Relime Vol. 10, Núm. 1, marzo, 2007, pp. 39-68.

Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes[1]

Bruno D'Amore[2]
Martha Isabel Fandiño Pinilla[2]

RESUMEN

En esta investigación examinamos las convicciones de maestros y de estudiantes en lo que concierne a las relaciones existentes entre perímetro y área de una figura plana. La investigación se inserta en una corriente clásica, explorada por más de 60 años, pero que hoy incluye nuevos factores. En particular, se estudia el cambio de las convicciones, el lenguaje utilizado para expresar dicho cambio, el grado de incidencia que tienen los ejemplos dados, y, en particular, discutimos la idea según la cual precisamente las supuestas relaciones entre perímetro y área constituyen un ejemplo de la actitud no crítica del estudiante que tiende a confirmar aumentos o disminuciones entre entidades puestas en relación.

- **PALABRAS CLAVE:** Fundamentos teóricos, Matemática Educación, epistemología, cognición y articulación de teorías.

ABSTRACT

In this research we examine the convictions of teachers and students regarding the existing relations between perimeter and area of a flat figure. The research is inserted in a classical position, explored for more than 60 years, but that today includes new factors. Particularly, the change of the convictions is studied, the language utilized to express that change, the degree of incident that have the given examples, and, particularly, we discuss the idea that the supposed relations between perimeter and area constitute an example of the not criticism attitude of the student that tends to confirm increases or decreases among entities put in relation.

- **KEY WORDS:** Theoretical bases, mathematics education, epistemology, cognition and theories articulation

Fecha de recepción: 31 de agosto de 2006 / Fecha de aceptación: 14 de enero de 2007

[1] Trabajo desarrollado en el ámbito del Programa de investigación de la Universidad de Bologna (Departamento de Matemática: ''Aspetti metodologici (teorici ed empirici) della formazione iniziale ed in servizio degli insegnanti di matematica di ogni livello scolastico''.

[2] Gruppo di Ricerca e Sperimentazione in Didattica e Divulgazione della Matematica – Nucleo di Ricerca Didattica (RSDDM – NRD). Departamento de Matemática. Universidad de Bologna. Italia.

RESUMO

Nesta investigação examinamos as convicções dos professores e dos estudantes no que concerne às relações existentes entre perímetro e área de uma figura plana. A investigação se insere em uma corrente clássica, explorada por mais de 60 anos, porém que hoje inclui novos fatores. Em particular, se estuda a troca das convicções, a linguagem utilizada para expressar essa troca, o grau de incidência que tem os exemplos dados; e, em particular, discutimos a idéia segundo a qual precisamente as supostas relações entre perímetro e área constituem um exemplo da atitude não crítica do estudante que tende a confirmar aumentos ou diminuições entre tais conceitos.

- **PALAVRAS CHAVE**: Fundamentos teóricos, Educação Matemática, epistemologia, cognição e articulação de teorias.

RÉSUMÉ

Dans cette recherche, nous examinons les certitudes de maîtres et d'élèves en ce qui concerne les rapports entre le périmètre et l'aire d'une figure plane. La recherche s'inscrit dans un courant classique, exploré pour plus de 60 ans, lequel a inclus récemment de nouveaux éléments. En particulier, ont été étudiés le changement des certitudes, le langage utilisé pour exprimer ce changement, le degré d'incidence qu'ont les exemples donnés, et en particulier, il est discuté l'idée selon laquelle il est possible de préciser que les rapports supposés entre le périmètre et l'aire sont un exemple de l'attitude non critique de l'élève qui tend à confirmer d'augmentations et de diminutions entre les entités mises en relation.

- **MOTS CLÉS**: Fondements théoriques, Didactique des mathématiques, épistémologie, cognition et articulation des théories.

1. PREMISA Y CUADRO TEÓRICO

Las investigaciones sobre el problema del aprendizaje de los conceptos de perímetro y área de las figuras planas pueden ostentar el título de haber sido las primeras en ser estudiadas. Después de haberse ocupado del nacimiento del pensamiento y del lenguaje en el niño y, años después, de la adquisición-construcción de la idea de número (en sus varias acepciones), Piaget se ocupó, a partir de los años treinta del siglo XX, de las construcciones conceptuales relacionadas con la Geometría. Entre las diversas obras, que sería aquí imposible citar, nos limitaremos a aquellas en las cuales aparecen explícitamente el perímetro y el área o referencias a estos conceptos (Piaget, 1926; Piaget, 1937; Piaget, Inhelder & Szeminska, 1948; Piaget & Inhelder, 1962). A estas obras de base siguieron rápidamente, en los años 50 y 60, estudios realizados por alumnos o seguidores del Maestro ginebrino, basados en las mismas certezas tomadas de la epistemología genética, por ejemplo Vihn et al. (1964), Vihn & Lunzer (1965). Señalamos también el estudio de Battro (1983), quien repite todos los célebres experimentos del Maestro.

Son éstos, estudios clásicos, los que han influido por más de veinte años en los análisis sucesivos sobre dicho tema, los cuales se centraban principalmente en los fracasos de jóvenes alumnos en determinados estadios de edad. En particular, en este sentido se estudiaron con mucha atención, entre otras, las ideas de longitud y de superficie, lo que evidenció la gran dificultad que los alumnos tienen para apropiarse de la idea de superficie. Más aun, las investigaciones pusieron en evidencia cómo, al variar la forma, el joven estudiante tiende a no ser capaz de aceptar la posible inmutabilidad de la medida de la superficie. La dificultad ligada a falsas relaciones entre área y perímetro, según estas investigaciones, parece perdurar hasta los 12 años, y está poco relacionada con el desarrollo lingüístico del sujeto.

[Es bien conocido que las conclusiones de Piaget fueron sometidas a severas críticas en posteriores estudios; con el fin de hacer menos pesado este trabajo, remitimos a Resnick & Ford (1981, en especial al capítulo 7)].

A estos estudios preliminares y clásicos siguieron numerosas investigaciones; tantas, que es imposible hacer aquí un cuadro completo; nos limitaremos (siguiendo un recorrido cronológico) sólo a aquellos que hacen referencia específicamente a las dificultades en el aprendizaje del perímetro y del área. Dichas investigaciones han condicionado sin ninguna duda la dirección de nuestra actual investigación.

En Rogalski (1979) se señala cómo uno de los grandes problemas del aprendizaje de las superficies está en que existen "obstáculos conceptuales" específicos que se refuerzan los unos en los otros[3]. Las dificultades sobresalientes son los cambios en las dimensiones, el estatuto específico de las unidades de medida, sus relaciones con las unidades de longitud y las medidas espaciales.

En Gentner (1983), con mucha cautela, se sugiere el uso de materiales concretos sencillos para las primeras aproximaciones a la geometría en general, y al estudio de las superficies en particular.

La idea de modelo intuitivo está muy bien explicada en Fischbein (1985): "Para crear una base intuitiva en la investigación intelectual, a los conceptos y a las operaciones mentales, tendemos a asociar espontáneamente modelos significativos desde el punto de vista intuitivo (...) *Un modelo intuitivo tiene siempre un significado pictórico-comportamental e induce siempre efectos de aceptación inmediata.* (...)" (pp. 14-15); pero: "La insistencia excesiva en dar sugerencias intuitivas usando representa-

[3] En 1979 aún no estaba totalmente difundida la teoría de los obstáculos de Brousseau (Brousseau, 1976; 1986; 1989); por lo tanto, los autores utilizaban términos que en el momento actual, dentro de este marco teórico, deberían ser precisados; nos parece, sin embargo, que la idea de "obstáculo conceptual" de Rogalski se puede asociar con la idea de "obstáculo epistemológico" de Brousseau, pero evidenciando el factor relativo a la dificultad de aprendizaje, más que a hechos históricos.

ciones artificiales o demasiado elaboradas pueden hacer más mal que bien" (p. 18).

Un discurso mucho más general fue propuesto por Speranza (1987); junto a consideraciones generales de extraordinario interés cultural, se demuestra cómo las dificultades conceptuales relevadas, en cuestiones relacionadas con el área y el perímetro, en la escuela primaria, permanecen en alumnos avanzados, incluso en la universidad. [Veremos confirmarse esta afirmación en el trascurso de este trabajo].

Iacomella & Marchini (1990) proponen una interesante reflexión, en la cual se evidencia la existencia de un contraste entre las medidas directas (como, por ejemplo, el geoplano, cuadrículas, teorema de Pick) e indirectas de una superficie (por ejemplo recurriendo a las fórmulas, usando las medidas lineales) y cómo este contraste puede constituir una dificultad conceptual para la comprensión de este argumento.

En el artículo de Tierney, Boyd & Davis (1990) se afronta el tema de las concepciones que tienen los docentes de la escuela primaria con respecto al área; es por demás relevante que se evidencie lo siguiente: primero, dichas concepciones a veces coinciden con las de los alumnos; segundo, el área es puesta en relación con las fórmulas para calcularla, más que con un concepto general. En un cierto sentido, esta investigación puede ser interpretada como el punto de partida de todos aquellos que indagan sobre las concepciones de los docentes y, por tanto, del trabajo que aquí estamos presentando.

En Outhred & Mitchelmore (1992) se presentan casos de niños de los últimos años de la escuela primaria capaces de confrontar superficies de figuras rectangulares, pero que no estaban en disposición de pasar de esta experiencia a las medidas de superficie. En general, el artículo está dedicado a las dificultades específicas en la conceptualización del área y del perímetro por parte de los alumnos de la escuela primaria. Normalmente, en la actividad de enseñanza se tiene como premisa que, si un alumno aprende a calcular el área del rectángulo, está listo para aprender a medir las áreas de cualquier otra figura geométrica. Aquí se muestra, al contrario, como esto es sólo una ilusión.

