que ese es el problema, *como que está haciendo un movimiento..., como que sigue una trayectoria de otra parábola* .

Entrevistador: Qué tal si hacemos lo siguiente. Por ejemplo, $f(x) = x^2 + 3x$. Si trabajamos con $f(x) = x^2 + Bx$ y hacemos $B = 0$ se cancela el término $(3x)$ y estoy pasando por el origen. Si me enfoco al término lineal $3x$, ¿qué cosa ven de especial aquí?

Estudiante 2: El término $3x$ es una recta.

...

Estudiante 2: *La parábola sigue la recta... ¡la pendiente de la recta!*

El *uso comportamiento geométrico* se observó cuando los estudiantes variaron los parámetros de la función dada para la interpretación geométrica de la función, y obtuvieron nuevas funciones a partir de una ya conocida, mirando los patrones de comportamiento para atender al signo de los parámetros pedidos.

El *uso análisis de la curva* ocurrió, a pesar de no hacerse explícito el análisis de la curva de acuerdo con los criterios de la derivada de una función, ya que los estudiantes atendieron a su comportamiento. El uso mencionado se observa al momento de hallar el signo que le corresponde al coeficiente B porque los alumnos lo variaron y observaron que la gráfica se trasladaba; sin embargo, no podían decir cómo se trasladaba, e incluso afirmaron: "*como que sigue la trayectoria de otra parábola*". Al afirmar que seguía una "*trayectoria*" intuían que se comportaba como una recta en un intervalo cercano a cero; de hecho, al continuar variando el parámetro B pudieron concluir que "*la parábola sigue a la recta*", con lo cual entendieron que la parábola cerca de valores cercanos a cero se comporta como su parte lineal. Es decir, pudieron rendir cuentas sobre la linealidad del polinomio e intrínsecamente estaban hablando de la derivada de la función en un intervalo cercano a cero; asimismo, explicaron de alguna manera al crecimiento o decrecimiento de la función en dicho intervalo. El episodio anterior indica que los usos no sólo dependen de una situación específica, sino también dan lugar a otros usos de gráfica, la cual evoluciona como herramienta a la par de las formas de hacer de los estudiantes.

Pero, ¿qué significa haber encontrado los usos de las gráficas en bachillerato con estudiantes que propiamente no llevaron a cabo el programa descrito y ni los libros de texto analizados? Lejos de ofrecer una respuesta absoluta, pues no está al alcance de esta investigación, creemos que el ejercicio de haber analizado las actividades anteriores a la luz de los usos de las gráficas nos proporciona indicadores sobre la funcionalidad de las categorías de uso en situaciones específicas. Por un lado, los alumnos que participaron en la situación de transformación de la parábola construyeron argumentaciones en relación con el comportamiento tendencial de la parábola, donde se confrontaron las concepciones de curva y función (Campos, 2003). Por el otro, la argumentación es un marco compuesto intencionalmente de significados, procedimientos, procesos y objetos referentes a un contenido específico, que lleva a cabo el participante a través de algo *"común"* que no depende de él: los usos o el marco de usos de las gráficas que son generados por algo externo al alumno, pero se convierten en algo material (conocimiento). Lo externo al participante es la institución que viene a normar su argumentación.

En tal sentido, afirmamos con base en la visión socioepistemológica que la resignificación es la construcción del conocimiento mismo en la organización del grupo humano, el cual es normado por lo institucional (Cordero, 2005 & 2008); aquí, el uso del conocimiento se debate entre su función y su forma, de acuerdo con lo que organiza el grupo humano. Pudiéramos decir que el uso de las gráficas refleja la práctica institucional en el bachillerato, sin ignorar que hay otras prácticas de referencia que tendrán que hacer más robustas las categorías de usos de las gráficas.

9. A manera de conclusión

En las secciones anteriores se dieron a conocer las evidencias sobre el uso de las gráficas en el bachillerato con base en el análisis a los libros de texto sugeridos en los programas de estudio; asimismo, se discutieron los aspectos teóricos-metodológicos centrales que fueron considerados en la presente investigación. Fue así como el estudio sobre el desarrollo del uso de las gráficas dejó entrever la importancia de la graficación normada por la práctica institucional, lo cual nos llevó a crear otro discurso que ofreciera los marcos o prácticas de referencia en que se resignificaban las gráficas. Entonces, al desarrollar los usos de la gráfica pudiera ser que se pongan al descubierto las causas reales del desarrollo social del concepto de función.