Un amplio estudio, considerado un clásico por muchos investigadores, es el de Rouche (1992); en éste se demuestra cómo el rectángulo constituye el punto de partida más importante para la adquisición del concepto de superficie, el punto crucial, la figura por excelencia, dado que a ésta recurren casi todas las otras figuras que el alumno conocerá en la escuela primaria y, ciertamente, las primeras (triángulo, paralelogramo, trapecio...). Se insiste también en que la determinación del área de un rectángulo como producto de las medidas de dos segmentos sea aún ejemplo del uso de medidas indirectas, hecho difícil de aceptar y, por tanto, de construir conceptualmente. Aparentemente, hay una contradicción entre las dos investigaciones mencionadas, pero no es así: en la primera se muestra cómo dominar los elementos del rectángulo no es condición suficiente para asegurar el dominio de los elementos de las demás figuras, en particular en lo referente al concepto de área; en la segunda se muestra cómo, de todas maneras, la figura privilegiada al inicio del aprendizaje de este argumento es, sin lugar a dudas, el rectángulo.

Consideramos de gran importancia la investigación de Giovannoni (1996), en la que se discuten y se repiten célebres experimentos de Piaget sobre el problema de la comprensión del concepto de superficie en niños de entre 3 y 6 años; se demuestra con contundencia que dicho concepto no está *por sí mismo* fuera del alcance de los niños, como se aseguraba en el pasado, sino que esta conquista depende de las condiciones del entorno, en particular las referidas al lenguaje y a la propuesta de modelos específicos adecuados (hojas verdes interpretadas como tales y no como prados; áreas superficiales como tales y no como hierba para vacas). Por lo tanto, poseer un lenguaje específico tiene una profunda incidencia en la construcción de dicho concepto: el uso ambiguo del adjetivo "grande" viene sustituido lenta y conscientemente por "extenso", asegurando un notable éxito en el aprendizaje incluso en sujetos de 5 años.

En los trabajos de Moreira & Comiti (1993) y Moreira (1996) se hace énfasis en las dificultades que tienen los estudiantes de los últimos años de la escuela primaria para reconocer las medidas de una figura como uno de los elementos que la determinan y, en particular, en el primer trabajo, a separar las medidas de área y perímetro y, en el segundo, a adquirir la idea de área de una figura plana. En estos trabajos se pone de manifiesto cómo el aprendizaje de los diferentes elementos de la medida de magnitudes geométricas es específico y diferente en cada caso. La idea del área de una figura plana no siempre es reconocida como una característica de dicha figura.

Marchini (1999) habla del conflicto entre los dos conceptos y de la forma didáctica como se podría afrontar el argumento con el fin de alcanzar resultados positivos; su artículo contiene consideraciones de gran impacto y de amplio espectro no sólo didáctico, sino también matemático y epistemológico.

En Medici (1999) se discute la formulación lingüística de los enunciados de los problemas de geometría, y se pregunta si no sería conveniente recurrir a un lenguaje menos preciso y más accesible evitando el uso excesivo de fórmulas.

Otro estudio de gran interés es el de Jaquet (2000), en el cual se presenta y se discute con profundidad un problema propuesto a alumnos de 3° y 4° de primaria, en el curso del *Rally matemático transalpino*[4] en los meses de enero y febrero de 2000; en dicho problema, original en su formulación, se pide confrontar áreas de figuras no estándar, de las cuales no se dan medidas ni de superficie ni lineales. Se estudian la formas en que los sujetos afrontan el problema, y se muestra la complejidad de los procesos puestos en juego por los alumnos, quienes mezclan métodos directos e indirectos cuando intentan calcular el área y el perímetro de los polígonos que aparecen en el diseño. Se trata de un interesante estudio que demuestra la complejidad de la relación entre los dos conceptos.

Un trabajo que seguimos de cerca, incluso en su desarrollo, es el de Chamorro (1997); la autora analiza ocho aspectos distintos que determinan los entornos de aprendizaje en lo que concierne con la medida (en general), tomando como referencia las ideas de Guy Brousseau; esos aspectos son: objeto soporte, magnitud, valor particular (o cantidad de magnitud), aplicación de la medida, medida imagen, medida concreta, medición, orden de magnitud. La investigación de Chamorro se refiere a la medida en general y demuestra la complejidad del tema, especialmente en lo relacionado con el aprendizaje. Entre los ejemplos específicos que se hacen, apare-

[4] Se trata de un desafío entre alumnos de diversos países, sobre la base de pruebas que una comisión prepara; este concurso tiene una gran difusión en Suiza y en Italia, principalmente.

cen precisamente el contorno y la superficie: “En la superficie, en cuanto medida producto, confluyen múltiples obstáculos conceptuales. Entre éstos, la relación que las unidades de superficie conservan con las unidades de longitud, siendo las segundas la base de las primeras como productos de medidas. Dichas relaciones pueden ser comprendidas sólo a partir de relaciones espaciales que a su vez deben ser coordinadas con relaciones multiplicativas. La coordinación entre la linealidad de cada una de las dimensiones y la linealidad de las superficies debe poder ser garantizada a través de un modelo geométrico que ayude a visualizar dichas relaciones”.

A la tesis de doctorado de Chamorro sigue un largo artículo que la resume y la profundiza al mismo tiempo, Chamorro (2001, 2002); en este artículo se analizan experiencias realizadas en la escuela primaria a propósito del problema de la enseñanza-aprendizaje de la medida y en forma particular del perímetro y del área; el objetivo de este estudio es el de contribuir a la realización de exitosas situaciones a-didácticas y de ingeniería dirigidas a eliminar o, por lo menos, a limitar las conocidas dificultades en el aprendizaje de la medida.

Un estudio de Montis, Mallocci & Polo (2003) confirma lo que la práctica evidencia; es decir, que los jóvenes alumnos entre 6 y 8 años identifican la figura de mayor extensión con la de mayor longitud o con la más alta.

En la investigación de Medici, Marchetti, Vighi & Zaccomer (2005) se evidencian las preconcepciones y los procesos espontáneos que alumnos entre 9 y 11 años (4° y 5° año de la escuela primaria italiana) ponen en juego cuando deben resolver situaciones problemáticas que involucran el área y el perímetro; recurriendo a tests y a entrevistas, los autores insisten en que estas dos ideas fundamentales constituyen obstáculos epistemológicos.

Como se ve, el cuadro científico de referencia, aun en las limitaciones de contenido que nos impusimos, es extremadamente complejo y amplio.

2. PROBLEMAS DE LA INVESTIGACIÓN

Es evidente, por lo tanto, que los dos conceptos geométricos: *perímetro* y *área de una figura plana*, tienen muchos elementos en común sobre el plano científico, pero muchos otros que son simplemente supuestos sobre el plano de las misconcepciones, comunes en los estudiantes de todo grado escolar.

Por ejemplo, las investigaciones han demostrado ampliamente (véanse Stavy & Tirosh, 2001; y muchos de los artículos citados líneas arriba) que gran número de estudiantes de todas las edades están convencidos de que existe una relación de estrecha dependencia entre los dos conceptos sobre el plano relacional, del tipo:

> Si A y B son dos figuras planas, entonces:
>
> - si (perímetro de A > perímetro de B) entonces (área de A > área de B)
> - ídem con <
> - ídem con = (por lo cual: dos figuras iso-perimétricas son necesariamente equi-extensas);
>
> y viceversa, cambiando el orden "perímetro-área" con "área-perímetro".

Este tema difícilmente se propone con objetivos didácticos en forma explícita, en parte, según algunos maestros, por una supuesta dificultad.

Podemos preguntarnos si los maestros de cualquier grado escolar tienen conciencia de este problema o si, por casualidad, también en algunos de ellos existen problemas de construcción conceptual. Esta evidencia tiene que ver con el problema de las convicciones y de las concepciones de los maestros[5].

Los estudios sobre la importancia de las concepciones que la sociedad, la gente común, ciertos grupos sociales, los maestros, los estudiantes tienen de la matemática, incluso en lo que concierne a procesos que van más allá de la enseñanza y del aprendizaje de la misma, tienen un origen reciente. Sin embargo, estos revelaron inmediatamente el gran impacto que estas consideraciones tienen sobre el aprendizaje y sobre la enseñanza. Schoenfeld (1992) llegó a afirmar que cada individuo conceptualiza la matemática y se ubica en el ambiente matemático precisamente sobre la base del sistema de sus propias convicciones sobre la matemática; por lo tanto, sobre la base de las concepciones que tiene de la matemática. Es dicha concepción la que determina no sólo las modalidades de esa inserción, sino también las sensaciones que el individuo experimenta después de que esta inserción ha ocurrido. De esto se deduce la imposibilidad de separar conocimiento (de la matemática) y convicción (sobre la matemática) en los profesores (Fennema & Franke, 1992), lo que además conlleva a afirmar, como obvia consecuencia, que las decisiones que los profesores toman están determinadas por los dos factores, lo que ulteriormente explica la notable importancia que en el momento actual tiene la investigación en el campo de las convicciones (Thompson, 1992; Hoyles, 1992; Pehkonen & Törner, 1996; Krainer et al., 1999).

Interesantes consideraciones teóricas sobre la estructura de las convicciones y sobre las actuales investigaciones a este propósito se encuentran en Törner (2002).

Por otra parte, hoy se reconoce universalmente que las convicciones forman parte importante del conjunto de conocimientos, dado que los determinan y los condicionan, como lo había relevado Schoenfeld (1983) hace ya más de veinte años.

Desde los primeros momentos de interés por este tipo de argumentos surgió una especie de análisis de los tipos de convicciones; en el trabajo de Schoenfeld (1992), por ejemplo, la distinción está hecha sobre el agente; así, distingue entre convicciones:

- del estudiante
- del maestro
- de la sociedad,

esta última, una distinción de hecho descontada, pero no por eso libre de sorpresas, y, en todo caso, la más seguida precisamente por su inmediatez.

A propósito del tercer punto, hoy sabemos que no es posible separar el análisis de las convicciones de un individuo de aquellas

[5] Consideramos de interés declarar explícitamente que nos serviremos de las siguientes interpretaciones de dichos términos (propuestas también con claridad en: D'Amore & Fandiño, 2005):

- convicción (*belief*) (o creencia): opinión, conjunto de juicios/expectativas, lo que se piensa a propósito de algo;
- el conjunto de las convicciones que alguien (A) tiene sobre algo (T) son las *concepciones* (K) de A relativas a T; si A pertenece a un grupo social (S) y comparte con los otros miembros de S dicho conjunto de convicciones relativas a T, entonces K es la concepción de S relativa a T.

Generalmente, al puesto de "concepción de A relativa a T" se habla de la "imagen que A tiene de T".

del grupo social al cual pertenece, dado que éstas son, de todas formas, el resultado de complejas interacciones entre grupos sociales (Hoyles, 1992); por lo tanto, un estudio de este tipo debe estar inmerso dentro del contexto social.

Un vasto y reciente trabajo que presenta un panorama sobre este tema, por lo menos en lo que se refiere a la comunidad PME, se encuentra en Llinares & Krainer (2006).

En los años que van del inicio de los estudios sobre las convicciones (inicio de la década de los ochenta) a la actualidad, han cambiado las metodologías para investigar esas convicciones; al inicio, se trataba de individuar tipologías a las cuales pertenecían los sujetos analizados; hoy se tiene como objetivo encontrar una relación entre las convicciones expresadas por el sujeto analizado y su acción en el aula. Nosotros tuvimos esta posibilidad, que seguimos como metodología de investigación, en particular en el caso de los docentes. La metodología seguida fue, por lo tanto, la entrevista dividida en dos fases: la primera, con una conducción a espejo, buscaba que el sujeto manifestara sus propias convicciones sobre el tema objeto de estudio; la segunda, de tipo reflexivo, pidió al sujeto comparar sus propias convicciones con la vida de aula.

Este tipo de metodología de análisis fue introducida por Skott (1999) y fue sucesivamente reelaborada en situaciones análogas (Beswick, 2004). Una vez analizadas las convicciones iniciales, se trata de analizar qué cambio se opera en ellas después de un determinado evento, por ejemplo, como veremos, en nuestro caso, *después* de la discusión con el investigador a propósito de las relaciones entre el área y el perímetro; esto se logra enfrentando al sujeto con sus mismas declaraciones, antes y después.

Para obtener el objetivo, es necesario que los sujetos hagan explícitas sus propias convicciones antes de la investigación, y esto se puede lograr recurriendo a declaraciones escritas (D'Amore & Fandiño, 2005), a entrevistas individuales registradas, o a entrevistas colectivas conducidas con dos o tres sujetos, de forma que cada uno pueda testimoniar las afirmaciones de los otros. Nosotros seguimos las tres metodologías, de acuerdo con las circunstancias.

Existe, además, otro factor importante, evidenciado por Azhari (1998), que trataremos de expresar en forma breve: cuando existen dos relaciones ligadas mutuamente, el estudiante intenta aplicar la siguiente "ley de conservación":

- si una determinada cosa crece, también esta otra, con la cual está relacionada, crece (y viceversa).

Ahora, el ejemplo que liga entre sí perímetro y área parece conectar perfectamente con las consideraciones de Azhari (1998) (es más, éste es precisamente uno de los ejemplos ofrecidos en este trabajo, citado por Stavy & Tirosh, 2001).

Si ponemos en relación los perímetros de dos figuras A y B con las respectivas áreas, nos parece que una forma convincente de evidenciar que las "leyes" enunciadas líneas arriba no son válidas es la de dar un ejemplo para cada uno de los siguientes nueve casos posibles:

p	S	p	S	p	S
>	>	>	=	>	<
=	>	=	=	=	<
<	>	<	=	<	<

La primera casilla > > quiere decir:

- encontrar dos figuras tales que, pasando de la primera a la segunda, el perímetro crezca y el área crezca

y así sucesivamente.

Para evitar dificultades, se puede siempre partir de figuras simples, como por ejemplo del rectángulo, cuando esto es posible, haciendo diversas transformaciones sobre él o sobre figuras que se derivan de éste. Consideramos necesario aclarar que las figuras sobre las cuales conviene trabajar son las más habituales, es decir las figuras más usuales que se encuentran en los libros de texto y en el salón de clase, para evitar complicaciones que se deriven de la misma figura.

En el Apéndice se da un ejemplo de cada una de las nueve situaciones indicadas, con figuras elementales. Estos ejemplos no fueron mostrados a los sujetos involucrados en la prueba que se describe a continuación; cada sujeto debía proporcionar los ejemplos oportunos, por lo menos en una primera instancia.

3. PREGUNTAS, METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN E HIPÓTESIS DE RESPUESTA[6]

A un grupo de *colaboradores*[7], docentes de escuela primaria, de escuela media, de escuela superior y de universidad, les propusimos hacerse cargo de la investigación descrita líneas arriba. Decidimos hacer la investigación en todos los niveles escolares para verificar si los resultados podían estar relacionados, en forma específica, con dichos niveles o si, por el contrario, se podían encontrar resultados independientes de la variable “nivel escolar”. A cada uno de los colaboradores dimos las siguientes indicaciones que son, al mismo tiempo, las preguntas explícitas de investigación, las relativas indicaciones metodologías y nuestras hipótesis de respuestas, subdivididas en tres puntos.

PUNTO 1

PROBLEMA de investigación Pr.1: Solicitamos a todos los colaboradores someterse ellos mismos a la prueba y, en un segundo momento, aplicar la misma prueba a algunos de sus colegas de las escuelas primaria, media o superior, y a estudiantes universitarios, futuros maestros en formación. El problema consiste en verificar si, en un primer momento, en nuestros mismos colaboradores y, en un segundo momento, en los demás sujetos que se sometieron a la prueba, se verifica un cambio de convicciones relativo a las relaciones entre área y perímetro.

PREGUNTA de investigación Pg.1: ¿Es verdad o no es verdad que se pueden encontrar ejemplos para todos los nueve casos? ¿Es verdad o no es verdad que surge espontáneamente la idea de que, en general, al aumentar el perímetro de una figura plana aumenta también el área? ¿Es verdad o no es verdad que se necesita recurrir

[6] Contrariamente a nuestra forma habitual de trabajar, no separamos estos tres puntos dado que éstos están, en esta ocasión, profundamente ligados entre sí.

[7] Por “colaboradores” se entiende lo siguiente: en Italia existen grupos de investigación en didáctica de la matemática, reconocidos por el Ministerio de la Universidad y de la Investigación, adscritos a una determinada Universidad; el grupo de Bologna se denomina RSDDM (www.dm.unibo.it/rsddm); de dichos grupos forman parte docentes de todos los grados escolares a quienes oficialmente se identifica como “colaboradores de investigación”. Del grupo de colaboradores forman parte docentes universitarios o de grado equivalente.

a las propias competencias, a las construcciones cognitivas anteriores y a su propia experiencia, para *convencerse* que las cosas *no* son así?

HIPÓTESIS de respuesta H.1: Consideramos que no sólo los alumnos, sino también algunos docentes y algunos colaboradores tenían misconcepciones a propósito de supuestas relaciones necesarias entre perímetro y área de las figuras planas. Que no fuera banal encontrar los nueve ejemplos indicados (especialmente en el caso en que el perímetro debe disminuir y el área aumentar, y viceversa). Incluso que, después de haber visto los ejemplos, no fuera completamente aceptada. Como indicadores de dichas misconcepciones pensamos asumir las mismas declaraciones de los colaboradores, de los maestros entrevistados, de los estudiantes universitarios.

PUNTO 2

PROBLEMA de investigación Pr.2: Pedimos a todos los colaboradores hacer las pruebas con estudiantes de escuela primaria, media, superior y con estudiantes universitarios de todo tipo de facultad, y no sólo estudiantes que siguen curso universitarios para la formación de futuros docentes.

Cada uno de ellos fue invitado a introducir de forma oral, discursiva, el tema[8] sobre las mutuas relaciones entre perímetro y área de figuras planas simples, y probar a realizar transformaciones, verificando si los estudiantes:

- aceptan espontáneamente
- aceptan de buen grado después de un ejemplo
- aceptan con dificultad después de varios ejemplos
- rechazan sin discusión
- rechazan después de algún ejemplo

y que puedan ser válidas las nueve relaciones; es decir, que nada se pueda decir *a priori* de la relación entre "aumento (igualdad, disminución) del perímetro" y "aumento (igualdad, disminución) del área de las figuras planas". Cada colaborador tenía que hablar con los estudiantes y cumplir las siguientes fases:

- proponer el problema, escuchar la primera respuesta, registrarla según la escala anterior;
- proponer las nueve pruebas y ayudar al estudiante en su ejecución, escuchar y tomar nota de sus comentarios;
- llegar a una formulación explícita de la nueva convicción, en el caso de que ésta se presentara.

A nosotros nos interesaban dos aspectos que constituyen el Problema de Investigación Pr.2:

a) el *cambio de las convicciones*; es decir: si, después de algunos ejemplos, los estudiantes estaban dispuestos a cambiar de convicción, según las hipótesis del marco teórico presentado antes, y si sobre esto incide la edad; para lograr esto era indispensable llevar a los sujetos a que expresaran sus convicciones *antes* y *después* de los ejemplos; para alcanzar este objetivo, más que hacer un test, era esencial entrevistar a los sujetos en pequeños grupos (dos o tres personas por grupo) o individualmente. Sobre la metodología de investigación usada en este particu-

[8] Como introducción del tema se les sugirió recurrir al llamado "problema de Galileo" de las plazas de dos pueblos, que veremos dentro de poco.

lar punto, hicimos referencia en el apartado 2;

b) el lenguaje usado por los estudiantes para explicar su pensamiento, antes y después: ejemplos, discursos generales, frases, uso de diseños, de esquemas...

PREGUNTA de investigación Pg.2: ¿Con cuánta naturalidad y espontaneidad los estudiantes logran aceptar que no existen relaciones obligadas entre el perímetro y el área de las figuras planas? ¿Cómo varía esta aceptación con la edad? ¿Resulta fácil aceptar los nueve ejemplos? ¿Cómo expresan sus convicciones al respecto? ¿Qué tipo de lenguaje usan?