Ahora bien, el desarrollo sobre los usos de la gráfica deberá proveer datos acerca de tres aspectos: a) los métodos de uso de la graficación a través de sus prácticas institucionales; b) las comprensiones de las gráficas en tanto su funcionamiento y forma por la clase de actividades que generen sus prácticas institucionales; c) las similitudes que alternan con diferentes dominios y reflejan una resignificación funcional. La investigación ofrece indicadores de los tres aspectos que señalaremos enseguida, a manera de conclusión.

a) *Los métodos de uso de la graficación a través de sus prácticas institucionales*

Caracterizamos a los diferentes usos que se presentan en el bachillerato, de manera particular en matemáticas, al igual que el desarrollo de los usos de las gráficas que se resignifican en su funcionamiento y forma. Los escenarios que planteamos sobre el uso de las gráficas dejan entrever que, vistas como herramientas, evolucionan a la par de las formas de hacer de los participantes; sin embargo, la investigación no ofrece evidencias sobre los usos de los participantes —tanto del profesor como del alumno— que permitan ver a la gráfica como una herramienta que evoluciona para ser mejor y nos lleve a identificar los métodos de uso de la graficación.

b) *Las comprensiones de las gráficas en tanto su funcionamiento y forma por la clase de actividades que generen sus prácticas institucionales*

Pensamos que el tratar con el uso de las gráficas de acuerdo con su funcionamiento y forma responde a la funcionalidad del conocimiento matemático. En ese sentido, identificamos seis usos de la gráfica en bachillerato: distribución de puntos, comportamiento geométrico, análisis de la curva, cálculo de área, cálculo de volumen y análisis de información. Estas se resignificaron al debatir entre sus funcionamientos y formas gráficas, con el que se observó el desarrollo de los usos de la gráfica en una situación específica.

c) *Las similitudes que alternan con diferentes dominios y reflejan una resignificación institucional*

Nuestra investigación se centró en identificar los usos de la gráfica que se presentan en los libros de texto de matemáticas. Sin embargo, hay que destacar que el conocimiento matemático no sólo se construye o se ha construido en el dominio matemático, sino que se ha valido de otros ámbitos; por ende, hay otras prácticas de referencia que dan cuenta de la matemática. Esto quiere decir que debemos explorar otros dominios científicos con el fin de hallar evidencias sobre los usos de la gráfica que ahí se presentan y resaltar las similitudes que alternan entre ellas. Lo anterior nos permitirá crear un marco de referencia sobre los usos de las gráficas donde se resignifique el conocimiento matemático. Habrá que avanzar en esa dirección en investigaciones posteriores.

En el episodio analizado (ver sección 8) se pudo apreciar la funcionalidad de algunos usos de las gráficas. La funcionalidad consiste en que la categoría de usos los norma la práctica institucional de modo insoslayable y fortalece las argumentaciones gráficas de los estudiantes, un aspecto que habrá de considerarse en el rediseño del discurso matemático escolar.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Buendía, G., & Cordero, F. (2005). Prediction and the Periodical Aspect as Generators of Knowledge in a Social Practice Framework: A Socioepistemological Study. *Educational Studies in Mathematics, 58* (3), 299-333. doi: 10.1007/s10649-005-2295-5

Campos, C. (2003). *La argumentación en la transformación de funciones cuadráticas. Una aproximación socioepistemológica* (Tesis inédita de maestría). Cinvestav-IPN, México, DF.

Cantoral, R. (2003). La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa: una mirada emergente [CD-ROM]. *XI Conferencia Interamericana de Educação Matemática* (tema Educación Matemática & Desafíos y Perspectivas). Blumenau, Brazil: Universidad Regional de Blumenau.

Cantoral, R. & Farfán, R. (2003). Matemática educativa: una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 6* (1), 27-40.

Cantoral, R. & Farfán, R. (2004). La sensibilité à la contradiction: Logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 24* (2-3), 137-168.

Cantoral, R., Farfán, R.-M., Cordero, F., Alanís, J., Rodríguez, R. & Garza, A. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.

Confrey, J. & Costa, S. (1996). A Critique of the Selection of "Mathematical Objects" as Central Metaphor for Advanced Mathematical Thinking. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 1* (2), 139-168.

Cordero, F. (1998). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso de comportamiento tendencial de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 2* (1), 56-74.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4* (2), 103-128.

Cordero, F. (2004). La socioepistemología en la graficación del discurso matemático escolar. *Resúmenes de la Decimoctava Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, 34.

Cordero, F. (2005). La socioepistemología en la graficación del discurso matemático escolar. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18*, 477-482.