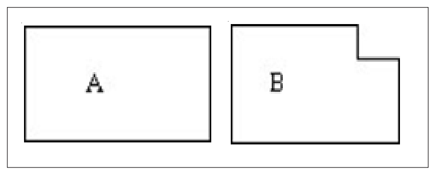
HIPÓTESIS de respuesta H.2: Considerábamos que los estudiantes, de cualquier edad, manifestarían una gran dificultad para aceptar aquello que parece ser anti-intuitivo; es decir: opinábamos que más de un estudiante estaría convencido, antes de la prueba, de que al aumento del perímetro le correspondería necesariamente un aumento del área, por ejemplo; y cuanto más anclado estuviera en una convicción intuitiva, mayor sería su esfuerzo para aceptar el resultado de la misma prueba.

Con base en nuestras experiencias de investigación, considerábamos que: conforme avanzara la edad, esta aceptación aumentaría netamente; que los sujetos encontrarían alguna dificultad para aceptar los ejemplos; que la expresión de sus convicciones sería poco académica, dado que éstas contrastan con las convicciones construidas escolásticamente; que el lenguaje usado sería básicamente coloquial, tal vez con el uso espontáneo de gráficos y de diseños esquemáticos.

PUNTO 3

PROBLEMA de investigación Pr.3: Invitamos a los colaboradores a realizar la siguiente prueba, a través de entrevistas individuales con nuevos estudiantes de los últimos años de escuela primaria (edad: 9 a 11 años), de escuela secundaria de primero y segundo grado (edad respectiva: 11 a 14 años y 14 a 19 años) que no habían participado en la prueba anterior.

Los colaboradores debían entregar a los estudiantes una tarjeta que contenía las dos figuras que se presentan a continuación:



(El hexágono B se obtuvo del rectángulo A, mediante la eliminación de un pequeño rectángulo de la parte superior derecha, lo que puede ser confirmado visualmente).

Ahora, a la mitad de los estudiantes se les debían proponer las siguientes dos preguntas:

pg.1: ¿La superficie de A es menor, igual o mayor de la superficie de B?

Y ¿el perímetro de A es menor, igual o mayor del perímetro de B?

A la otra mitad, se les debían proponer las siguientes dos preguntas:

pg.2: ¿El perímetro de A es menor, igual o mayor del perímetro de B?

Y ¿el área de A es menor, igual o mayor del área de B?

PREGUNTA de investigación Pg.3: ¿Puede el orden inverso de las preguntas en pg.1 y pg.2 modificar radicalmente las respuestas de los estudiantes? La pertinencia de esta pregunta es descrita en las líneas siguientes.

HIPÓTESIS de respuesta H.3: Nuestra hipótesis era que:

- en pg.1 los estudiantes habrían verificado fácilmente que el área de A es mayor que el área de B (dado que esto aparece gráficamente evidente) y habrían concluido, sin verificar, que el perímetro de A es mayor del perímetro de B; los colaboradores debían sólo verificar si esta tendencia existía en verdad;

- en pg.2 la primera pregunta sobre el perímetro haría que los estudiantes estuvieran en dificultad, lo que los llevaría a verificar con atención, pues la respuesta "no" es inmediatamente evidente; una vez verificado que el perímetro de A es igual al de B, sin embargo, no habrían tenido problema para decir que el área de A es mayor al área de B; los colaboradores debían llevar al estudiante a que verificara que los dos perímetros fueran iguales y lo expresara y, después de esto, tenían que estar atentos a la respuesta espontánea a propósito de las áreas.

Si las cosas hubieran sido así, habríamos contradicho la hipótesis de Azhari (1998) (idea que, parcialmente citada, fue hecha propia por Stavy & Tirosh, 2001) sobre la base de la evidencia de las figuras; no valdría entonces la supuesta "ley de conservación", sino que todo conduciría a un hecho ligado a misconcepciones y a evidencias perceptivas.

En total tuvimos 14 colaboradores:

7 docentes de la escuela primaria

2 docentes de la escuela secundaria de primer grado (en Italia: escuela media)

3 docentes de la escuela secundaria de segundo grado (en Italia: escuela superior)

2 docentes de la universidad (o equivalente).

Cada uno de ellos se sometía a sí mismo a la prueba y, en un segundo momento, a algunos colegas; en total, el número de docentes que se sometieron a la prueba fueron:

26 de la escuela primaria

16 de la escuela media

13 de la escuela superior

2 de la universidad,

para un total de 57 docentes.

Los estudiantes sometidos a la segunda prueba fueron:

29 de la escuela primaria (todos de 5º)

20 de la escuela media (6 de 1º y 14 de 3º)

21 de la escuela superior (8 del primer bienio de un Liceo Científico, 9 de 4º de Liceo Científico, 4 de un Instituto Profesional)

13 de la universidad o análogos (4 del curso de Licenciatura en Educación, 1 del tercer año del curso de Matemática, 8 de la Alta Escuela Pedagógica)

para un total de 83 estudiantes.

Los estudiantes sometidos a la tercera prueba fueron:

50 de la escuela primaria (todos de 5º)

26 de la escuela media (12 de 1º y 14 de 3º)

14 de la escuela superior (4 del primer bienio del Liceo Científico, 5 del Instituto Profesional, 5 de 3º, 4º o 5º del Liceo Científico)

17 de la universidad o análogos (4 del curso de Ciencias de la Educación, 12 de la Alta Escuela Pedagógica, 1 del tercer año del curso de Filosofía)

para un total de 107 estudiantes.

Conviene recordar que todas las pruebas ocurrieron en forma de entrevista individual, de tipo clínico, usando la pauta descrita en el apartado 3, en el punto 2. Por otra parte, la entrevista, especialmente en los casos en que el entrevistador era uno de los colaboradores, era de tipo *personal story*, dado que se buscaba tener elementos que revelaran cambios conscientes de las convicciones. En esta investigación hicimos un gran uso de las declaraciones que los docentes daban por escrito. Con varias denominaciones[9], esta técnica es usada con beneficio para la investigación en contexto internacional desde hace ya mucho tiempo; como prueba tenemos el trabajo pionero de Gudmundsdottir (1996), en el cual se usa la metáfora del *iceberg* para ilustrar como la punta emergente corresponde a cuanto viene declarado como respuesta (explícita) por parte de un docente, a una pregunta en el curso de una entrevista, mientras la mayor parte (implícita) es aquella escondida bajo el agua, la cual emerge sólo gracias a una narración personal.

Particularmente útil para nosotros es la investigación descrita en Edwards & Hensien (1999), dado que en ella se analiza un grupo de docentes (de escuela primaria y de escuela secundaria) implicados en una investigación-acción común, cuyo objetivo era discutir la acción didáctica en aula. Los docentes utilizaron la narración para expresar lo que sucedía y las sensaciones que experimentaron durante dicha acción.

En Gudmundsdottir & Flem (2000) se discute, siempre haciendo uso de estas técnicas “narrativas”, cómo ha cambiado la vida en el aula en las últimas décadas, cuáles son las sensaciones y los sentimientos de los docentes a este propósito; mientras en Gudmundsdottir (2001) se presenta la narración de una experiencia de enseñanza “abierta” en una escuela para niños entre los 5 y los 8 años.

En Strehele et al. (2001), la técnica es usada para estudiar la integración de las tecnologías en la práctica didáctica; mientras en Raths (2001) se analizan las convicciones acerca del docente y de la enseñanza, incluso con el propósito de la decisión de modificar las propias estrategias de enseñanza.

También en Presmeg (2002), la atención se centra en el uso de la autobiografía para hacer emerger las propias convicciones acerca de la matemática y de los cambios de éstas con el pasar del tiempo.

Conviene destacar el uso de investigación que se hace de los textos escritos por los sujetos analizados, docentes de escuela secundaria en formación, en Llinares & Sánchez García (2002), para determinar las

[9] Es necesario distinguir las intervenciones escritas espontáneas de los docentes, que trataremos aquí, de las intervenciones de los estudiantes sobre temas de matemática, los llamados TEPs, aquí no tomados en consideración; sobre este último argumento puede verse D’Amore & Maier (2003).

imágenes acerca de la matemática, de su enseñanza, de su aprendizaje y del significado que tienen las tareas escolares en este propósito.

Citamos, por último, el trabajo de D'Amore & Fandiño (2005), en el cual los sujetos analizados debían expresarse mediante una carta autobiográfica.

4. RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN, DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS Y RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

4.1. Respuestas de los docentes a la prueba sobre perímetro y área

4.1.1

Por lo que respecta al punto 1, problema de investigación Pr.1, hicimos una distinción entre las dos consignas:

- pedimos a todos los colaboradores someter a sí mismos a la prueba, y;
- después, a algunos de sus colegas de las escuelas primarias, media, superior, estudiantes universitarios de cursos (de especialización en Italia y de master en Suiza) para la formación de maestros de escuela secundaria (inferior o superior).

En los dos casos, las preguntas de investigación Pg.1 eran las siguientes: ¿Es verdad o no es verdad que se pueden encontrar ejemplos para todos los 9 casos? ¿Es verdad o no es verdad que surge espontáneamente la idea de que, en general, al aumentar el perímetro de una figura plana, aumenta el área? ¿Es verdad o no es verdad que se necesita hacer un esfuerzo para *convencerse* que las cosas no son así?; mientras que nuestras hipótesis de respuestas H.1 eran: Consideramos que algunos docentes (incluidos algunos colaboradores) tendrían misconcepciones a propósito de supuestas relaciones necesarias entre perímetro y área de las figuras planas. Que no fuera tan fácil encontrar los 9 ejemplos solicitados [especialmente en el caso (p<, S>) en el cual el perímetro debe disminuir y el área aumentar]. Que, incluso después de ver los ejemplos, se presentaría alguna resistencia.

En este apartado, **4.1.1**, examinaremos el caso en el cual los sujetos sometidos a la (auto) prueba eran los mismos colaboradores de la investigación, y dejamos para un segundo momento, en el apartado **4.1.2**, el caso de los sujetos sometidos a la prueba eran colegas de los colaboradores de la investigación o estudiantes universitarios de los cursos anteriormente indicados.

De los 14 colaboradores de la investigación tuvimos reacciones similares en lo que concierne con la modalidad de respuesta:

- 1 sujeto (docente universitario) se limita a cumplir un análisis exclusivamente matemático de la situación, obviamente correcta, sin responder a la pregunta personal sobre sus propias dificultades;
- 13 escriben textos de respuesta que van de 1 a las 6 páginas, en ocasiones ricas en referencias a sus propias dificultades:
    - º 9 colaboradores (7 docentes de primaria, 1 de superior, 1 de universidad) confiesan su dificultad en el momento de tener que dar forma a la propia idea, incluso si ésta es correcta y consciente; admiten también que tuvieron que hacer un

gran esfuerzo para imaginar todas las nueve situaciones;

- 4 colaboradores (2 docentes de escuela media, 2 de superior) declaran no haber tenido ningún problema en encontrar rápidamente las respuestas y expresan su pleno conocimiento de que las cosas deban ser así.

[4 colaboradores (2 de primaria, 2 de media) hacen una amplia referencia a sus alumnos, sin lograr responder en primera persona como sujetos, se ve una tendencia a interpretar nuestras preguntas como una invitación implícita a pensar en la situación de aula].

El caso considerado como el de mayor complejidad casi por unanimidad es precisamente (p<, S>), como lo habíamos supuesto, junto con su análogo (p>, S<).

Nuestras hipótesis H.1 son, por tanto, ampliamente confirmadas: incluso en personas de alto nivel cultural, como es el caso de nuestros colaboradores, existen, por lo menos en una primera instancia, misconcepciones arraigadas a propósito de supuestas relaciones necesarias entre perímetro y área de las figuras planas. Como indicadores de tales misconcepciones, decidimos enunciarlas recurriendo a sus mismas admisiones explícitas o a la prueba evidente de sus dificultades. Para muchos, no fue fácil encontrar los nueve ejemplos pedidos [especialmente en los casos (p<, S>) y (un poco menos) (p>, S<)], por admisión explícita. Uno de nuestros colaboradores declara abiertamente por escrito: "(...) Tuve mayor dificultad en encontrar figuras para los casos donde el perímetro debe disminuir y el área debe permanecer invariable o aumentar", frase que tomamos como modelo para muchas otras del mismo tipo.

Se ve claramente cómo la (auto) declaración de dificultad se concentran entre los docentes de los primeros niveles escolares, tal vez a causa de una menor preparación técnica (denunciada por más de uno; muchos docentes colaboradores de la escuela primaria confiesan haber aprendido a tratar críticamente estos argumentos dentro de los cursos organizados por el RSDDM de la Universidad de Bologna).

La elección de las figuras para los nueve casos se concentró, por lo menos al inicio, alrededor de los polígonos convexos y en particular en rectángulos[10].

4.1.2

Los 43 docentes entrevistados (19 de escuela primaria, 8 de escuela media, 10 de escuela superior, 6 en formación de postgrado como docentes de escuela secundaria inferior) tuvieron comportamientos muy diferentes, pero también muchas reacciones en común; los protocolos de las entrevistas están a disposición, aquí resaltamos lo esencial. Reportaremos entre comillas las frases que confirman nuestras afirmaciones o que nos parecen más representativas.

[10] Una nota, sólo como curiosidad extra-investigativa. Uno de los colaboradores declara haber puesto a la prueba algunos de sus propios familiares:

- quienes desarrollan actividades de construcción, cotidianamente enfrentados a situaciones concretas en las cuales los casos (p>, S<) y (p<, S>) son frecuentes, no tuvieron ningún problema no sólo en responder correctamente, sino también en proporcionar ejemplos;
- otros, empleados en actividades más de rutina, se inclinaron por respuestas clásicas: existen sólo los casos (p>, S>), (p<, S<), (p=, S=); los otros casos fueron considerados imposibles; por ejemplo, no fue posible encontrar ejemplos para el caso (p<, S>).

Una reacción muy frecuente, en todos los niveles escolares, es la diferencia manifestada intuitivamente entre el primer contacto con el problema, respecto al cambio (a veces fuerte) entre la primera respuesta intuitiva y la convicción adquirida al término de la prueba.

Como lo habíamos dicho al inicio, las entrevistas empiezan con el llamado “problema de Galileo”: “Un pueblo tiene dos plazas A y B; el perímetro de la plaza A es mayor del perímetro de la plaza B; ¿cuál de las dos plazas tiene el área mayor?”[11]

Muchos de los entrevistados, la mayor parte, 40 de 43, incluso licenciados, docentes de la escuela superior, afirmaron que la plaza con la mayor área era la A, de mayor perímetro, para después:

- Corregirse espontáneamente, afirmando “no está dicho”, aún antes de efectuar todas las pruebas previstas en la entrevista (y aquí se nota una mayor concentración de docentes de la escuela superior).

o bien

- Aceptar que su respuesta fuese criticable e incorrecta, pero sólo después de haber realizado las pruebas (y aquí se nota una mayor concentración de docentes de los primeros niveles escolares).

Por tanto, el *cambio de convicción* es evidente, a veces fuerte, y, en varias ocasiones, requiere pruebas y reflexiones no banales.

A las preguntas:

“¿Es verdad o no es verdad que se pueden encontrar ejemplos para cada uno de los nueve casos? ¿Es verdad o no es verdad que surge espontáneamente la idea, en general, de que al aumentar el perímetro de una figura plana, aumenta también el área? ¿Es verdad o no es verdad que se necesita hacer un esfuerzo, para convencerse que las cosas no son así?”, muchos docentes, y no necesariamente de la escuela primaria, inician dando la respuesta “no”, a la primera pregunta, lo que revela que las misconcepciones arraigadas a propósito de supuestas relaciones necesarias entre el área y el perímetro de las figuras planas están presentes no sólo en *algunos* docentes, como lo pensábamos, sino en la mayoría de ellos.

Para muchos entrevistados no fue para nada banal encontrar los nueve ejemplos pedidos [especialmente en el caso (p<, S>) o viceversa]. Encontramos en repetidas ocasiones casos de docentes (incluso de la escuela superior y de la escuela media) que tuvieron que recurrir a los (o a algunos de los) ejemplos dados por el entrevistador. Muchos notaron las simetrías en las solicitudes; y alguno manifestó un gran malestar en el caso (p=, S=) porque no quería aplicar simplemente una isometría o dejar las figuras idénticas.

Lo que se evidenció, sin embargo, fue que, después de haber visto los ejemplos creados por el entrevistado mismo o propuestos por el entrevistador, desapareció del todo (o casi) la persistencia en las misconcepciones ligadas a la intuición; y se llegó a frases llenas de conciencia como la siguiente:

“Por lo tanto, dos figuras equi-extensas no son automáticamente iso-perimétricas” [este perfecto enunciado está hecho con evidente sorpresa por una docente de escuela primaria quien declara haber lucha-

[11] Sobre la historia exacta de este problema, así como Galileo lo presenta realmente, se puede ver: D’Amore & Fandiño (2006).

do por mucho tiempo consigo misma para encontrar los nueve ejemplos, bloqueada por sus propias convicciones sobre el argumento (una misconcepción arraigada de la cual antes no se había dado cuenta) de que al aumentar el perímetro fuese necesario que aumentase también el área].

Es muy claro que las misconcepciones reveladas se deben a que casi todos los modelos figurales que ilustran estas cuestiones son realizados con figuras planas convexas por demás usuales, lo que lleva a creer que se puede afrontar el problema sólo con dichas figuras. Es más, esta consideración fue confirmada por más de uno de los mismos entrevistados: "Es posible partiendo de un cuadrado; no es posible partiendo de un círculo" (en otras palabras, el cuadrado es considerado figura admisible para transformaciones como las que nos propusieron, el círculo no); a la propuesta de una figura cóncava: "Pero ésta no es una figura geométrica" [quiere decir: no de aquellas usadas comúnmente en la práctica didáctica cuando se habla de perímetro y de área]; otros consideran posibles sólo homotecias, por lo que: "... pero con los cuadrados es imposible" dado que el homotético de un cuadrado es un cuadrado.

El reenvío que los docentes entrevistados hacen a sus alumnos es recurrente; muchas de las preguntas y de las respuestas se dan "filtradas" a través de la experiencia con o de sus propios alumnos: "Ellos tampoco lo ven" [lo que yo no he visto]; "…tienen dificultad para imaginarlo"; "Es necesario cambiar constantemente las figuras" [es decir pasar de figuras estándar a otras no tradicionales, por ejemplo cóncavas; en realidad, no sería siempre necesario, pero los ejemplos dados por los entrevistadores (véase Apéndice) son considerados a menudo como los únicos posibles.

Algunos docentes de las escuelas secundarias (inferior y superior) consideran este tipo de argumento más cercano al mundo de la escuela primaria, "porque allí se trabaja con las figuras, más en lo concreto, menos en lo abstracto", como justificando su propio error (y el error potencial de sus propios alumnos) en la prueba. Naturalmente, en esto hay mucha verdad; en la escuela primaria, generalmente, se transforman en modelos radicados los que sólo deberían ser imágenes parciales, y, en muchas ocasiones, no existe ni siquiera la conciencia del problema.

Veremos en los próximos apartados, **4.2.1** y **4.2.2**, el curso de la investigación con los estudiantes. Adelantamos aquí la hipótesis, que analizaremos críticamente en **5.**, de que el obstáculo que parece evidente respecto a la construcción de un conocimiento matemáticamente satisfactorio sobre las relaciones entre "perímetro y área" no es sólo de naturaleza epistemológica sino *básicamente* de naturaleza didáctica.