Cordero, F. (2006a). La modellazione e la rappresentazione grafica nella matematica scolastica. *La Matemática e la Sua Didattica, 20* (1) 59-79.

Cordero, F. (2006b). La institucionalización del conocimiento matemático y el rediseño del discurso matemático escolar [CD-ROM]. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19*, 824-830.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 265-286). México, Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.-Díaz de Santos.

Cordero, F. & Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10* (1), 7-38.

Cordero, F., Mena, J. & Montalto, M. E. (2009). Il ruolo della giustificazione funzionale in una situazione del re-significato dell'asintotico. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate* [aceptado para su publicación].

Covián, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: el caso de la cultura maya* (Tesis inédita de maestría). Cinvestav-IPN, México, D.F.

Domínguez, I. (2003). *La resignificación de lo asintótico en una aproximación socioepistemológica* (Tesis inédita de maestría). Cinvestav-IPN, México, D.F.

Duval, R. (1988). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigación en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Durkheim, E. (1982). *The Rules of Sociological Method and Selected Texts on Sociology and its Method*. New York: The Free Press.

Dubinsky, E. & Harel, D. (1992). The Nature of the Process Conception of Function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 85-106). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Efimov, N. (1969). *Curso breve de Geometría Analítica*. URSS: Mir.

Euler, L. (1990). *Introduction to Analysis of the Infinite* (Vol. II). USA: Springer-Verlag.

Flores, R. (2005). *El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto* (Tesis inédita de maestría). Cinvestav-IPN, México, D.F.

Gustafson, D. (1996). *Intermediate Algebra*. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole Pub.

Instituto Politécnico Nacional (1995). *Programas de Estudio. Nivel Medio Superior: Álgebra, Geometría y Trigonometría, Geometría analítica*. México, DF.

Instituto Politécnico Nacional (1996). *Programas de Estudio. Nivel Medio Superior: Cálculo diferencial, Cálculo integral, Probabilidad y Estadística*. México, DF.

Instituto Politécnico Nacional (2003). *Geometría analítica. Libro para el estudiante*. México, DF.

Instituto Politécnico Nacional (2004). *Álgebra. Libro para el estudiante*. México, DF.

Jonson, R. (1976). *Estadística elemental*. México: Trillas.

Larson, R. (1982). *Cálculo y Geometría analítica*. México: McGraw-Hill.

Lehmann, Ch. (1998). *Geometría analítica*. México: Limusa.

Oresme, N. (1968). Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum. In M. Clagett, M. *Nicole Oresme and the Medieval Geometry of Qualities and Motions*. Madison: University of Wisconsin Press.

Purcell, E. (1992). *Cálculo diferencial e integral* . México: Prentice-Hall.

Rider, P. (1966). *Geometría analítica*. Barcelona: Montaner y Simón.

Rosado, P. (2004). *Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica* (Tesis inédita de maestría). Cinvestav-IPN, México, D.F.

Suárez, L. (2008). *Modelación–graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico* (Tesis inédita de doctorado). Cinvestav-IPN, México, D.F.

Suárez, L. & Cordero, F. (2008). Elementos teóricos para estudiar el uso de las gráficas en la modelación del cambio y de la variación en un ambiente tecnológico. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, 3* (1) 51-58.

Swokowski, E. (1998). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. México: International Thomson.

Autores

Francisco Cordero Osorio. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN), México, D.F.; fcordero@cinvestav.mx

Claudia Cen Che. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN), México, D.F.; ccen@cinvestav.mx

Liliana Suárez Téllez. Centro de Formación e Innovación Educativa Instituto Politécnico Nacional, México, D.F.; lsuarez@ipn.mx

ANEXO

Actividades propuestas a los estudiantes

Actividad II. En la ventana de la figura D hay un punto M que equidista al punto $(0, \frac{1}{4})$ y a la recta $y=-\frac{1}{4}$.

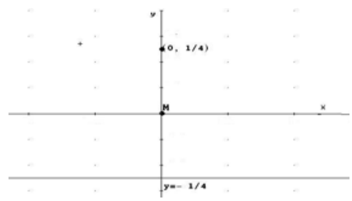


Figura D

Encuentra las coordenadas de M de acuerdo con la siguiente tabla:

X	y
0	
$\frac{1}{2}$	
1	
5	

a) Ajusta una curva a los puntos encontrados en el inciso a.

b) Demuestra que de acuerdo con las condiciones del punto M, sólo existe una curva que pasa por esos puntos.

Actividad V. La curva de la figura D es la gráfica de una función $f=Ax^2+Bx+C$.

Determina los signos de los coeficientes A, B y C.