La naturaleza epistemológica del obstáculo es evidente y tiene múltiples aspectos:

A. No es fortuito que las historietas y leyendas que ligan área y perímetro sean antiquísimas y se repitan en el tiempo, incluso a distancia de siglos (basta pensar en el mito sobre la fundación de Cartagine por parte de Didone y a la célebre adivinanza de Galileo). Ésta es una señal, no más que una señal, por supuesto, de obstáculo epistemológico; por otra parte: cuando una idea matemática no entra inmediatamente a formar parte de esta disciplina y, por el contrario, es causa de discusiones, contestaciones, luchas; generalmente puede considerarse un obstáculo epistemológico en el sentido de Brousseau (1976, 1986, 1989).

B. Para llevar acabo este análisis se deben operar transformaciones geométricas sobre las figuras, pero sólo a finales del siglo XIX estas transformaciones, su potencia, su necesidad, se revelaron completamente a los ojos de los matemáticos; por milenios dominó la rigidez de los *Elementos* de Euclides; incluso este retardo en la introducción-aceptación es una obvia señal de obstáculo epistemológico.

Por otra parte, con estos evidentes obstáculos epistemológicos se mezclan también obstáculos didácticos; si se necesitaron oportunas y profundas entrevistas, para cambiar las convicciones de los mismos docentes, ¿cómo no pensar que las elecciones didácticas por ellos utilizadas en aula con sus propios alumnos no influyen en la formación de misconcepciones relativas a este estratégico tema?

4.2. Respuestas de los estudiantes a la prueba sobre área y perímetro

4.2.1

Recordemos que en el punto 2, como problema de investigación Pr.2, pedimos a todos los colaboradores entrevistar estudiantes de la escuela primaria, media, superior y estudiantes universitarios de las diferentes facultades. Cada colaborador tenía que hablar con los estudiantes y proponer en primer lugar el problema "de Galileo", escuchar su respuesta y registrarla según la escala presentada; en segundo lugar, el colaborador propondría las nueve pruebas y ayudaría al estudiante en su ejecución, escuchando sus comentarios; y por último, se debería llegar a una formulación explícita de su nueva convicción, en el caso que ésta se hubiera presentado.

Cada uno de los colaboradores era invitado a probar transformaciones, verificando si los estudiantes:

- aceptan espontáneamente
- aceptan de buen grado después de un ejemplo
- aceptan con dificultad después de varios ejemplos
- rechazan sin discusión
- rechazan incluso después de ejemplos

y que pueden ser válidas las nueve relaciones, que nada se puede decir *a priori* de la relación entre "aumento (igualdad, disminución) del perímetro" y "aumento (igualdad, disminución) del área de figuras planas".

A nosotros nos interesaban dos aspectos:

a) *el cambio de las convicciones*; es decir, si después de algunos ejemplos, los estudiantes estaban dispuestos a cambiar de idea y si sobre esto incide la edad; para saber esto era esencial llevar a los sujetos a que expresaran sus convicciones *antes* y *después* de los ejemplos; para alcanzar este objetivo, más que hacer un test, era esencial entrevistar a los sujetos individualmente según la metodología explicada antes;

b) el lenguaje usado por los estudiantes para explicar su pensamiento, antes y después: ejemplos, discursos generales, frases, uso de diseños, de esquemas ...

Con este objetivo, las preguntas de investigación Pg.2 eran las siguientes: ¿Con cuánta naturalidad y espontaneidad los estudiantes logran aceptar que no existen relaciones *a priori* obligadas entre perímetro y área de las figuras planas? ¿Cómo cambia esta aceptación con la edad? ¿Resulta fácil aceptar los nueve ejemplos? ¿Cómo expresan sus convicciones a este propósito? ¿Qué tipo de lenguaje usan?

Como hipótesis preliminares, considerábamos que los estudiantes de cualquier edad muestran una gran dificultad en aceptar lo que parece anti-intuitivo. Que con la edad, esta aceptación aumenta netamente. Que los sujetos encuentran alguna dificultad en aceptar los ejemplos. Que habrían expresado sus convicciones en modo poco formal, dado que éstas interaccionan con las convicciones construidas en la escuela. Que el lenguaje usado sería lo más cercano posible a la forma coloquial, tal vez con el uso espontáneo de gráficos o de diseños esquemáticos.

El resultado de mayor impacto de toda la investigación es que los casos de mayor complejidad (p>, S<; viceversa; p>, S=; viceversa) no son aceptados espontáneamente en mayor medida con el aumento de la edad (o con el mayor nivel de escolaridad).

Más de 90% de los estudiantes entrevistados, sin que importe su grado escolar, tiende espontáneamente a afirmar que existe una dependencia estrecha entre el aumento o disminución del perímetro y el aumento o disminución del área; frente a la tarea de dar ejemplos, las dificultades se centraron básicamente en los casos enunciados anteriormente; sólo pocos afrontaron con éxito la tarea, y el resultado positivo no está relacionado con la edad (por tanto ni con el grado de escolaridad); entre los estudiantes universitarios se tienen algunos de los más notorios resultados negativos.

Una vez que el entrevistador hace notar que es posible encontrar ejemplos para los nueve casos, se tienen las siguientes reacciones:

- Más de la mitad de los estudiantes[12] se sorprende cuando ve que se hace uso de figuras cóncavas; alguno declara que “Éstas no son figuras geométricas”, que “No son correctas”, que “En la escuela no se usan”; esta actitud no se relaciona en forma significativa con la edad y, por lo tanto, tampoco con el grado de escolaridad ni con el tipo de escuela frecuentada.

- Más de la mitad de los estudiantes[13] entiende el sentido de la propuesta y admite haber inmediatamente cambiado de convicción; también este tipo de actitud es ligeramente superior en los niveles altos de escolaridad.

- En los casos en los que no se alcanza un resultado positivo, el estudiante, generalmente, se atrinchera detrás de justificaciones debidas a la falta de desarrollo de este argumento por parte de los docentes; este hecho se presenta con mayor frecuencia en la escuela media; numerosos estudiantes de la escuela superior demuestran haber entendido el sentido de la investigación y revelan interés y motivación en dar la

[12] Lo aquí reportado no quiere ser una apreciación cuantitativa, pues estamos en pleno campo cualitativo (como se lo demuestra que se citan frases de los entrevistados); nuestra intención es sólo dar una idea de la dimensión del fenómeno.

[13] Ídem.

respuesta; algunos reconocen su dificultad al hacer oportunas transformaciones sobre las figuras.

• Es interesante observar cómo algunos estudiantes de la escuela superior se hacen cargo personal del problema, sin descargar la responsabilidad de su fracaso en sus docentes de los niveles precedentes (al contrario, tuvimos docentes licenciados que se hicieron responsables de su fracaso y dificultad a los estudios universitarios, en los cuales, acusaban, este tipo de argumento es ignorado; o a los libros de texto, por las mismas razones).

En diversos casos, quien declara un cambio de convicciones lo hace con sorpresa, como si esto destruyera una concepción dada por adquirida.

De los 13 estudiantes universitarios entrevistados, uno de los cuales es estudiante de Matemática, menos de la mitad declaran espontáneamente que los nueve casos son todos posibles, independientemente de poderlos encontrar; de los otros, aquellos que tienen necesidad de hacer pruebas, sólo la mitad declara al final en forma convincente haber cambiado de convicción; de ellos, algunos lo hacen de manera explícita.

Muchos son los que sostienen que el malentendido de pensar que el aumento del perímetro implique un aumento del área deriva de una didáctica incorrecta, y se comprometen a estar atentos cuando tengan que afrontar su futura profesión; es más, iniciarán ahora mismo en la actividad de práctica docente.

No siempre la aceptación es fácil: “Para mí es difícil aceptarlo, estaba convencido de que dependían, es una gran sorpresa que debo digerir, pero es difícil”.

En cuanto al lenguaje, es frecuente el recurso al lenguaje cotidiano, además existen confusiones terminológicas (por ejemplo, no obstante se hable explícitamente del perímetro y del área, muchos estudiantes, de la escuela primaria a la escuela superior, dicen “perímetro” cuando se están refiriendo al “área” y viceversa), además de otras expresiones inadecuadas desde el punto de vista del léxico.

Se nota que el recurso a un lenguaje coloquial de bajo perfil formal o por lo menos cultural en el ámbito matemático no se limita sólo a los primeros grados de escolaridad. Es más, son generalmente los estudiantes universitarios quienes mayormente nos sorprenden con adjetivos y locuciones que no están en consonancia con la geometría oficial: “Si una [figura] la haces delgadita...”, “Si hago una ‘cosa’ con ‘muchas puntas’, el perímetro ...” etc.[14]

Muchos de los entrevistados intentan recurrir a diseños explicativos que ilustren, confirmen o desmientan su propio pensamiento; sin embargo el resultado es decepcionante: son pocos los estudiantes, sin distinción del grado escolar, que saben usar el diseño para validar o negar sus propias afirmaciones: lo intentan, pero no dominan este lenguaje gráfico específico.

Es notable cómo alumnos de 5º de primaria de diversas zonas italianas que responden correcta y espontáneamente a la primera pregunta (es decir, ¿Teniendo un rectángulo y un cuadrado de igual perí-

[14] Esta actitud lingüística de los estudiantes universitarios nos sorprendió, por lo cual tendremos que retomar la investigación de una forma más específica. Por ahora este aspecto no será analizado con detalle.

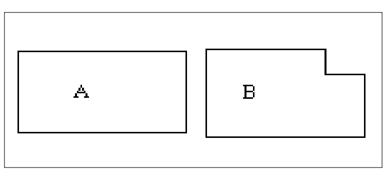
metro, necesariamente tienen igual área?), dan un argumento no válido: porque el cuadrado es “más amplio”, “tiene mayor espacio dentro”, “es más ancho”...

Resulta obvio que entre cuadriláteros iso-perimétricos, el cuadrado es el de mayor superficie; esto se imagina, se ve, se intuye desde un punto de vista gráfico, mayormente en la escuela primaria que en los años sucesivos. Naturalmente, no faltan los casos de estudiantes de la escuela superior que demuestran competencia en estos argumentos; por ejemplo, tuvimos casos de estudiantes que conocían y dominaban las relaciones entre superficie de figuras iso-perimétricas.

4.2.2

Llegados al punto 3 de la investigación, invitamos a los colaboradores a someter diversos estudiantes, que no se habían sometido a la prueba precedente, a la siguiente, mediante entrevistas individuales.

Los colaboradores debían entregar a los alumnos una tarjeta que contenía las siguientes dos figuras:



(El hexágono B se obtuvo del rectángulo A, mediante la eliminación de un pequeño rectángulo de la parte superior derecha, lo que es evidente a simple vista).

Ahora, a la mitad de los estudiantes se les proponían las dos preguntas siguientes:

pg.1: ¿La superficie de A es menor, igual o mayor de la superficie de B? y

¿El perímetro de A es menor, igual o mayor del perímetro de B?

A la otra mitad, se les proponían las siguientes dos preguntas:

pg.2: ¿El perímetro de A es menor, igual o mayor del perímetro de B? y

¿El área de A es menor, igual o mayor del área de B?

Teníamos una única pregunta de investigación Pr.3: ¿Puede el orden inverso de las preguntas en pg.1 y pg.2 modificar radicalmente las respuestas de los estudiantes?

Nuestra hipótesis H3 era que:

- En pg.1, los estudiantes habrían verificado fácilmente que el área de A es mayor que el área de B (dado que esto es gráficamente evidente) y habrían concluido, sin verificar, que el perímetro de A es mayor que el perímetro de B; los colaboradores sólo debían corroborar si esta tendencia existía en verdad.

- En pg.2, la primera pregunta sobre el perímetro haría que los estudiantes encontraran dificultad, lo que los llevaría a verificar con atención, pues lo que se pregunta no es inmediatamente evidente; una vez verificado que el perímetro de A es igual al de B, sin embargo, no habrían tenido problema para decir que el área de A es mayor que el área de B. Los colaboradores debían llevar a los estudiantes a que verificaran que los dos perímetros eran iguales y lo expresaran. Luego, los colaboradores debían estar atentos a la respuesta espontánea a propósito de las áreas.

Si las cosas hubieran sido así, habríamos contradicho la hipótesis de Azhari (1998) (hecha propia por Stavy & Tirosh, 2001) sobre la base de la evidencia de las figuras; no valdría entonces la supuesta “ley de conservación”, sino que todo se conduciría a un hecho ligado a misconcepciones y evidencias perceptivas.

Los resultados de las pruebas demuestran en forma absolutamente irrefutable nuestra hipótesis; el orden de las preguntas es fundamental para las respuestas, pero, en este caso, la edad (y por tanto el grado de escolaridad) inciden en forma estadísticamente relevante.

La respuesta correcta a la primera parte de la pregunta pg.1 (superficie de A > superficie de B) fue dada de forma espontánea e inmediata en todos los entrevistados; de éstos, entre 90 y 91% concluyó erróneamente sin reflexionar que entonces también perímetro de A > perímetro de B.

La respuesta correcta a la primera parte de la pregunta pg.2 (perímetro de A = perímetro de B) fue dada espontáneamente sin necesidad de reflexión en muy pocos casos, incluso en altos niveles de escolaridad; una vez que los colaboradores inducían a reflexionar sobre esta respuesta, muchos de los entrevistados, alrededor de 85%, reconocían la igualdad de los perímetros.

Las respuestas erradas en el caso de la segunda parte de pg.2, por tanto, no están ligadas a la supuesta “ley de conservación”, sino a misconcepciones ligadas a los aspectos que emergen en el apartado precedente y a la evidencia perceptiva que, en el caso del área, es inmediata, mientras que en el caso del perímetro no lo es.

La hipótesis de Azhari viene aquí negada.

Los problemas que se encuentran son de diversos tipos y sólo en parte esperados:

- Algunos estudiantes confunden en su terminología área y perímetro; lo que implica la no aceptación de las declaraciones del entrevistado por parte del investigador.

- Dificultad para confrontar las dos figuras A y B, porque una de las dos es una figura “insólita”, no incluida entre de las que tradicionalmente la escuela presenta y a las que dedica fórmulas.

- Cuando un estudiante, especialmente de los primeros años de escolaridad, intenta medir los perímetros, no siempre sabe cómo hacerlo; es notable que, para responder a las preguntas, no era necesario hacer ningún tipo de medición; se intentaba realizar mediciones en los casos en los que el sujeto las consideraba necesarias (lo que sucede en más casos de los previstos, y no sólo en la escuela primaria o media; varios estudiantes de la escuela superior hicieron uso de cuadriláteros especificando siempre las medidas de los lados y calculando el área y el perímetro).

5. CONCLUSIONES Y NOTAS DIDÁCTICAS

Visto el desarrollo de la investigación con los estudiantes, es del todo evidente que el obstáculo que se opone a la construcción de un conocimiento satisfactorio sobre las relaciones entre “perímetro y área” no es sólo de naturaleza epistemológica, como se afirma en muchos trabajos precedentes sobre este campo de investigación, sino que es básicamente de naturaleza didáctica.

Este obstáculo reside en las elecciones didácticas:

- Se usan siempre y sólo figuras convexas, lo que provoca la idea errónea de que las figuras cóncavas *no pueden* ser usadas o no son convenientes.

- Se usan siempre figuras estándar provocando la misconcepción que viene enunciada generalmente con la frase: "Pero ésta no es figura geométrica".

- Casi nunca se ponen explícitamente en relación área y perímetro de la misma figura geométrica; por el contrario, a veces se insiste en que el perímetro se mide en metros (m) mientras que el área en metros cuadrados (m^2), y se insiste en las diferencias y no en las relaciones reciprocas.

- Casi nunca se hacen transformaciones sobre las figuras de forma que se conserven o se modifiquen área o perímetro, lo que crea una misconcepción en cuanto al significado que tiene el término "transformación"; de hecho, muchos estudiantes entienden espontáneamente por "transformación" un cambio que sólo implica una reducción o una ampliación de la figura (una homotecia o una similitud); en el caso (p=, S=) como consecuencia, muchos estudiantes rechazaron la identidad o una isometría como una "transformación".

La confirmación de lo anteriormente enunciado se tiene en la investigación hecha con los docentes; se verifica el caso de docentes, no sólo de escuela primaria, que tienen reacciones del todo análogas a las de los alumnos, es decir de sorpresa, frente a un necesario cambio de convicciones. Un docente afirma: "Pero si nunca ninguno nos enseña estas cosas, ¿cómo podemos saberlas?"; esta frase nos parece la reafirmación de que casi todo se puede resumir en obstáculos didácticos.

Las elecciones de los docentes no ocurren dentro de una correcta transposición didáctica que les permita transformar un "saber" (que para algunos de ellos no existe) en un "saber de enseñar", en modo culto y consciente (por lo general, lamentablemente, no existe ni siquiera la conciencia de la existencia y de la diferencia entre "saber" y "saber de enseñar")[15]. De hecho, al menos en el campo explorado por nosotros, se observa un escenario de cuestiones acríticas, aburridas, que siguen un guión preestablecido consagrado por los libros de texto. La expresión de estos hechos se encuentra en los siguientes aspectos: cuando el docente cambia de convicción, lo hace

- Insistiendo en que este argumento debe entrar explícitamente en la didáctica, y

- Prometiendo espontáneamente a sí mismo, en ocasiones, incluirlo en la propia futura acción didáctica de enseñanza-aprendizaje.

[15] Entendemos aquí la "transposición didáctica" en sentido clásico como la transformación del saber (*savoir savant*) en un saber de enseñar (Chevallard, 1985); tendremos que profundizar más sobre este tema, pues falta en muchos docentes una competencia sobre este tipo de temas; esta carencia no les permite transformar realmente el saber en un saber de enseñar, no les queda otro camino sino el de hacer referencia a un saber personal que coincide con el saber institucional esperado por las normas curriculares o por la tradición. Esta nota final, que no tiene vínculos con lo precedente, tiene como único objetivo delinear otros posibles escenarios de investigación.

Estas últimas consideraciones nos permiten insertar el resultado final de nuestra investigación acerca del cambio de convicciones de los docentes en un importante contexto internacional. Es verdad que las convicciones pueden tener efectos deletéreos sobre la acción didáctica, pero puede ocurrir también lo contrario, como lo demuestra nuestro caso; podemos encontrar apoyo en la siguiente afirmación: “Las convicciones pueden ser un obstáculo pero también una potente fuerza que permite efectuar cambios en la enseñanza” (Tirosh & Graeber, 2003).

BIBLIOGRAFÍA

Azhari, N. (1998). *Using the intuitive rule «Same of A, same of B» in conservation tasks.* Manuscrito no publicado, cit. en Stavy y Tirosh (2001).

Battro, A. M. (1983). *Il pensiero di Jean Piaget.* Bologna, Italia: Pitagora. [Ed. original en español: 1969, Buenos Aires: Emecé].

Beswick, K. (2004). The impact of teachers’ perceptions of student characteristics on the enactemnent of their beliefs. En: Høines MJ., Fuglestad AB. (eds.) *Proceedings of the 28th PME International Conference.* 2, 111-118.

Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. En: Wanhamme W. & Wanhamme J. (eds.) [Se publicó nuevamente en *Recherches en didactique des mathématiques 4*(2), 1983, 165-198].

Brousseau, G. (1986). Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques 7*(2), 33-115.

Brousseau, G. (1989). Obstacles épistémologiques, conflicts socio-cognitifs et ingéniérie didactique. En: Bodnarz N. & Garnier C. (eds.) *Les obstacles épistémologiques et le conflit socio-cognitif. Construction des savoirs (obstacles et conflits)*. Colloque internationale CIRADE, Université de Québec, Canadá.

Chamorro, M. C. (1997). *Estudio de las situaciones de enseñanza de la medida en la escuela elemental.* Tesis de doctorado. UNED.

Chamorro, M. C. (2001). Le difficoltà nell’insegnamento-apprendimento delle grandezze nella scuola di base. *La matematica e la sua didattica 9*(4), 332-351.

Chamorro, M. C. (2002). Le difficoltà nell’insegnamento-apprendimento delle grandezze nella scuola di base. *La matematica e la sua didattica 10*(1), 58-77.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

D'Amore, B. & Fandiño, M. I. (2005). Cambios de convicciones en futuros profesores de matemática de la escuela secundaria superior. *Espilion 58*, 20(1), 25-43.

D'Amore, B. & Fandiño, M. I. (2006). *Area e perimetro. Aspetti concettuali e didattici*. Trento, Italia: Erickson.

D'Amore, B. & Maier, H. (2003). Producciones escritas de los estudiantes sobre argumentos de matemáticas. *Espsilon*. 18(2), 53, 243-262.

Edwards, T. G. & Hensien S. M. (1999). Changing instructional practice through action research. *Journal of Mathematics Teacher Education*. 2(2), 187-206.

Fennema, E. & Franke, M. L. (1992). Teachers' Knowledge and its Impact. En: D. Grows (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* (pp. 147-164). New York: Macmillan Publishing Company.

Fischbein, E. (1985). Intuizione pensiero analitico nell'educazione matematica. En: Artusi Chini, L (Ed.). *Numeri e operazioni nella scuola di base* (pp. 8-19). Bologna, Italia: Zanichelli.

Gentner, D. (1983). Structure mapping: a theoretical framework. *Cognitive Science* 7, 156-166.

Giovannoni, L. (1996). Misure di estensione superficiale nella scuola dell'infanzia. *La matematica e la sua didattica 4*, 394-423.

Gudmundsdottir, S. (1996). The Teller, the Tale, and the One Being Told: The Narrative Nature of the Research Interview. *Curriculum Inquiry 26*(3), 293-300.

Gudmundsdottir, S. (2001). Narrative research on school practice. En: V. Richardson (Ed.) (2001). *Fourth Handbook for Research on Teaching.* New York: Macmillan. 226-240.

Gudmundsdottir, S. & Flem, A. (2000). Voices of teachers in school reform. Keynote paper at a workshop on *"Teachers' lives, narrative research, and school change"*. Haifa University, Israel, 18 de mayo de 2000. Obtenido en: http://www.sv.ntnu.no/ped/sigrun/publikasjoner/voices.htm (23/05/05).

Hoyles, C. (1992). Mathematics teaching and mathematics teachers: a meta-case study. *For the learning of mathematics 12*(3), 32-44.

Iacomella, A. & Marchini, C. (1990). Riflessioni sul problema della misura. *Periodico di matematiche*. 66, VI, 4, 28-52.

Jaquet, F. (2000). Il conflitto area-perimetro I. *L'educazione matematica 2*(2), 66-77.

Jaquet, F. (2000). Il conflitto area-perimetro II. *L'educazione matematica 2*(3), 126-143.

Krainer, K., Goffree, F. & Berger, P. (Eds.) (1999). *On Research in Mathematics Teacher Education.* Osnabrück, Alemania: Forschunginstitut für Mathematik Didaktik. Obtenido en: http://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/cerme1-proceedings.html.

Llinares, S. & Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. En: A. Gutierrez, P. Boero (Eds.) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 429-459). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers B.V. En prensa.

Llinares, S. & Sánchez García, V. (2002). Imágenes sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje en estudiantes para profesores de secundaria y tareas matemáticas escolares. *Revista de Educación 3*, 443-461.

Marchini, C. (1999). Il problema dell'area. *L'educazione matematica 1*(1), 27-48.

Medici, D. (1999). Un problema e la sua analisi: frazione di terreno. En: L. Grugnetti & F. Jaquet (Eds.). *Il Rally matematico transalpino. Quali apporti per la didattica? Actas de las jornadas de estudio sobre el Rally Matemático Trasalpino. Brigue, 1997-1998*. Parma – Neuchâtel: Departamento de Matemática de la Universidad de Parma – IRDP de Neuchâtel.

Medici, D., Marchetti, P., Vighi, P. & Zaccomer, E. (2005). Comparing perimeters and areas childrens' pre-conceptions and spontaneous procedures. Texto presentado al *Cerme 4*: Obtenido en: http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/7/wg7listofpapers.htm

Montis, A. M., Mallocci, P. & Polo, M. (2003). Congettura e argomentazione nella costruzione dei concetti di equiestensione e isoperimetria: un percorso didattico dalla prima alla quinta elementare. *L'educazione matematica 3*, 1-12.

Moreira, P. & Comiti, C. (1993). Difficultés rencontrées par des élèves de cinquième en ce qui concerne la dissociation aire/périmètre pour des rectangles. *Petit x 34,* 43-68.

Moreira, P. (1996). À propos de l'apprentissage du concept d'aire. *Petit x 43*, 43-68.

Outhred, L. & Mitchelmore, M. (1992). Representation of area: a pictorial perspective. *XVI PME*. 2, 194-201.

Pehkonen, E. & Törner, G. (1996). Introduction to the theme: Mathematical beliefs. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik.* 28, 99-100.

Piaget, J. (1926). *La rappresentazione del mondo nel fanciullo.* Torino: Boringhieri, 1966. [Ed. original en francés: 1926, Paris: Alcan].

Piaget, J. (1937). *La costruzione del reale nel bambino.* Firenze: La Nuova Italia, 1973. [Ed. original en francés: 1937, Neuchâtel: Delachaux & Niestlé].

Piaget, J. & Inhelder, B. (1962). *Lo sviluppo delle quantità fisiche nel bambino.* Firenze: La Nuova Italia, 1971. [Ed. original en francés: 1962, Paris - Neuchâtel: Delachaux & Niestlé].

Piaget, J., Inhelder, B. & Szeminska, A. (1948). *La geometria spontanea del bambino*. Firenze: Giunti Barbèra, 1976. [Ed. original en francés: 1948, Paris: PUF].

Presmeg, N. (2002). Beliefs about the nature of mathematics in the bridging of everyday and school mathematical practices. En: G. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Eds.) (2002). *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 293-312). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Raths, J. (2001). Teachers´ Beliefs and Teaching Beliefs. *Early Childhood Research & Practice. 3*, 1. Obtenido en: http://ecrp.uiuc.edu/v3n1/raths.html(05/03/05)

Resnick, L. B. & Ford, W. W. (1981). *Psicologia della matematica e apprendimento scolastico*. Torino: Sei. [Ed. original en inglés: 1981, Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates].

Rogalski, J. (1979). Quantités physiques et structures numériques. Mesures et quantifcation: les cardinaux finis, les longeurs, surfaces et volumes. *Bulletin de l'APMEP*. 320, 563-586.

Rouche, N. (1992). *Le sense de la mesure*. Bruxelles: Didier Hatier.

Schoenfeld, A. H. (1983). Beyond the purely cognitive: beliefs systems, social cognitions and metacognitions as driving forces in intellectual performance. *Cognitive science 7*(4), 329-363.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. En: A. D. Grows (Ed.) (1992). *Handbook of research on mathematics learning and teaching.* (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Skott, J. (1999). The multples motives of teacher activity and the roles of the teachers school mathematical images. In: O. Zaslavsky (Ed.) (1999). *Proceedings of the 23rd PME International Conference.* 4 (pp. 209-216).

Speranza, F. (1987). La geometria dalle cose alla logica. En: B. D'Amore (Ed.) (1987). *La matematica e la sua didattica.* Bologna: Pitagora. 105-114.

Stavy, R. & Tirosh, D. (2001). *Perché gli studenti fraintendono matematica e scienze?* Trento: Erickson.

Strehle, E., Whatley, A., Kurz, K. A., Hausfather, S. J. & Stroudsburg, E. (2001). Narratives of collaboration: inquiring into technology integration in teacher eduaction. *Journal of Technology and Teacher Education 10*(1), 27-47.

Thompson, A. G. (1992). Teachers' Beliefs and Conceptions: a Synthesis of the Research. En: D. Grouws (Ed.) (1992). *Handbook of Research on Mathematics Learning and Teaching.* (pp. 127-145). New York: Macmillan Publishing Company.

Tierney C., Boyd, C. & Davis, G. (1990). Prospective Primary Teachers's Conception of area. *XIV PME.* 2, 307-315.

Tirosh, D. & Graeber, A. (2003). Challenging and changing mathematics teaching classroom practice. En: A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & F. K. S. Leung (Eds.) *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 643-687). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Törner, G. (2002). Mathematical beliefs. A search of a common ground: some theoretical considerations on structuring beliefs, some research questions, and some phenomenological observations. En: G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Eds.) *Beliefs: A hidden variable on mathematics education?* (pp. 73-94). Dordrecht-Bostón-Londres: Kluwer Ac. P.

Vihn, B. et al. (1964). *L'épistemologie de l'espace.* París: PUF.

Vihn, B. & Lunzer, E. (1965). *Conservations spaciales.* París: PUF.

Este artículo se ha realizado con la colaboración de:

Gianfranco Arrigo, Lorella Campolucci, Giampiero Ceccherini, Erminia Dal Corso, Margherita Francini, Maura Iori, Ines Marazzani, Annarita Monaco, Fabrizio Monari, Paola Nannicini, George Santi, Silvia Sbaragli, Anna Traverso, Nadia Vecchi.

Los autores agradecen a los colaboradores de la investigación por la preciosa ayuda que han dado y por la enorme disponibilidad no sólo en la conducción de las pruebas con sus alumnos y colegas sino también sobre si mismos. Les agradecemos también por la colaboración dada al finalizar el trabajo, por las pacientes lecturas críticas y sugerencias. Agradecemos además a todos aquellos (colegas y estudiantes) que gentilmente aceptaron someterse a las pruebas; sus nombres, obviamente, aquí no aparecen.

Por último agradecemos a los árbitros anónimos por sus pertinentes y generosas sugerencias críticas.

Bruno D'Amore
Martha Isabel Fandiño Pinilla
RSDDM – NRD
Departamento de Matemática
Universidad de Bologna
Italia

Email: damore@dm.unibo.it

APÉNDICE

p	S	p	S	p	S
>	>	>	=	>	<
=	>	=	=	=	<
<	>	<	=	<	<